

# Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Ulrich Pinkall



Dies ist eine Mitschrift gleichnamiger Vorlesung gehalten von Ulrich Pinkall im Sommersemester 2005 an der TU-Berlin. Angefertigt wurde sie von Dmitri Naumov.

Diese Mitschrift enthält jede Menge Fehler. Wer welche findet wird herzlichst gebeten, diese an [diffgeo@naumov.de](mailto:diffgeo@naumov.de) zu senden. Vielen Dank.

# Inhaltsverzeichnis

1. Kurven	5
1.1. Kurven im $\mathbb{R}^2$	8
1.1.1. Berechnung der Krümmung bei nicht bogenlängenparametrisierten Kurven	11
1.1.2. Orientierungserhaltende euklidische Bewegungen in $\mathbb{R}^2$	12
1.2. Geschlossene Kurven	13
1.2.1. Tangentenumlaufzahl geschlossener Kurven	14
1.2.2. Deformation von Kurven und Reguläre Homotopie	16
1.3. Elastische Kurven	21
1.3.1. Elastische Kurven und Variation	21
1.3.2. Freie und freie elastische Kurven	25
1.4. Raumkurven	27
1.4.1. Angepaßte und parallele Rahmen	30
1.4.2. Frenet-Rahmen	33
1.5. Hauptsatz	35
1.6. Gegenüberstellung von parallelen und Frenet-Rahmen	38
1.7. Elastische Kurven im $\mathbb{R}^3$	41
1.7.1. Die Biegeenergie elastischer Raumkurven	42
2. Flächen in $\mathbb{R}^3$	45
2.1. Tangentialräume	46
2.2. 1. Fundamentalform	47
2.3. Weingartenoperator und die 2. Fundamentalform	49
2.4. Flächen konstanter Krümmung ( $K = 0$ oder $H = 0$ )	71
2.4.1. Flächen mit $K < 0$	71
A. Bezeichnungen	77
B. Hilfslemmata und -sätze	77

## Einleitung

In diesem Semester geht es um Kurven und Flächen:

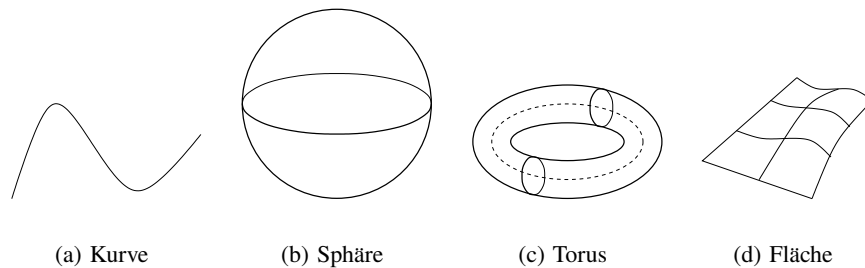


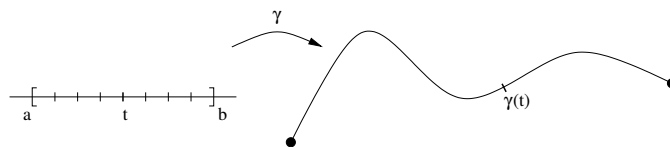
Abbildung 1: Kurven und Flächen

In der Differentialgeometrie geht es um die geometrischen Eigenschaften dieser, z.B. Krümmung.

### 1. Kurven

**Definition 1.1.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *parametrisierte Kurve*, wenn  $\gamma \in C^\infty$  ist und  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ .

**Bemerkung 1.2.** Andere Intervalle  $(a, b)$  oder  $(a, \infty)$  sind auch möglich.



Wenn man sich für die geometrischen Eigenschaften der Kurve interessiert, dann sind die Bilder ein Hilfsmittel...

Man könnte eine Kurve auch anders durchlaufen:  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $\phi(a) = c$ ,  $\phi(b) = d$ . Definiere dann  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\phi(t))$  mit  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.3.** Zwei parametrisierte Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen *orientiert äquivalent*, wenn es eine  $C^\infty$ -Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$

gibt mit  $\phi'(t) > 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ . Die Monotonie hier ist wichtig.

*Behauptung:* Es ist eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.*

- $\tilde{\gamma} \sim \gamma \Rightarrow \gamma \sim \tilde{\gamma}$  (nehme  $\phi^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$  als ...  $\phi$ .)
- $\gamma \sim \gamma$  (nehme  $\phi(t) = t$ ).
- $\gamma \sim \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} \sim \hat{\gamma} \Rightarrow \hat{\gamma} \sim \gamma$ .

□

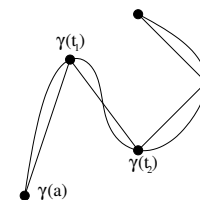
**Definition 1.4.** Eine *orientierte Kurve* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven.

Für die Berechnung der Länge einer Kurve braucht man eine Parametrisierung, dann muss man aber nachweisen, daß die Länge nicht von dieser abhängt.

**Definition 1.5.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisierte Kurve. Dann heißt  $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  die *Länge von  $\gamma$* .

Zu Sprechweise:

- $\gamma'(t)$  – Geschwindigkeitsvektor von  $\gamma$  zur Zeit  $t$ .
- $|\gamma'(t)|$  – Geschwindigkeit.



**Bemerkung 1.6.** Man kann die Länge auch über Längen von eingeschriebenen Polygonen definieren.

$$t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b, \quad \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|.$$

Mit immer feiner werdender Unterteilung bekommt man die Länge von  $\gamma$ .

**Satz 1.7.** Seien  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisierte Kurven,  $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ . Dann ist  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ .

*Beweis.*  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ ,  $\phi'(t) > 0$ .

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \gamma'(\phi(t))\phi'(t) & |\tilde{\gamma}'(t)| &= |\gamma'(\phi(t))|\phi'(t) \\ L(\tilde{\gamma}) &= \int_c^d |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_c^d |\gamma'(\phi(t))|\phi'(t) dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} |\gamma'(s)| ds = L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Folgerung: Länge einer orientierten Kurve ist wohldefiniert.

► **Beispiel 1.8.**

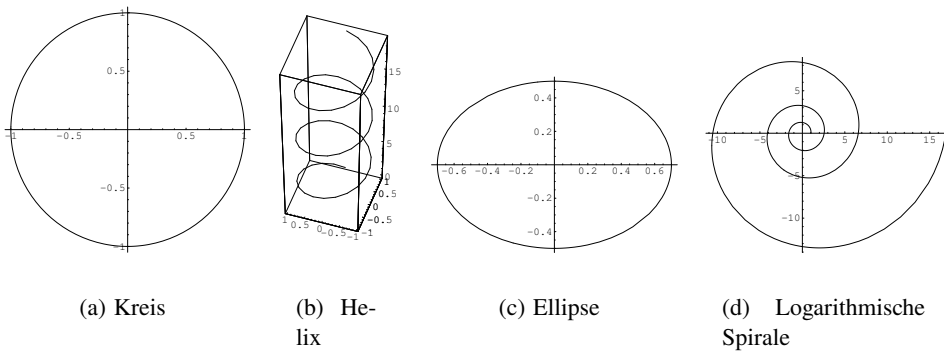


Abbildung 2: 2- und 3-dimensionale Kurven

1.  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = p + tv$ ,  $p, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ ,  $\gamma'(t) = v$  für alle  $t$ .

2.  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Abbildung (2(a)).

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |(-\sin(t), \cos(t))| dt = 2\pi.$$

3.  $\gamma : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), at)$ . Abbildung (2(b)).

$$L(\gamma) = \int_0^{6\pi} |(-\sin(t), \cos(t), a)| dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{1 + a^2} = 6\pi\sqrt{1 + a^2}.$$

4. Bei weitem nicht bei jeder Kurve lässt sich die Länge einfach bestimmen.

$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\alpha \cos(t), \beta \sin(t))$ . Abbildung (2(c)).

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \sin^2(t) + \beta^2 \cos^2(t)} dt - \text{elliptisches Integral.}$$

5.  $\gamma(t) = (\alpha \cos(t) \exp(\beta t), \alpha \sin(t) \exp(\beta t))$ . Logarithmische Spirale. Abbildung (2(d)).

**Definition 1.9.** Eine parametrisierte Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Parametrisierung durch die Bogenlänge*, wenn  $|\gamma'(s)| = 1$  für alle  $s \in [a, b]$ .

Die Länge solch einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve ist  $b - a$ , oder allgemeiner  $L(\gamma|_{[s_0, s_1]}) = s_1 - s_0$ .

**Satz 1.10.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisierte Kurve der Länge  $L$ . Dann gibt es genau eine zu  $\gamma$  äquivalent parametrisierte Kurve

$$\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad |\tilde{\gamma}'| = 1.$$

*Beweis.* Gesucht ist  $\phi : [0, L] \rightarrow [a, b]$  mit  $\phi(0) = a$ ,  $\phi(L) = b$ ,  $\phi'(s) > 0$  für alle  $s$ , und  $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$  für  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ .

$$1 = |\tilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(\phi(s))| \phi'(s), \quad \text{also} \quad \phi'(s) = \frac{1}{|\gamma'(\phi(s))|},$$

$$\lambda := \phi^{-1} \rightsquigarrow \lambda'(t) = \frac{1}{|\gamma'(\phi(\lambda(t)))|} = \frac{1}{\underbrace{|\gamma'(\phi(\lambda(t)))|}_t}.$$

Zusätzlich ist  $\lambda(a) = 0 \rightsquigarrow \lambda(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$ .

Also:  $\phi$  kann nur die Umkehrabbildung von  $t \mapsto \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$  sein.

Für die Eindeutigkeit braucht man den Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen. □

### 1.1. Kurven im $\mathbb{R}^2$

Zunächst definieren wir die Drehung um  $90^\circ$  im positiven Sinn.

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad J(x, y) = (-y, x), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt:

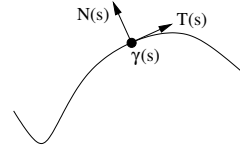
$$\langle x, Jx \rangle = 0, \quad |Jx| = |x|, \quad \det(x, Jx) = \langle x, x \rangle \geq 0.$$

Man kann also sagen (für  $x \neq 0$ ), daß  $x$  und  $Jx$  eine bezüglich der Determinante positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^2$  bilden.



Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|\gamma'| = 1$ ,

- *Einheitstangentenvektor* –  $T := \gamma'$ .  $T$  hat Länge 1.
- *Einheitsnormalenvektor* –  $N := JT$ .



**Bemerkung 1.11.**  $T$  und  $N$  bilden also eine ON-Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

Zuerst stellen wir fest, daß durch Ableiten von  $\langle T, T \rangle = 1$  folgt  $2\langle T, T' \rangle = \langle T', T \rangle + \langle T, T' \rangle = 0$ , d.h.  $T'$  ist senkrecht auf  $T$ , also parallel zu  $N$ . Ebenso folgt  $\langle N, N' \rangle = 0$ , d.h.  $N'$  ist senkrecht auf  $N$ , also parallel zu  $T$ .

Seien  $\alpha, \kappa : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir stellen die Ableitung des Tangentialvektors durch Linearkombination von  $T$  und  $N$  dar:

$$T'(s) = \alpha(s)T(s) + \kappa(s)N(s).$$

Daraus folgt  $0 = \langle T, T' \rangle = \alpha$  und dann  $T' = \kappa N$ .

Aus dem Ableiten von  $\langle T, N \rangle = 0$  folgt  $\langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = \underbrace{\langle \kappa N, N \rangle}_{\kappa} + \langle T, N' \rangle =$

0. Für Ableitung des Tangentialvektors und des Normalenvektors gilt:

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T. \quad (1)$$

Diese Darstellung für die Ableitung von Tangente und Normaler (Gleichungen (1)) nennt man die *Frenet-Gleichungen* für ebene Kurven.  $\kappa(s)$  heißt *Krümmung* von  $\gamma$  zum Parameterwert  $s$ .

Alternative zu der letzten Rechnung:

$$N' = (JT)' = JT' = \kappa JN = \kappa \underbrace{JJ}_{-I} T = -\kappa T.$$

18.04.

► **Beispiel 1.12.**

**Gerade:**  $\gamma(s) = p + sv$ ,  $|v| = 1$ ,  $T(s) = \gamma'(s) = v$  für alle  $s$ . Da  $T' = 0$  ist, ist auch die Krümmung gleich Null.

**Kreis:**  $\gamma : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(s) = m + r(\cos \frac{s+s_0}{r}, \sin \frac{s+s_0}{r})$ .

$$T(s) = \gamma'(s) = (-\sin \frac{s+s_0}{r}, \cos \frac{s+s_0}{r}),$$

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-\sin \frac{s+s_0}{r}, \cos \frac{s+s_0}{r}) = (-\cos \frac{s+s_0}{r}, -\sin \frac{s+s_0}{r}).$$

$$T'(s) = \frac{1}{r}(-\cos \frac{s+s_0}{r}, -\sin \frac{s+s_0}{r}) = \frac{1}{r}N(s) \rightsquigarrow \kappa = \frac{1}{r}.$$

**Satz 1.13.** Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|\gamma'| = 1$ . Dann gibt es zu jedem  $s_0 \in [0, L]$  mit  $\kappa(s_0) \neq 0$  genau einen nach der Bogenlänge parametrisierten Kreis:  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(s_0)$ ,  $\tilde{\gamma}'(0) = T(s_0)$  mit der Krümmung  $\tilde{\kappa} = \kappa(s_0)$ .

*Beweis.*

- Eindeutigkeit: Aufgabe.
- Existenz: Wir suchen geeignete Parameter für den Mittelpunkt  $m$  und den Radius  $r$ .

Definiere  $\tilde{\gamma}(s) = m + r(-\cos(\frac{s}{r})N(s_0) + \sin(\frac{s}{r})T(s_0))$ .

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(0) &= T(s_0) = \tilde{T}(0) \quad \text{und} \quad \rightsquigarrow N(s_0) = \tilde{N}(0), \\ \tilde{\gamma}''(0) &= \tilde{T}'(0) = \frac{1}{r} \cos(0) \underbrace{N(s_0)}_{\tilde{N}(0)} \rightsquigarrow \tilde{\kappa} = \frac{1}{r},\end{aligned}$$

Das bestimmt  $r$ .

$$\gamma(s_0) = \tilde{\gamma}(0) = m - rN(s_0) \rightsquigarrow m = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0).$$

□

$\tilde{\gamma}$  beschreibt den *Schmiegekreis* von  $\gamma$  zum Parameter  $s_0$ .

Um Abstand des Schmiegekreismittelpunktes zur Kurve zu bestimmen, definiere

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(s) = |\gamma(s) - m|^2 - r^2.$$

Dann gilt mit  $r = \frac{1}{\kappa(s_0)}$ :  $f'(s_0) = 0$  und

$$\begin{aligned}f' &= 2\langle T, \gamma - m \rangle, \quad f'(s_0) = 2\langle T(s_0), \underbrace{\gamma(s_0) - m}_{-\frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0)} \rangle = 0 \\ f''(s_0) &= 2\langle \kappa(s_0)N(s_0), \underbrace{\gamma(s_0) - m}_{-\frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0)} \rangle + 2\langle T(s_0), T(s_0) \rangle = 0\end{aligned}$$

1.1.1. Berechnung der Krümmung bei nicht bogenlängenparametrisierten Kurven

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Bezeichne  $v := |\gamma'|$ . Dann ist:

$$T = \frac{\gamma'}{v} \Rightarrow \gamma' = vT, \quad T' =: v\kappa N, \quad N' = -v\kappa T.$$

Durch den Parameterwechsel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi, \quad \phi : [0, L] \rightarrow [a, b] \\ 1 = |\tilde{\gamma}'| &= \underbrace{|\gamma' \circ \phi|}_{v \circ \phi} |\phi'|, \quad \phi' = \frac{1}{v \circ \phi} \\ \tilde{T} = \tilde{\gamma}' &= \gamma' \circ \phi \cdot \phi' = \frac{1}{v \circ \phi} \gamma' \circ \phi = T \circ \phi \rightsquigarrow \tilde{N} = N \circ \phi. \end{aligned}$$

Aus  $\tilde{T}'(s) = \tilde{\kappa}(s)\tilde{N}(s)$  und

$$\begin{aligned} \tilde{T}'(s) &= T'(\phi(s))\phi'(s) \\ &= \frac{1}{v(\phi(s))} v(\phi(s))\kappa(\phi(s))N(\phi(s)) \\ &= \kappa(\phi(s))\tilde{N}(s) \end{aligned}$$

folgt  $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$ .

Alternativ: Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Bezeichne  $v := |\gamma'|$ . Definiere dann

$$T := \frac{\gamma'}{v} \Rightarrow \gamma' = vT \quad \text{und analog} \quad N := JT.$$

Parameterwechsel zum Übergang zur Parametrisierung nach Bogenlänge führt zu

$$\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi, \quad \phi : [0, L] \rightarrow [a, b]$$

Die obige Definition wäre *schön*, wenn man damit irgendwie die *gleichen* Tangentenvektoren erhalten würde wie über  $\tilde{\gamma}$ , d.h.

$$\tilde{T}(s) = T(\phi(s))$$

Nachrechnen liefert aber sofort:

$$\begin{aligned} 1 = |\tilde{\gamma}'| \Rightarrow 1 &= |\gamma' \circ \phi| \underbrace{|\phi'|}_{\phi'} = (v \circ \phi) \cdot \phi', \quad \text{also} \quad \phi' = \frac{1}{v \circ \phi}, \quad \text{und daher:} \\ \tilde{T} = \tilde{\gamma}' &= \gamma' \circ \phi \cdot \phi' = (vT) \circ \phi \cdot \phi' = (v \circ \phi) \cdot (T \circ \phi) \cdot \phi' \\ &= \underbrace{(v \circ \phi) \cdot \phi'}_1 \cdot (T \circ \phi) = T \circ \phi \end{aligned}$$

Und dann natürlich auch für die Normale:

$$\tilde{N} = J\tilde{T} = J(T \circ \phi) = N \circ \phi$$

Damit ist gesichert, daß  $T'$  wieder ein Vielfaches von  $N$  ist, und wenn man  $\kappa$  durch  $T' = v\kappa N$  definiert, ergibt sich gerade:

$$\begin{aligned}\tilde{T}'(s) &= T'(\phi(s))\phi'(s) = \phi'(s) \cdot T'(\phi(s)) \\ &= \frac{1}{v(\phi(s))} \cdot v(\phi(s))\kappa(\phi(s))N(\phi(s)) \\ &= \kappa(\phi(s))\tilde{N}(s),\end{aligned}$$

das heißt  $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$ .

$\kappa(\phi(s))$  ist wirklich die Krümmung an der ( $\phi(s)$  entsprechenden) Stelle  $s$  der Bogenlängenparametrisierten Kurve  $\tilde{\gamma}$ .

Es geht aber einfacher. (Beachte, daß  $\gamma'$  und  $\gamma'' \in \mathbb{R}^2$  liegen.):

$$\begin{aligned}\det(\gamma', \gamma'') &= \det(vT, v'T + v^2\kappa N) = v^3\kappa \det(T, N) = v^3\kappa, \\ \kappa &= \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3}\end{aligned}$$

► **Beispiel 1.14.** Eine Parabel in  $\mathbb{R}^2$  hat im Scheitelpunkt die Krümmung 2 (Abbildung 3).

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t, t^2), \quad \gamma'(1, 2t), \quad \gamma''(0, 2) \\ \begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} &= 2, \quad |\gamma'| = \sqrt{1 + 4t^2} \\ \kappa &= \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}, \quad \kappa(0) = 2.\end{aligned}$$

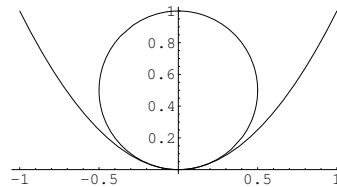


Abbildung 3: Schmiegekreis am Scheitelpunkt einer Parabel

### 1.1.2. Orientierungserhaltende euklidische Bewegungen in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}x &\mapsto f(x) = Ax + b, \quad b \in \mathbb{R}^2, \\ A &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \cos \phi I + \sin \phi J\end{aligned}$$

Sei  $\gamma$  bogenlängenparametrisierte Kurve mit Krümmung  $\kappa$ .

$$\tilde{\gamma} = f \circ \gamma, \quad \tilde{\gamma}' = (A\gamma + b)' = A\gamma' \rightsquigarrow |\tilde{\gamma}'| = |\gamma'| = 1.$$

$\tilde{\gamma}$  ist also die durch  $f$  verschobene Kurve.

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \tilde{\gamma}' = AT = \cos \phi T + \sin \phi JT, \\ \tilde{N} &= J\tilde{T} = \cos \phi N - \sin \phi T.\end{aligned}$$

Aus

$$\tilde{T}' = \cos \phi \cdot T' + \sin \phi \cdot JT' = \cos \phi \cdot \kappa N - \sin \phi \cdot \kappa T$$

und

$$\tilde{T}' = \tilde{\kappa} \tilde{N} = \tilde{\kappa}(\cos \phi N - \sin \phi T)$$

folgt  $\tilde{\kappa} = \kappa$ .

**Bemerkung 1.15.** Orientierungserhaltung ist notwendig:

$f(x, y) = (x, -y)$  – Spiegelung,

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t)), & \kappa &\equiv 1, \\ \tilde{\gamma}(t) &= (\cos(t), -\sin(t)), & \tilde{\kappa} &\equiv -1.\end{aligned}$$

$\kappa \rightarrow -\kappa$  bei Spiegelung. [BILD]

**Definition 1.16.**  $\kappa(s_0) = 0 \Leftrightarrow s_0$  Wendepunkt von  $\gamma$ .

Tangente ist der „Schmiegekreis“ in einem Wendepunkt.

## 1.2. Geschlossene Kurven

**Definition 1.17.** Eine geschlossene parametrisierte Kurve in  $\mathbb{R}^n$  ist ein Paar  $(\gamma, \tau)$  wobei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisierte Kurve ist und  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \neq 0$ , so daß  $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

► **Beispiel 1.18.**  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $\tau = 4\pi$  – doppelt durchlaufener Einheitskreis.

Man mache sich klar, daß ein doppelt durchlaufener Einheitskreis qualitativ etwas anderes ist als ein einmal durchlaufener. Durch geringe Deformationen können bei ersterem Schlaufen entstehen, bei zweitem nicht.

**Definition 1.19.** Zwei geschlossene Kurven  $(\gamma, \tau)$  und  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\tau})$  heißen (*orientiert*) *äquivalent*, wenn es ein  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt,  $\phi'(t) > 0$  für alle  $t$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ ,  $\phi(t + \tilde{\tau}) = \phi(t) + \tau$ . [BILD]

► **Beispiel 1.20 (Lissajou Kurve).**  $\gamma(t) = (\sin(t), \frac{1}{2} \sin(2t))$ ,  $\tau = 2\pi$ . Abbildung (4).

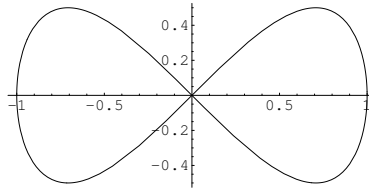


Abbildung 4: Lissajou Kurve

### 1.2.1. Tangentenumlaufzahl geschlossener Kurven

**Satz 1.21.** Sei  $(\gamma, \tau)$  – geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in  $\mathbb{R}^2$ . Dann gibt es  $n \in \mathbb{Z}$ , so daß

$$\int_0^\tau \kappa(s) ds = 2\pi \cdot n.$$

*Beweis.* Sei  $T(0) = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$  mit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha(s) := \alpha_0 + \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma$ .

Behauptung:  $T(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$  für alle  $s$ . Man betrachte das DGL-System für die Tangente:

$$T'(s) = \kappa(s)JT(s),$$

und weise nach, daß obiger Ansatz dieses System erfüllt:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))' &= \alpha'(s)(-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) \\ &= \kappa(s)(-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) \\ &= \kappa(s)J(\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)). \end{aligned}$$

Weil das AWP

$$T'(s) = \kappa(s)JT(s), \quad T(0) = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$$

eine eindeutige Lösung hat (Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Dgl.), ist  $T$  wirklich von obiger Form und die Behauptung zu  $T$  ist bewiesen.

Wegen  $T(\tau) = T(0)$  (Eigenschaft einer geschlossenen Kurve!) und

$$\begin{aligned} T(\tau) &= (\cos \alpha(\tau), \sin \alpha(\tau)) \\ T(0) &= (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0) \end{aligned}$$

folgt, daß es ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha(\tau) = \alpha_0 + 2\pi n$  gibt. □

**Definition 1.22.** Das  $n$  aus dem Satz (1.21) heißt *Tangentenumlaufzahl* von  $\gamma$ .

22.04.

**Satz 1.23.** (*Fundamentalsatz der Theorie von ebenen Kurven*)

Sei  $\kappa : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Krümmung  $\kappa$ . Ist  $\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  weitere Kurve mit Krümmung  $\kappa$ , so gibt es  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ , so daß

$$\tilde{\gamma} = (\cos \phi I + \sin \phi J)\gamma + b.$$

Andere Formulierung: Zu jeder Krümmungsfunktion  $\kappa$  gibt es eine Kurve  $\gamma$ , die durch  $\kappa$  bis auf orientierungserhaltende euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt ist.

*Beweis.*

- Existenz: Definiere  $T : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  über

$$T(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)), \quad \text{wobei} \quad \alpha(s) = \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma$$

$$\gamma(s) = \int_0^s T(\sigma) d\sigma$$

Dann:

$$\gamma' = T, \quad \text{also} \quad |\gamma'| = 1, \quad \text{sowie} \quad \alpha' = \kappa$$

d.h.  $\gamma$  ist nach der Bogenlänge parametrisiert und Ableiten ergibt:

$$T'(s) = \alpha'(s)(-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) = \kappa(s)JT(s).$$

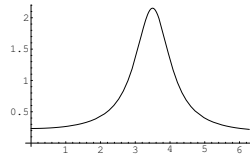
Also ist die Krümmung von  $\gamma$  gleich  $\kappa$ .

Merke: Diese Konstruktion bewirkt, daß  $\gamma(0) = 0$  und  $T(0) = (1, 0)$ , siehe Abbildung 5(b).

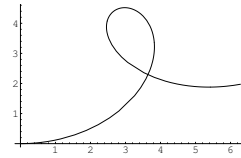
- Eindeutigkeit bis auf orientierungserhaltende euklidische Bewegung: Sei  $\tilde{\gamma}$  weitere Kurve mit Krümmung  $\kappa$ .

$$\tilde{\gamma}'(0) = (\cos \phi, \sin \phi) \text{ — definiert Winkel } \phi \text{ zwischen } T(0) \text{ und } \tilde{T}(0),$$

$$\tilde{\gamma}(0) =: b \text{ — definiert die Verschiebung von } \gamma \text{ zu } \tilde{\gamma}.$$



(a) Krümmung



(b) Kurve

Abbildung 5: Krümmung und dazugehörige Kurve

Sei also  $\hat{\gamma} := A\gamma + b$ , wobei  $A := \cos \phi I + \sin \phi J$  die Drehung um  $\phi$  ist.

Wir zeigen nun, daß  $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$ . Es ist:  $\hat{\gamma}(0) = b$ . Außerdem gilt mit Hilfe von Additions-Theoremen:

$$\hat{\gamma}'(s) = A\gamma'(s) = A(\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)) = (\cos(\alpha(s) + \phi), \sin(\alpha(s) + \phi)).$$

Definiere  $\hat{\alpha} := \alpha + \phi$ . Dann ist  $\hat{\gamma}' = (\cos \hat{\alpha}, \sin \hat{\alpha})$  und wegen  $\hat{\kappa} = \hat{\alpha}' = \alpha' = \kappa$  hat  $\hat{\gamma}$  Krümmung  $\kappa$ .

Analog induziert auch  $\tilde{T} = \tilde{\gamma}' = (\cos \tilde{\alpha}, \sin \tilde{\alpha})$  eine Funktion  $\tilde{\alpha}$ . Aus dem letzten Ergebnis und der Voraussetzung  $\tilde{\kappa}(= \tilde{\alpha}') = \kappa$  folgt  $(\tilde{\alpha} - \hat{\alpha})' = 0$ .

Außerdem ist nach Wahl von  $\phi$  und nach Definition von  $\hat{\gamma}$

$$(\cos \tilde{\alpha}(0), \sin \tilde{\alpha}(0)) = (\cos \phi, \sin \phi) = (\cos \hat{\alpha}(0), \sin \hat{\alpha}(0)).$$

Insgesamt folgt daher

$$\tilde{\alpha}(s) = \hat{\alpha}(s) + 2\pi n = \phi + 2\pi n$$

für ein geeignetes  $n \in \mathbb{Z}$ . (Die Ableitung der Differenz ist 0 und daher ist die Differenz konstant, und zwar gleich der zum Zeitpunkt  $s = 0$ .)

Daher gilt:

$$\tilde{T}(s) = \hat{T}(s) \quad \text{für alle } s.$$

Damit ist aber  $(\tilde{\gamma} - \hat{\gamma})' = 0$ . Mit  $\tilde{\gamma}(0) - \hat{\gamma}(0) = b - b = 0$  folgt  $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$ .

□

„Krümmung“  $\kappa$  ist eine vollständige Invariante für Kurven unter euklidischen Bewegungen.

### 1.2.2. Deformation von Kurven und Reguläre Homotopie

Wir hatten für geschlossene Kurven  $(\gamma, \tau)$  die Tangentenumlaufzahl  $n \in \mathbb{Z}$  definiert. [BILDer]



Beschreibung einer regulären Homotopie. Wir wollen Kurven stetig deformieren. (Auch der Tangentenvektor soll stetig deformiert werden). [BILD]

**Definition 1.24.** Zwei geschlossene parametrisierte Kurven  $(\gamma, \tau)$  und  $(\tilde{\gamma}, \tau)$  in  $\mathbb{R}^n$  heißen *regulär homotop*, wenn es eine Funktion  $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, so daß gilt:

1. die Kurve  $\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_t(s) := f(s, t)$  ist eine  $\tau$ -periodische parametrisierte Kurve für alle  $t \in [0, 1]$ ,
2.  $f$  ist stetig und ebenso  $(s, t) \mapsto \gamma'_t(s)$ , und
3.  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}$ .

*Aufgabe:* Zeige, daß reguläre Homotopie eine Äquivalenzrelation ist.

Man möchte wissen, wieviele Äquivalenzklassen es gibt und wie sie sich charakterisieren lassen:

**Satz 1.25.** (Whitney-Graustein, 1937)

Zwei geschlossene Kurven in  $\mathbb{R}^2$  sind genau dann regulär homotop, wenn sie dieselbe Tangentenumlaufzahl haben.

► **Beispiel 1.26.** Man kann einen Kreis *nicht* in eine „Acht“ überführen.

Auch einen linksdurchlaufenen Kreis kann man nicht in einen rechtsdurchlaufenen Kreis umformen.

Einen Kreis in der Ebene kann man auch nicht umstülpen, das heißt, die Innenseite nach Außen kehren, weil das wieder auf ein Ändern des Durchlaufsinns hinauslaufen würde. (Jedoch kann man die 2-Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  von innen nach außen stülpen.)

*Beweis.*

„ $\implies$ “  $\exists$  reguläre Homotopie  $\implies$  dieselbe Tangentenumlaufzahl.

Der Tangentenvektor der Variation sieht so aus:

$$T_t(s) := \gamma'_t(s) = v(s, t)(\cos \alpha(s, t), \sin \alpha(s, t)).$$

$\alpha : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig wählbar, da  $T$  stetig ist.  $\tau$  war die Periode der geschlossenen Kurve. Dann folgt aus  $T_t(s + \tau) = T_t(s)$  für  $\alpha$ :

$$\alpha(s + \tau, t) = \alpha(s, t) + 2\pi n(s, t)$$

mit  $n(s, t) \in \mathbb{Z}$ .  $n(s, t) = \frac{1}{2\pi}(\alpha(s + \tau, t) - \alpha(s, t))$  ist stetig, da die rechte Seite stetig in  $s$  und  $t$  ist. Dann ist aber  $n_0 = n(s, t) \in \mathbb{Z}$  für alle  $s, t$ .

„ $\Leftarrow$ “ Gleiche Tangentenumlaufzahl  $\Rightarrow \exists$  reguläre Homotopie.

1. O.B.d.A. haben beide Kurven gleiche Längen, weil man Homotopien zwischen Kurven und ihren „Stauchungen“ bzw. „Streckungen“ finden kann. Sei  $L = \int_0^\tau |\gamma'|$  die Länge von  $\gamma$  und  $\tilde{L} = \int_0^\tau |\tilde{\gamma}'|$  die Länge von  $\tilde{\gamma}$ . Wir definieren  $\gamma_t$  durch

$$\gamma_t = \left( \frac{\tilde{L}}{L}t + (1-t) \right) \gamma.$$

Dann ist  $\gamma_0 = \gamma$  und  $\gamma_1 = \frac{\tilde{L}}{L}\gamma =: \hat{\gamma}$ . Also ist  $\hat{\gamma}$  regulär homotop zu  $\gamma$ , und die Länge von  $\hat{\gamma}$  ist gleich der Länge von  $\tilde{\gamma}$ .

2. O.B.d.A. liegen beide Kurven in Bogenlängenparametrisierung vor, weil man Homotopien zwischen Kurven und ihren Bogenlängenparametrisierungen finden kann. Sei also  $\hat{\gamma}$  mit der Periode  $L$  die Bogenlängenparametrisierung von  $\gamma$  mit der Periode  $\tau$ . Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so daß,  $\gamma = \hat{\gamma} \circ \phi$  und  $|\hat{\gamma}'| = 1$ . Dann folgt aus  $\hat{\gamma}(s + L) = \hat{\gamma}(s)$  die Gleichung  $\phi(t + \tau) = \phi(t) + L$ . Definiere die Homotopie durch

$$\gamma_t(s) = \hat{\gamma}(ts + (1-t)\phi(s)).$$

Damit ist  $\gamma_0 = \gamma$  und  $\gamma_1 = \hat{\gamma}$ .

Für alle  $t$  ist  $\gamma_t$  von der Form  $\hat{\gamma} \circ \psi_t$ , so daß alle  $\gamma_t$  orientiert äquivalent zu  $\hat{\gamma}$  und demnach auch zu  $\gamma$  sind (man weise nach, daß alle  $\psi$  die notwendigen Bedingungen erfüllen), und wir deshalb die im vorigen Schritt angepaßte Länge nicht mehr verändern.

Um sicherzustellen, daß  $\gamma_t$  eine reguläre Homotopie ist, bleibt zu prüfen, daß:

$$0 < \frac{d}{ds}(ts + (1-t)\phi(s)) = \underbrace{t}_{\geq 0} + \underbrace{(1-t)\phi'}_{\geq 0} > 0.$$

Die beiden Summanden werden nie gleichzeitig 0. [BILD]

3. O.B.d.A. starten beide Kurven im Nullpunkt, weil man Kurven über eine reguläre Homotopie in den Nullpunkt verschieben kann.

$$\gamma_t = \gamma - t\gamma(0), \quad \gamma_0 = \gamma, \quad \text{mit } \hat{\gamma} := \gamma_1 \text{ ist } \hat{\gamma}(0) = 0$$

Man weise wieder nach, daß die in den vorigen Punkten sichergestellten Eigenschaften erhalten bleiben.

4. O.B.d.A. sind die Tangentialvektoren für  $s = 0$  gegeben durch  $(1, 0)$ , weil man wieder eine reguläre Homotopie finden kann, die eine Kurve entsprechend dreht, also

$$\gamma'(0) = (1, 0) = \tilde{\gamma}'(0).$$

Finden dieser Homotopie und Nachweis der Verträglichkeit mit den oben hergestellten Eigenschaften: Aufgabe.

Fortsetzung des Beweises auf der nächsten Seite.

□

25.04.

**Satz 1.27.** Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|\gamma'| = 1$ . Dann gilt  $|\gamma(L) - \gamma(0)| \leq L$ , und die Gleichheit nur für  $\gamma' = \text{const}$ , also für eine Gerade.

Die Verbindung zwischen den Endpunkten einer gekrümmten Kurve ist kleiner, als deren Länge.

[BILD]

*Beweis.* Sei  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  mit  $\gamma(0) = 0$  und  $\gamma(L) = (a, 0)$ ,  $a \geq 0$ . (o.B.d.A. möglich durch Übergang zu  $\tilde{\gamma} = A\gamma + b$ .) Dann folgt aus der Betrachtung von

$$\gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) = T(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)),$$

daß  $x'(s) = \cos \alpha(s)$ . Damit ist wegen der festgelegten Punkte  $\gamma(0)$  und  $\gamma(L)$ :

$$a = x(L) = \underbrace{x(0)}_{=0} + \int_0^L \cos \alpha(s) ds$$

mit der Konsequenz:

$$a = |a| \leq \int_0^L |\cos \alpha(s)| ds \leq L,$$

und die Gleichheit nur für  $|\cos \alpha(s)| = 1$  für alle  $s$ . In diesem Fall: Weil  $\alpha$  stetig ist folgt  $\alpha(s) = \pi n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$  und alle  $s$ , muß  $n$  gerade sein, da sonst  $\cos \alpha(s) = -1$  im Widerspruch zu  $\int_0^L \cos \alpha(s) = a > 0$ .

o.B.d.A.  $\alpha(s) = 0$  für alle  $s$ . Das führt zu  $T(s) = (1, 0)$  für alle  $s$  und  $\gamma(s) = (s, 0)$  ist eine Gerade. □

*Beweis. (Fortsetzung des Beweises des Satzes (1.25) von Seite 19).*

Wir hatten das Problem, eine Homotopie zwischen zwei Kurven  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  mit gleicher Tangentenumlaufzahl zu finden, bereits zurückgeführt auf das Problem, eine Homotopie zu finden, wenn  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  folgendes erfüllen:  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  sind nach der Bogenlänge parametrisiert und haben dieselbe Länge, beide fangen im Ursprung an und haben den Tangentenvektor an der Stelle  $s = 0$  in Richtung  $(1, 0)$ .

$$\left. \begin{aligned} \alpha(s+L) &= \alpha(s) + 2\pi n \\ \tilde{\alpha}(s+L) &= \tilde{\alpha}(s) + 2\pi n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} n - \text{Tangentenumlaufzahl, gemeinsam} \\ \text{nach Voraussetzungen des Satzes} \end{array}$$

o.B.d.A.  $\alpha(0) = 0 = \tilde{\alpha}(0)$ . Suche stetigen Übergang von  $\gamma$  nach  $\tilde{\gamma}$ . Idee: Interpoliere zwischen  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  linear und integriere den dadurch gelieferten Tangentenvektor.

[BILD]

Ansatz: Aus  $\alpha_t(s) := (1-t)\alpha(s) + t\tilde{\alpha}(s)$  folgt  $\alpha_0 = \alpha$  und  $\alpha_1 = \tilde{\alpha}$ .

$$\hat{\gamma}_t(s) = \int_0^s (\cos \alpha_t(\sigma), \sin \alpha_t(\sigma)) d\sigma.$$

Problem:  $\alpha_t$  erfüllt zwar auch  $\alpha_t(s+L) = \alpha_t(s) + 2\pi n$ , aber  $\hat{\gamma}_t$  ist nicht notwendigerweise geschlossen.  $\hat{\gamma}_t(L) = \int_0^L (\cos \alpha_t(\sigma), \sin \alpha_t(\sigma)) d\sigma$  nicht unbedingt  $= \hat{\gamma}_t(0) = 0$ . [BILD]

Idee: Man ziehe den sich für  $\hat{\gamma}_t$  ergebenden Fehlervektor  $\hat{\gamma}_t(L) - \underbrace{\hat{\gamma}_t(0)}_{=0} = \hat{\gamma}_t(L)$  proportional zum Voranschreiten der des Kurvenparameters von  $\hat{\gamma}_t$  ab:

$$\gamma_t(s) = \hat{\gamma}_t(s) - \frac{s}{L} \hat{\gamma}_t(L).$$

Dann ist  $\gamma_t$  für alle  $t$  geschlossen, und mit

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_t(s+L) &= \hat{\gamma}_t(s) + \int_s^{s+L} (\cos \alpha_t(\sigma), \sin \alpha_t(\sigma)) d\sigma \\ &= \hat{\gamma}_t(s) + \int_0^L (\cos \alpha_t(s+\sigma), \sin \alpha_t(s+\sigma)) d\sigma \\ &= \hat{\gamma}_t(s) + \hat{\gamma}_t(L) \end{aligned} \tag{2}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_t(s+L) &= \hat{\gamma}_t(s+L) - \frac{s+L}{L} \hat{\gamma}_t(L) \\ &\stackrel{(2)}{=} \hat{\gamma}_t(s) + \hat{\gamma}_t(L) - \frac{s+L}{L} \hat{\gamma}_t(L) \\ &= \hat{\gamma}_t(s) - \frac{s}{L} \hat{\gamma}_t(L) = \gamma_t(s) \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, daß es sich bei  $\gamma_t$  um eine reguläre Homotopie handelt, ist noch zu beweisen, daß  $\gamma'(s) \neq 0$  für alle  $s$ .

$$\gamma'_t(s) = \underbrace{(\cos \alpha_t(s), \sin \alpha_t(s))}_{|\cdot|=1} - \underbrace{\frac{1}{L} \hat{\gamma}_t(L)}_{|\cdot| = \frac{|\hat{\gamma}_t(L) - \hat{\gamma}_t(0)|}{L} \leq 1},$$

und die Gleichheit in der zweiten Abschätzung gilt nur, falls  $\hat{\gamma}_t$  eine Gerade ist (nach dem Satz (1.27)).

Auszuschließen ist also, daß  $\alpha_t(s) = \text{const} = 0$  für alle  $s$  und für irgend ein  $t \in [0, 1]$  ist. Das kann vorkommen, wenn  $\tilde{\alpha}$  proportional zu  $\alpha$  ist, genauer, wenn für alle  $s$   $0 = (1-t)\alpha(s) + t\tilde{\alpha}(s)$ , was äquivalent zu  $\tilde{\alpha}(s) = \frac{t-1}{t}\alpha(s)$  ist, gilt.

$$\alpha_{\frac{1}{2}}(s) = 0.$$

Es genügt also völlig,  $\tilde{\alpha}$  am Anfang durch eine reguläre Homotopie geringfügig an einer Stelle so zu verändern, daß die Winkelfunktionen in den Tangentenbeschreibungen nicht mehr proportional zueinander sind.  $\square$

29.04.

### 1.3. Elastische Kurven

**Definition 1.28.** Die *Biegeenergie* von  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|\gamma'| = 1$  ist definiert durch:

$$E(\gamma) = \int_0^L \kappa^2.$$

Es kann hilfreich sein, die Biegeenergie, auch berechnen zu können, wenn man nur eine beliebige Parametrisierung  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , d.h. eine Parametrisierung nicht unbedingt nach Bogenlänge, vorzuliegen hat.

Sei wieder  $\phi : [0, L] \rightarrow [a, b]$  die Umparametrisierung, die  $\gamma$  in  $\tilde{\gamma}$  überführt, und  $v$  die Geschwindigkeit der parametrisierten Kurve  $\tilde{\gamma}$ . Wir erinnern uns, daß  $(\phi^{-1})' = \frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}}$  und daß (siehe Abschnitt 1.1.1 auf Seite 11)  $\phi' = \frac{1}{v \circ \phi}$ , also  $(\phi^{-1})' = v$ . Die Substitutionsregel liefert dann:

$$E(\gamma) = \int_0^L \kappa^2(s) ds = \int_{\phi(0)}^{\phi(L)} \kappa^2(\phi(t)) (\phi^{-1})'(t) dt = \int_a^b \tilde{\kappa}^2(t) v(t) dt.$$

#### 1.3.1. Elastische Kurven und Variation

**Definition 1.29.**  $\gamma_t : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  heißt *Variation* von  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , falls  $\gamma_0 = \gamma$  und die Abbildung  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(t, s) \mapsto \gamma_t(s)$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist.

[BILD]

Eine solche *Variation* hat einen kompakten Träger (im Inneren von  $[0, L]$ ), falls es ein  $\delta > 0$  gibt mit  $\gamma_t(s) = \gamma(s)$  für alle  $s \in [0, \delta] \cup [L - \delta, L]$  und alle  $t$ .

[BILD]

$\gamma$  heißt *freie elastische Kurve*, wenn  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} E(\gamma_t) = 0$  für alle Variationen mit kompaktem Träger von  $\gamma$ . (Siehe Definition 1.32 auf Seite 25.)

Vergleiche: Ist  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so ist  $x \in \mathbb{R}^n$  ein kritischer Punkt für ein Extremum von  $E$ , wenn  $E'(x) = 0$  ( $\text{grad } E(x) = 0$ ). Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} E(\eta(t)) = 0 \quad \text{für alle Kurven } \eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \eta(0) = x.$$

Im weiteren wird es nötig sein, gewisse Funktionenklassen zur Verfügung zu haben. Siehe im Anhang die Definitionen von  $C^\infty[a, b]$  und  $C_0^\infty(a, b)$ .

Da der kompakte Träger in dem offenen Intervall liegen muß, heißt das, daß die Funktion ein Stück vom Rand weg 0 sein muß:

$$f \in C_0^\infty(a, b) \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \quad \text{mit } f(x) = 0 \text{ für } x \in [a, a + \delta) \cup (b - \delta, b].$$

$C^\infty[a, b]$  mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g$  ist ein euklidischer Vektorraum, also ein reeller Prähilbertraum.

**Lemma 1.30 (Fundamentallemma der Variationsrechnung).** Sei  $f \in C^\infty[a, b]$  mit  $\langle f, g \rangle_{L^2} \equiv 0$  für alle  $g \in C_0^\infty(a, b)$ . Dann ist  $f \equiv 0$ . Kurz:  $C_0^\infty(a, b)^\perp = \{0\}$ .

► **Beispiel 1.31.**

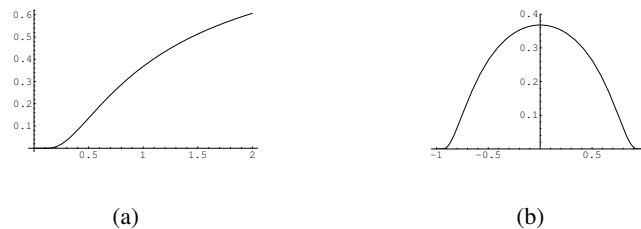


Abbildung 6: Beispiel von  $C_0^\infty$ -Kurven

- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$  — Abbildung (6(a)).
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$  — Abbildung (6(b)).

Durch Verschieben und Strecken beziehungsweise Stauchen von Funktionen aus Beispiel (1.31) sieht man sofort ein: Für jedes Intervall  $(a, b)$  gibt es  $f \in C_0^\infty(a, b)$ ,  $f(x) \geq 0$  für alle  $x$ , aber  $f \not\equiv 0$ .

*Beweis.* Sei  $f \in C_0^\infty[a, b]$ , so daß  $f \perp g$  für alle  $g \in C_0^\infty(a, b)$ .

Gäbe es ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) \neq 0$ , so gäbe es ein  $\delta > 0$  mit  $f(y) > 0$  (oder  $f(y) < 0$ ) für alle  $y \in (-x - \delta, x + \delta)$ .

Wähle jetzt  $g \in C^\infty[a, b]$  mit  $\text{supp } g \subset (x - \delta, x + \delta)$ ,  $g \geq 0$  und  $g \not\equiv 0$ . [BILD]

Dann ist  $fg \geq 0$  (oder  $fg \leq 0$ ),  $fg \not\equiv 0$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg \neq 0 \rightsquigarrow$  Widerspruch.  $\square$

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|\dot{\gamma}| = 1$ . Betrachte Variation  $\gamma_t$  von  $\gamma$  mit kompaktem Träger, die o.B.d.A regulär ist für alle  $t$ . (Eine Variation ist  $C^\infty$  und  $\gamma = \gamma_0$  ist regulär, also ist  $\gamma_t$  regulär für kleine  $t$ .)

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t, s) = \gamma_t(s).$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, s) = \dot{\gamma}_t(s) = v(t, s) \cdot T(t, s) = v(t, s) \cdot \frac{\dot{\gamma}_t(s)}{|\dot{\gamma}_t(s)|},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, s) =: Y(s) = \dot{\gamma}_0(s)$$

Im weiteren bezeichnen Punkte immer die Ableitung nach dem Variationsparameter und Striche die nach dem Kurvenparameter. [BILD]

$Y$  heißt *Variationsvektorfeld* der Variation  $\alpha$ . [BILD]

Achtung: Schreibe der Übersichtlichkeit halber im folgenden  $\gamma$  statt  $\alpha = \gamma_t$ , das heißt, daß der Parameter  $t$  im weiteren nicht mehr explizit angeführt wird. (Altes  $\gamma$  ist jetzt  $\gamma_0$ ).

$\gamma'$  ist wie gehabt parallel zu  $T$ ,  $\dot{\gamma}$  kann in Tangenten- und Normalenkomponente zerlegt werden:

$$\dot{\gamma} = vT, \quad \dot{\gamma} = \beta T + uN.$$

Damit hat man unter Ausnutzung der Frenet-Gleichungen (1) auf Seite 9:

$$\begin{aligned}(\dot{\gamma}') &= \dot{v}T + v\dot{T}, \\(\dot{\gamma}') &= \beta'T + \beta T' + u'N + uN' \\ &= (\beta' - uv\kappa)T + (\beta v\kappa + u')N.\end{aligned}$$

Ebenso, wie man durch Ableiten der Gleichung  $\langle T, T \rangle = 1$  (nun nicht nur für alle  $s$ , sondern auch für alle  $t$ ) folgern konnte, daß  $\langle T, T' \rangle = 0$ , erhält man auch  $\langle T, \dot{T} \rangle = 0$ . Also steht auch  $\dot{T}$  senkrecht auf  $T$  und ist damit parallel zu  $N$ .

Daraus folgt mit Koeffizientenvergleich für  $T$ :

$$\dot{v} = \beta' - uv\kappa$$

und mit Betrachtung des Normalenanteils:

$$v\dot{T} = (\beta v\kappa + u')N.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit  $N$ , dann folgt wegen  $\langle T, \dot{T} \rangle = 0$ :

$$v\langle \dot{T}, N \rangle = \beta v\kappa + u', \quad \text{also} \quad \dot{T} = \left(\beta\kappa + \frac{u'}{v}\right)N.$$

Aus  $(\dot{T})' = (\beta'\kappa + \beta\kappa' + \frac{u''}{v} - \frac{u'v'}{v^2})N - (\beta\kappa + \frac{u'}{v})v\kappa T$  und aus

$$\begin{aligned}(\dot{T}') &= (v\kappa N)' \\ &= (\dot{v}\kappa + v\dot{\kappa})N + v\kappa(JT)' \\ &= (\dot{v}\kappa + v\dot{\kappa})N + v\kappa J\left(\beta\kappa + \frac{u'}{v}\right)N \\ &= (\dot{v}\kappa + v\dot{\kappa})N - v\kappa\left(\beta\kappa + \frac{u'}{v}\right)T\end{aligned}$$

folgt für  $t = 0$  und daher  $v = 1$ ,  $v' = 0$  und durch die Vertauschbarkeit bei der Reihenfolge der Ableitungen, also  $(\dot{T}') = (\dot{T})'$ , wieder durch Koeffizientenvergleich von  $N$ :

$$\beta'\kappa + \beta\kappa' + u'' = \overbrace{(\beta' - u\kappa)}^{\dot{v}}\kappa + \dot{\kappa},$$

und dann

$$\dot{\kappa} = u'' + u\kappa^2 + \beta\kappa'.$$

Der Koeffizientenvergleich von  $T$  fördert nichts neues zu Tage:  $(\beta\kappa + u')\kappa = \kappa(\beta\kappa + u')$ .

Man beachte wieder, daß im weiteren  $t = 0$  gesetzt wird und sich  $v$  damit zu 1 vereinfacht. Wegen der Glattheit der betrachteten Funktionen können wieder Integration und Differentiation vertauscht werden.

$$\begin{aligned}L(\gamma_t) &= \int_a^b v(s) ds, \\ \dot{L} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(\gamma_t) = \int_a^b \dot{v} = \int_a^b \beta' - u\kappa = \int_a^b -u\kappa\end{aligned}\tag{3}$$



[BILD Kreis mit vielen Pfeilen (hier  $\dot{L} > 0$  weil  $u < 0$ )

Im folgenden ist bei den partiellen Integrationen, darauf zu achten, daß  $\beta$  und  $u$  und auch  $u'$  an den Rändern verschwinden, weil auf einem Stück von den Rändern weg  $\dot{\gamma} = \beta T + uN = 0$ , denn es handelt sich um eine Variation mit kompakten Träger. Die Randterme fallen also immer weg.

$$\begin{aligned}
 E(\gamma_t) &= \int_a^b \kappa^2 v \\
 \dot{E} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\gamma_t) = \int_a^b 2\kappa \underbrace{(u\kappa^2 + \beta\kappa' + u'')}_{\dot{\kappa}} + \kappa^2 \underbrace{(\beta' - u\kappa)}_{\dot{v}} \\
 &= \int_a^b 2u''\kappa + \kappa^3 u + \underbrace{2\kappa\kappa'\beta + \kappa^2\beta'}_{(\kappa^2\beta)'} \\
 &= \int_a^b \underbrace{2u''\kappa}_{2(u'\kappa)' - 2u'\kappa'} + \kappa^3 u = \int_a^b -2u'\kappa' + \kappa^3 u \\
 &= \int_a^b u(2\kappa'' + \kappa^3) = 2 \int_a^b u\left(\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

### 1.3.2. Freie und freie elastische Kurven

**Definition 1.32.**  $\gamma$  heißt *freie elastische Kurve* wenn  $\dot{E} = 0$  für alle Variationen mit kompaktem Träger von  $\gamma$ .

**Bemerkung 1.33.** Zu jedem  $u \in C_0^\infty(a, b)$  gibt es Variation mit kompaktem Träger mit  $\dot{\gamma} = uN$ , nämlich  $\gamma_t(s) = \gamma(s) + tu(s)N(s)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Damit ist  $\gamma$  genau dann *frei elastisch*, wenn  $\int_a^b (\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2})u = 0$  für alle  $u \in C_0^\infty(a, b)$ . Mit Fundamentallemma der Variationsrechnung (1.30) gilt dann  $\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} = 0$ . Die Krümmung einer freien elastischen Kurve genügt also folgender Differentialgleichung:

$$\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} = 0.$$

Bisher hatten wir nur Bedingungen an die Änderung der Energie gestellt. Insbesondere gab es keine Forderungen an die Länge der variierten Kurven. Wir ließen also Längenänderungen bei der Variation zu. Das entspricht der Interpretation, daß sich eine Kurve zur Annahme des Zustandes minimaler Energie verlängern oder verkürzen kann. Sie ist in gewissem Sinne frei beweglich. Nun wollen wir Längenänderungen in erster Ordnung unterbinden, also  $\dot{L} = 0$  fordern, und kommen so zu dem Begriff elastischer Kurven. Wie bei Extrema mit Nebenbedingungen werden wir zur Charakterisierung elastischer Kurven einen Lagrangeschen Multiplikator erhalten.

**Definition 1.34.** Eine Kurve in  $\mathbb{R}^2$  heißt *elastisch*, wenn  $\dot{E} = 0$  für alle Variationen mit kompaktem Träger, für welche gilt  $\dot{L} = 0$ .

Mit dem Ergebnis  $\dot{L} = \int_a^b -u\kappa$  aus (3) auf Seite 24 und der erneuten Anwendung des Fundamentallemmas (1.30) kommen wir also zu folgender Formulierung:

$\gamma$  ist *elastisch* genau dann, wenn  $\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} \perp u$  für alle  $u \in C_0^\infty(a, b)$  mit  $\kappa \perp u$ .

Es stellt sich dir Frage, ob aus  $\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} \perp u$  und  $\kappa \perp u$  folgt, daß  $\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} \parallel \kappa$ . Das ist glücklicherweise so und folgt aus dem Lemma (B.1).

In unserem Fall sind:

$$W = C^\infty[a, b] \quad V = C_0^\infty(a, b) \quad U = \text{Spann}\{\kappa\}.$$

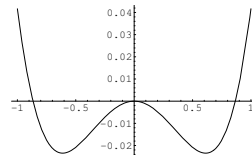
Dann ist  $\gamma$  elastisch genau dann, wenn

$$\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} \in (V \cap U^\perp)^\perp \Leftrightarrow \kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} \in \mathbb{R}\kappa,$$

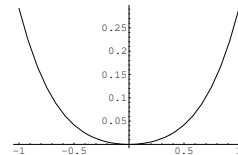
also wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$\boxed{\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} + a\kappa = 0.} \quad (4)$$

Physikalische Vorstellung:  $V(\kappa) = \frac{\kappa^4}{6} + \frac{a\kappa^2}{2}$ . Bewegung eines Teilchens im Po-



(a)  $a < 0$



(b)  $a > 0$

Abbildung 7: Potentialkurven

tentialtopf (siehe Abbildungen 7(a) und 7(b)).

Sei  $b = \kappa'N + (\frac{\kappa^2}{2} + a)T$  — Erhaltungsgröße. Behauptung:  $\gamma$  ist elastisch genau dann, wenn  $b = \text{const}$  für eine Wahl von  $a$ . Das ist äquivalent zu:

$$0 = b' = \kappa''N - \kappa'\kappa T + (\frac{\kappa^2}{2} + a)\kappa N + \kappa'\kappa T = (\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} + a\kappa)N.$$

Im Falle  $b = 0$  ist  $\kappa' = 0$  und  $\gamma$  ist Kreis oder Gerade.

Ist nun  $b \neq 0$ , dann sei o.B.d.A  $e_1 = -\frac{b}{\|b\|}$  und  $e_2 = Je_1$ . Schreibe  $\gamma = xe_1 + ye_2$  und definiere  $\rho = \frac{1}{\|b\|}$ . Die Ableitung von  $y$  ist

$$y' = \langle \gamma, e_2 \rangle' = \langle \gamma, -\rho Jb \rangle' = -\rho \langle T, Jb \rangle = \rho \langle JT, b \rangle = \rho \langle N, b \rangle = \rho \kappa'$$

unter Benutzung von  $b' = 0$  und  $\langle N, b \rangle = \kappa'$  und  $\gamma' = T$ . Also ist  $y$  von der Form  $y = -\rho \kappa + \alpha$ , wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Verschiebung ist. Wir definieren  $\tilde{y} = y - \alpha$ , welches dann proportional zu  $\kappa$  ist.

$\tilde{y} = 0$  ist eine Gerade, so daß der Abstand zu der Kurve  $\gamma$  gerade die Krümmung  $\kappa$  ist.

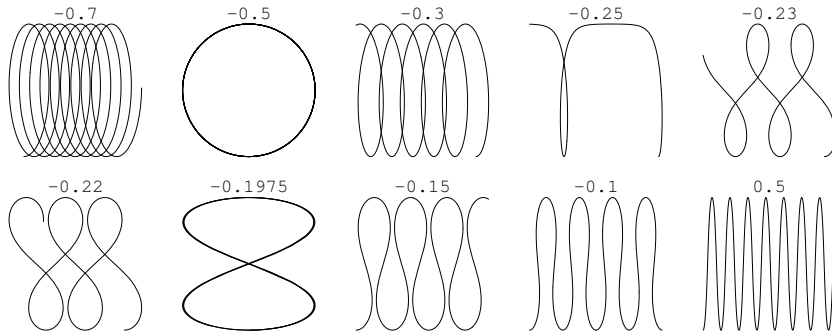


Abbildung 8: Einige elastische Kurven. Die Zahl über jedem Bild ist der Parameter  $a$  aus Gleichung (4) auf der vorherigen Seite.

06.05.

#### 1.4. Raumkurven

Für ebene Kurven hatten wir eine ON-Basis konstruiert über:  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma' = T$ ,  $|T| = 1$ ,  $N = JT$  und erhielten die Frenet-Gleichungen (1) auf Seite 9.

Wie wollen nun auch für Raumkurven eine ON-Basis des  $\mathbb{R}^3$  finden. Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $|\gamma'| = 1$ . Dabei definieren wir den Tangentenvektor  $T$  wieder wie für ebene Kurven:  $T := \gamma'$ .

[BILD Kurven in  $\mathbb{R}^3$  mit  $N$  und  $T$  und  $B$ ]

Gesucht sind glatte Abbildungen  $N, B : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  für die gilt:

$$|N| = |B| = 1, \quad \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\det(T, N, B) = 1, \quad (6)$$

wobei (5) die Orthonormalitätsbedingungen sind und (6) die Bedingung dafür, daß  $T, N, B$  positiv orientiert sind.

Wesentlich ist die Wahl von  $N$ , denn aus den Bedingungen (5) und (6) folgt  $B = T \times N$ .

Um  $N$  zu finden, werden wir das Lemma von Sard anwenden. Dieses garantiert uns nämlich, daß wir einen Vektor finden können, der zu keiner Zeit im Spann des Tangentenvektors liegt und wir daher aus ihm den Normalenvektor über das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren konstruieren können.

Folgerung aus dem Lemma von Sard: Ist  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $T : I \rightarrow S^2 \in C^\infty$ . Dann gibt es  $y \in S^2$ , so daß für kein  $s \in I$  gilt  $y = \pm T$ . [BILD Abb: T]

**Bemerkung 1.35.** Stetige Differenzierbarkeit ist als Voraussetzung wichtig, denn mit den sogenannten nur stetigen Peano-Kurven läßt sich eine Fläche überdecken.

Wähle jetzt  $y \in S^2$  mit  $y \neq \pm T(s)$  für alle  $s \in [0, L]$ . Setze dann

$$N := \frac{y - \langle y, T \rangle T}{|y - \langle y, T \rangle T|}.$$

Das ist wohldefiniert, denn  $y - \langle y, T \rangle T$  ist nie Null, weil aus  $y = \langle y, T \rangle T$  folgt nach Multiplikation mit  $y$ :

$$1 = \langle y, y \rangle = \langle y, T \rangle^2 \Rightarrow \langle y, T \rangle = \pm 1 \Rightarrow y = \pm T.$$

Also: Jede parametrisierte Kurve  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  hat ein glattes Einheitsnormalenfeld

$$N : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad |N| = 1, \quad \langle N, T \rangle = 0.$$

$B$  ergibt sich wie erwähnt aus dem Kreuzprodukt. Nun werden wir analog zu den Frenet-Gleichungen (1) im zweidimensionalen Fall die Ableitungsregeln für  $T$ ,  $N$  und  $B$  herleiten.

Ableitungsregeln:

- Zu Fuß-Methode:

Wie in zweidimensionalem Fall durch das Ableiten von  $\langle T, T \rangle = 1$  folgt  $\langle T, T' \rangle = 0$  und genauso  $\langle N, N' \rangle = 0$ . Daraus schliesst man auf

$$T' = \kappa_1 N + \kappa_2 B,$$

und analog auch für die Normale:

$$N' = \alpha T + \beta B.$$

$\alpha$  ist aber schon vorgegeben durch  $\underbrace{\langle T', N \rangle}_{\kappa_1} = -\underbrace{\langle T, N' \rangle}_{\alpha}$ . Die letzte Gleichung folgt durch Ableiten von  $\langle T, N \rangle = 0$ , was  $\langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0$  ergibt.

Schreibe also  $N'$  in der Form:

$$N' = -\kappa_1 T + \tau B$$

Ebenso wie  $T' \perp T$  ist  $B' \perp B$ , was aus Ableiten von  $\langle B, B \rangle = 1$  folgt:

$$B' = \mu T + \eta N.$$

Wieder sind die Koeffizienten schon vorgegeben durch:

$$\underbrace{\langle T', B \rangle}_{\kappa_2} = - \underbrace{\langle T, B' \rangle}_{\mu} \quad \text{und} \quad \underbrace{\langle N', B \rangle}_{\tau} = - \underbrace{\langle N, B' \rangle}_{\eta}.$$

Also ergibt sich:  $\gamma' = T$  und

$$T' = \kappa_1 N + \kappa_2 B, \quad N' = -\kappa_1 T + \tau B, \quad B' = -\kappa_2 T - \tau N \quad (7)$$

oder in Matrixschreibweise (mit  $T, N, B$  als Spalten):

$$(T' \ N' \ B') = (T \ N \ B) \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \tau \\ -\kappa_2 & -\tau & 0 \end{pmatrix}^T$$

- Elegante Methode:

$T, N$  und  $B$  bestimmen eine  $C^\infty$ -Abbildung

$$F : [0, L] \rightarrow SO(3), \quad F(s) = (T(s) \ N(s) \ B(s)),$$

(wieder mit  $T, N$  und  $B$  als Spalten), welche eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die die Standardbasis auf unsere Basis  $T, N, B$  abbildet mit

$$F(s)e_1 = T(s), \quad F(s)e_2 = N(s), \quad F(s)e_3 = B(s).$$

Eine orientierungstreue und skalarprodukterhaltende und damit längenerhaltende euklidische Bewegung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist immer gegeben durch  $f(s) = Ax + b$ ,  $A \in SO(3)$  — Drehung um den Nullpunkt,  $b \in \mathbb{R}^3$  — eine Translation.

Wir können also  $T, N$  und  $B$  im Raum darstellen als Bild von

$$x \mapsto F(s)x + \gamma(s),$$

einer orientierungs- und längentreuen Bewegung mit  $F(s) \in SO(3)$  für alle  $s$ . Die Null wird auf  $\gamma(s)$  abgebildet und für  $e_1, e_2$  und  $e_3$  gilt:

$$e_1 \mapsto \gamma(s) + T(s), \quad e_2 \mapsto \gamma(s) + N(s), \quad e_3 \mapsto \gamma(s) + B(s).$$

Die Ableitungen von  $F$  können wieder nach der Basis entwickelt werden:

$$\begin{aligned} T' &= a_{11}T + a_{21}N + a_{31}B \\ N' &= a_{12}T + a_{22}N + a_{32}B \\ B' &= a_{13}T + a_{23}N + a_{33}B \end{aligned}$$

oder kurz  $F' =: FY$  mit  $Y = F^{-1}F'$ . Für den Basisvektor  $e_1$  gilt:  $F e_1 = T$ , also ist  $T' = F' e_1 = a_{11}T + a_{21}N + a_{31}B$ , und damit

$$\begin{aligned} F' e_1 &= FY e_1 = F(y_{11}e_1 + y_{21}e_2 + y_{31}e_3) \\ &= y_{11}T + y_{21}N + y_{31}B. \end{aligned}$$

Analog folgt für  $e_2$  und  $e_3$ :

$$\begin{aligned} F' e_2 &= FY e_2 = y_{12}T + y_{22}N + y_{32}B, \\ F' e_3 &= FY e_3 = y_{13}T + y_{23}N + y_{33}B. \end{aligned}$$

Das heißt genau:  $Y = (a_{ij})$ .

Jetzt kommt das Elegante ...

Aus  $FF^t = I$  folgt nach Ableiten:

$$0 = F'F^t + F(F^t)' = FYF^t + F(F')^t = FYF^t + FY^tF^t = F(Y + Y^t)F^t,$$

und daraus  $Y + Y^t = 0$  wegen Invertierbarkeit von  $F$ .  $Y$  ist eine schiefsymmetrische Matrix, d.h.  $a_{ij} = -a_{ji}$ , also von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\tau \\ \kappa_2 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

#### 1.4.1. Angepaßte und parallele Rahmen

**Definition 1.36.** Für eine Raumkurve  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt  $F = (T, N, B) : [0, L] \rightarrow SO(3)$  ein *angepaßter Rahmen*, wenn  $\gamma' = vT$  mit  $v(s) > 0$  für alle  $s$ .

Ist  $T, N, B$  ein angepaßter Rahmen und  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\tilde{T} = T, \quad \tilde{N} = \cos \alpha N + \sin \alpha B, \quad \tilde{B} = -\sin \alpha N + \cos \alpha B, \quad (8)$$

mit einem im Allgemeinen nicht konstantem  $\alpha$ , ebenfalls ein angepaßter Rahmen. Alle angepaßten Rahmen entstehen so.

$N$  und  $B$  können in der Ebene, die senkrecht zu  $T$  steht beliebig gedreht werden.

**Definition 1.37.** Ein angepaßter Rahmen heißt *parallel*, wenn  $\tau = 0$  ist.

**Satz 1.38.** Jede Raumkurve hat einen parallelen Rahmen  $T, N, B$ . Alle weiteren parallelen Rahmen haben die Form (8) mit  $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$ .

$\tau$  (*Torsion*) gibt an, wie sehr sich  $N$  und  $B$  gegeneinander verdrehen (vergleiche mit den Ableitungsgleichungen). Es ist also klar, daß man dieser Verdrehung mit einer Gegendrehung entgegenwirken muß, damit  $\tau = 0$  wird. Dies tut genau das  $\alpha$  in Gleichung (8).

*Beweis.* Sei  $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$  irgendein angepaßter Rahmen. Mache für den parallelen Rahmen den Ansatz mit  $\beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$T = \hat{T}, \quad N = \cos \beta \hat{N} + \sin \beta \hat{B}, \quad B = -\sin \beta \hat{N} + \cos \beta \hat{B}.$$

Ableiten von  $N$  liefert

$$\begin{aligned} N' &= -\beta' \sin \beta \hat{N} + \cos \beta (-\hat{\kappa}_1 \hat{T} + \hat{\tau} \hat{B}) + \beta' \cos \beta \hat{B} + \sin \beta (-\hat{\kappa}_2 \hat{T} - \hat{\tau} \hat{N}) \\ &= \beta' B + \hat{\tau} B - (\hat{\kappa}_1 \cos \beta + \hat{\kappa}_2 \sin \beta) \hat{T} \end{aligned}$$

und mit der Ableitungsgleichung für  $N$  sowie der Definition für  $B$  gilt  $N' = -\kappa_1 T + \tau B$ , was uns

$$\tau = \langle B, N' \rangle = \langle -\sin \beta \hat{N} + \cos \beta \hat{B}, N' \rangle$$

liefert. Einsetzen von  $N'$  ergibt ( $\hat{T}$ -Komponenten kann man weglassen):

$$\begin{aligned} \tau &= \langle -\sin \beta \hat{N} + \cos \beta \hat{B}, -\beta' \sin \beta \hat{N} + \cos \beta \hat{\tau} \hat{B} + \beta' \cos \beta \hat{B} - \sin \beta \hat{\tau} \hat{N} \rangle \\ &= (\beta' + \hat{\tau}) \sin^2 \beta + (\beta' + \hat{\tau}) \cos^2 \beta \\ &= \beta' + \hat{\tau} \end{aligned}$$

Also ist  $\tau = 0$  genau dann, wenn  $\beta' + \hat{\tau} = 0$ . Daraus folgt  $\beta(s) = \alpha + \int_0^s -\hat{\tau}(\sigma) d\sigma$ . □

Der Verdrehungswinkel in der  $N, B$ -Ebene ist die Summe (also das Integral) aller Verdrehungen von  $N$  und  $B$ , angegeben durch  $\hat{\tau}$ ! Diese Verdrehung muß man rückgängig machen (Minuszeichen.)

“Jede Kurve läßt sich ohne Querruder abfliegen“. Anwendung von angepaßten Rahmen: *Röhrenflächen* unter  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit angepaßtem Rahmen  $T, N, B$ ,  $r > 0$ . Definiere eine Funktion 09.05.

$$f : [0, L] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(s, \phi) = \gamma(s) + r \cos(\phi) N(s) + r \sin(\phi) B(s),$$

die die Röhrenfläche um  $\gamma$  beschreibt.

Rahmenkurve Computergraphisch malen: mache Röhrenfläche  $f$  (verdickte Kurve) z.B. indem man auf der Röhre die Linien

$$\eta_\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta_\phi(s) = f(s, \phi)$$

malen.

$\eta'_\phi(s)$  = Geschwindigkeitsvektor der Kurve  $\eta_\phi$ .

Paralleler Rahmen ist hier optimal, da für alle  $s$  und  $\phi$  dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(s, \phi) &= \frac{\partial}{\partial s} [\gamma(s) + r \cos \phi N(s) + r \sin \phi B(s)](s, \phi) \\ &= T(s) - r\kappa_1(s) \cos \phi T(s) - r\kappa_2(s) \sin \phi T(s) \\ &= (1 + r(\kappa_1(s) \cos \phi - \kappa_2(s) \sin \phi))T(s) \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} &= -r \sin \phi N(s) + r \cos \phi B(s). \end{aligned}$$

Also sind  $\frac{\partial f}{\partial s}$  und  $\frac{\partial f}{\partial \phi}$  orthogonal für alle  $s$  und  $\phi$ . Bemerke noch, daß  $\frac{\partial f}{\partial s}$  in Richtung  $T(s)$  zeigt und  $\frac{\partial f}{\partial \phi}$  in der von  $N(s)$  und  $B(s)$  aufgespannten Ebene liegt, und die resultierende Röhrenfläche dann nicht verdreht ist.

► **Beispiel 1.39.**

1. Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ , nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei  $\gamma' = T$  wie immer und setze  $B(s) = e_3$  für alle  $s$ . Dann ist  $N = B \times T = JT$ , wenn man die  $(x, y)$ -Ebene mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert. Für die Ableitungen gilt:  $T' = \kappa N$  wobei  $\kappa$  die Krümmung der ebenen Kurve, dann ist  $\kappa_1 = \kappa$ . Aus  $B' = 0$  folgt  $\kappa_2 = \tau = 0$ .  $N' = -\kappa T$ .
2. Betrachte die Helix  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  wie im Beispiel 3 auf Seite 7, aber hier nach der Bogenlänge parametrisiert:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (\cos(s\sqrt{1-a^2}), \sin(s\sqrt{1-a^2}), as), \\ \gamma'(s) &= (-\sqrt{1-a^2} \sin(s\sqrt{1-a^2}), \sqrt{1-a^2} \cos(s\sqrt{1-a^2}), a). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort  $|\gamma'| = 1$ .

Sucht man einen parallelen Rahmen, so fängt man mit einem beliebigen Rahmen an z.B.:

$$\begin{aligned} N(s) &= (\cos(s\sqrt{1-a^2}), \sin(s\sqrt{1-a^2}), 0), \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = (-a \sin(s\sqrt{1-a^2}), a \cos(s\sqrt{1-a^2}), -\sqrt{1-a^2}). \end{aligned}$$

Aus den Ableitungen von  $T$  und  $B$  bestimmen wir  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\tau$ :

$$\begin{aligned} T'(s) &= ((1-a^2) \cos(s\sqrt{1-a^2}), (1-a^2) \sin(s\sqrt{1-a^2}), 0) \\ &= -(1-a^2)N, \\ B'(s) &= (-a\sqrt{1-a^2} \cos(s\sqrt{1-a^2}), -a \sin(s\sqrt{1-a^2}), 0) \\ &= -a\sqrt{1-a^2}N \end{aligned}$$



und die Parameter sind:

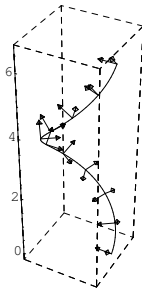
$$\kappa_1 = a^2 - 1, \quad \kappa_2 = 0, \quad \tau = a\sqrt{1 - a^2}.$$

Paralleler Rahmen:

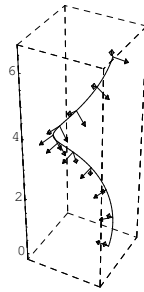
$$\begin{aligned} \tilde{N}(s) &= \cos\left(-\int_0^s \tau(\sigma) d\sigma\right)N(s) + \sin\left(-\int_0^s \tau(\sigma) d\sigma\right)B(s) \\ &= \cos(-as\sqrt{1 - a^2})N(s) + \sin(-as\sqrt{1 - a^2})B(s). \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist es besser mit nicht-bogenlängenparametrisierten Kurven zu rechnen, also mit  $\gamma' = vT$  und

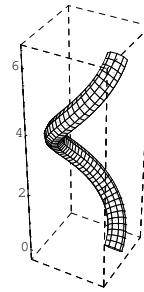
$$T' = v\kappa_1N + v\kappa_2B, \quad N' = -v\kappa_1T + v\tau B, \quad B' = -v\kappa_2T - v\tau N.$$



(a) Frenet-Rahmen.



(b) Paralleler Rahmen.



(c) Röhrenfläche.

Abbildung 9: Beispiele zu Helix.

Für die nicht bogenlängenparametrisierte Helix  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, bt)$  wie in Beispiel 3 auf Seite 7 gilt dann:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}(-\sin t, \cos t, b) \\ N &= (\cos t, \sin t, 0) \\ B &= \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}(-b \sin t, b \cos t, -1). \end{aligned}$$

#### 1.4.2. Frenet-Rahmen

**Definition 1.40.** Ein angepaßter Rahmen heißt *Frenet-Rahmen*, wenn  $\kappa_2 = 0$ . Schreibe dann  $\kappa := \kappa_1$ .  $\gamma' = T$  und

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N.$$

► **Beispiel 1.41.** Nicht für jede Kurve gibt es einen Frenet-Rahmen:

1.

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_1(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{\frac{1}{t}}), & t > 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t}}, 0), & t < 0 \end{cases} .$$

Für Frenet-Rahmen ist  $\gamma'' = v'T + v^2\kappa N$ , das heißt, wenn  $\gamma''(t)$  linear unabhängig von  $T(t)$  ist, dann ist  $\kappa \neq 0$  und  $N$  liegt in der von  $T(t)$  und  $\gamma''(t)$  aufgespannten Ebene. Wegen  $N(t) \perp T(t)$  gibt es nur zwei Möglichkeiten für  $N$  (eine bis auf das Vorzeichen).

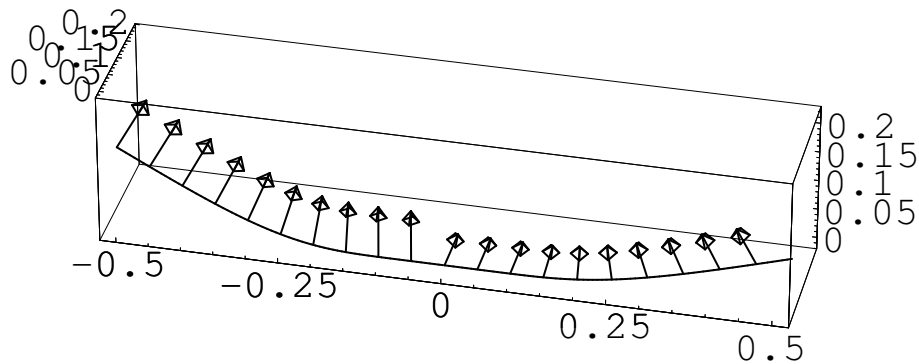


Abbildung 10:  $\gamma_1$  aus Beispiel (1.41). Die Pfeile stellen den Normalenvektor dar.

2. Noch wilder, *pathologisches Horrorszenario*:

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} (t, e^{\frac{1}{t}} \cos \frac{1}{t}, e^{\frac{1}{t}} \sin \frac{1}{t}), & t < 0 \\ (t, 0, 0), & t \geq 0 \end{cases} .$$

Für Gerade  $\gamma(t) = a + tb$  sind alle angepaßten Rahmen Frenet-Rahmen.

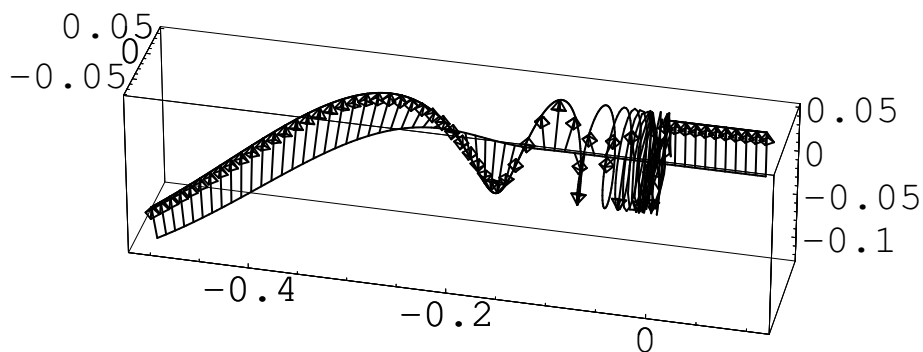


Abbildung 11:  $\gamma_2$  aus Beispiel (1.41). Die Pfeile stellen den Normalenvektor dar.

**Satz 1.42.** Sind alle Komponenten von  $\gamma$  reell analytisch (d.h. in Potenzreihen entwickelbar), so existiert ein Frenet-Rahmen.

*Beweis.* Sei  $\gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$  mit  $a_k \in \mathbb{R}$  und o.B.d.A  $a_0 = 0$  nach der Bogenlänge parametrisiert. (Ist  $\tilde{\gamma}$  analytisch, dann ist auch bogenlängenunparametrisierte Kurve  $\gamma$  analytisch.) Die zweite Ableitung ist:

$$\gamma''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k s^{k-2}.$$

$\gamma''$  hat dann nur isolierte Nullstellen. (Im Falle  $\gamma'' \equiv 0$  ist  $\gamma$  eine Gerade.)

Seien  $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$ , aber  $a_n \neq 0$  und definiere  $b_k := k(k-1)a_k$ . Dann ist

$$\gamma''(s) = s^{n-2} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k}_{=: \eta(s)} \quad \text{und } b_0 \neq 0.$$

$\eta(s)$  ist eine konvergente Potenzreihe. Definiere  $N(s) := \frac{\eta(s)}{|\eta(s)|} = \frac{\gamma''(s)}{s^{n-2}|\eta(s)|}$ . Dann ist

$$T'(s) = \gamma''(s) = \underbrace{s^{n-2}|\eta(s)|}_{\kappa(s)} N(s).$$

□

13.05.

## 1.5. Hauptsatz

**Satz 1.43.** (Hauptsatz der Kurventheorie)

Seien  $\kappa_1, \kappa_2, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gibt es eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $|\gamma'| = 1$  mit dem angepaßten Rahmen  $T, N, B$ , so daß mit den vorgegebenen  $\kappa_1, \kappa_2, \tau$  die Ableitungsgleichungen  $\gamma' = T$  und

$$T' = \kappa_1 N + \kappa_2 B, \quad N' = -\kappa_1 T + \tau B, \quad B' = -\kappa_2 T - \tau N$$

gelten.

Ist  $\tilde{\gamma}$ , eine weiter solche Kurven mit dem angepaßten Rahmen  $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ , so gibt es eine Drehmatrix  $A \in SO(3)$  und  $b \in \mathbb{R}^3$  mit  $\tilde{\gamma} = A\gamma + b$  und  $\tilde{T} = AT$ ,  $\tilde{N} = AN$ ,  $\tilde{B} = AB$ .

**Satz 1.44.** Sei  $A : [a, b] \rightarrow gl(n, \mathbb{R}) \in C^\infty$ ,  $F_0 \in gl(n, \mathbb{R})$ ,  $t_0 \in [a, b]$ . Dann gibt es nach Satz von Picard–Lindelöf (B.2) eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung  $F : [a, b] \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$  mit  $F(t_0) = F_0$  und  $F' = FA$ .

Spezialfall des Satzes von Picard–Lindelöf:  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n^2} = gl(n, \mathbb{R})$ .  $B(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear,  $B(t)Y = YA(t)$ .

**Lemma 1.45.** Sei  $F : [a, b] \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ ,  $F' = FA$  mit  $A : [a, b] \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\det F(t)) = \det F(t) \operatorname{Spur} A(t).$$

*Beweis.* Seien  $f_1, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  Spalten von  $F$ . Dann ist

$$(\det F)' = \det(f_1, \dots, f_n)' = \det(f_1', f_2, \dots, f_n) + \dots + \det(f_1, \dots, f_{n-1}', f_n).$$

Aus  $F' = FA$  folgt

$$f_{ij}' = \sum_{k=1}^n f_{ik} a_{kj}, \quad \text{also} \quad f_j' = \sum_{k=1}^n f_k a_{kj},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \det(f_1, \dots, f_n)' &= a_{11} \det(f_1, \dots, f_n) + \dots + a_{nn} \det(f_1, \dots, f_n) \\ &= \det F \operatorname{Spur} A. \end{aligned}$$

□

**Satz 1.46.** Ist  $A : [a, b] \rightarrow sl(n, \mathbb{R})$  und  $F_0 \in SL(n, \mathbb{R})$ , so gilt  $F(t) \in SL(n, \mathbb{R})$  für alle  $t \in [a, b]$ .

*Beweis.*  $\det F' = \operatorname{Spur} A \det F = 0 \cdot \det F = 0$ . □

► **Beispiel 1.47.** Sei  $F'(t) = F(t)A(t)$  mit  $A = \begin{pmatrix} t^2 & t + t^3 \\ t + t^4 & -t^2 \end{pmatrix}$  gegeben.  $A$  hat Spur 0. Aus  $F(0) = \operatorname{Id}$  folgt  $\det F(t) = 1$  für alle  $t$ .

**Satz 1.48.** Sei  $F' = FA$ ,  $F(t_0) \in GL(n, \mathbb{R})$ . Dann ist  $F(t) \in GL(n, \mathbb{R})$  für alle  $t$ .

*Beweis.* Sei  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = \det F$ . Dann gilt  $g' = g \operatorname{Spur} A$ . Wäre  $g(s) = 0$  für ein  $s \in [a, b]$ , wäre  $g$  Lösung des AWP  $g(s) = 0$ ,  $g' = g \operatorname{Spur} A$ .

$g \equiv 0$  ist eine Lösung. Da Lösung eindeutig ist, gilt demnach  $g(t) = 0$  für alle  $t$  im Widerspruch zu  $g(t_0) \neq 0$ .  $\square$

**Satz 1.49.** Sei  $A : [a, b] \rightarrow so(n)$ ,  $F_0 \in O(n)$ ,  $F(t_0) = F_0$ ,  $F' = FA$  für  $F : [a, b] \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ . Dann gilt  $F(t) \in O(n)$  für alle  $t$ .

*Beweis.*

$$(FF^t)' = F'F^t + F(F')^t = FAF^t + FA^tF^t = F(\underbrace{A + A^t}_{=0})F^t = 0$$

$$(FF^t)(t_0) = I \quad \Rightarrow \quad FF^t = I$$

$\square$

Kombination der beiden Sätze:  $F_0 \in SO(n)$ ,  $A : [a, b] \rightarrow so(n)$ . Dann ist  $F(t) \in SO(n)$  für alle  $t \in [a, b]$ , weil  $A + A^t = 0 \Rightarrow \operatorname{Spur} A = 0$ .

**Lemma 1.50.** Sei  $F : [a, b] \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ . Dann ist  $(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}$ .

*Beweis.* Aus  $F^{-1}F = I$  folgt sofort  $(F^{-1})F + F^{-1}F' = 0$ .  $\square$

*Beweis vom Hauptsatz (1.43).* Wir zeigen zuerst die Existenz.

Definiere  $F : [a, b] \rightarrow SO(3)$  durch das AWP

$$F(a) = I, \quad F' = FA, \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\tau \\ \kappa_2 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien  $T, N, B$  Spalten von  $F$ . Dann ist  $T(t), N(t), B(t)$  – ON-Basis von  $\mathbb{R}^3$ ,  $\det(T, N, B) = 1$ . Sei weiter  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(s) = \int_a^s T(t) dt$ . Dann ist  $\gamma' = T$  und  $T' = \kappa_1 N + \kappa_2 B$ ,  $N' = -\kappa_1 T + \tau B$ ,  $B' = -\kappa_2 T - \tau N$ .

$T, N, B$  ist ein angepaßter Rahmen der Bogenlängenparametrisierten Kurve  $\gamma$  mit den gewünschten  $\kappa_1, \kappa_2, \tau$ .

Das war die Existenz. Jetzt die Eindeutigkeit.

Seien  $\gamma, T, N, B$  und  $\tilde{\gamma}, \tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$  zwei Lösungen. Definiere  $F = (T, N, B)$  und  $\tilde{F} = (\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B})$ . Aus

$$\begin{aligned}(F\tilde{F}^{-1})' &= F'\tilde{F}^{-1} + F(\tilde{F}^{-1})' = F'\tilde{F}^{-1} - F\tilde{F}^{-1}\tilde{F}'\tilde{F}^{-1} \\ &= FA\tilde{F}^{-1} - F\tilde{F}^{-1}(\tilde{F}A)\tilde{F}^{-1} = 0\end{aligned}$$

folgt

$$F\tilde{F}^{-1} = C^{-1} \in SO(3).$$

Also können wir schreiben:

$$\tilde{F} = CF, \quad \tilde{T} = CT, \quad \tilde{N} = CN, \quad \tilde{B} = CB.$$

Und dann folgt aus  $(\tilde{\gamma} - C\gamma)' = \tilde{T} - CT = 0$ , daß  $\tilde{\gamma} = C\gamma + b$  mit  $b \in \mathbb{R}^3$ .  $\square$

► **Beispiel 1.51.** Beispiel mit gegebenen  $\kappa$  und  $\tau$ .

Für nicht bogenlängenparametrisierte Kurven gilt mit  $\gamma' = vT$  und  $v = |\gamma'|$ :

$$T' = v\kappa_1 N + v\kappa_2 B, \quad N' = v\kappa_1 T + v\tau B, \quad B' = -v\kappa_2 T - v\tau N.$$

20.05. Ist  $T' \neq 0$ , dann wähle  $N := \frac{T'}{|T'|}$  und  $B = T \times N$ . Daraus bestimmen sich  $\kappa$  und  $\tau$  im Frenet-Rahmen.

## 1.6. Gegenüberstellung von parallelen und Frenet-Rahmen

Im folgenden werden wir Darstellungen von Kurvenparametern bezüglich des Frenet- und des parallelen Rahmen verglichen. Zunächst erinnern wir uns:

Ist  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisierte Kurve mit  $|\gamma'(s)| \neq 0$  für alle  $s \in [0, L]$ , dann hat  $\gamma$  immer einen parallelen Rahmen, ist  $\gamma$  aber keine analytische Kurve, so hat  $\gamma$  nicht immer einen Frenet-Rahmen. (vgl. Beispiel 1.41 auf Seite 34)

**Definition 1.52.**  $\gamma$  hat in  $s \in [0, L]$  einen *Wendepunkt*, wenn  $\gamma'(s)$  und  $\gamma''(s)$  linear abhängig sind.

**Bemerkung 1.53.** Ist  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert, so stehen erste und zweite Ableitung überall senkrecht aufeinander. In diesem Falle ist die Existenz eines Wendepunktes zur Zeit  $s$  äquivalent zu  $\gamma''(s) = 0$ .

Man kann das Nichtvorhandensein von Wendepunkten nutzen, um den Frenet-Rahmen punktweise zu konstruieren. Sei nun im weiteren  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $|\gamma'(s)| = 1$  für alle  $s \in [0, L]$  eine Kurve ohne Wendepunkte, d.h.  $\gamma''(s) \neq 0$  für alle  $s$ . Definiere dann:

$$T := \gamma', \quad N := \frac{\gamma''}{|\gamma''|}, \quad B := T \times N.$$

Das liefert einen Frenet-Rahmen mit:

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau N, \quad B' = -\tau N.$$

Daraus konstruiert man einen parallelen Rahmen  $(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B})$ , indem man folgenden Ansatz mit  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  macht:

$$\tilde{T} = T, \quad \tilde{N} = \cos \alpha N + \sin \alpha B, \quad \tilde{B} = -\sin \alpha N + \cos \alpha B.$$

Die Ableitung von  $\tilde{N}$  ist

$$\tilde{N}' = (-\alpha' \sin \alpha - \tau \sin \alpha) \tilde{N} + (\tau \cos \alpha + \alpha' \cos \alpha) \tilde{B} - \cos \alpha \kappa T.$$

Der Rahmen ist parallel genau dann, wenn die Torsion  $\tilde{\tau} = 0$  ist, d.h.

$$\langle \tilde{N}', \tilde{B} \rangle = \sin^2 \alpha (\alpha' + \tau) + \cos^2 \alpha (\alpha' + \tau) = \alpha' + \tau.$$

Also ist  $\alpha' = -\tau$  und wir wählen  $\alpha$  wie folgt:

$$\alpha(s) = \alpha_0 - \int_0^s \tau(\sigma) d\sigma.$$

Im weiteren gehören  $\kappa$  und  $\tau$  immer zum Frenet-Rahmen  $(T, N, B)$ , und  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  zum parallelen Rahmen  $(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B})$ .

Wie drücken sich nun die die Parameter des einen Rahmen durch die des anderen aus?

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \langle \tilde{T}', \tilde{N} \rangle = \langle T', \tilde{N} \rangle = \langle \kappa N, \cos \alpha N + \sin \alpha B \rangle = \kappa \cos \alpha, \\ \kappa_2 &= \langle \tilde{T}', \tilde{B} \rangle = \langle T', \tilde{B} \rangle = \langle \kappa N, -\sin \alpha N + \cos \alpha B \rangle = -\kappa \sin \alpha. \end{aligned}$$

Sind umgekehrt die Größen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  eines parallelen Rahmen gegeben.

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ -\kappa_2 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$\kappa$  und  $\alpha$  sind Polarkoordinaten von  $\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$ . Man merke sich *Frenet-Krümmung* ist  $\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$  und ist *Frenet-Torsion*  $\tau = -\alpha'$ .

$\kappa$  hat keinen Nulldurchgang, weil wir gefordert haben, daß die Kurve keine Wendepunkte hat.

Behauptung: Kurve auf der Sphäre genau dann, wenn  $\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$  Gerade.

*Beweis.*

„ $\implies$ “  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  liege auf einer Sphäre mit Radius  $r > 0$  und Mittelpunkt  $m \in \mathbb{R}^3$

$$|\gamma(s) - m|^2 = r^2.$$

Definieren wir den Normalenvektor durch  $\gamma(s) - m =: rN$ , dann ist seine Ableitung  $N' = \frac{1}{r}(\gamma - m)' = \frac{1}{r}T$  und mit  $T = \gamma'$  und  $B = T \times N$  erhalten wir einen parallelen Rahmen.

Ableiten von  $\langle \gamma(s) - m, \gamma(s) - m \rangle = r^2$  liefert

$$2\langle \gamma'(s), \gamma(s) - m \rangle = 2\langle T, rN \rangle = 0.$$

Also sind  $T$  und  $N$  senkrecht, d.h.  $(T, N, B)$  ist ein angepaßter Rahmen.

Aus  $N' = -\frac{1}{r}(\gamma - m)' = -\frac{1}{r}T$  ergibt sich der parallele Rahmen mit  $\kappa_1 = \frac{1}{r}$  und  $\tau = 0$ .

Bild von  $\psi = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$  liegt auf einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht. Bezüglich eines anderen parallelen Rahmen

$$\tilde{T} = T, \quad \tilde{N} = \cos \alpha N + \sin \alpha B, \quad \tilde{B} = -\sin \alpha N + \cos \alpha B$$

mit  $\alpha = \text{const}$  gilt  $T' = \kappa_1 N + \kappa_2 B = \tilde{\kappa}_1 \tilde{N} + \tilde{\kappa}_2 \tilde{B}$ , also sind

$$\kappa_1 = \tilde{\kappa}_1 \cos \alpha - \tilde{\kappa}_2 \sin \alpha \quad \kappa_2 = \tilde{\kappa}_1 \sin \alpha + \tilde{\kappa}_2 \cos \alpha$$

und in der Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Die Krümmungskurve  $\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 \end{pmatrix}$  bezüglich  $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$  ist die Krümmungskurve  $\psi = (\kappa_1 \ \kappa_2)$  gedreht um Winkel  $\alpha$ .

„ $\impliedby$ “ Liegt umgekehrt  $\psi$  auf einer Geraden nicht durch Null, d.h.  $\kappa_1(s) \cos \alpha + \kappa_2(s) \sin \alpha = \frac{1}{r}$ , dann liegt  $\gamma$  auf einer Sphäre vom Radius  $r$ .

Sei o.B.d.A.  $(\cos \alpha, \sin \alpha) = (-1, 0)$  (was durch Drehung des parallelen Rahmen möglich ist). Damit ist dann  $\kappa_1 = -\frac{1}{r}$ . Ableiten von  $m(s) := \gamma(s) - rN(s)$  ergibt

$$m'(s) = T(s) - r \underbrace{-\kappa_1 T(s)}_{N'(s)} = T(s) - r \left(\frac{1}{r}\right) T(s) = 0,$$

was bedeutet, daß  $m(s) =: m \in \mathbb{R}^3$  konstant ist (ein fester Punkt) und  $|\gamma'(s) - m(s)| = |rN(s)| = r$ . Das ist die Behauptung.

□



Wir können folgendes zusammenfassen:

- Ist eine Kurve  $\gamma$  bezüglich des Frenet-Rahmen durch  $\begin{pmatrix} \kappa \\ \tau \end{pmatrix} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschrieben, dann liegt es auf einer Sphäre genau dann, wenn  $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'$  gilt.
- Ist eine Kurve  $\gamma$  bezüglich des parallelen Rahmen durch  $\psi = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschrieben, dann liegt es auf einer Sphäre genau dann, wenn (hier fehlt was mit  $\psi$ , was ich nicht verstehe)  $\kappa_1'\kappa_2'' + \kappa_1''\kappa_2' = 0$ .

### 1.7. Elastische Kurven im $\mathbb{R}^3$

Sei  $\alpha(s, t)$  eine Variation mit kompaktem Träger einer nach der Bogenlänge parametrisierten Raumkurve  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_t(s) = \alpha(s, t)$ ,  $|\gamma'| = 1$ , und sei  $(T(s, t), N(s, t), B(s, t))$  ein paralleler Rahmen längs  $\gamma_t : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sei  $|\gamma_t'(s)| = v(s, t)$ . Im Folgenden schreiben wir immer  $f'$  für  $\frac{\partial f}{\partial s}$  und  $\dot{f}$  für  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .

Die Ableitungen sehen so aus:

$$\alpha' = vT \quad T' = v\kappa_1N + v\kappa_2B \quad N' = -v\kappa_1T \quad B' = -v\kappa_2T.$$

Wir definieren  $\dot{\alpha} := \lambda T + u_1N + u_2B$  und betrachten die Ableitungen:

$$\begin{aligned} (\alpha') \cdot &= \dot{v}T + v\dot{T} \\ (\dot{\alpha})' &= \lambda'T + \lambda v(\kappa_1N + \kappa_2B) + u_1'N - u_1v\kappa_1T + u_2'B - u_2v\kappa_2T \\ &= (\lambda' - v(u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2))T + (\lambda v\kappa_1 + u_1')N + (\lambda v\kappa_2 + u_2')B. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \lambda' - v(u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2) \\ v\dot{T} &= (v\lambda\kappa_1 + u_1')N + (v\lambda\kappa_2 + u_2')B \\ \dot{T} &= (\lambda\kappa_1 + \frac{u_1'}{v})N + (\lambda\kappa_2 + \frac{u_2'}{v})B. \end{aligned}$$

Wieder bilden wir die Ableitungen von  $T'$  und  $\dot{T}$ :

$$\begin{aligned} (T') \cdot &= \dot{v}(\kappa_1N + \kappa_2B) + v(\dot{\kappa}_1N + \kappa_1\dot{N} + \dot{\kappa}_2B + \kappa_2\dot{B}) \\ &= (\dot{v}\kappa_1 + v\dot{\kappa}_1)N + (\dot{v}\kappa_2 + v\dot{\kappa}_2)B + v(\kappa_1\dot{N} + \kappa_2\dot{B}) \\ (\dot{T})' &= (\lambda\kappa_1 + \frac{u_1'}{v})'N + (\lambda\kappa_1 + \frac{u_1'}{v})N' + (\lambda\kappa_2 + \frac{u_2'}{v})'B + (\lambda\kappa_2 + \frac{u_2'}{v})B' \\ &= (\lambda\kappa_1 + \frac{u_1'}{v})'N + (\lambda\kappa_2 + \frac{u_2'}{v})'B - (v\kappa_1(\lambda\kappa_1 + \frac{u_1'}{v}) + v\kappa_2(\lambda\kappa_2 + \frac{u_2'}{v}))T \\ &= (\lambda\kappa_1 + \frac{u_1'}{v})'N + (\lambda\kappa_2 + \frac{u_2'}{v})'B - (\lambda v(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \kappa_1u_1' + \kappa_2u_2')T \end{aligned}$$

Für  $t = 0$  ist  $v = 1$  und  $\dot{v} = \lambda' - (u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2)$  und

$$\begin{aligned}(T')\dot{\cdot} &= (\dot{v}\kappa_1 + \dot{\kappa}_1)N + (\dot{v}\kappa_2 + \dot{\kappa}_2)B + \kappa_1\dot{N} + \kappa_2\dot{B} \\ (\dot{T})' &= (\lambda\kappa_1 + u_1')N + (\lambda\kappa_2 + u_2')B - (\lambda(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \kappa_1u_1' + \kappa_2u_2')T\end{aligned}$$

und die Summe beider letzten:

$$\begin{aligned}(\dot{v}\kappa_1 + \dot{\kappa}_1 - (\lambda\kappa_1 + u_1')')N + (\dot{v}\kappa_2 + \dot{\kappa}_2 - (\lambda\kappa_2 + u_2')')B \\ = -\kappa_1\dot{N} - \kappa_2\dot{B} + (\lambda(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \kappa_1u_1' + \kappa_2u_2')T\end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese zuerst mit  $N$  und dann mit  $B$ :

$$\begin{aligned}\dot{v}\kappa_1 + \dot{\kappa}_1 - (\lambda\kappa_1 + u_1')' + \kappa_2\langle\dot{B}, N\rangle &= 0 \\ \dot{v}\kappa_2 + \dot{\kappa}_2 - (\lambda\kappa_2 + u_2')' + \kappa_1\langle\dot{N}, B\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Jetzt noch  $\dot{v}$  einsetzen und vereinfachen:

$$\dot{\kappa}_1 + \kappa_2\langle\dot{B}, N\rangle = u_1'' + (u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2)\kappa_1 + \lambda\kappa_1' \quad (9)$$

$$\dot{\kappa}_2 + \kappa_1\langle\dot{N}, B\rangle = u_2'' + (u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2)\kappa_2 + \lambda\kappa_2'. \quad (10)$$

Der Sinn dieser Umformungen ist die letzten Formeln bei dem Integral der Biegeenergie zu benutzen.

### 1.7.1. Die Biegeenergie elastischer Raumkurven

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\kappa_1^2(s, t) + \kappa_2^2(s, t))v(s, t) ds.$$

Für  $t = 0$  haben wir

$$\dot{E} = \int_0^L \kappa_1\dot{\kappa}_1 + \kappa_2\dot{\kappa}_2 + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \underbrace{(\lambda' - (u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2))}_{\dot{v}} ds. \quad (11)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (9) mit  $\kappa_1$  und (10) mit  $\kappa_2$  und bilden die Summe beider, so erhalten wir folgende Beziehung:

$$(u_1\kappa_1 + u_2\kappa_2)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \lambda(\kappa_1'\kappa_1 + \kappa_2'\kappa_2) + \kappa_1u_1'' + \kappa_2u_2'' = \dot{\kappa}_1\kappa_1 + \dot{\kappa}_2\kappa_2. \quad (12)$$

Die Terme mit  $\langle\dot{B}, N\rangle$  und  $\langle\dot{N}, B\rangle$  heben sich gerade auf, wegen  $\langle\dot{B}, N\rangle + \langle\dot{N}, B\rangle = 0$ .

Setzen wir (12) in die Gleichung (11) ein und benutzen, daß

$$\frac{1}{2}(\lambda(\kappa_1^2 + \kappa_2^2))' = \frac{1}{2}\lambda'(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \lambda(\kappa_1\kappa_1' + \kappa_2\kappa_2'),$$

dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= \int_0^L (u_1 \kappa_1 + u_1 \kappa_2)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \lambda(\kappa_1' \kappa_1 + \kappa_2' \kappa_2) + \kappa_1 u_1'' + \kappa_2 u_2'' \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(\lambda' - u_1 \kappa_1 - u_2 \kappa_2) \\
 &= \int_0^L \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(u_1 \kappa_1 + u_2 \kappa_2) + \kappa_1 u_1'' + \kappa_2 u_2'' + \frac{1}{2}(\lambda \kappa_1^2 + \kappa_2^2)' \\
 &= \int_0^L u_1(\kappa_1'' + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\kappa_1) + u_2(\kappa_2'' + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\kappa_2)
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde partielle Integration durchgeführt.

Betrachte eine freie elastische Kurve mit kompaktem Träger in  $(0, L)$ . Aus  $\dot{E} = 0$  für alle  $u_1$  und  $u_2$  folgt:

$$\kappa_1'' + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2'' + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\kappa_2 = 0.$$

Sei  $\Psi = (\kappa_1, \kappa_2)$  mit  $\Psi'' + \frac{1}{2}|\Psi|^2\Psi = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_0^L v = \int_0^L \dot{v} = \int_0^L \lambda' - u_1 \kappa_1 - u_2 \kappa_2 \\
 &= - \int_0^L u_1 \kappa_1 + u_2 \kappa_2 = - \int_0^L \langle u, \Psi \rangle.
 \end{aligned}$$

Für eine elastische Kurve gilt  $\dot{E} = 0$  immer, wenn  $\dot{L} = 0$  und das ist genau dann, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\Psi'' + \frac{1}{2}|\Psi|^2\Psi + a\Psi = 0$ .

Ein anderer Zugang zu den elastischen Kurven.

[BILD]

Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $|\gamma'| = 1$  und o.B.d.A  $\gamma(0) = 0$ .  $\gamma(s) = \int_0^s T(\sigma) d\sigma$ ,

Suche Extrema von  $E = \frac{1}{2}\langle T', T' \rangle$  unter der Nebenbedingung  $\int_0^L T = p$ . Die Kurve wurde durch die Bedingung  $\gamma(0) = 0$  und die Nebenbedingung an den Endpunkten festgemacht.

Variation mit Träger im  $(0, L)$  von  $T$ . Daraus folgt mit der erwähnten Nebenbedingung, daß die daraus konstruierten  $\gamma_t$  in einer Umgebung von 0 und  $L$  fix sind.

Wir variieren nicht mehr  $\gamma$ , sondern  $T$  unter der Nebenbedingung.

Wähle einen parallelen Rahmen längs allen  $\gamma_t$ . Dann haben wir  $T, N, B$  mit  $T', N'$  und  $B'$  wie in (7) auf Seite 29.

$$\begin{aligned}\dot{T} &= u_1 N + u_2 B \\ \dot{T}' &= u_1' N - u_1 \kappa_1 T + u_2' B + u_2 \kappa_2 T = -(u_1 \kappa_1 + u_2 \kappa_2) T + u_1' N + u_2' B \\ \dot{E} &= \int_0^L \langle T', \dot{T}' \rangle = \int_0^L \kappa_1 u_1' + \kappa_2 u_2' = - \int_0^L \kappa_1 u_1 + \kappa_2' u_2\end{aligned}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}\int_0^L T_1 &= p_1, & \int_0^L T_2 &= p_2, & \int_0^L T_3 &= p_3, \\ \int_0^L T &= p, & \int_0^L \dot{T} &= 0 \\ \int_0^L u_1 \langle N, e_j \rangle + u_2 \langle B, e_j \rangle & \text{ für } j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Jetzt haben wir eine elastische Kurve:  $\dot{E} = 0$  für alle  $u$  mit  $\int_0^L \dot{T} = 0$ . Daraus ergeben sich Lagrangesche Multiplikatoren  $a_1, a_2, a_3$  mit

$$\begin{aligned}0 &= -\kappa_1' + a_1 \langle N, e_1 \rangle + a_2 \langle N, e_3 \rangle + a_3 \langle N, e_3 \rangle \\ 0 &= -\kappa_2' + a_1 \langle B, e_1 \rangle + a_2 \langle B, e_2 \rangle + a_3 \langle B, e_3 \rangle.\end{aligned}$$

Es existieren  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned}- \int_0^L \kappa_1' u_1 + \kappa_2' u_2 &= a_1 \int_0^L u_1 \langle N, e_1 \rangle + u_2 \langle B, e_1 \rangle \\ &+ a_2 \int_0^L u_1 \langle N, e_2 \rangle + u_2 \langle B, e_2 \rangle \\ &+ a_3 \int_0^L u_1 \langle N, e_3 \rangle + u_2 \langle B, e_3 \rangle.\end{aligned}$$

Aus  $u_2 = 0$  folgt  $\int_0^L (-\kappa_1' + a_1 \langle N, e_1 \rangle + a_2 \langle N, e_2 \rangle + a_3 \langle N, e_3 \rangle) u_1 = 0$  für alle  $u_1$  mit kompaktem Träger. Sei  $a = (a_1, a_2, a_3)$ .

$$\begin{aligned}\kappa_1' &= \langle a, N \rangle, & \kappa_2' &= \langle a, B \rangle \\ T' &= \kappa_1 N + \kappa_2 B \\ T'' &= \kappa_1' N + \kappa_1'' B - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) T \\ T'' &= \langle a, N \rangle N + \langle a, B \rangle B - \langle T', T' \rangle T\end{aligned}$$

und wegen  $a = \langle a, T \rangle T + \langle a, N \rangle N + \langle a, B \rangle B$ :

$$T'' = a - \langle a, T \rangle T - \langle T', T' \rangle T.$$

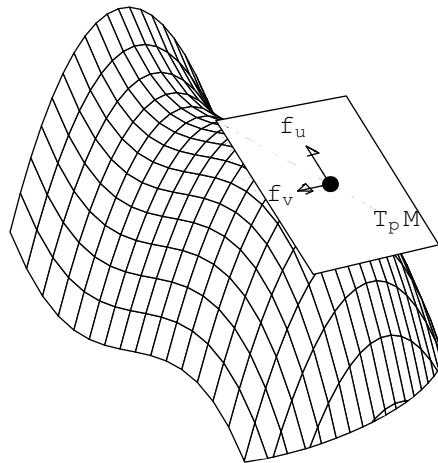


Abbildung 12: Beispielfläche im  $\mathbb{R}^3$  mit Tangentialebene  $T_p M$ .

## 2. Flächen in $\mathbb{R}^3$

**Definition 2.1.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt regulär, genau dann, wenn  $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ ,  $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$  linear unabhängig sind für alle  $u$  und  $v$ . Oder auch anders aufgeschrieben, wenn  $df_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  den Rang 2 hat, wobei  $df_{(u,v)}$  — Jacobi-Matrix ist:

$$f'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

$f_u$  und  $f_v$  sind Parameterlinien.  $u \mapsto \gamma^u(v) = f(u, v)$  und  $v \mapsto \eta^u(v) = f(u, v)$ .

**Definition 2.2.** Ein reguläres  $f$ , wie oben, heißt *parametrisiertes Flächenstück*.

Zwei parametrisierte Flächenstücke  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen *äquivalent*, wenn es einen orientierungstreuen Diffeomorphismus  $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$  gibt, mit  $\tilde{f} = f \circ \phi$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^3 & \\ f \nearrow & & \nwarrow \tilde{f} \\ U & \xleftarrow{\phi} & \tilde{U} \end{array}$$

**Definition 2.3.**  $\phi$  heißt *Diffeomorphismus*, wenn  $\phi$  bijektiv ist und  $\phi, \phi^{-1} \in C^\infty$ . Es heißt *orientierungstreu*, wenn  $\det \phi > 0$ .

## 2.1. Tangentialräume

Betrachte Flächenstück  $M \in \mathbb{R}^2$ . [BILD] Problem ist, daß sich beispielsweise eine Kugel in  $\mathbb{R}^3$  sich nicht als ein Flächenstück beschreiben läßt. Später wollen wir die Flächen in  $\mathbb{R}^3$  als 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten beschreiben.

Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wir fragen uns, was die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $p$  in Richtung  $x$  ist:

$$f'(p)(x) = df(p)(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

**Definition 2.4.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann heißt  $TM = M \times \mathbb{R}^n$  das *Tangentialbündel* von  $M$ . Für jedes  $p \in M$  heißt  $T_pM \subset TM$ ,  $T_pM = p \times \mathbb{R}^n = \{(p, \tilde{x}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  der *Tangentialraum* von  $M$  im Punkt  $p$ . Elemente von  $TM$  heißen *Tangentialvektoren* an  $M$ . Tangentialvektoren  $x = (p, \tilde{x})$  haben einen Fußpunkt  $p$ .

Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt. Dann ist  $df : TM \rightarrow T\mathbb{R}^n$ . Mit  $x = (p, \tilde{x})$  ist dann  $df(x) = (f(p), f'(p)\tilde{x})$ .

Seien  $M$  und  $N \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : M \rightarrow N$  glatt. [BILD]. Die Kettenregel klassisch wäre

$$(f \circ g)'(p)\tilde{x} = f'(g(p))g'(p)\tilde{x}.$$

Mit den neuen Bezeichnungen sieht es etwas einfacher aus:

$$d(f \circ g)(x) = df(g(p), g'(p)\tilde{x}) = df(dg(x)).$$

Zum Schluß kann man die Kettenregel in der neuen Schreibweise so vereinfacht darstellen:

$$d(f \circ g) = df \circ dg.$$

$T_pM$  ist ein Vektorraum vermittelt wie folgt definierten Addition und Skalarmultiplikation für alle  $x, y \in T_pM$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (p, \tilde{x}) + (p, \tilde{y}) &:= (p, \tilde{x} + \tilde{y}) \\ \lambda(p, \tilde{x}) &= (p, \lambda\tilde{x}) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sind  $x \in T_pM$ ,  $y \in T_qM$  und  $p \neq q$ , dann ist  $x + y$  nicht definiert.

Für  $M = \mathbb{R}^n$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kann man auf jedem  $T_p M$  euklidisches Skalarprodukt für  $x = (p, \tilde{x})$  und  $y = (p, \tilde{y})$  durch  $\langle x, y \rangle := \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$  definieren.

**Definition 2.5.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **Kurve** auf dem Flächenstück  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wenn es ein  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$  gibt mit  $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$ .

Ist  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein zu  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  äquivalentes parametrisiertes Flächenstück und  $\gamma$  eine Kurve auf  $f$ . Dann ist  $\gamma$  auch eine Kurve auf  $\tilde{f}$ .

*Beweis.* Ist  $\tilde{f} \sim f$ , dann existiert ein Diffeomorphismus  $\phi : \tilde{M} \rightarrow M$  mit  $\tilde{f} = f \circ \phi$ . Daraus folgt  $\gamma = f \circ \hat{\gamma} = \tilde{f} \circ \phi^{-1} \circ \hat{\gamma} = \tilde{f} \circ \tilde{\hat{\gamma}}$ .  $\square$

Sei  $\gamma$  eine Kurve auf  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$ . Die Länge von  $\gamma$  ist:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle df(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}'(t)), df(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}'(t)) \rangle} dt.$$

Erlaube in der Notation für glatte Abbildungen  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Schreibweise

$$\gamma'(t) = (\gamma(t), \gamma'(t)).$$

In der Zukunft sei  $\gamma'(t)$  der an der Stelle  $\gamma(t)$  festgemachte Vektor  $\gamma'(t)$ .

Es gilt dann

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle df(\hat{\gamma}'(t)), df(\hat{\gamma}'(t)) \rangle} dt = \int_a^b |df \circ \hat{\gamma}'|. \quad (13)$$

## 2.2. 1. Fundamentalform

**Definition 2.6.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Dann heißt die symmetrische **Bilinearform**

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_p(x, y) = \langle d_p f(x), d_p f(y) \rangle$$

die **1. Fundamentalform** von  $f$  im Punkt  $p$  oder die **induzierte Metrik**.

**Bemerkung 2.7.**  $g_p$  ist ein euklidisches Skalarprodukt, denn  $g_p(x, x) \geq 0$  und  $g_p(x, x) = 0$  genau dann, wenn  $df(x) = 0$ , also  $x = 0$ , wegen  $\text{Rang}(df) = 2$ . [BILD]

Die Abbildung  $p \mapsto g_p$  heißt 1. Fundamentalform oder induzierte Metrik. Ist es nicht redundant????

Die Länge von  $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$  kann man jetzt schreiben als

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}')},$$

indem man in der Gleichung (13) das Skalarprodukt durch  $g(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}')$  ersetzt.

► **Beispiel 2.8.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  — ein Zylinder.

$$\begin{aligned} f_u(u, v) &= (-\sin u, \cos u, 0), & f_v(u, v) &= (0, 0, 1), \\ \langle f_u, f_u \rangle &= 1, & \langle f_u, f_v \rangle &= 0, & \langle f_v, f_v \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Sei  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$ ,  $\hat{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$ ,  $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= f_u(\hat{\gamma}(t))u'(t) + f_v(\hat{\gamma}(t))v'(t) = (-u' \sin u, u' \cos u, v') \\ |\gamma'(t)|^2 &= u'^2 \sin^2 u + u'^2 \cos^2 u + v'^2 = u'^2 + v'^2 = |\hat{\gamma}'|^2, \end{aligned}$$

wobei  $|\cdot|$  Betrag bezüglich der Standardmetrik in  $\mathbb{R}^2$  ist.

Das hat damit zu tun, daß die induzierte Metrik auf dem Zylinder mit der Metrik von  $\text{Id} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  gleich ist.

**Definition 2.9.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine glatte Abbildung  $X : M \rightarrow TM = M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  mit  $X(p) \in T_p M$  für alle  $p \in M$  heißt ein *Vektorfeld* auf  $M$ .

Standardvektorfelder  $X_1, \dots, X_n : X_j(p) = (p, e_j)$ . [BILDer (wer macht schöne Bilder??? Hilfe!!!)]  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  ist eine Basis von  $T_p M$  für alle  $p \in M$ . Damit ist

$$df \circ X_1(p) = df(p, e_1) = (f(p), f'(p)e_1) = (f(p), f_u(p)) = f_u(p).$$

Berechne  $g_p$  bzgl. der Basis  $X_1(p), X_2(p)$  von  $T_p M$ :

$$g_p(X_1(p), X_2(p)) = \langle (f(p), f_u(p)), (f(p), f_v(p)) \rangle = \langle f_u(p), f_v(p) \rangle.$$

Bezeichne mit  $g(X_1, X_2)$  die Funktion  $M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto g_p(X_1(p), X_2(p))$ . Dann ist  $g(X_1, X_2) = \langle f_u, f_v \rangle$ .

Allgemeine Notation:

$$\begin{aligned} E &:= g(X_1, X_1) = \langle f_u, f_u \rangle \\ F &:= g(X_1, X_2) = \langle f_u, f_v \rangle \\ G &:= g(X_2, X_2) = \langle f_v, f_v \rangle. \end{aligned}$$

Im Beispiel (2.8) ist  $E = G = 1$  und  $F = 0$ . Das ist dieselbe Metrik wie die von  $\text{Id} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Id}(u, v) = (u, v)$ .



### 2.3. Weingartenoperator und die 2. Fundamentalform

Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Niveauflächenstück. Für jedes  $p \in M$  ist  $df(T_p M)$  ein zweidimensionaler Unterraum von  $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$  — der *Tangententialraum* von  $f$  an der Stelle  $p$ :

$$df(T_p M) = \{df(x) \mid x \in T_p M\}.$$

Behauptung: Es gibt einen eindeutigen normierten Vektor  $N(p) \in T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ , der Senkrecht zu  $df(x)$  für alle  $x \in T_p M$  ist und der zusammen mit  $df(x_1(p))$  und  $df(x_2(p))$  eine positiv orientierte Basis von  $\mathbb{R}^3$  bildet, d.h.

$$\det(df(x_1(p)), df(x_2(p)), N(p)) > 0 \quad \text{für alle } p.$$

Wir hatten uns schon überlegt, daß  $df(X_1(p)) = f_u(p)$  und  $df(X_2(p)) = f_v(p)$ .

Nach unserer Konvention ist  $f_x(p) = (p, \frac{\partial f}{\partial x}(p))$  und die Ableitung ist im Sinne der Analysis zu verstehen.

Damit ist  $\det(f_u, f_v, N) > 0$  und den Normalenvektor kann man schreiben als

$$N = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Aufschluß über die Krümmung der Fläche liefern die Ableitungen von  $N$ .

Hier schreiben wir wieder  $N(p)$  statt  $(p, \tilde{N}(p))$ , wobei  $\tilde{N} : M \rightarrow S^2$ .

Betrachte eine Kurve auf der Fläche. [BILD]

Für Kurven im  $\mathbb{R}^3$  haben wir angepaßte Rahmen. [ hier kommt etwas, was ich nicht weiss wie aufzuschreiben ] Das liefert uns den angepaßten Rahmen entlang  $\gamma$  mit den üblichen Bezeichnungen wie in 8 auf Seite 30.

Wir werden feststellen, daß  $\tau$  die Drehung um Längsachse,  $\kappa_1$  die Krümmung entlang der Kurve, und  $\kappa_2$  die geodätische Krümmung sind. Ziel ist die geometrische Interpretation von  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\tau$ .

Davor machen wir aber folgendes: Für  $x \in T_p M$  schreibe

$$dN(x) = (f(p), d\tilde{N}(x)) \in T_{f(p)}\mathbb{R}^3,$$

wobei  $d\tilde{N}(x)$  als Richtungsableitung von  $\tilde{N}$  in Richtung  $x$  zu verstehen ist. Schreibe  $N_u = dN(x_1)$  und  $N_v = dN(x_2)$ .

Ableiten von  $\langle N, N \rangle = 1$  führt zu  $\langle N(p), dN(x)(p) \rangle = 0$  für alle  $x \in T_p M$  auch kurzgeschrieben als  $\langle N, dN \rangle = 0$ .

Daraus folgt, daß es ein  $y \in T_p\mathbb{R}^2$  mit  $dN(x) = df(y)$  existiert.  $y$  hängt linear von  $x$  ab. Also  $y = A(p)x$ ,  $A(p) : T_pM \rightarrow T_pM$  — linear,  $A : TM \rightarrow TM$ ,  $A|_{T_pM} \subset T_pM$  und linear.

$A(p)$  heißt der *Weingartenoperator* von  $f$  im Punkt  $p$ . Der Weingartenoperator ist definiert durch  $dN(x) = df(Ax)$  für alle  $x \in TM$ .

► **Beispiel 2.10 (Veranschaulichung des Weingartenoperators).** Sei  $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  wie in Beispiel 2.8 auf Seite 48. Die Ableitungen sind:

$$f_u = df(x_1) = (-\sin u, \cos u, 0), \quad f_v = (0, 0, 1) \quad \text{und} \quad N = (\cos u, \sin u, 0).$$

$N$  ist normiert und bildet mit  $f_u$  und  $f_v$  eine positiv orientierte Basis:

$$\det \begin{pmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos u & \sin u & 0 \end{pmatrix} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1 > 0.$$

Die Richtungsableitungen von  $N$  sind  $N_u = dN(x_1) = (-\sin u, \cos u, 0) = f_u$  und  $N_v = dN(x_2) = 0$ .

Nun zu dem Weingartenoperator. Aus  $dN(x_1) = df(x_1) = df(Ax_1)$  folgt  $Ax_1 = x_1$ , und aus  $dN(x_2) = 0 = df(0) = df(Ax_2)$  entsprechend  $Ax_2 = 0$ , also ist  $A$  die Identität bezüglich der gewählten Basis.

Durch  $f$  auf  $T_pM$  induzierte Struktur:  $A : T_pM \rightarrow T_pM$ , induzierte Metrik (1. Fundamentalform),  $g(x, y) = \langle df(x), df(y) \rangle$ .

**Definition 2.11.** Die Bilinearform  $h(p) : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(p)(x, y) := g(x, Ay)$  heißt die 2. Fundamentalform von  $f$  im Punkt  $p$ .

Für  $x, y \in T_pM$  schreibe  $h(x, y)$  statt  $h(p)(x, y)$ . (Das ist sinnvoll, denn nach unserer Konvention ist  $p$  in  $x$  und  $y$  enthalten.)

$$\boxed{h(x, y) = g(x, Ay)} \quad \boxed{dN(x) = df(Ax)} \quad \boxed{g(x, y) = \langle df(x), df(y) \rangle}$$

Wir beweisen einen Satz über die 2. Fundamentalform:

**Satz 2.12.**  $h(p) : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine symmetrische Bilinearform.

*Beweis.* Die Bilinearität folgt aus

$$\begin{aligned} h(a_1x_1 + a_2x_2, b_1x_1 + b_2x_2) \\ = a_1b_1h(x_1, x_1) + a_1b_2h(x_1, x_2) + a_2b_1h(x_2, x_1) + a_2b_2h(x_2, x_2). \end{aligned}$$

$h$  ist symmetrisch genau dann, wenn  $h(x_1, x_2) = h(x_2, x_1)$ .

Nach den Definitionen von ... gilt:

$$h(x_1, x_2) = g(x_1, Ax_2) = \langle df(x_1), df(Ax_2) \rangle = \langle df(x_1), dN(x_2) \rangle = \langle f_u, N_v \rangle.$$

Leiten wir  $\langle f_u, N \rangle = 0$  nach  $v$  ab, dann erhalten wir  $\langle f_{uv}, N \rangle + \langle f_u, N_v \rangle = 0$ , also  $\langle f_u, N_v \rangle = -\langle f_{uv}, N \rangle$ . Ebenso gilt  $-\langle f_{vu}, N \rangle = \langle f_v, N_u \rangle$ . Nach Satz von Schwartz ist  $f_{vu} = f_{uv}$  und damit ist die Symmetrie gezeigt.  $\square$

Merke noch:

$$\begin{aligned} l &:= h(x_1, x_1) = \langle f_u, N_u \rangle = -\langle f_{uu}, N \rangle, \\ m &:= h(x_1, x_2) = \langle f_u, N_v \rangle = \langle f_v, N_u \rangle = -\langle f_{uv}, N \rangle, \\ n &:= h(x_2, x_2) = \langle f_v, N_v \rangle = -\langle f_{vv}, N \rangle. \end{aligned}$$

Es geht auch einfacher (hier exemplarisch für  $l$ ):

$$l = -\langle f_{uu}, N \rangle = -\left\langle f_{uu}, \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} \right\rangle = -\frac{\det(f_u, f_v, f_{uu})}{\sqrt{|f_u|^2 |f_v|^2 - \langle f_u, f_v \rangle^2}}.$$

Definiert man

$$E := g(x_1, x_1), \quad F := g(x_1, x_2), \quad G := g(x_2, x_2),$$

dann ist mit  $x = a_1 x_1 + a_2 x_2$  und  $y = b_1 x_1 + b_2 x_2$ :

$$g(x, y) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen  $A$  in der Form  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ \tilde{M} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  darstellen, wobei  $L, M, \tilde{M}$  und  $N$  von  $l, m, n$  und der 1. Fundamentalform abhängen sollen. Betrachte  $h(x, y)$ :

$$h(x, y) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ \tilde{M} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ \tilde{M} & N \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} L & M \\ \tilde{M} & N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

► **Beispiel 2.13.**  $f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ ,  $\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Betrachte Abbildung  $\hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\hat{\gamma}(0) = p$  und  $\hat{\gamma}'(0) = x$ . Wir wollen das Verhalten von der Fläche in Richtung  $x$  untersuchen. Sei weiter  $\gamma := f \circ \hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Raumkurve mit  $\gamma'(0) = df(\hat{\gamma}'(0)) = df(x)$ . Wir wollen einen angepaßten Rahmen konstruieren.

Sei  $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ . Dann ist  $\gamma' = vT$  und  $v = |\gamma'|$ . Wähle dann  $\tilde{N} = N \circ \hat{\gamma}$  als Normalenvektorfeld. Wegen der Orthogonalität von  $N(p)$  und  $df(x)$  für alle  $x \in T_pM$  gilt

$$\langle \tilde{N}(t), T(t) \rangle = \left\langle N(\hat{\gamma}(t)), \frac{df(\hat{\gamma}'(t))}{v(t)} \right\rangle = 0.$$

Und mit  $B = T \times \tilde{N}$  ist der angepaßte Rahmen  $(T, \tilde{N}, B)$  für  $\gamma$  gegeben.

Für  $y \in T_pM$  ist  $N(p) \times df(y)$  ebenfalls in  $df(T_pM)$ . Definiere eine Abbildung  $J : TM \rightarrow TM$  durch

$$df(J(y)) = N(p) \times df(y).$$

$J$  ist linear, denn  $J(y+z)$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} df(J(y+z)) &= N(p) \times df(y+z) = N(p) \times df(y) + N(p) \times df(z) \\ &= df(Jy) + df(Jz) = df(Jy + Jz). \end{aligned}$$

Aus der Injektivität von  $df|_{T_pM}$  folgt die Additivität von  $J$ :  $J(y+z) = Jy + Jz$ .

*Erinnerung (Lineare Algebra):*  $V$  — Vektorraum mit nicht ausgearteter symmetrischer Bilinearform  $\beta$  (d.h.: Aus  $\beta(x, y) = 0$  für alle  $y \in V$  folgt  $x = 0$ ),  $A : V \rightarrow V^*$ ,  $Ax(y) = \beta(x, y)$ .  $\beta$  ist nicht ausgeartet genau dann, wenn aus  $Ax = 0$  folgt  $x = 0$ , was äquivalent zu Injektivität von  $A$  ist.

**Satz 2.14.** Sei  $V$  endlichdimensional und  $\beta$  eine nicht ausgeartete Bilinearform auf  $V$ . Dann gibt es zu jedem  $\omega \in V^*$  ( $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear) genau ein  $x \in V$  mit  $\omega(y) = \beta(x, y)$ .

*Beweis.* Da  $V$  endlich dimensional ist, ist  $V^*$  ebenso von endlicher Dimension, und weil  $\beta$  nicht ausgeartet ist folgt  $A$  ist injektiv, also auch bijektiv und es existiert kein  $x \in V$  mit  $Ax = \omega$  zu jedem  $\omega \in V^*$ .  $\square$

**Satz 2.15.** Sei zusätzlich  $\beta : V \rightarrow V$  linear und symmetrisch. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $B^* : V \rightarrow V$  mit  $\beta(Bx, y) = \beta(x, B^*y)$ .

*Beweis.*  $y \in V$  ist gegeben. Dann ist  $x \mapsto \beta(Bx, y)$  linear, also existiert kein  $B^*(y) \in V$  mit  $\beta(x, B^*y) = \beta(B^*y, x) = \beta(Bx, y)$ .  $\square$

$B^*$  ist *adjungierte* Abbildung zu  $B$  (bezüglich  $\beta$ ) mit folgenden Eigenschaften: (1)  $B \rightarrow B^*$  ist eine lineare Abbildung  $\text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ , (2)  $(AB)^* = B^*A^*$  und (3) ist  $\beta$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $B^* = B^t$ , wenn man Matrizen als lineare Abbildungen interpretiert.

$B$  heißt *selbstadjungiert*, wenn  $B^* = B$  und *schiefadjungiert*, wenn  $B^* = -B$ .

Damit kann man sagen: Der Weingartenoperator  $A$  erfüllt  $A^* = A$  bezüglich  $g$ , also ist selbstadjungiert und  $J$  ist schiefadjungiert bezüglich  $g$ :

$$\begin{aligned} g(Jx, y) &= \langle df(Jx), df(y) \rangle = \langle N \times df(x), df(y) \rangle \\ &= \det(N, df(x), df(y)) = -\det(N, df(y), df(x)) \\ &= \dots \\ &= -g(Jy, x) = -g(x, Jy). \end{aligned}$$

$J$  erfüllt auch die Gleichung  $J^2 = -I$ , denn  $N \times (N \times df(y)) = -df(y)$  weil  $df(y) \perp N$  und  $|N| = 1$ .

Folgerung:  $g(Jx, Jy) = -g(X, J^2y) = g(x, y)$ , also ist  $J$  orthogonal bezüglich  $g$ .

**Satz 2.16.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisiertes Flächenstück und  $\hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $g(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}') = 1$  und seien  $\hat{\gamma}(0) = p$ ,  $\hat{\gamma}'(0) = x$ .  $\kappa_1, \kappa_2$  und  $\tau$  seien die Krümmungsgrößen des angepassten Rahmen  $T = \gamma'$ ,  $\tilde{N} = N \circ \hat{\gamma}$ ,  $B = T \times \tilde{N}$  längs  $\gamma := f \circ \hat{\gamma}$ . Dann gilt  $\kappa_1(0) = -h(x, x)$  und  $\tau(0) = -h(x, Jx)$ .

Stelle fest, daß mit  $\gamma' = df(\hat{\gamma}')$  ist  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle df(\hat{\gamma}'), df(\hat{\gamma}') \rangle = g(\hat{\gamma}, \hat{\gamma}) = 1$ , also hat der Tangentenvektor in der inneren Metrik die Länge 1.

*Beweis.* Wir benutzen unter anderem

$$\tilde{N}'(0) = dN(\hat{\gamma}'(0)) = dN(x) \quad \text{und} \quad T(0) = df(\hat{\gamma}'(0)) = df(x).$$

Dann ist

$$\kappa_1(0) = \langle -\tilde{N}'(0), T(0) \rangle = -\langle dN(x), df(x) \rangle = -h(x, x).$$

In der zweiten Gleichung brauchen wir noch  $df(x) \times N(0) = -N(0) \times df(x) = -df(Jx)$  und dann ist

$$\begin{aligned}\tau(0) &= \langle \tilde{N}'(0), T(0) \times \tilde{N}(0) \rangle = \langle dN(x), df(x) \times N(0) \rangle \\ &= -\langle df(Ax), df(Jx) \rangle = -g(Ax, Jx) = -h(x, Jx).\end{aligned}$$

□

Aus der Linearen Algebra ist der Satz über Hauptachsentransformation bekannt: Ist  $V$  euklidischer Vektorraum und  $B : V \rightarrow V$  selbstadjungiert, dann existieren eine ON-Basis  $x_1, \dots, x_n$  von  $V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit  $Bx_j = \lambda_j x_j$  für alle  $j = 1 \dots n$ .

Hier: Zu jedem  $p \in M$  existieren  $x, y \in T_p M$  mit  $g(x, x) = g(y, y) = 1$ ,  $g(x, y) = 0$  und  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ , so daß  $Ax = \kappa_1 x$ ,  $Ay = \kappa_2 y$ .  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  sind Eigenwerte von  $A$  und  $x$  und  $y$  Eigenvektoren.  $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$  in der Basis  $x, y$ .

**Definition 2.17.** Ein  $x \in T_p M$  mit  $g(x, x) = 1$  heißt *Richtung* in  $p$ . Ist  $x$  eine Richtung, dann heißt  $-h(x, x)$  *Normalkrümmung* von  $f$  in Richtung  $x$ .

**Definition 2.18.**  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  heißen die *Hauptkrümmungen* von  $f$  an der Stelle  $p$  und die Richtungen  $x$  und  $y \in T_p M$  heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

- $H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Spur } A$  heißt *mittlere Krümmung* und
- $K = \kappa_1 \kappa_2 = \det A$  heißt *Gaußsche Krümmung*.

17.06.

**Definition 2.19.** Ist  $x \in T_p M$  eine Richtung, dann heißt  $\{x, -x\} \subset T_p M$ ,  $|x| = 1$  *umorientierte Richtung*.

Seien  $x$  und  $y \in T_p M$  Hauptkrümmungsrichtungen und  $\lambda$  und  $\mu$  die zugehörigen Hauptkrümmungen.

$$\begin{aligned}h(x, x) &= g(Ax, x) = \lambda g(x, x) = \lambda, & h(y, y) &= \mu, \\ h(x, y) &= g(Ax, y) = \lambda g(x, y) = 0\end{aligned}$$

In der Basis  $x, y$  ist  $h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .

Seien  $v = ax + by$  und  $w = cx + dy$ . Dann ist

$$h(v, w) = (a, b) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Parametrisiere alle Richtungen in  $p$  durch  $z(\phi) = \cos \phi x + \sin \phi y$ . [BILD] Wir fragen uns, wie die Normalkrümmung in Richtung  $z$  aussieht:

$$k(\phi) := h(z(\phi), z(\phi)) = (\lambda \cos \phi, \mu \cos \phi)(\cos \phi, \sin \phi)^T = \lambda \cos^2 \phi + \mu \sin^2 \phi.$$

$k$  hat Extrema, wenn

$$\frac{d}{d\phi} k(\phi) = -2\lambda \cos \phi \sin \phi + 2\mu \cos \phi \sin \phi = 2(\mu - \lambda) \cos \phi \sin \phi = 0.$$

1. Fall:  $\mu = \lambda$ . Dann ist  $k(\phi) = \lambda$  für alle  $\phi$ .
2. Fall:  $\lambda \neq \mu$ . Extrema treten auf, wenn  $\phi \in \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$ , d.h. wenn  $z(\phi) = \pm x$  oder  $z(\phi) = \pm y$ . Aus  $\lambda > \mu$  folgt: Maximum bei  $z = \pm x$ ,  $k(\pm x) = \lambda$  und Minimum bei  $z = \pm y$ ,  $k(\pm y) = \mu$ .

**Definition 2.20.** Betrachte die Gaußsche Krümmung  $K = \det A = \lambda\mu$  von  $f$  in  $p$ . Ein  $p \in M$  heißt:

- *elliptischer Punkt* von  $f$  genau dann, wenn  $K > 0$ ,
- *hyperbolischer Punkt*, wenn  $K < 0$ ,
- *parabolischer Punkt*, wenn  $K = 0$  und  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ,
- ein *Flachpunkt*, wenn  $\lambda = \mu = 0$ .

In einem sogenannten *Nabelpunkt*  $p$  ist die Fläche gleich gekrümmt, d.h.  $\lambda = \mu$ , was äquivalent zu  $0 = 1/4(\lambda - \mu)^2 = H^2 - K$  ist.

Frage: Welche Flächen bestehen nur aus Nabelpunkten?

**Satz 2.21.** (*Nabelpunktsatz.*)

Seien alle Punkte  $p \in M$  Nabelpunkte und  $M$  zusammenhängend. Dann gibt es eine Kugel  $S \subset \mathbb{R}^3$  oder eine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  ist  $f(M) \subset S$  bzw.  $f(M) \subset E$ . Hier stimmt was nicht!!!

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $\lambda = \mu = H$  überall, also  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt weil  $\lambda \equiv H$ . Sei  $x \in T_p M$ . Dann ist  $dN(x) = \lambda(p)df(x)$ . Wähle  $x = e_1$  oder

$x = e_2$ . Dann gilt  $N_u = \lambda f_u$  und  $N_v = \lambda f_v$ . Ableiten ergibt:  $N_{uv} = \lambda_v f_u + \lambda f_{uv}$  und  $N_{vu} = \lambda_u f_v + \lambda f_{vu}$ , welche aber gleich sind, wegen der Vertauschbarkeit von Ableitungen, also ist  $\lambda_v f_u - \lambda_u f_v = 0$ . Daraus folgt  $f_u(p)$  und  $f_v(p)$  sind linearunabhängig für alle  $p$ . Aus  $\lambda_u = \lambda_v = 0$  (oder  $d\lambda = 0$ ) folgt  $\lambda = \text{const}$  weil  $M$  zusammenhängend ist.

1. Fall:  $\lambda = 0$ .  $dN = 0$ ,  $N(p) = a \in S^3$ .

$$d\langle a, f \rangle = \langle a, df \rangle = \langle N, df \rangle = 0 \rightsquigarrow \langle a, f \rangle = d.$$

— Gleichung einer Ebene.

2. Fall:  $\lambda \neq 0$ .  $m := f - \frac{1}{\lambda}N$ ,  $dm = df - \frac{1}{\lambda}(\lambda df) = 0$ , also ist  $m = \text{const}$  und  $|f - m| = \frac{1}{|\lambda|}$  — Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt  $m$  und Radius  $|\frac{1}{\lambda}|$ .

□

► **Beispiel 2.22.** Sei  $\gamma : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$  nach der Bogenlänge parametrisiert. Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{N} : (0, L) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{durch } \tilde{N} = J\gamma', \text{ und} \\ f : (0, L) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{durch } f(u, v) = \gamma(u) + ve_3. \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $f$  sind  $f_u(u, v) = T(u)$  und  $f_v(u, v) = e_3$ . Der Normalenvektor der Fläche fällt mit dem der Kurve zusammen, i.e.  $N(u, v) = \tilde{N}(u)$ . [BILD: Zylinder über der Kurve  $\gamma$ .]

Wir bestimmen die Ableitungen von  $N$ , um die Hauptkrümmungen zu finden:

$$\begin{aligned} N_u(u, v) &= \tilde{N}'(u) = -\kappa(u)T(u) = -\kappa(u)f_u(u, v), \\ N_v(u, v) &= 0 = 0 \cdot f_v(u, v). \end{aligned}$$

Also sind  $\lambda(u, v) = -\kappa(u)$  und  $\mu = 0$  die beiden Hauptkrümmungen und  $K = 0$  die resultierende Gaußsche Krümmung.

**Definition 2.23.**

- Ein  $x \in T_p M$ ,  $x \neq 0$  heißt *Asymptotenrichtung*, wenn  $h(x, x) = 0$ .
- Sei  $\hat{\gamma} : (a, b) \rightarrow M$  reguläre Kurve ( $\hat{\gamma}'(t) \neq 0$  für alle  $t$ ) heißt *Asymptotenlinie*, wenn  $\hat{\gamma}'(t)$  Asymptotenrichtung für alle  $t$  ist.

**Satz 2.24.** Sei  $\hat{\gamma} : (a, b) \rightarrow M$  regulär,  $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$ .  $\hat{\gamma}$  ist Asymptotenlinie genau dann, wenn  $\gamma''(t) \in df(T_{\gamma(t)}M)$  für alle  $t$ .



**Bemerkung 2.25.** Seien  $\gamma'(t)$  und  $\gamma''(t)$  linear unabhängig.  $\text{Spann}(\gamma'(t), \gamma''(t))$  nennt man die *Schmiegebene* von  $\gamma$  zur Zeit  $t$ .

In unserem Fall:  $\hat{\gamma}$  ist Asymptotenlinie genau dann, wenn die Schmiegebene mit der Tangentialebene zusammenfällt.

*Beweis.*  $\gamma''(t)$  liegt in  $df(T_{\gamma(t)}M)$  genau dann, wenn  $0 = \langle \gamma'', N \rangle = -\langle \gamma', N' \rangle$  wegen  $\langle \gamma', N \rangle = 0$ . Weiter ist  $-\langle \gamma', N' \rangle = -\langle df(\hat{\gamma}'), df(A\hat{\gamma}') \rangle = -g(\hat{\gamma}', A\hat{\gamma}') = -h(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}')$ .  $\square$

20.06.

Sei  $f$  ein parametrisiertes Flächenstück,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $x, y \in T_pM$  orthonormal bezüglich  $g$  für  $p \in M$ .  $Ax = \lambda x$ ,  $Ay = \mu y$ ;  $z = ax + by$ . Dann ist

$$h(z, z) = a^2 h(x, x) + b^2 h(y, y) = \lambda a^2 + \mu b^2.$$

Wir untersuchen, für welche  $\lambda$  und  $\mu$  die Asymptotenrichtungen existieren:

- Betrachte den Fall  $K = \lambda\mu > 0$ .  $h(z, z) = 0$  genau dann, wenn  $\lambda a^2 + \mu b^2 = 0$ , d.h. nur wenn  $a = b = 0$ , was Widerspruch zu  $z \neq 0$  ist. Es gibt keine Asymptotenrichtungen für diesen Fall.
- Ist  $\lambda = \mu = 0$  (Flachpunkt), dann sind alle Richtungen Asymptotenrichtungen.
- Ist  $\lambda = 0$  und  $\mu \neq 0$ , dann ist  $h(z, z) = 0$  genau dann, wenn  $b = 0$  ist. Damit ist  $z$  Vielfaches von  $x$ . In diesem Fall gibt es genau eine unorientierte Asymptotenrichtung.
- Ist  $K = \lambda\mu < 0$ , z.B.  $\lambda > 0$  und  $\mu < 0$ . Dann ist  $a = \sqrt{-\mu}$  und  $b = \pm\sqrt{\lambda}$ , was zu  $h(z, z) = -\lambda\mu + \lambda\mu = 0$  führt. Hier gibt es genau zwei unorientierte Asymptotenrichtungen.

► **Beispiel 2.26.** Regelfläche.  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M = (a, b) \times \mathbb{R}$ .

$f(u, v) = \gamma(u) + vy(u)$ ,  $v \mapsto f(u_0, v)$  Gerade wenn  $Y(u_0) \neq 0$ .

Wann ist  $f$  ein parametrisiertes Flächenstück?

$f_u(u, v) = \gamma'(u) + vy'(u)$  und  $f_v(u, v) = y(u)$  müssen linear unabhängig für alle  $u$  und  $v$  sein. Notwendig ist  $\gamma'(u)$  und  $y(u)$  linear unabhängig für alle  $u$ . (Setze  $v = 0$ ). Wäre für ein  $u$   $y'(u)$  Linearkombination von  $\gamma'(u)$  und  $y(u)$ .  $y'(u) = a\gamma'(u) + by(u)$ . Wäre  $a \neq 0$ , dann wäre  $f_u = \gamma'(u) - \frac{1}{a}y'(u) = -\frac{b}{a}y(u)$  linear abhängig von  $f_v$  für  $v = -\frac{1}{a}$ .

Wenn  $\gamma', y, y'$  linear unabhängig für alle  $u$  sind, dann ist  $f$  regulär.

Behauptung: Die  $v$ -Richtung ist immer eine Asymptotenrichtung.

Behauptung:  $\hat{\gamma} : (a, b) \rightarrow M$  regulär,  $f \circ \gamma$  liegt auf einer Geraden, dann ist  $\hat{\gamma}$  eine Asymptotenlinie.

*Beweis.* O.B.d.A sei  $|\gamma'| = 1$ .  $T = \gamma'$ ,  $\tilde{N} = N \circ \hat{\gamma}$ ,  $B = T \times \tilde{N}$  — angepaßter Rahmen längs  $\gamma$ .

$\gamma$  ist Asymptotenlinie genau dann, wenn  $\kappa_1 = 0$ , d.h.  $\langle T', N \rangle = 0$ . Aber wenn  $\gamma$  Gerade parametrisiert, so ist  $T' = 0$ .  $\square$

[BILD einschaliges Hyperboloid  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ] Auf einem einschaligen Hyperboloid liegen zwei Scharen von Geraden, welche Asymptotenlinien sind.

[parabolisches hyperdings ???]  $f(u, v) = (u, v, uv)$ . Festes  $u$ :  $v \mapsto (u, v, uv) = (u, 0, 0) + v(0, 1, u)$  Gerade. Ebenso für eine festes  $v$ .

**Satz 2.27.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück.  $p \in M$  kein Nabelpunkt. Dann gibt es Umgebung  $U \subset M$  von  $p$ , offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^2$ , Diffeomorphismus  $\phi : V \rightarrow U$ , so daß  $\tilde{f} = f \circ \phi$  Krümmungslinienparametrisierung ist: Die Koordinatenlinien  $u = \text{const}$  ebenso wie  $v = \text{const}$  sind Krümmungslinien von  $\tilde{f}$ .

**Satz 2.28.**  $f \dots K(p) < 0 \dots$  Asymptotenlinienparametrisierung ist  $\dots$  Asymptotenlinien.

Anschaulich: [BILD Negativgekrümmtes Flächenstück mit Krümmungslinien.]

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine glatte Abbildung  $\tilde{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  bestimmt ein Vektorfeld in  $X : M \rightarrow TM$ ,  $X_p = (p, \tilde{x}(p))$ .

$\gamma : (a, b) \rightarrow M$  heißt *Integralkurve* von  $X$ , wenn für alle  $t \in (a, b)$  die Gleichung  $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$  gilt.

**Satz 2.29.** Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $p \in M$ . Dann gibt es eine Integralkurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  von  $X$  mit  $\gamma(0) = p$ .  $\gamma$  ist eindeutig im folgenden Sinne: Ist

$\tilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  weitere Integralkurve mit  $\tilde{\gamma}(0) = p$ , so gilt

$$\gamma|_{(-\delta, \delta) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)} = \tilde{\gamma}|_{(-\delta, \delta) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)}.$$

*Beweis.* Spezialfall des Satzes von Picard-Lindelöf:  $\gamma'(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$  Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. AWP  $\gamma(0) = p$ . Die Lipschitzbedingung ist erfüllt, weil  $\tilde{X}$  glatt ist.

Warnung: Wir brauchen:  $t \mapsto \gamma(t)$  ist  $C^\infty$  und  $\gamma(t)$  hängt  $C^\infty$  von  $p$  ab. Siehe Hartmann, Ordinary Diff. Eq.  $\square$

**Satz 2.30.** Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $p \in M$ . Dann gibt es Umgebung  $U$  von  $p$ ,  $\varepsilon > 0$  und eine Abbildung  $\phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , so daß für alle  $q \in U$   $\gamma^q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $\gamma^q(t) = \phi(q, t)$  eine Integralkurve von  $X$  mit  $\gamma^q(0) = q$  ist.

Beachte:  $\phi$  ist  $C^\infty$ .

► **Beispiel 2.31.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{X}(u, v) = (-v, u)$ . [BILD von  $\tilde{X}$ ]

$$\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), \quad \gamma'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) = \tilde{X}(\gamma(t)).$$

$$\phi(p, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 2.32.** Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $\dim M = 2$ ,  $p \in M$ . Dann gibt es Umgebung  $U \subset M$  von  $p$  und  $C^\infty$ -Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit (1)  $g \circ \gamma = \text{const}$  für jede Integralkurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  und (2)  $dg_q \neq 0$  für alle  $q \in U$ .

*Beweis.* O.B.d.A sei  $p = (0, 0)$ ,  $X_p = (1, 0)$ . Wende den letzten Satz an: Das liefert uns  $U \subset M$ ,  $\phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $t \mapsto \phi(q, t)$  Integralkurve für alle  $q \in U$ .

[BILD]

Wähle  $\delta > 0$ , so daß  $\{(0, y) \mid |y| < \delta\} \subset U$ . Definiere  $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  durch  $\psi(t, y) = \phi((0, y), t)$ .  $\psi(0, y) = (0, y)$  für alle  $y \in (-\delta, \delta)$ . Außerdem ist  $\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, 0) = (1, 0)^T$ .

Jacobimatrix  $\psi'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Satz über Umkehrfunktion: Es existiert eine Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p = (0, 0)$ , so daß  $\psi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  Diffeomorphismus.

Schreibe  $(\psi|_{\tilde{U}})^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$  als  $(\tau, g)^T$ . Wegen  $\psi(0, 0) = (0, 0)$  ist  $p = (0, 0) \in U \subset M$ .  $g$  ist von der gewünschten Art.

$\tau(\psi(t, y)) = t$ ,  $g(\psi(t, y)) = y$ .  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  Integralkurve.  $\gamma(0) = (0, y)^T$ . Daraus folgt  $\gamma(t) = \psi(t, y)$ ,  $g(\gamma(t)) = g(t, \psi(t, y)) = y$  unabhängig von  $t$ .

$\frac{\partial g}{\partial y}|_{(0,0)} = \frac{d}{dy}|_{y=0} y = 1$ . Also ist  $dg_{(0,0)} \neq 0$  und wegen Stetigkeit existiert eine Umgebung  $\hat{U} \subset U$ , so daß  $dg_q \neq 0$  für alle  $q \in \hat{U}$ . □

24.06.

**Krümmungslinien-Parameter:**  $M \subset \mathbb{R}^2$  offen und zusammenhängend,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiertes Flächenstück ohne Nabelpunkte.

**Hauptkrümmung:**  $H = \frac{1}{2} \text{Spur } A$ ,  $K = \det A : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Sei  $x, y$  eine Basis von  $T_p M$ .  $Ax = ax + cy$  und  $Ay = bx + dy$ .  $A$  hat bezüglich der gewählten Basis die Darstellung:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Hauptkrümmung  $\lambda$  löst

$$0 = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = \lambda^2 - 2\lambda H + K.$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen und Nullstellen fallen nie zusammen (keine Nabelpunkte): Es gibt eine eindeutig bestimmte glatte Funktionen  $\lambda$  und  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda > \mu$  mit  $\lambda^2 - 2\lambda H + K = 0$  und  $\mu^2 - 2\mu H + K = 0$ .

Eigenräume von  $A$  sind eindimensional. In jedem  $T_p M$ ,  $p \in M$  gibt es genau zwei Vektoren  $x$  mit  $Ax = \lambda x$ ,  $g(x, x) = 1$  ( $x$  und  $-x$ ).

[BILD Möbiusband ohne Nabelpunkte]

Global (auf ganz  $M$ ) ist es nicht immer möglich  $x$  stetig auszuwählen. Jeder Punkt  $p \in M$  hat aber eine Umgebung  $U$  auf der das geht. Also: o.B.d.A. (notfalls  $M$  verkleinern) gibt es ein Vektorfeld  $x$  auf  $M$  mit  $x_p \neq 0$  für alle  $p$ ,  $Ax = \lambda x$ . Genauso gibt es ein Vektorfeld  $y \neq 0$  mit  $Ay = \mu y$  auf  $M$ .

Aus der letzten Vorlesung: Sei  $p \in M$ . Dann existiert eine Umgebun  $U$  von  $p$ , glatte Funktionen  $u$  und  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß für alle  $q \in U$  gilt:  $du_q \neq 0$ ,  $du(y_q) = 0$ ,  $dv_q \neq 0$ ,  $dv(x_q) = 0$ . Definiere dann  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi = (u, v)$ .

$$d\phi(x_p) = (du(x_p), dv(x_p)) = (a, 0)$$

mit  $a \neq 0$ , weil  $a = du(x_p) = 0$ , dann  $du(z) = 0$  für alle  $z \in T_p M$ : Widerspruch! Ebenso ist  $d\phi(y_p) = (0, b)$  mit  $b \neq 0$ . Aus  $\dim \text{Bild } d\phi_p = 2$  folgt, daß  $d\phi_p$  invertierbar ist.

Es existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$ , Umgebung  $\tilde{V}$  von  $\phi(p)$ , so daß  $\phi|_V : V \rightarrow \tilde{V}$  ein Diffeomorphismus ist (bijektiv und  $(\phi|_V)^{-1} : \tilde{V} \rightarrow V$  glatt).

[BILD]

Sei  $x \in T_\phi V$ .  $d\phi(x) = \begin{pmatrix} du(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$d\phi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (d\phi)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{du(x)} x,$$

$$d\phi \left( \frac{1}{du(x)} x \right) = \frac{1}{du(x)} d\phi(x) = \frac{1}{du(x)} \begin{pmatrix} du(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend auch

$$df^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{dv(y)} y.$$

$$\psi := \phi^{-1}, \quad \tilde{f} = f \circ \phi$$

$$\tilde{f}_u(q) = df_{\psi(q)}(\psi_u(q)) = df_{\psi(q)}(d\psi(q)(1, 0)) = df_{\psi(q)}(\rho x_{\psi(q)})$$

$$\tilde{N} = N \circ \psi$$

$$\tilde{N}_u(q) = dN_{\psi(q)}(\rho x_{\psi(q)}) = df_{\psi(q)}(A_{\psi(q)}(\rho x_{\psi(q)}))$$

$$= \rho df_{\psi(q)}(\lambda(\psi(q)) x_{\psi(q)}) = \lambda(\psi(q)) \tilde{f}_u(q)$$

Das bedeutet: Für  $v_0 \in \mathbb{R}$  ist  $u \mapsto (u, v_0)$  Krümmungslinie von  $\tilde{f}$ .

**Satz 2.33.** Sei  $M \in \mathbb{R}^2$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  parametrisiertes Flächenstück,  $p \in M$  kein Nabelpunkt. Dann gibt es eine Umgebung  $V \subset M$  von  $p$ , offene Menge  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ , Diffeomorphismus  $\psi : \tilde{V} \rightarrow V$ , so daß  $\tilde{f} = f \circ \psi$  eine Krümmungslinienparametrisierung ist:

$$\tilde{N}_u = \lambda \tilde{f}_u, \quad \tilde{N}_v = \mu \tilde{f}_v.$$

**Satz 2.34.** ... Flächenstück,  $K(p) < 0$ . Dann ...  $\tilde{f} = f \circ \psi$  Asymptotenlinien-Parametrisierung ist:

$$\langle \tilde{N}_u, \tilde{f}_u \rangle = 0, \quad \langle \tilde{N}_v, \tilde{f}_v \rangle = 0.$$

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  Krümmungslinien-Parametrisierung.  $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \times [a, b]$  Diffeomorphismus ( $\phi$  bijektiv und  $\phi'(u) \neq 0$  für alle  $u$ ).  $\psi : [\tilde{c}, \tilde{d}] \rightarrow [c, d]$

dto. Dann ist  $\tilde{f} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \times [\tilde{c}, \tilde{d}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{f}(u, v) = f(\phi(u), \psi(v))$  ist auch eine Krümmungslinien-Parametrisierung.

[BILD]

Genauso für Asymptotenlinien-Parametrisierung.

Flächen, bei welchen eine Hauptkrümmung konstant ist.

$\lambda \in \mathbb{R}$ , so daß überall  $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$

1.  $\lambda = 1$ . Dann ist  $1 - 2H + K = 0$ .

2.  $\lambda = 0$ . Dann ist  $K = 0$ .

$f : (-a, a) \times (-b, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  Nabelpunktfreie Krümmungslinienparametrisierung mit  $N_v = f_v$  und  $N_u = \mu f_u$ ,  $\mu(u, v) \neq 1$  für alle  $u$  und  $v$ . Das ist äquivalent zu  $(f - N)_v = 0$ . Definiere  $\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $\gamma(u) = f(u, v) - N(u, v)$ ,  $v \in (-b, b)$  beliebig.

Behauptung:  $\gamma$  ist regulär, d.h.  $\gamma'(u) \neq 0$  für alle  $u$ .

$$\gamma'(u) = (f_u - N_u)(u, v) = (1 - \mu(u, v))f_u(u, v) \neq 0.$$

Andere Krümmungslinienparametrisierung durch  $(u, v) \rightsquigarrow (\phi(u), v)$ , so daß hinterher  $|\gamma'| = 1$ .

$$\gamma' = T, |T| = 1. f_u(u, v) = \frac{1}{1 - \mu(u, v)}T(u). \langle f_v, f_v \rangle = 0, \langle f_v(u, v), T(u) \rangle = 0, \langle f_{vv}(u, v), T(u) \rangle = 0, \langle f_v v, f_u \rangle = 0.$$

Untersuche die Abhängigkeit der Geschwindigkeit in  $v$ -Richtung von  $u$ :

$$\frac{1}{2} \langle f_v, f_v \rangle_u = \langle f_{vu}, f_v \rangle = \langle f_{uv}, f_v \rangle = \underbrace{\langle f_u, f_v \rangle_v}_{=0} - \underbrace{\langle f_u, f_{vv} \rangle}_{=0} = 0.$$

27.06. Also:  $\sqrt{\langle f_v, f_v \rangle} = g(v)$ .

Längs  $u = u_0$  erreichbar (durch  $f \rightsquigarrow \tilde{f}(u, v) = f(u, \sigma(v))$ ):  $\langle f_v, f_v \rangle(u_0, v) = 1$ . Dann aber, da  $|f_v(u, v)|$  unabhängig von  $u$  ist, gilt  $|f_v(u, v)| = 1$  für alle  $u$  und  $v$ .

Setze  $\tilde{N}(u) = N(u, 0)$  und  $B(u) = f_v(u, 0)$ .  $T(u)$ ,  $\tilde{N}(u)$ ,  $B(u)$  sind paarweise orthogonal und Normiert für alle  $u$ . (Eventuell  $v = -v$  umparametrisieren)  $B = T \times \tilde{N}$ .

[ BILD  $\gamma$  mit Viertel der Röhrenfläche und  $T$ ,  $N$  und  $B$  auf der Fläche und der Kurve. ]

Behauptung:  $T, \tilde{N}, B$  ist ein paralleler Rahmen für  $\gamma$ :

$$\tilde{N}'(u) = N_u(u, 0) = \lambda(u, 0)f_u(u, 0) = \frac{\lambda(u, 0)}{1 - \lambda(u, 0)}T(u).$$

$|f(u, v) - \gamma(u)| = |N(u, v)| = 1$ ,  $\underbrace{\langle f(u, v) - \gamma(u), T(u) \rangle}_{N(u, v)} = 0$ , (wobei  $T(u) = (1 - \gamma(u, v))f_u(u, v)$  war).

$$\begin{aligned} f(u, v) - \gamma(u) &= \cos \alpha(u, v)\tilde{N}(u) + \sin \alpha(u, v)B(u), \\ f_u(u, v) - T(u) &= -\alpha \sin \alpha(u, v)\tilde{N}(u) + \cos \alpha(u, v)\frac{\lambda(u, 0)}{1 - \lambda(u, 0)}T(u) \\ &\quad + \alpha_u \cos \alpha(u, v)B(u) + \sin \alpha(u, v)\underbrace{B'(u)}_{\sigma(u)T(u)} \end{aligned}$$

da der Rahmen parallel ist.

$$f_u(u, v) = \left(\frac{1}{1 - \lambda(u, v)} - 1\right)T(u)$$

Daraus folgt  $\alpha_u(\sin \alpha, \cos \alpha) = 0$ , also  $\alpha_u = 0$ .

Das gleiche in  $v$ -Richtung:

$$\begin{aligned} f_v(u, v) &= (f(u, v) - \gamma(u))_v \\ &= -\alpha_v(u, v)\sin \alpha(u, v)\tilde{N}(u) + \alpha_v(u, v)\cos \alpha(u, v)B(u). \end{aligned}$$

Betrag nehmen: dann ist  $1 - \alpha_v^2(u, v)$ .  $f$  spiegeln, dann werden  $B$  zu  $-B$  und  $\alpha$  zu  $-\alpha$  und daraus folgt  $\alpha_v = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_u = 0 \\ \alpha_v = 1 \end{array} \right\} \alpha(u, v) = \alpha_0 + v.$$

Nochmal Parameterwechsel  $v \rightarrow \alpha_0 + v = \tilde{v}$ . Dann ist  $\alpha = v$  und

$$f(u, v) = \gamma(u) + \cos vN(u) + \sin vB(u).$$

Zusammenfassung: Alle Nabelpunktfreien Flächen mit einer Hauptkrümmung 1 entstehen local so:

1. Wähle Bogenlängenparametrisierte Kurve  $\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .
2. Wähle parallelen Rahmen  $T, \tilde{N}, B$  längs  $\gamma$ .
3. Definiere parametrisierte Fläche  $f : (-a, a) \times (-b, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$f(u, v) = \gamma(u) + \cos vN(u) + \sin vB(u).$$

Die Krümmungslinien, die zu der konstanten Hauptkrümmung 1 gehören, sind in  $\mathbb{R}^3$  Kreise von Radius 1. Bei der Umkehrung muß man vorsichtig sein:  $f_u(u, v)$  darf nirgendwo Null werden.

► **Beispiel 2.35.**  $\gamma$  Kreis von Radius  $r < 1$  [BILD]

Aufgabe  $\kappa(u) = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}(u) < 1$  für alle  $u \rightsquigarrow b = \pi$  wählbar.

Fall  $\mu \equiv 0$ :  $N_v = 0$ ,  $N(u, v) = \hat{N}(u)$ . Betrachte Kurven  $u \mapsto f(u, 0)$  und  $v \mapsto f(0, v)$ .

O.B.d.A  $|f_u(u, 0)| = 1$ ,  $|f_v(0, v)| = 1$ .

$$\begin{aligned} \langle f_{vv}, f_u \rangle &= \frac{1}{\lambda} \langle f_{vv}, N_u \rangle = \frac{1}{\lambda} (\underbrace{\langle f_v, N_u \rangle}_{=\lambda f_u} - \underbrace{\langle f_v, N_{uv} \rangle}_{=0}) = 0, \\ \frac{1}{2} \langle f_v, f_v \rangle_u &= \langle f_{vu}, f_v \rangle = \langle f_{uv}, f_v \rangle = \underbrace{\langle f_u, f_v \rangle_v}_{=0} - \underbrace{\langle f_u, f_{vv} \rangle}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Aus  $\langle f_v, f_v \rangle(0, v) = 1$  folgt  $|f_v(u, v)| = 1$ .

$$0 = \langle f_v, f_v \rangle_v = \langle f_{vv}, f_v \rangle, \quad \langle f_{vv}, N \rangle = \underbrace{\langle f_v, N \rangle_v}_{=0} - \underbrace{\langle f_v, N_v \rangle}_{=0} = 0.$$

$$\begin{aligned} T(u) &= \gamma'(u) & N(u) &= N(u, 0) \\ B(u) &= f_v(u, 0) & B &= T \times N \quad \text{eventuell } v \rightarrow -v \\ f_{vv} &= 0 & \rightsquigarrow & f(u, v) = f(u, 0) + v f_v(u, 0) = \gamma(u) + v B(u) \end{aligned}$$

Also: Nabelpunktfreie Flächen mit  $K \equiv 0$  entstehen als  $f(u, v) = \gamma(u) + v B(u)$ ,  $\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^3$  Bogenlängenparametrisiert und  $T, N, B$  paralleler Rahmen.

Wir fragen uns, welche Flächen zu einer Ebene isometrisch sind.

**Satz 2.36.** Sei  $\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $|\gamma'| = 1$ ,  $T, N, B$  - paralleler Rahmen,  $\varepsilon$  so klein, daß

$$f : (-a, a) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = \gamma(u) + v B(u)$$

reguläre Fläche ist. Dann gibt es (eventuell  $a$  und  $\varepsilon$  verkleinern) eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^3$  und einen Diffeomorphismus  $\phi : V \rightarrow (-a, a) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , so daß  $\tilde{f} := f \circ \phi$  isometrisch ist, d.h. für alle  $x, y \in T_p U$  gilt

$$g(x, y) = \langle df(x), df(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$



*Beweis.*  $T' = \kappa_1 \hat{N} + \kappa_2 B$ . Nehme  $\hat{\gamma} : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|\hat{\gamma}'| = 1$ ,  $\hat{\gamma}' = \hat{T}$ ,  $\hat{T}' = \kappa_2 \hat{N}$ ,  $\hat{N} = J\hat{T}$ .

Definiere  $\hat{f} : (-a, a) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\hat{f}(u, v) = \hat{\gamma}(u) + v\hat{N}(u)$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}_u(u, v) &= \hat{T}(u) - v\kappa_2(u)\hat{T}(u) = (1 - v\kappa_2(u))\hat{T}(u) & \hat{f}_v(u, v) &= \hat{N}(u) \\ |\hat{f}_u|^2(u, v) &= (1 - v\kappa_2(u))^2 & \langle \hat{f}_u, \hat{f}_v \rangle &= 0 & |\hat{f}_v|^2 &= 1 \\ \hat{f}_u &= (1 - \kappa_2(u))T(u) & \hat{f}_v &= B(u) \\ |f_u|^2(u, v) &= (1 - \kappa_2(u))^2 & \langle f_u, f_v \rangle &= 0 & |f_v|^2 &= 1 \end{aligned}$$

$a, \varepsilon$  verkleinern gibt uns einen Diffeomorphismus  $\tilde{f} : (-a, a) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ . Wähle  $\phi := \tilde{f}^{-1}$ ,  $\tilde{f} := f \circ \phi$ . Nachrechnen:  $|f_u| = 1$ ,  $\langle f_u, f_v \rangle = 0$ ,  $|f_v| = 1$ . Daraus folgt, daß  $\tilde{f}$  isometrisch ist.  $\square$

01.07.

Wir wollen allgemeine Flächen ankommen. Für  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  hatten wir einen Rahmen genommen (beachte, daß  $\gamma$  nicht unbedingt bogenlängeparametrisiert ist:  $\gamma' = vT$ ). Sind die Größen  $v, \kappa_1, \kappa_2, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann existiert ein angepaßter Rahmen  $T, N, B$  für diese Größen.  $\gamma$  ist eindeutig bis auf Translation und Drehung (... Satz).

Sei  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein reguläres Flächenstück.

[BILD]

Wir wollen wie für die Kurven auch für die Flächen einen Rahmen konstruieren.

Wir haben schon den Normalenvektor  $N = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$  gegeben, und wollen jetzt ein Koordinatensystem in jedem Punkt konstruieren. Wähle  $x$  und  $y : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so daß diese senkrecht zueinander sind und zu  $N$  und normiert. Für alle  $p \in M$  ist  $x(p), y(p), N(p)$  eine positiv orientierte ON-Basis von  $\mathbb{R}^3 (= T_{f(p)}\mathbb{R}^3)$ . Solche  $x$  und  $y$  gibt es immer. Man erhält sie beispielsweise durch das Gram-Schmidt Verfahren angewendet auf  $f_u, f_v$  und  $N$ :  $x = \frac{f_u}{|f_u|}$ ,  $y = N \times x$ .

Seien im Folgenden  $x$  und  $y$  allgemein mit diesen Eigenschaften. Sei  $f_u = \alpha_1 x + \alpha_2 y$  und  $f_v = \beta_1 x + \beta_2 y$ . Dann gilt für die Ableitungen von  $x, y$  und  $N$ :

$$\begin{aligned} x_u &= \omega y + a_1 N & y_u &= -\omega x + a_2 N & N_u &= -a_1 x - a_2 y \\ x_v &= \eta y + b_1 N & y_v &= -\eta x + b_2 N & N_v &= -b_1 x - b_2 y \end{aligned}$$

Man kann die Funktionen  $\alpha_1$  etc. nicht frei wählen, wie bei den Kurven, weil die partiellen Ableitungen sind miteinander zusammenhängen, um eine Fläche zu erhalten.

$$\begin{aligned}
f_{uv} &= (\alpha_1)_v x + \alpha_1(\eta y + b_1 N) + (\alpha_2)_v y + \alpha_2(-\eta x + b_2 N) \\
f_{vu} &= (\beta_1)_u x + \beta_1(\omega y + a_1 N) + (\beta_2)_u y + \beta_2(-\omega x + a_2 N)
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$(\alpha_1)_v - \alpha_2 \eta = (\beta_1)_u - \beta_2 \omega \quad (\alpha_2)_v + \alpha_1 \eta = (\beta_2)_u + \beta_1 \omega \quad (14)$$

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \quad (15)$$

Die Gleichungen (14) in der ersten Zeile nennt man „1. Strukturgleichung“ und die Gleichung (15) in der zweiten Zeile die „Symmetriegleichung“

$$\begin{aligned}
x_{uv} &= \omega_v y + \omega(-\eta x + b_2 N) + (a_1)_v N + a_1(-b_1 x - b_2 y) \\
x_{vu} &= \eta_u y + \eta(-\omega x + a_2 N) + (b_1)_u N + b_1(-a_1 x - a_2 y)
\end{aligned}$$

Wieder der Koeffizientenvergleich:

$$-\omega \eta - a_1 b_1 = -\eta \omega - a_1 b_1$$

$$\omega_v - \eta_u = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (16)$$

$$\omega b_2 - \eta a_2 = (b_1)_u - (a_1)_v \quad (17)$$

Die erste Gleichung ist immer erfüllt (und bekommt daher keinen Namen), die zweite (16) nennt man „Gauß-Gleichung“.

Ableitungen für  $y$  wollen wir nicht ausrechnen: sie sind aus den Gleichungen für  $x$  durch Ersetzen von  $\omega$  durch  $-\omega$  und  $\eta$  durch  $-\eta$  und der Vertauschung der Indizes  $1 \leftrightarrow 2$ . Daraus bekommen wir

$$\eta a_1 - \omega b_1 = (b_2)_u - (a_2)_v \quad (18)$$

Zusammen mit der 3. Gleichung aus dem letzten Koeffizientenvergleich nennt man die Gleichungen (17) und (18) die „Codazzi-Gleichungen“.

Die Betrachtung von  $N_{uv} = N_{vu}$  liefert nichts neues. Unser Ziel: Sind diese 10 Funktionen gegeben, welche diese 6 Gleichungen erfüllen, dann wollen wir zeigen, daß die Fläche sich eindeutig bestimmen lässt.

Darstellung von Euklidischen Bewegungen in  $\mathbb{R}^3$  durch  $4 \times 4$ -Matrizen.

$$\underbrace{p \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt im } \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \hat{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \underbrace{x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor im } \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Eine Bewegung  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\phi(p) = Ap + b$  kann dann dargestellt werden durch

$$F = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

[ kommutatives Diagramm ]

$$F\tilde{x} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ 0 \end{pmatrix} = \widehat{Ax}.$$

**Definition 2.37.**  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3) := \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A \in SO(3), b \in \mathbb{R}^3 \right\}$ .  
 $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  ist Untergruppe von  $GL(4, \mathbb{R})$ :

$$F = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3) \rightsquigarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3)$$

...

Sei  $(f, x, y, N)$  eine gerahmte Fläche. Definiere  $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  durch

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, 0) & y(u, 0) & N(u, 0)f(u, 0) & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrische Bedeutung:  $F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f$  Nullpunkt in  $\mathbb{R}^3$  (gehutet)  $\mapsto f(u, v)$ .

$$F \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{x}, \quad F \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{y}, \quad \begin{pmatrix} e_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{N}.$$

$F$  heißt auch „bewegter Rahmen“ (“moving frame”).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & -a_1 & \alpha_1 \\ \omega & 0 & -a_2 & \alpha_2 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\eta & -b_1 & \beta_1 \\ \eta & 0 & -b_2 & \beta_2 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = F^{-1}F_u, \quad \tilde{B} = F^{-1}F_v.$$

Behauptung:  $A = \tilde{A}$ ,  $B = \tilde{B}$ .

*Beweis.*

$$\begin{pmatrix} f \\ 1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} f_u \\ 0 \end{pmatrix} = F_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F\tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)$$

$$\begin{pmatrix} f_u \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_1 F e_1 + \alpha_2 F e_2.$$

Andere Spalten genauso.

...

□

04.07.

**Satz 2.38.** (Maurer-Cartan Lemma) Seien  $A$  und  $B : [a, b] \times [c, d] \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ .

1. Es gibt  $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  mit  $F_u = FA$  und  $F_v = FB$  genau dann, wenn  $A_v - B_u = [A, B] = AB - BA$ . (Lie-Klammer).
2. Ist  $\tilde{F}$  weitere Lösung von  $F_u = FA$ ,  $F_v = FB$ , so gilt  $\tilde{F} = GF$  mit  $G \in GL(n, \mathbb{R})$  fest.

*Beweis.* „ $\implies$ “ Es gebe  $F$ . Dann ist

$$\begin{aligned} F_{uv} &= F_v A + F A_v = F B A + F A_v \\ F_{vu} &= F_u B + F B_u = F A B + F B_u \\ A_v - B_u &= AB - BA. \end{aligned}$$

„ $\impliedby$ “ Es gebe  $A_v - B_u = AB - BA$ . Konstruiere  $F(u, c)$  als die Lösung des AWP  $F_u(u, c) = F(u, c)A(u, c)$ ,  $F(a, c) = I$ . Für alle  $u \in [a, b]$  definiere dann  $v \mapsto F(u, v)$  als die Lösung des AWP  $F_v(u, v) = F(u, v)B(u, v)$  und  $F(u, c) =$  wie schon berechnet.

Damit haben wir das  $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  gefunden. Per Definition gilt  $F_v = FB$ .

Noch zu zeigen:  $F_u = FA$ . (Bisher hatten wir das nur für  $v = c$  gezeigt.)

$$\begin{aligned} (F_u - FA)_v &= F_{uv} - FBA - FA_v = F_{vu} - F(A_v + BA) \\ &= F_{vu} - F(B_u + AB) = (FB)_u - F(B_u + AB) \\ &= F_u B + FB_u - FB_u + FAB = (F_u - FA)B. \end{aligned}$$

Für festes  $u \in [a, b]$  ist  $v \mapsto (F_u - FA)(u, v) =: Y(u, v)$  Lösung des AWP  $Y_v = YB$ ,  $Y(c) = 0$ . Daraus folgt  $Y(v) = 0$  für alle  $v$ . Also  $F_u - FA$  auf

ganz  $[a, b] \times [c, d]$ .

$$\begin{aligned} F_u &= FA & \tilde{F}_u &= \tilde{F}A \\ F_v &= FB & \tilde{F}_v &= \tilde{F}B \\ G &:= \tilde{F}F^{-1} \end{aligned}$$

$$G_u = \tilde{F}_u F^{-1} - \tilde{F} F^{-1} F_u F^{-1} = \tilde{F} A F^{-1} F A F^{-1} = \tilde{F} (A - A) F^{-1} = 0.$$

Genauso  $G_v = 0$ , also ist  $G = \text{const.}$

□

Gegeben 10 Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , die die 6 Gleichungen ... erfüllen. Das kann man durch  $A = ()$  und  $B = ()$  darstellen. Erfüllen dann  $A_v = B_u = [A, B]$ .

Aus dem Maurer-Cartan Lemma (Satz 2.38 auf der vorherigen Seite) folgt  $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow GL(4, \mathbb{R})$  mit  $F_u = FA, F_v = FB$  und  $F(a, c) = I$ .

Behauptung:  $F(u, v) \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  für alle  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ .

*Beweis.*  $F = \begin{pmatrix} Y & W \\ Z^t & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $F \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  genau dann, wenn  $Y \in SO(3)$ ,  $Z = 0$  und  $\alpha = 1$ . Für  $v = c$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_u & W_u \\ Z_u^t & \alpha_u \end{pmatrix} F_u &= \begin{pmatrix} Y & W \\ Z^t & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YX & Yy \\ Z^t X & Z^t y \end{pmatrix} \\ X + X^t &= 0 & Y_u &= YX & Z_u &= X^t Z & \alpha_u Z^t y & \\ Y(a) &= I & Z(a) &= 0 & \alpha(a) &= 1 \end{aligned}$$

$$(YY^t)_u = YXY^t + Y(YX)^t = Y(X + X^t)Y^t = 0 \rightsquigarrow YY^t(u, c) = I \text{ für alle } u$$

$$Z_u = X^t Z, \quad Z(a, c) = 0 \rightsquigarrow Z(v, c) = 0 \text{ für alle } u$$

$$\alpha_u = 0 \rightsquigarrow \alpha(u, c) = 1 \text{ für alle } u.$$

Also ist  $F(u, c) \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  für alle  $u \in [a, b]$ . Dieselbe Rechnung in  $v$ -Richtung liefert  $F(u, v) \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  für alle  $u$  und  $v$ . □

Fläche mit Rahmen  $(x, y, N)$  zu den 10 Funktionen konstruiert. Gibt es eine weitere gerahmte Fläche  $(\tilde{f}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{N})$  mit denselben Funktionen, dann gibt es ein  $C \in SO(3)$  und  $b \in \mathbb{R}^3$  mit

$$\tilde{f} = CF + b \quad \tilde{x} = Cx \quad \tilde{y} = Cy \quad \tilde{N} = CN.$$

(Hauptsatz der Flächentheorie.)

Seien  $M = [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  reguläres Flächenstück,  $N = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$ ,  $x, y : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x(u, v), y(u, v), N(u, v)$  positiv orientierte ON-Basis von  $\mathbb{R}^3$  für

alle  $u$  und  $v$ .

$$df(e_1) = f_u = \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad df(e_2) = f_v = \beta_1 x + \beta_2 y$$

Matrix von  $df_{(u,v)} : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow df_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$  bezüglich der Basis  $e_1, e_2$  bzw.  $x(u, v), y(u, v)$ :

$$df = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad dN = \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}$$

Weingartenabbildung  $A = (df)^{-1}dN$ .

$$K = \det A = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \quad H = \frac{1}{2} \text{Spur } A = \dots$$

1. Fundamentalform:  $E = \langle f_u, f_u \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ ,  $F = \langle f_u, f_v \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$ ,  
 $G = \langle f_v, f_v \rangle = \beta_1^2 + \beta_2^2$ .

**Satz 2.39.** (Theorema egregium, Gauß):  $f$  und  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  mögen dieselbe induzierte Metrik haben:

$$\langle df(z), df(w) \rangle = \langle d\tilde{f}(z), d\tilde{f}(w) \rangle$$

für alle  $z$  und  $w \in T_p M$ ,  $p \in M$ . Dann haben  $f$  und  $\tilde{f}$  dieselbe Gaußsche Krümmung  $K = \tilde{K}$ .

**Lemma 2.40.** Seien  $f$  und  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  isometrisch und  $(x, y, N)$  ein Rahmen für  $f$ . Dann gibt es einen Rahmen  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{N})$  von  $\tilde{f}$  mit  $\alpha_{1,2} = \tilde{\alpha}_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2} = \tilde{\beta}_{1,2}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f_u &= \alpha_1 x + \alpha_2 y & f_v &= \beta_1 x + \beta_2 y \\ x &= \alpha_1^* f_u + \alpha_2 f_v & y &= \beta_1^* f_u + \beta_2^* f_v \\ 1 &= \langle x, x \rangle = (\alpha_1^*)^2 \langle f_u, f_u \rangle + 2\alpha_1^* \alpha_2 \langle f_u, f_v \rangle + (\alpha_2^*)^2 \langle f_v, f_v \rangle \\ 0 &= \langle x, y \rangle = \dots \\ 1 &= \langle y, y \rangle = \dots \end{aligned}$$

Wir wissen, daß  $\langle \tilde{f}_u, \tilde{f}_u \rangle = \langle f_u, f_u \rangle, \dots$ . Dann ist

$$\tilde{x} := \alpha_1^* \tilde{f}_u + \alpha_2^* \tilde{f}_v \quad \tilde{y} := \beta_1^* \tilde{f}_u + \beta_2^* \tilde{f}_v \quad \tilde{N} = \tilde{x} \times \tilde{y}$$

$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{N})$  ist eine positiv orientierte ON-Basis für alle  $(u, v) \in M$ . □

Beweis von Satz 2.39. 1. Strukturgleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1v} - \beta_{1u} \\ \alpha_{2u} - \beta_{2v} \end{pmatrix}.$$

Also ist  $\tilde{\eta} = \eta$  und  $\tilde{\omega} = \omega$ .

Gauß-Gleichung:  $a_1 b_2 - b_1 a_2 = \omega_v - \eta_u$ ,  $\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{b}_1 \tilde{a}_2 = a_1 b_2 - b_1 a_2$ .

$$K = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 - \alpha_2} = \frac{\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{b}_1 \tilde{a}_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 - \alpha_2} = \tilde{K}.$$

□

08.07.

## 2.4. Flächen konstanter Krümmung ( $K = 0$ oder $H = 0$ )

Wir wollen die Flächen mit konstanter Krümmung betrachten.

### 2.4.1. Flächen mit $K < 0$

$K < 0$  heißt, daß Produkt beider Hauptkrümmungen kleiner Null sind.

$K < 0$  heißt, dass im jeden Punkt zwei linear unabhängige Asymptotenrichtungen ( $h(u, u) = h(v, v) = 0$ )  $U$  und  $V \in T_p M$  existieren. Lokal existiert eine Asymptotenlinien-Parametrisierung.  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $e_1$  und  $e_2$  sind Asymptotenrichtungen.

$$\left. \begin{array}{l} u \mapsto (u, v_0) \\ v \mapsto (u_0, v) \end{array} \right\} \text{ sind Asymptotenlinien ... für alle } u_0 \text{ und } v_0.$$

Man spricht auch von  $u \mapsto f(u, v_0)$  als Asymptotenlinie.

Wähle  $X$  und  $Y$  in Krümmungsrichtungen. Für  $\hat{X}(u, v) \in T_{(u,v)} M$  und  $\hat{Y}(u, v) \in T_{(u,v)} M$ :  $X = df(\hat{X})$ ,  $Y = df(\hat{Y})$  ON-Basis von  $df(T_{(u,v)} M)$ . Das ist genau dann der Fall, wenn  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  ON-Basis von  $T_{(u,v)} M$  bezüglich der 1. Fundamentalform  $g$ .

Wähle  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  als Krümmungsrichtungen, d.h. als Eigenvektoren von  $A$ :  $A\hat{X} = \lambda\hat{X}$ ,  $A\hat{Y} = \mu\hat{Y}$ ,  $\lambda\mu = K < 0$ .

Wir müssen noch  $u$  und  $v$  wählen.

Schreibe  $e_1$  als  $\alpha_1 \hat{X} + \alpha_2 \hat{Y}$  und  $e_2 =: \beta_1 \hat{X} + \beta_2 \hat{Y}$ .

$$\begin{aligned}
0 &= h(e_1, e_1) = g(Ae_1, e_1) = g(\alpha_1 A\hat{X} + \alpha_2 A\hat{Y}, \alpha_1 \hat{X} + \alpha_2 \hat{Y}) \\
&= g(\lambda\alpha_1 \hat{X} + \mu\alpha_2 \hat{Y}, \alpha_1 \hat{X} + \alpha_2 \hat{Y}) \\
&= \lambda\alpha_1^2 + \mu\alpha_2^2
\end{aligned}$$

ebenso

$$0 = \lambda\beta_1^2 + \mu\beta_2^2.$$

Wir schreiben  $(\alpha_1, \alpha_2) = \rho(\cos \phi, \sin \phi)$  und  $(\beta_1, \beta_2) = \tilde{\rho}(\cos \tilde{\phi}, \sin \tilde{\phi})$  mit  $\rho$  und  $\tilde{\rho} > 0$ .

$$\lambda \cos^2 \phi + \mu \sin^2 \phi = 0 \quad \lambda \cos^2 \tilde{\phi} + \mu \sin^2 \tilde{\phi} = 0$$

$\phi \equiv \tilde{\phi}$  oder  $\phi \equiv \tilde{\phi} + \pi \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$  sind Lösungen, die aber ausscheiden, weil  $e_1$  und  $e_2$  linearunabhängig sind.

*Behauptung:* Die weiteren Lösungen sind  $\tilde{\phi} = -\phi$  oder  $\tilde{\phi} = -\phi + \pi$ .

$$\langle (\lambda, \mu), (\cos^2 \phi, \sin^2 \phi) \rangle = 0 \quad \langle (\lambda, \mu), (\cos^2 \tilde{\phi}, \sin^2 \tilde{\phi}) \rangle = 0$$

Das Gleichungssystem  $\langle (\lambda, \mu), (a, b) \rangle = 0$ ,  $a + b = 1$  hat eindeutige Lösung, also ist  $\cos^2 \phi = \cos^2 \tilde{\phi}$  und  $\sin^2 \phi = \sin^2 \tilde{\phi}$ . Die Lösungen sind

$$\phi = \tilde{\phi}, \quad \phi = \tilde{\phi} + \pi, \quad \phi = -\tilde{\phi}, \quad \phi = -\tilde{\phi} + \pi.$$

(Zwei davon scheiden aus.)

Im Fall  $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + \pi$ : Ändere die Parametrisierung zu  $\tilde{f} : [a, b] \times [-d, -c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{f}(u, v) = f(u, -v)$ .

Also: O.B.d.A. gilt  $\tilde{\phi} = -\phi$ .

[BILD, welches viel erklären soll]

Krümmungsrichtungen sind Winkelhalbierende der Asymptotenrichtungen (bezüglich  $g$ )

[Noch ein BILD mit  $X$  und  $Y$  als Winkelhalbierende]

Für unsere Formeln gilt dann:

$$\begin{aligned}
f_u &= \rho \cos \phi + \rho \sin \phi, & f_v &= \tilde{\rho} \cos \phi - \rho \sin \phi \\
\alpha_1 &= \rho \cos \phi, & \alpha_2 &= \rho \sin \phi, & \beta_1 &= \tilde{\rho} \cos \phi, & \beta_2 &= -\tilde{\rho} \sin \phi.
\end{aligned}$$



Aus  $0 = h(e_1, e_1) = \langle dN(e_1), df(e_1) \rangle = \langle N_u, f_u \rangle$  folgt

$$\begin{aligned} N_u &= -\tau N \times f_u = -\tau \rho N \times (\cos \phi X + \sin \phi Y) \\ &= -\tau \rho (\sin \phi X + \cos \phi Y) \\ N_v &= -\tilde{\tau} N \times f_v = -\tilde{\tau} \tilde{\rho} (\sin \phi X + \cos \phi Y) \end{aligned}$$

Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} f_u &= \rho \cos \phi X + \rho \sin \phi Y & f_v &= \tilde{\rho} \cos \phi X - \tilde{\rho} \sin \phi Y \\ X_u &= \omega Y - \rho \tau \sin \phi N & X_v &= \eta Y + \tilde{\rho} \tilde{\tau} \sin \phi N \\ Y_u &= -\omega X + \rho \tau \cos \phi N & Y_v &= -\eta X + \tilde{\rho} \tilde{\tau} \cos \phi N \\ N_u &= \rho \tau \sin \phi X - \rho \tau \cos \phi Y & N_v &= -\tilde{\rho} \tilde{\tau} \sin \phi X - \tilde{\rho} \tilde{\tau} \cos \phi Y \end{aligned}$$

Jetzt haben wir nur noch 7 Funktionen  $\rho, \dots$ . Es werden aber noch weniger:

Symmetriegleichung (Wir verwenden  $\sin \phi \cos \phi \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_1 + \alpha_1 b_2 &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \\ \rho \cos \phi \tilde{\rho} \tilde{\tau} \sin \phi + \rho \sin \phi \tilde{\rho} \tilde{\tau} \cos \phi &= -\tilde{\rho} \cos \phi \rho \tau \sin \phi - \tilde{\rho} \sin \phi \rho \tau \cos \phi \\ \tilde{\tau} &= -\tau \end{aligned}$$

Deutung:  $\gamma(u) = f(u, v_0)$ . Raumkurve  $\gamma$  hat Frenet-Rahmen

$$T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}, \quad B = N(u, v_0), \quad \tilde{N} = B \times T,$$

$$\begin{aligned} \langle T', B \rangle(u) &= \left\langle \left( \frac{f_u}{|f_u|} \right)_u, N \right\rangle(u, v_0) = \frac{1}{|f_u|^2} \langle f_{uu}, N \rangle(u, v_0) \\ &= -\frac{1}{|f_u|^2} \langle f_u, N_u \rangle(u, v_0) = -\frac{1}{|f_u|^2} h(e_1, e_1)(u, v_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Kurve  $\gamma$  ist nicht nach der Bogenlänge parametrisiert:  $B' = -\kappa_2 v T - \tau v N$ ,  
 $v =: \rho$ .

Frenet-Torsion von  $\gamma$  (mit  $|f_u| =: \rho$ ):

$$\begin{aligned} -\langle B', \tilde{N} \rangle &= -\left\langle N_u, N \times \frac{f_u}{\rho} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \langle \rho \tau \sin \phi X - \rho \tau \cos \phi Y, \rho \cos \phi Y - \rho \sin \phi X \rangle \\ &= -\frac{1}{\rho^2} (-\sin^2 \phi \rho^2 \tau - \rho^2 \tau \cos^2 \phi) \\ &= \tau \end{aligned}$$

Deutung:  $\tau$  ist die Torsion der  $u$ -Linie,  $-\tau$  ist die Torsion der  $v$ -Linie.

**Satz 2.41.** *Die Torsionen der beider Asymptotenlinien durch einen Flächenpunkt sind entgegengesetzt gleich. Für beide Torsionen gilt*

$$\tau^2 = -K.$$

*Beweis.*

$$K = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_1} = \frac{\rho \tilde{\rho} \tau^2 \cos \phi \sin \phi + \rho \tilde{\rho} \tau^2 \cos \phi \sin \phi}{-\rho \tilde{\rho} \cos \phi \sin \phi - \rho \tilde{\rho} \cos \phi \sin \phi} = -\tau^2.$$

11.07. □

Kurven konstanter negativer Krümmung  $K = -1$ .

$\tau = 1$  und  $\tilde{\tau} = -1$  (eventuell  $u$  und  $v$  vertauschen).

Die Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} f_u &= \rho \cos \phi X + \rho \sin \phi Y & f_v &= \tilde{\rho} \cos \phi X - \tilde{\rho} \sin \phi Y \\ X_u &= \omega Y - \rho \sin \phi N & X_v &= \eta Y - \tilde{\rho} \sin \phi N \\ Y_u &= -\omega X + \rho \cos \phi N & Y_v &= -\eta X - \tilde{\rho} \cos \phi N \\ N_u &= \rho \sin \phi X - \rho \cos \phi Y & N_v &= \tilde{\rho} \sin \phi X + \tilde{\rho} \cos \phi Y \end{aligned}$$

Ziel: Freiheit  $u = f(u)$ ,  $v = g(v)$  als neue Parameter, um  $\rho$  und  $\tilde{\rho}$  aus den Gleichungen zu eliminieren.

1. Strukturgleichung:  $(\alpha_1)_v - (\beta_1)_u = \alpha_2 \eta - \beta_2 \omega$ :

$$\rho_v \cos \phi - \rho \phi_v \sin \phi - \tilde{\rho}_u \cos \phi + \tilde{\rho} \phi_u \sin \phi = \rho \sin \phi \eta + \tilde{\rho} \sin \phi \omega.$$

Codazzi-Gleichung:  $(a_1)_v - (b_1)_u = \eta a_1 - \omega b_2$ :

$$-\rho_v \sin \phi - \rho \phi_v \cos \phi + \tilde{\rho}_u \sin \phi + \tilde{\rho} \phi_u \cos \phi = -\eta \rho \cos \phi + \omega \tilde{\rho} \cos \phi + \omega \tilde{\rho} \cos \phi.$$

1. Gleichung mit  $\cos \phi$  und 2. mit  $\sin \phi$  multimplizieren und voneinander abziehen:

$$\rho_v - \tilde{\rho}_u = 0.$$

Andere 1. Strukturgleichung und Codazzi-Gleichung liefert:

$$\rho_v + \tilde{\rho}_u = 0.$$

Insgesamt haben wir dann  $\rho_v = \tilde{\rho}_u = 0$ .

$\rho$  ist die Geschwindigkeit der  $u$ -Linien:  $\rho = |f_u|$ .  $u$  umparametrisieren ergibt  $\rho(u, v_0) = 1$  für ein beliebiges festes  $v_0$ . Da  $\rho_v = 0$  ist, gilt  $\rho(u, v) = 1$  für alle  $u$  und  $v$ . Genauso mit  $v$  verfahren liefert  $\tilde{\rho}(u, v) = 1$  für alle  $u$  und  $v$ .

Betrachte 1. Codazzi-Gleichung noch ein Mal:

$$-\sin \phi \underbrace{(\rho_u - \tilde{\rho}_v)}_{=0} = \cos \phi (\rho(\eta + \rho_v) + \tilde{\rho}(\omega - \phi_u)),$$

aus welcher folgt

$$\eta + \phi_v + \omega \dots$$

$$\begin{array}{ll} f_u = \cos \phi X + \sin \phi Y & f_v = \cos \phi X - \sin \phi Y \\ X_u = \phi_u Y - \sin \phi N & X_v = -\phi_v Y - \sin \phi N \\ Y_u = -\phi_u X + \cos \phi N & Y_v = \phi_v X - \cos \phi N \\ N_u = \sin \phi X - \cos \phi Y & N_v = \sin \phi X + \cos \phi Y \end{array}$$

Alle 6 Gleichungen bis auf die Gauß-Gleichung sind automatisch erfüllt. Aus der Gauß-Gleichung  $\omega_v - \eta_u = a_1 b_2 - b_1 a_2$  folgt  $\phi_{uv} + \phi_{vu} = -\cos \phi \sin \phi - \cos \phi \sin \phi$  (oder vielleicht doch mit +???)

$$\phi_{uv} = \frac{1}{2} \sin 2\phi$$

”Sinus-Gordon Gleichung”, welche eine wichtige Rolle in der mathematischen Physik spielt.

$$\begin{aligned} \psi = 2\phi \quad \frac{1}{2}\psi_{uv} &= \frac{1}{2} \sin \psi \quad \psi_{uv} = \sin \psi \\ x = u + v \quad t = u - v \\ \psi_u &= \psi_x \frac{\partial x}{\partial u} + \psi_t \frac{\partial t}{\partial u} = \psi_x + \psi_t \\ \psi_{uv} &= \psi_{ux} \frac{\partial x}{\partial v} + \psi_{ut} \frac{\partial t}{\partial v} = \psi_{ux} - \psi_{ut} = (\psi_x + \psi_t)_x - (\psi_x + \psi_t)_t = \psi_{xx} - \psi_{tt} \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + \sin \psi &= 0 \end{aligned}$$

[BILD: Kette von Pendeln, die um die Achse pendeln können, elastisch gekoppelt (Achse aus Gummi) und zusätzlich Gravitation.]

$\psi(x, t)$  = Auslenkung (winkelmäßig) des Pendels bei Position  $x$  zur Zeit  $t$ . Newton'sche Gleichungen:  $\psi_{tt}(x, t) = \psi_{xx}(x, t) - \sin \psi$ .

**Definition 2.42.** Eine parametrisierte Fläche  $f : \mathbb{R}^2 \supset M \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt ein *Chebycheff-Netz*, wenn  $|f_u| = |f_v| = 1$ .

**Satz 2.43.** Auf einer Fläche mit  $K = -1$  bilden die Asymptotenlinien ein Chebycheff-Netz.

[BILDer von Zylinder mit Netz mit unterschiedlichen Öffnungen und verdreht.]

Alle Netzlinien sind "Asymptotenlinien" (denn Schmiegenebene der Linien ist gleich der Tangentialebene der Fläche).

Die Umkehrung gilt auch: Bilden auf einer (neg. gekrümmten) Fläche die Asymptotenlinien ein Chebycheff-Netz, so ist  $K \equiv \text{const} < 0$ .

*Beweis.* Wähle als Parametrisierung Asymptotenlinien-Parameter  $u$  und  $v$  mit  $|f_u| = |f_v| = 1$ . Wähle  $X$  und  $Y$  winkelhalbierend dazu. Dann ist

$$\begin{aligned} f_u &= \cos \phi X + \sin \phi Y & f_v &= \cos \phi X - \sin \phi Y \\ X_u &= \omega Y - \tau \sin \phi N & X_v &= \eta Y - \tau \sin \phi N \\ Y_u &= -\omega X + \tau \cos \phi N & Y_v &= -\eta X - \tau \cos \phi N \\ N_u &= \tau \sin \phi X - \tau \cos \phi Y & N_v &= \tau \sin \phi X + \tau \cos \phi Y \end{aligned}$$

Aus der 1. Strukturgleichung folgt  $\phi_u - \phi_v = \eta + \omega$  und  $\phi_u + \phi_v = -\eta + \omega$ , was  $f_u = \omega$  und  $-\phi_v = \eta$  liefert.

Die Codazzi-Gleichungen folgt  $\tau_u - \tau_v = 0$  und  $\tau_u + \tau_v = 0$ , also ist  $\tau = \text{const}$ . □

Drehflächen mit  $K = -1$ . [BILDer von dings, die im Grenzfall die Pseudosphäre ist, deren Meridiankurve eine Traktrix ist.]

## A. Bezeichnungen

$C^\infty$  – unendlich oft differenzierbare Funktionen.

$C^\infty[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$  — Vektorraum  $C^\infty$ -Funktionen eingeschränkt auf das Intervall  $[a, b]$ .

$\text{supp } f = \overline{\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq 0\}}$  — Träger von  $f \in C^\infty$ .

$C_0^\infty(a, b) = \{f \in C^\infty[a, b] \mid \text{supp } f \subset (a, b)\}$  — der Raum der Funktionen  $f \in C^\infty[a, b]$  mit kompaktem Träger in  $(a, b)$ .

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  — Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$ .

$gl(n, \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid A \text{ linear}\} = \text{End}(\mathbb{R}^n)$  — reelle  $n \times n$  Matrizen.

$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$  — allgemeine lineare Gruppe.

$sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid \text{Spur } A = 0\}$ .

$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$  — spezielle lineare Gruppe.

$O(n) := \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$  — orthogonale Gruppe.  $A \in O(n) \Leftrightarrow \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

$so(n) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\}$ .

$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$  — spezielle orthogonale Gruppe; orthogonale  $n \times n$  Matrizen, welche die Orientierung erhalten.

## B. Hilfslemmata und -sätze

**Lemma B.1.** Seien  $W$  euklidischer Vektorraum (möglicherweise  $\infty$ -dimensional),  $V \subset W$  Unterraum derart, daß  $V^\perp = 0$ , und  $U \subset W$ ,  $\dim U < \infty$ . Dann gilt  $(V \cap U^\perp)^\perp = U$ .

*Beweis.* Sei  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine ON-Basis von  $U$  und sei  $\pi : W \rightarrow U$ ,  $\pi(z) = \sum_{i=1}^n \langle z, x_i \rangle x_i$  eine Orthogonalprojektion, also insbesondere  $\pi(z) = 0$  für  $z \in U^\perp$  und  $\pi(z) = z$  für  $z \in U$ .

Wir werden häufig ausnutzen, daß das Skalarprodukt zwischen Vektoren  $z$  und Elementen aus  $U$  genauso gut über die Projektionen berechnet werden kann:

Für alle  $z \in W$ ,  $x \in U$  gilt (Beachte, daß  $a_i = a_j$ , wenn  $\delta_{ij} \neq 0$  und  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ ):

$$\begin{aligned} \langle z, x \rangle &= \langle z, \sum_i a_i x_i \rangle = \sum_i a_i \langle z, x_i \rangle = \sum_j \sum_i a_i \langle z, x_i \rangle \cdot \delta_{ij} \\ &= \langle \sum_i \langle z, x_i \rangle x_i, \sum_j a_j x_j \rangle = \langle \pi(z), x \rangle. \end{aligned}$$

Behauptung:  $\pi|_V : V \rightarrow U$  surjektiv.

$\pi(V)$  ist Unterraum von  $U$  und  $\dim U < \infty$ . Also ist  $U$  direkte Summe vom Bild der Projektion und dessen orthogonalen Komplement:  $U = \pi(V) \oplus \pi(V)^\perp$ .

Wäre  $\pi|_V$  nicht surjektiv, das heißt  $\pi(V)^\perp \neq \{0\}$ , so gäbe es ein  $x \in U$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \perp \pi(V)$ .

Daraus folgt  $\langle z, x \rangle = \langle \pi(z), x \rangle = 0$  für alle  $z \in V \rightsquigarrow x \in V^\perp = \{0\} \rightsquigarrow x = 0$  — Widerspruch.

Also existieren  $z_i \in V$  mit  $\pi(z_i) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Zeige nun:  $(V \cap U^\perp)^\perp \in U$ . Sei also  $y \in (V \cap U^\perp)^\perp$ ,  $z \in V$  beliebig. Setze  $\tilde{z} = z - \sum \langle z, x_i \rangle z_i$ .

Das ist ein natürlicher Ansatz, wenn man möchte, daß der neue Vektor immer noch in  $V$  liegt und senkrecht zu  $U$  ist (vergleiche Orthogonalisierungsverfahren).

Dann ist  $\langle \tilde{z}, x_j \rangle = \langle z, x_j \rangle - \sum \langle z, x_i \rangle \underbrace{\langle z_i, x_j \rangle}_{\langle \pi(z_i), x_j \rangle = \delta_{ij}} = 0$ , also  $\tilde{z} \in U^\perp \cap V$ . Daraus

folgt :

$$0 = \langle y, \tilde{z} \rangle = \langle y, z \rangle - \sum_{i=1}^n \langle z, x_i \rangle \langle y, z_i \rangle = \langle z, \underbrace{y - \sum \langle y, z_i \rangle x_i}_{= 0, \text{ weil } V^\perp = \{0\}} \rangle \quad \forall z \in V$$

$$\rightsquigarrow y = \sum \langle y, z_i \rangle x_i \rightsquigarrow y \in U.$$

$U \subset (V \cap U^\perp)^\perp$  einfach: Sei  $x \in U$ ,  $z \in V \cap U^\perp$ . Dann  $\langle x, z \rangle = 0$  wegen  $z \in U^\perp$ .  $\square$

**Satz B.2 (Satz von Picard–Lindelöf über gewöhnliche Differentialgleichungen).** Sei  $U \in \mathbb{R}^n$  offen,  $F : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung:  $|F(t, y) - F(t, x)| \leq L|y - x| \quad \forall t, L \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es zu  $t_0 \in [a, b]$ ,  $x_0 \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  und eine bestimmte Abbildung  $f : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(t_0) = x_0$  und  $f'(t) = F(t, f(t)) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

*Wichtiger Spezialfall:  $U = \mathbb{R}^n$ ,  $F(t, x) = B(t)x$ ,  $B : [a, b] \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$  stetig.  
Automatisch auch Existenz von  $f$  auf ganz  $[a, b]$ .*

## Index

- äquivalente Flächenstücke, 45
  - 1. Fundamentalform, 47
  - 2. Fundamentalform, 50
- Abbildung
  - adjungierte, 53
  - schiefadjungierte, 53
  - selbstadjungierte, 53
- adjungierte Abbildung, 53
- angepaßter Rahmen, 30
  - paralleler, 30
- Asymptoten-
  - Linie, 56
  - Richtung, 56
- Biegenergie, 21
- Bogenlänge (Parametrisierung), 8
- Chebycheff-Netz, 75
- Diffeomorphismus, 46
  - orientierungstreuer, 46
- Einheits-
  - normalenvektor, 9
  - tangentenvektor, 9
- elastische Kurve, 26
- elliptischer Punkt, 55
- Flächenstück
  - parametrisiertes, 45
- Flächenstücke
  - äquivalente, 45
- Flachpunkt, 55
- freie elastische Kurve, 22, **25**
- Frenet-
  - Gleichungen, 9
  - Krümmung, 39
  - Rahmen, 33
  - Torsion, 39
- Fundamentalform
  - erste, 47
  - zweite, 50
- Gaußsche Krümmung, 54
- geschlossene Kurve, 13
- Hauptkrümmung, 54
- Hauptkrümmungsrichtung, 54
- Hauptsatz der Kurventheorie, 35
- hyperbolischer Punkt, 55
- induzierte Metrik, 47
- Krümmung, 9, 16
  - Frenet-, 39
  - Gaußsche, 54
  - Haupt-, 54
  - mittlere, 54
  - Normal-, 54
- Krümmungskurve, 40
- Krümmungslinienparametrisierung, 58
- Kurve
  - elastische, 26
  - freie elastische, 22, **25**
  - geschlossene, 13
  - Länge der, 6
  - Lissajou, 13
  - orientiert äquivalent, 5, 13
  - parametrisierte, 5
  - regulär homotop, 17
- Länge der Kurve, 6
- Lissajou Kurve, 13
- Metrik
  - induzierte, 47
  - mittlere Krümmung, 54
- Nabelpunkt, 55
- Normalkrümmung, 54
- orientiert äquivalent, 5, 13
- orientierungstreuer Diffeomorphismus, 46
- parabolischer Punkt, 55
- paralleler angepaßter Rahmen, 30
- parametrisierte Kurve, 5
- parametrisiertes Flächenstück, 45
- Parametrisierung
  - Krümmungslinien-, 58
  - nach Bogenlänge, 8



Punkt  
  elliptischer, 55  
  Flach-, 55  
  hyperbolischer, 55  
  Nabel-, 55  
  parabolischer, 55

Röhrenflächen, 31

Rahmen  
  Frenet-, 33

regulär homotop, 17

Richtung, 54  
  umorientierte, 54

schiefadjungierte Abbildung, 53

Schmiege-  
  Ebene, 57  
  Kreis, 10

selbstadjungierte Abbildung, 53

Tangentenumlaufzahl, 15

Tangential-  
  bündel, 46  
  raum, 46, 49  
  vektor, 46

Torsion, 31  
  Frenet-, 39

umorientierte Richtung, 54

Variation, 22

Variationsvektorfeld, 23

Vektorfeld, 48

Weingartenoperator, 50

Wendepunkt, 38