Differentialgeometrie I: Kurven und Flächen

Aufgabenblatt 5

(Raumkurven)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Bestimme alle Raumkurven deren Krümmung und Torsion beliebige Konstanten sind. Was passiert, wenn man bei fester Krümmung die Torsion gegen Unendlich gehen lässt?

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Frenet-Kurve (nicht unbedingt nach der Bogenlänge parametrisiert). Zeige, dass für die Krümmung κ und die Torsion τ ihres Frenet-Rahmens gilt:

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $\gamma\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\gamma(t) := \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. Bestimme

a) den Frenet-Rahmen und seine Krümmung und Torsion, sowie
b) den parallelen Rahmen und seine Krümmungen.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ (beide nirgends gleich Null). Die Kurve γ heißt *Bertrandsche Kurve*, falls es eine Kurve $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ gibt, die in allen Punkten mit demselben Parameter auch dieselbe Normalengerade wie γ hat. Zeige:

a) Es gibt eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{\gamma} = \gamma + \lambda N$.
b) Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann Bertrandsch, wenn $v, w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existieren, sodass $v\kappa + w\tau = 1$.