Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1

- Krümmung als zentraler Begriff der Differenzialgeometrie
- Diffgeo 1: Krümmung von Kurven und Flächen
- Diffgeo 2: Mannigfaltigkeiten, Vektorbündel, Riemannsche Geometrie
- innere und äußere Geometrie einer Fläche
  - Beispiel: Geometrie auf einem Zylinder
  - Beispiel: sphärische Geometrie
    - Kürzeste sind Großkreisbögen
    - Winkelsumme im Dreieck $= \pi +$ Flächeninhalt
- Ausblick
  - Gauß–Krümmung und Theorema egregium
  - Satz von Gauß–Bonnet (Diffgeo 2)

Litaraturhinweise

[1] Ballmann. *Einführung in die Geometrie und Topologie* (Kapitel 4) $\to 2, 3, 4, 5, 8$
[2] Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces* $\to 6$
[3] Kühnel. *Differentialgeometrie*
[4] Montiel & Ros. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*
[5] Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*
[6] Skript von Alexander Bobenko (Oktober 2006) $\to 6$
http://page.math.tu-berlin.de/~bobenko/Lehre/Skripte/KuF.pdf
[7] Skript von Dirk Ferus (Winter 2000) $\to 13, 14$
http://page.math.tu-berlin.de/~ferus/DG/Diffgeo1.pdf
[8] Skript von Ulrich Pinkall (Sommer 2016) $\to 8$
http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS16/DGI/mitschrift.pdf
[9] ... überarbeitete Version zu Kurven (Sommer 2016) $\to 5, 6, 7$
http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS16/DGI/DiffgeoI.pdf
[10] Skript von John Sullivan (Sommer 2015)
http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS15/DGI/dg1.pdf
[11] Ein altes Miniskript von Boris Springborn (Sommer 2006) $\to 15$
ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/Diffgeo1/SS06/miniskript-kuf-SS06.pdf

Die Zahlen nach dem Pfeil geben an, in welchen Kapiteln ich besonders viel aus der jeweiligen Quelle abgeschrieben habe.

2 Kurven

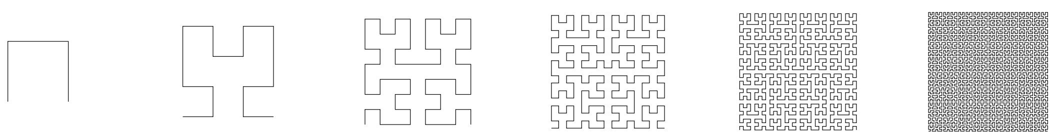
Eine *Kurve* ist eine stetige Abbildung $c : I \to X$ von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ in einen topologischen Raum X. Das Intervall I kann offen, halboffen, abgeschlossen, endlich oder unendlich sein. Wir schließen aber die leere Menge und einpunktige Intervalle aus.

In dieser Vorlesung interessieren uns Kurven im $\mathbb{R}^n$,

$$c : I \to \mathbb{R}^n,$$

insbesondere die Fälle $n = 2$ (*ebene Kurven*) und $n = 3$ (*Raumkurven*).

Stetige Kurven können sehr verschieden sein von dem, was man sich zunächst anschaulich unter einer Kurve vorstellt. So gibt es ebene Kurven, die das Einheitsintervall $[0, 1]$ auf das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ abbilden (Beispiele von Peano und Hilbert). Außerdem kann man stetige Kurven nicht mit Mitteln der Differentialrechnung behandeln.



[Postscript-Programm von Stefan Sechelmann]

Wir wollen nur Kurven betrachten, die „genügend oft“ differenzierbar sind. Der Einfachheit halber werden wir, wenn nichts anderes gesagt wird, von allen Kurven stillschweigend voraussetzen, dass sie *glatt*, d.h. beliebig oft differenzierbar (C^∞) sind.

Eine Kurve c heißt *regulär*, wenn $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Beispiele 2.1. Wenn nichts anderes angegeben ist, sei der Definitionsbereich $I = \mathbb{R}$.

- $c_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$
- $c_2(t) = (t, t^3)$
- $c_3(t) = (t^3, t^2)$
- $c_4(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t}}, 0) & \text{wenn } t > 0 \\ (0,0), & t = 0 \\ (0, e^{\frac{1}{t}}), & t < 0 \end{cases}$
- $c_5 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\cos t, \sin t)$
- $c_6 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\cos t, \sin t)$

Ein *Diffeomorphismus* ist eine umkehrbare glatte Abbildung, deren Inverse auch glatt ist.

Seien I und $\tilde{I}$ Intervalle und $\phi : \tilde{I} \to I$ ein Diffeomorphismus. Wenn $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve ist, dann ist auch die Komposition

$$\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde{c} = c \circ \phi$$

eine glatte Kurve, die *Umparametrisierung* von c mit *Parametertransformation* ϕ. Die Umparametrisierung ist *orientierungserhaltend* wenn die Parametertransformation monoton steigend ist, sonst *orientierungsumkehrend*.

Die Kurve c ist genau dann regulär, wenn $\tilde{c}$ regulär ist.

Wir interessieren uns für die *euklidische Geometrie* von Kurven im $\mathbb{R}^n$. Was heißt das?

Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ und der dazugehörigen Metrik $d(p,q) = |p - q|$, wobei $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Die Isometrien des R^n sind genau die Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Form

$$p \longmapsto Ap + b, \quad A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n.$$

Sie sind orientierungserhaltend, wenn $\det A > 0$ also $A \in \mathrm{SO}(n)$. Eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$ nennt man auch eine *Bewegung*, und eine *starre Bewegung*, wenn sie orientierungserhaltend ist.

Wir interessieren uns nur für solche Eigenschaften von Kurven, die invariant unter Bewegungen sind, oder zumindest unter starren Bewegungen. (Im zweiten Fall hängt die Eigenschaft von der gewählten Orientierung des $\mathbb{R}^n$ ab.)

Insbesondere interessieren uns solche Eigenschaften, die zusätzlich invariant unter Umparametrisierung sind. Beispiele von solchen Invarianten sind Länge und Krümmung einer Kurve.

3 Länge und Energie 2

Die *Länge* einer Kurve $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}(t)| \, dt\,.$$

Prüfe: Die Länge ist invariant unter Bewegungen und Umparametrisierungen $\tilde{c} = c \circ \phi$. (Dabei muss die Parametertransformation ϕ kein Diffeomorphismus sein. Es reicht, wenn sie differenzierbar und monoton ist.)

Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}$ heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn $|\dot{c}(t)| = 1$ für alle $t \in I$.

Satz 3.1. *Für jede reguläre Kurve c gibt es eine monoton steigende Parametertransformation ϕ, so dass die umparametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Satz 3.2. *Sei $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und seien $a = c(t_0)$, $b = c(t_1)$ ihr Anfangs- und Endpunkt. Dann gilt*

$$L(c) \geq d(a, b).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn c eine Umparametrisierung der geraden Strecke

$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad \sigma(t) = (1 - t)a + tb$$

ist. (Wenn c nicht regulär ist, ist die Parametertransformation glatt und monoton steigend, aber kein Diffeomorphismus.)

Korollar 3.3. *Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$d(a,b) = \min\{L(c) \,|\, c \textit{ ist glatte Kurve von } a \textit{ nach } b\}.$$

Die *Energie* einer glatten Kurve $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}(t)|^2 \, dt \,.$$

Die Energie hängt von der Parametrisierung der Kurve ab.

Satz 3.4. *Für jede glatte Kurve $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ gilt die Ungleichung*

$$E(c) \geq \frac{1}{2(t_1 - t_0)} \, L^2(c).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn c mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert ist, d.h. wenn $|\dot{c}|$ konstant ist.

Satz 3.5. *Sei $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und seien $a = c(t_0)$, $b = c(t_1)$ ihr Anfangs- und Endpunkt. Dann gilt*

$$E(c) \geq \frac{d(a,b)^2}{2(t_1 - t_0)}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$c(t) = \frac{1}{t_1 - t_0}\big((t_1 - t)a + (t - t_0)b\big).$$

4 Krümmung einer Kurve

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

Das *Einheitstangentialvektorfeld*

$$T(t) = \frac{1}{|\dot{c}|} \, \dot{c} \,,$$

von c ist dann ein glattes Vektorfeld mit Norm 1.

Die *Krümmung* κ von c ist die Norm der Ableitung von T *nach der Bogenlänge*,

$$\kappa(t) = \left| \lim_{t_1 \to t} \frac{T(t_1) - T(t)}{\int_t^{t_1} |\dot{c}(\tau)| \, d\tau} \right| = \frac{|\dot{T}|}{|\dot{c}|}.$$

Mit

$$\dot{T} = \frac{1}{|\dot{c}|}\big(\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T\big) \tag{1}$$

erhält man

$$\kappa = \frac{1}{|\dot{c}|^2} |\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T| \,.$$

Wenn c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, vereinfacht sich das zu

$$\kappa = |\ddot{c}| \,.$$

3

Die Krümmung ist invariant unter Umparametrisierung. Damit ist gemeint, dass die Krümmung an entsprechenden Stellen gleich ist: Wenn $\tilde{c} = c \circ \phi$, dann ist $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$.

Beispiele 4.1. • Eine reguläre Kurve ist genau dann ein parametrisiertes Geradenstück, wenn $\kappa = 0$.
- Ein Kreis mit Radius r hat konstante Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$.
- Eine Helix $c(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ hat auch konstante Krümmung. Welche?

Bemerkung 4.2. Wenn wir die Ableitung nach der Bogenlänge mit $\frac{d}{ds}$ bezeichnen und die Ableitung nach dem Kurvenparameter mit $\frac{d}{dt}$, dann gilt

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\dot{c}|}\frac{d}{dt}$$

und somit

$$T = \frac{d}{ds}c, \qquad \kappa = \left|\frac{d}{ds}T\right| = \left|\frac{d^2}{ds^2}c\right|.$$

Definition 4.3. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, und an der Stelle $t \in I$ seien die ersten beiden Ableitungen $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ linear unabhängig. Dann heißt

(i) die normalisierte Komponente von $\ddot{c}(t)$ senkrecht zu $\dot{c}(t)$,

$$N(t) = \frac{\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T\rangle T}{|\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T\rangle T|},$$

der *Hauptnormalenvektor* der Kurve c an der Stelle t.

(ii) die von $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ aufgespannte Ebene durch $c(t)$ die *Schmiegebene* von c an der Stelle t. (Also bilden $T(t)$ und $N(t)$ eine Orthonormalbasis der Schmiegebene.)

(iii) der Kreis in der Schmiegebene mit Radius $\frac{1}{\kappa(t)}$ und Mittelpunkt $c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$ der *Schmiegkreis* von c an der Stelle t .

Satz 4.4. *Angenommen, die ersten beiden Ableitungen der Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig and der Stelle $t \in I$. Dann gilt: Wenn $t_1 < t_2 < t_3$ in I nahe genug an t liegen, dann liegen die Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$, $c(t_3)$ nicht in einer Geraden, so dass der Kreis durch die drei Punkte einedeutig bestimmt ist. Für $t_1, t_2, t_3 \to t$ konvergiert der Kreis durch $c(t_1)$, $c(t_2)$, $c(t_3)$ gegen den Schmiegkreis von c an der Stelle t.*

[Beweisidee nach Ballmann]

5 Ebene Kurven, orientierte Krümmung

Für ebene Kurven $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist es sinnvoll, eine *vorzeichenbehaftete* oder *orientierte Krümmung* zu definieren, die ebenfalls mit κ bezeichnet wird. Die im vorigen Abschnitt behandelte Krümmung nennt man zur Unterscheidung auch *Absolutkrümmung*.

Wir bezeichnen die Einheitsmatrix und die 90°-Drehmatrix mit I und J,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$|Jv| = |v|, \qquad \langle v, Jv\rangle = 0, \qquad \det(v, Jv) = |v|^2 \geq 0.$$

Wenn v Einheitsvektor ist, dann ist (v, Jv) eine positive orientierte Orthonormalbasis.

Das *Einheitsnormalenvektorfeld* von c,

$$N = JT,$$

ergänzt das ein Einheitstangentialvektorfeld punktweise zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis.

Aus $\langle T, T\rangle = 1$ folgt $\langle \dot{T}, T\rangle = 0$. Also ist $\dot{T}$ punktweise ein Vielfaches von N.

Die *[orientierte] Krümmung* von c ist definiert durch

$$\frac{1}{|\dot{c}|}\dot{T} = \kappa N. \tag{2}$$

Für Kurven, die nach der Bogenlänge parametrisiert sind, bedeutet das

$$\ddot{c} = \kappa J \dot{c}.$$

Mit Gleichung (1) erhält man aus (2) die Formel

$$\kappa = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{|\dot{c}|^3}.$$

Die im vorigen Abschnitt definierte Absolutkrümmung ist $|\kappa|$. 4

Die orientierte Krümmung ist invariant unter Bewegungen und orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, ändert aber ihr Vorzeichen unter orientierungsumkehrenden Isometrien und Umparametrisierungen.

Beispiel 5.1. Eine reguläre Kurve parametrisiert genau dann ein Stück eines Kreises, wenn die Krümmung konstant und nicht null ist. ($|c-m| = const. > 0 \Leftrightarrow \kappa = const. \neq 0$.)

Lemma 5.2 (Krümmung als Ableitung des Tangentensteigungswinkels)**.** *Sei $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit Einheitstangentialvektorfeld T. Dann gibt es eine glatte Funktion $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}$, so dass $T = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Die Funktion α ist bis auf Addition eines Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt, und es gilt $\dot\alpha = |\dot c|\kappa$.*

Satz 5.3 (Fundamentalsatz der Theorie von ebenen Kurven)**.** *Seien $\kappa^* : I \to \mathbb{R}$ und $v : I \to \mathbb{R}_{>0}$ glatte Funktionen. Dann gibt es eine reguläre ebene Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ deren orientierte Krümmung κ^* ist und deren Geschwindigkeit $|\dot c| = v$ ist. Wenn $\tilde c$ ebenfalls eine reguläre ebene Kurve mit orientierter Krümmung κ und Geschwindigkeit v ist, dann sind c und $\tilde c$ orientiert kongruent, d.h. es gibt $A \in \mathrm{SO}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\tilde c = Ac + b$.*

6 Tangentenumlaufzahl

Eine Kurve $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn sich c periodisch zu einer glatten (!) auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Kurve mit Periode $t_1 - t_0$ fortsetzen lässt. Das ist genau dann der Fall, wenn für c und alle Ableitung $c^{(k)}$ gilt, dass die Werte in den Endpunkten t_0, t_1 übereinstimmen.

Satz 6.1. *Für jede nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene ebene Kurve $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ gilt*

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

- Die ganze Zahl $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\, ds$ heißt die *Tangentenumlaufzahl* von c.
- Für geschlossene ebene Kurven $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$, die regulär aber nicht nach der Bogenlänge parametrisiert sind, muss man statt dem Integral $\int_0^L \kappa(s)\, ds$ das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \kappa(t)\, |\dot c(t)|\, dt$$

betrachten. 5

Beispiele 6.2. (mehrfach durchlaufener) Kreis, Acht

- Eine geschlossene Kurve $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ heißt *einfach geschlossen*, wenn sie auf $[t_0, t_1)$ injektiv ist.

Satz 6.3 (Tangentenumlaufsatz von Hopf)**.** *Für jede nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene ebene Kurve $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ gilt*

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds = \pm 2\pi.$$

Lemma 6.4. *Für jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ mit $|\gamma| = 1$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}$, so dass $\gamma = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Jede stetige Funktion mit dieser Eigenschaft unterscheidet sich von α um ein konstantes Vielfaches von 2π.*

Bemerkung 6.5. Lemma 6.4 bleibt richtig, wenn man (beide Male) „stetig differenzierbar" durch „stetig" ersetzt. Dann kann man zum Beweis nicht mehr die Theorie von gewöhnlichen Differenzialgleichungen heranziehen, sondern braucht ein rein topologisches Argument. Das Stichwort ist „Überlagerungsabbildungen". 6

Definition 6.6 (reguläre Homotopie)**.** Zwei reguläre geschlossene Kurven $c, \tilde c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ heißen *regulär homotop*, wenn es eine stetige Funktion

$$h : [t_0, t_1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$$

gibt, so dass gilt:

(i) Für jedes $\tau \in [0, 1]$ ist die Kurve $c_\tau := h(\cdot, \tau) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre geschlossene Kurve.
(ii) $c = c_0$ und $\tilde c = c_1$
(iii) Die partielle Ableitung $\partial_1 h$ ist ebenfalls stetig auf $[t_0, t_1] \times [0, 1]$.

- Reguläre Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 6.7 (Whitney–Graustein)**.** *Zwei ebene Kurven $c, \tilde{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ sind genau dann regulär homotop, wenn sie die gleiche Tangentenumlaufzahl haben.*

⑦

Beim Beweis kann man sich (u.a. wegen folgender Beobachtungen) auf den Fall zurückziehen, dass $c, \tilde{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven der Länge 1 sind.

- Reguläre Homotopie ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch und transitiv)
- Reguläre Homotopie und Umparametrisierung: (i) Sei $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine geschlossene reguläre Kurve und sei ϕ eine glatte Funktion mit positiver Ableitung, die das Intervall $[t_0, t_1]$ auf sich abbildet und $\phi^{(k)}(t_0) = \phi^{(k)}(t_1)$ erfüllt für alle $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann sind c und $\tilde{c} := c \circ \phi$ regulär homotop.

  (ii) Seien $c, \tilde{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ regulär homotop, und sei ψ eine glatte Funktion mit nirgends verschwindender Ableitung, die das Intervall $[s_0, s_1]$ auf das Intervall $[t_0, t_1]$ abbildet und $\psi^{(k)}(s_0) = \psi^{(k)}(s_1)$ erfüllt für alle $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann sind auch $c \circ \psi$ und $\tilde{c} \circ \psi$ regulär homotop.
- Reguläre Homotopie und Bewegung: (i) Sei $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine geschlossene reguläre Kurve, und seien $A \in SO(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann sind c und $\tilde{c} := Ac + b$ regulär homotop. (Für den Beweis des Satzes von Whitney–Graustein brauchen nur den Fall $n = 2$.)

  (ii) Seien $c, \tilde{c}$ regulär homotop in $\mathbb{R}^n$, seien $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$. Dann sind auch $f \circ c$ und $f \circ \tilde{c}$ regulär homotop. (Gilt auch, wenn man nur $A \in GL(n)$ voraussetzt. Oder noch allgemeiner, wenn f irgendeine glatte Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich ist, deren Ableitung df überall regulär ist.)

7 Raumkurven ⑧

Definition 7.1. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve mit Einheitstangentialvektorfeld T. Ein *angepasster Rahmen* von c ist ein Tripel glatter Funktionen $T, N, B : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, so dass $(T(t), N(t), B(t))$ für jedes $t \in [a, b]$ eine positive orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Eine Kurve zusammen mit einem angepassten Rahmen heißt eine *gerahmte Kurve*. Die Vektorfelder N und B heißen das *Normalen-* und *Binormalenvektorfeld* der gerahmten Kurve.

- Man kann einen angepassten Rahmen auch als Funktion
$$F = (T\ N\ B) : [a, b] \to \mathrm{SO}(3) \tag{3}$$
  auffassen.
- Beispiel: *Frenet-Rahmen*
$$N = \frac{T'}{|T'|}, \quad B = T \times N. \tag{4}$$
  Existiert wenn T' nie verschwindet, also genau dann, wenn $c'(t)$ und $c''(t)$ für jedes t linear unabhängig sind.
- Warum gibt es stets einen angepassten Rahmen?
- Ableitungsgleichungen (für bogenlängenparametrisierte Kurven):
$$\begin{aligned} T' &= \qquad\quad \kappa_1 N + \kappa_2 B \\ N' &= -\kappa_1 T \qquad\quad + \ \tau B \\ B' &= -\kappa_2 T - \ \tau N \end{aligned} \tag{5}$$
  oder
$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\tau \\ \kappa_2 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$
- Wie sehen die Ableitungsgleichungen für nicht nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven aus?
- Die glatten Funktionen $\kappa_1, \kappa_2, \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißen die *Normalenkrümmung*, *Binormalenkrümmung*, und *Torsion* der gerahmten Kurve.
- Die Absolutkrümmung ist $\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$.

- Für Frenet-Rahmen ist $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 = \kappa$, und τ heißt die Torsion der Kurve.
- Def.: *normales Vektorfeld* längs einer regulären Kurve im $\mathbb{R}^n$
- Def.: *paralleles normales Vektorfeld*
- Wenn V und W parallele normale Vektorfelder sind, dann ist auch $aV + bW$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ein paralleles normales Vektorfeld.
- Parallele normale Vektorfelder haben konstante Länge, und der Winkel zwischen zweien ist konstant. ⑨
- Existenz- und Eindeutigkeit von parallelen normalen Vektorfeldern mit gegebenem Wert an einer Stelle
- *Paralleler Rahmen*: N (und damit auch B) ist eine paralleles normales Vektorfeld. $\tau = 0$.
- Zu jeder regulären Kurve gibt es einen parallelen Rahmen.

Satz 7.2 (Fundamentalsatz für gerahmte Raumkurven). *(i) Seien κ_1, κ_2 und τ glatte Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte gerahmte Kurve (c, F) mit κ_1, κ_2 und τ als Normalenkrümmung, Binormalenkrümmung und Torsion. (ii) Wenn $(\tilde{c}, \tilde{F})$ eine andere gerahmte Kurve mit dieser Eigenschaft ist, dann gibt es $A \in \mathrm{SO}(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$, so dass $\tilde{c} = Ac + b$ und $\tilde{F} = AF$.*

8 Parametrisierte Flächenstücke im $\mathbf{R}^3$

- Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, heißt *regulär* oder eine *Immersion*, wenn für alle $p \in U$ die Ableitung df_p eine reguläre lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist, also wenn $\operatorname{Ker} df_p = \{0\}$ oder, äquivalent, $\operatorname{rang} df_p = m$, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn die partiellen Ableitungen
$$\partial_1 f(p), \quad \partial_2 f(p), \quad \ldots, \quad \partial_m f(p)$$
linear unabhängig sind.
- Ein *parametrisiertes Flächenstück* ist eine Immersion $f : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Zwei parametrisierte Flächenstücke $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ heißen *äquivalent*, wenn es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\phi : U \to \tilde{U}$ gibt, so dass $f = \tilde{f} \circ \phi$.
- Eine Abbildung $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn ϕ glatt und umkehrbar ist, und wenn die Umkehrfunktion ϕ^{-1} auch glatt ist. Ein Diffeomorphismus heißt *orientierungserhaltend*, wenn $\det d\phi_p > 0$ für alle $p \in U$. (Wenn U zusammenhängend ist, gilt diese Ungleichung genau dann für alle p, wenn sie für ein p gilt.)

Beispiele 8.1. (1) *Rotationsflächen*. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), z(t))$ eine reguläre ebene Kurve mit $x > 0$. Dann ist
$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t, \phi) = \begin{pmatrix} x(t)\cos\phi \\ x(t)\sin\phi \\ z(t) \end{pmatrix},$$
ein parametrisiertes Flächenstück, die +Rotationsfläche, die aus der *Profilkurve* c durch Rotation um die z-Achse entsteht. Die Kurven $\phi = const.$ heißen *Meridiane*, die Kurven $t = const.$ heißen *Breitenkreise*. ⑩

(2) *Schraubflächen*. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$ eine reguläre ebene Kurve, $a \neq 0$. Dann ist
$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t, \phi) = \begin{pmatrix} x(t)\cos\phi - y(t)\sin\phi \\ x(t)\sin\phi + y(t)\cos\phi \\ a\phi \end{pmatrix}$$
ein parametrisiertes Flächenstück, eine *von der Kurve c erzeugte Schraubfläche*. Für $c(t) = (t, 0)$ erhält man die *Wendelfläche*, auch das *Helikoid* genannt.

(3) *Regelflächen*. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve, und sei $X : I \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs c, so dass $c'(t)$ und $X(t)$ für jedes $t \in I$ linear unabhängig sind. Dann heißt $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$$f(s, t) = c(s) + tX(s),$$
eine Regelfläche mit *Leitkurve* c. Die Geraden $s = const.$ heißen *Erzeugende* der Regelfläche. Die Funktion f ist in einer offenen Umgebung von $I \times \{0\}$ in $I \times \mathbb{R}$ regulär.

(4) *Graphen*. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und sei $h : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann ist $f : U \to \mathbb{R}^3$,
$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix},$$
ein parametrisiertes Flächenstück, der *Graph von f*.

(5) *Röhrenflächen* als Hausaufgabe

9 Tangentialbündel des $\mathbb{R}^n$

Das *Tangentialbündel* einer offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $TM = M \times \mathbb{R}^n$. Ein Element $(p, v) \in TM$ heißt *Tangentialvektor*, und p sein *Fußpunkt*. Die Menge $T_pM = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ der Tangentialvektoren mit Fußpunkt p heißt der *Tangentialraum im Punkt* p und ist mit einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur versehen:

$$(p,v)+(p,w)=(p,v+w), \quad a(p,v)=(p,av), \qquad v,w\in T_pM, \quad a\in\mathbb{R}$$

Für Tangentialvektoren aus verschiedenen Tangentialräumen ist keine Addition definiert.

Man kann die Ableitung einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ als Abbildung der Tangentialbündel auffassen:

$$df : TM \to T\mathbb{R}^m, \quad df(p,v) = (f(p), df_p(v)).$$

Die Kettenregel lautet dann statt

$$d(f\circ g)_p(v) = df_{g(p)}(dg_p(v))$$

einfach

$$d(f\circ g) = df \circ dg.$$

Im Gegensatz zu differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (siehe Differentialgeometrie II) liefert das Konzept des Tangentialbündels für offene Teilemengen $M \subseteq R^n$ nichts wesentlich Neues, weil für jedes $p \in M$ die Abbildung $T_pM \to \mathbb{R}^n$, $(p,v) \mapsto v$ ein kanonischer Vektorraumisomorphismus ist. Man kann also jeden Tangentialraum auf kanonische Weise mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

10 Kurven auf Flächen und erste Fundamentalform

- Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ heißt *Kurve auf dem Flächenstück* $f : M \to \mathbb{R}^3$, wenn es eine Kurve $\hat{c} : I \to M$ gibt mit $c = f \circ \hat{c}$.
- c regulär $\Longleftrightarrow$ $\hat{c}$ regulär (weil f regulär)
- Wenn c eine Kurve auf einem Flächenstück f ist, und wenn $\tilde{f}$ ein äquivalentes Flächenstück ist, dann ist c auch Kurve auf $\tilde{f}$.
- Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf dem Flächenstück $f : M \to \mathbb{R}^3$ und $c = f \circ \hat{c}$. Dann sind Länge und Energie von c gleich

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \sqrt{\langle c'(t), c'(t)\rangle}\,dt = \int_a^b \sqrt{\langle df(\hat{c}'), df(\hat{c}')\rangle}\,dt = \int_a^b |df(\hat{c}')|\,dt \\ E(c) &= \int_a^b \langle df(\hat{c}'), df(\hat{c}')\rangle\,dt \end{aligned}$$

- Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ ein parametrisiertes Flächenstück. Für $p \in M$ heißt die durch

$$g_p(v,w) = \langle df_p(v), df_p(w)\rangle$$

  definierte symmetrische Bilinearform auf T_pM *die erste Fundamentalform* oder *induzierte [Riemannsche] Metrik von f im Punkt p*.
- Wir können g_p als symmetrische Bilinearform auf T_pM auffassen.
- Die symmetrische Bilinearform g_p ist positiv definit (weil f regulär), also ist g_p ein euklidisches Skalarprodukt.
- Die Abbildung $p \mapsto g_p$ heißt die *die erste Fundamentalform* oder *induzierte [Riemannsche] Metrik von f ~~im Punkt p~~*.
- Mit der ersten Fundamentalform kann man die Formeln für Länge und Energie auch so schreiben:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \sqrt{g(\hat{c}', \hat{c}')}\,dt \\ E(c) &= \int_a^b g(\hat{c}', \hat{c}')\,dt \end{aligned}$$

- Alle Eigenschaften des Flächenstücks, die schon durch die Riemannsche Metrik bestimmt sind, gehören per Definition zur *inneren Geometrie des Flächenstücks*.
- Beispiel: Erste Fundamentalform für den Zylinder $f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. 11
- *Isometrische Parametrisierung* eines Flächenstücks
- Koeffizienten der ersten Fundamentalform:

$$g(v,w) = v^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w$$

$$\begin{aligned} E(p) &= g_p(e_1,e_1) = \langle \partial_1 f(p), \partial_1 f(p) \rangle \\ F(p) &= g_p(e_1,e_2) = \langle \partial_1 f(p), \partial_2 f(p) \rangle \\ G(p) &= g_p(e_2,e_2) = \langle \partial_2 f(p), \partial_2 f(p) \rangle \end{aligned}$$

11 Äußere Geometrie einer Fläche: zweite Fundamentalform, Weingarten–Abbildung

- Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $p \in M$. Der *Tangentialraum von f in p* ist der zweidimensionale Unterraum

$df(T_pM) \subseteq T_{f(p)}\mathbb{R}^3$	$df_p(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Der *Normalraum* von f in p ist das eindimensionale orthogonale Komplement des Tangentialraums von f in p,

$df(T_pM)^\perp \subseteq T_{f(p)}\mathbb{R}^3$	$df_p(\mathbb{R}^2)^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Der *Normalenvektor* $N(p)$ von f in p ist der eindeutig bestimmte Einheitsvektor im Normalraum, für den $(\partial_1 f, \partial_2 f, N)$ eine positive orientierte Basis ist, also

$$N(p) = \frac{\partial_1 f \times \partial_2 f}{|\partial_1 f \times \partial_2 f|}.$$

- Die Abbildung $N : M \to \mathbb{R}^3$ heißt *Gauß–Abbildung*.
- Sei $c = f \circ \hat{c}$ eine Kurve auf dem Flächenstück f mit Gauß–Abbildung N. Der Angepasste Rahmen $(T, N \circ \hat{c}, B)$ mit $B = T \times N$ heißt der *Darboux–Rahmen* der Kurve.
- Für Darboux–Rahmen schreibt man in den Ableitungsgleichungen (5) statt κ_1, κ_2 und τ oft κ_n, κ_g und τ_g:

$$\begin{aligned} T' &= \qquad\quad \kappa_n N + \kappa_g B \\ N' &= -\kappa_n T \qquad\quad + \tau_g B \\ B' &= -\kappa_g T - \tau_g N \end{aligned}$$

  Die Koeffizienten κ_n, κ_g und τ_g heißen *Normalkrümmung*, *geodätische Krümmung* und *geodätische Torsion*.
- Eine Kurve auf einer Fläche heißt
  - ⋄ *Asymptotenlinie*, wenn $\kappa_n = 0$, also $T' = \kappa_g B$ und $N' = \tau_g B$.
  - ⋄ *Geodätische [Kurve]*, wenn $\kappa_g = 0$, also $T' = \kappa_n N$ und $B' = -\tau_g N$.
  - ⋄ *Krümmungslinie*, wenn $\tau_g = 0$, also $N' = -\kappa_n T$ und $B' = -\kappa_g T$
- Aus $\langle N, N \rangle = 1$ folgt $dN(v) \perp N$, also $dN(v) = df(w)$ für ein w. Die *Weingarten-Abbildung* von f im Punkt p ist die durch

$$\begin{aligned} A_p &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ df_p(A_p v) &= -dN_p(v) \end{aligned}$$

  definierte lineare Abbildung (die man auch als Abbildung $T_pM \to T_pM$ auffassen kann).
- Die *zweite Fundamentalform* h_p von f in p ist die durch

$$\begin{aligned} h_p(v,w) &= -\langle df_p(v), dN_p(w) \rangle \\ &= \langle D^2 f_p(v,w), N(p) \rangle \end{aligned}$$

definierte symmetrische Bilinearform auf T_pM.

$$dN(v) = -df(Av)$$
$$h(v,w) = \langle D^2 f(v,w), N\rangle$$

- Koeffizienten der zweiten Fundamentalform:

$$h(v,w) = v^T \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} w$$

$$l(p) = h(e_1, e_1) = \langle \partial_1^2 f, N\rangle$$
$$m(p) = h(e_1, e_2) = \langle \partial_1 \partial_2 f, N\rangle$$
$$n(p) = h(e_2, e_2 = \langle \partial_2^2 f, N\rangle$$

- Die Matrix der Weingarten Abbildung bezüglich der Standardbasis erhält man so:
  Aus

$$\begin{aligned} v^T \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} w &= h(v,w) \\ &= -\langle df(v), dN(w)\rangle \\ &= -\langle df(v), -df(Aw)\rangle \\ &= g(v, Aw) \\ &= v^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Aw \end{aligned}$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - Fm & Gm - Fn \\ -Fl + Em & -Fm + En \end{pmatrix}$$ 12

Behauptung 11.1. *Die Normalkrümmung von f im Punkt p in Richtung v mit $g_p(v,v) = 1$ ist $h_p(v,v)$.*

- Wiederholung: Euklidische Skalarprodukte, Bilinearformen und selbstadjungierte Abbildungen.

Satz und Definition 11.2. *Die Weingartenabbildung $A_p : T_pM \to T_pM$ eines parametrisierten Flächenstücks $f : M \to \mathbb{R}^2$ ist selbstadjungiert bezüglich der ersten Fundamentalform g_p. Es gibt deshalb eine Orthonormalbasis (bzgl. g_p) von T_pM aus Eigenvektoren von A_p. Die reellen Eigenwerte heißen die* Hauptkrümmungen *von f im Punkt p und werden für gewöhnlich mit $\kappa_1(p)$, $\kappa_2(p)$ bezeichnet. Die normierten Eigenvektoren heißen* Hauptkrümmungsrichtungen. *Wenn $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, dann ist A_p ein Vielfaches der Identität. Andernfalls gibt es zwei orthogonale Hauptkrümmungsrichtungen, die bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind.*

Behauptung 11.3. *Wenn v_1, v_2 eine Orthonormalbasis (bzgl. g_p) aus Eigenvektoren von A_p zu den Eigenwerten κ_1, κ_2 ist, dann ist die Normalkrümmung von f in Richtung von $\cos\alpha v_1 + \sin\alpha v_2$ gleich*

$$\kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \sin^2\alpha.$$

Insbesondere nimmt die Normalkrümmung in p genau die Werte zwischen κ_1 und κ_2 (einschließlich) an.

Definition 11.4. • *Mittlere Krümmung $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$*
- *Gauß–Krümmung $K = \kappa_1 \kappa_2$*
- Ein Punkt $p \in M$ heißt
  - *Nabelpunkt*, wenn $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$,
  - *Flachpunkt*, wenn $K(p) = 0$,
  - *elliptisch*, wenn $K(p) > 0$, also wenn die Hauptkrümmungen gleiches Vorzeichen haben,
  - *hyperbolisch*, wenn $K(p) < 0$, also wenn die Hauptkrümmungen verschiedenes Vorzeichen haben.

Satz 11.5 (Nabelpunktsflächen). *Wenn jeder Punkt $p \in M$ eines parametrisierten Flächenstücks $f : M \to \mathbb{R}^3$ mit zusammenhängendem Definitionsbereich M ein Nabelpunkt ist, dann ist das Bild $f(M)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre enthalten.*

12 Flächeninhalt und Krümmung 13

Definition 12.1. Sei $f : M \to \mathbb{R}^2$ ein parametrisiertes Flächenstück, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und sei $B \subset M$ eine Teilmenge. Der *Flächeninhalt* von $f|_B$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(f|_B) &= \int_B \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \\ &= \int_B \det(N, \partial_1 f, \partial_2 f)\, du\, dv \\ &= \int_B \sigma,\end{aligned}$$

sofern diese Integrale existieren. Die *Flächen-2-Form* σ von f ist definiert durch

$$\sigma(v, w) = \det(N, df(v), df(w))$$

- Zur Motivation der Flächenformel die Herleitung mittels Volumen (Anstreicher-Formel: Benötigte Menge Farbe $\cong$ Flächeninhalt $\times$ Anstrichdicke)

Definition 12.2. Der *orientierte Flächeninhalt der Gauß-Abbildung* $N : M \to \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(N|_B) &= \int_B \det(N, \partial_1 N, \partial_2 N)\, du\, dv \\ &= \int_B \sigma^N,\end{aligned}$$

sofern diese Integrale existieren. Die 2-Form σ^N ist definiert durch

$$\sigma^N(v, w) = \det(N, dN(v), dN(w))$$

Satz 12.3 (Gauß-Krümmung K als Flächenverzerrung der Normalenabbildung)**.** *Es gilt*

$$\sigma_N = K\sigma,$$

oder, was äquivalent ist,

$$\det(N, \partial_1 N, \partial_2 N) = K \det(N, \partial_1 f, \partial_2 f).$$

Bemerkung 12.4. Wir werden sehen, dass die Gauß-Krümmung zur inneren Geometrie einer Fläche gehört. Insbesondere können zwei Flächen mit unterschiedlicher konstanter Gauß-Krümmung nicht isometrisch aufeinander abgebildet werden. Umgekehrt kann man zeigen: Zwei Flächen mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind lokal isometrisch.

Definition 12.5. Eine *Variation* des Flächenstücks $f : M \to \mathbb{R}^3$ ist eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned}F : M \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) &\longrightarrow F(u, v, t) =: f_t(u, v)\end{aligned}$$

mit $f(u, v) = f_0(u, v)$ für alle $(u, v) \in M$. Das Vektorfeld

$$V : M \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad V(u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(u, v, t)$$

heißt das *Variationsvektorfeld* der Variation F. Die *erste Variation des Flächeninhalts* $\operatorname{area}(f|_B)$ bei der Variation F der Fläche ist die erste Ableitung

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{area}(f_t|_B).$$

Satz 12.6 (Erste Variation des Flächeninhalts und mittlere Krümmung H)**.** *Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $B \subset M$ eine glatt berandete kompakte Teilmenge des Definitionsbereichs $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Die erste Variation des Flächeninhalts* $\operatorname{area}(f|_B)$ *bei einer Variation von f mit Variationsvektorfeld*

$$V : M \to \mathbb{R}^3, \quad V = \underbrace{hN}_{\text{normale}} + \underbrace{df(\hat{V})}_{\text{tangentiale Komponente}}$$

ist 14

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \operatorname{area}(f_t|_B) = -2\int_B h \cdot H\,\sigma + \int_{\partial B} \mu,$$

wobei σ die Flächen-2-Form von f ist, und die 1-Form μ auf M wie folgt definiert ist:

$$\mu(v) = \det(N, df(V), df(v))$$

- Die 1-Form μ im Randintegral lässt sich auch so schreiben:

  $$\mu = \langle N \times df(V), \cdot\rangle = \sigma(V, \cdot) = g(JV, \cdot),$$

  wobei J die 90°–Drehung bezüglich des Skalarprodukts g ist.

Definition 12.7. Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung $H = 0$ heißen *Minimalflächen*. Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung $H \neq 0$ heißen *Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung* oder *cmc-Flächen* (für *constant mean curvature*).

Bemerkungen 12.8.
- Die Theorie der Minimalflächen ist sehr verschieden von der Theorie der cmc-Flächen (und viel einfacher). Deshalb ist es gebräuchlich, die Minimalflächen nicht zu den *Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung* zu zählen, obwohl ihre mittlere Krümmung natürlich konstant ist, und man eigentlich *Flächen mit nicht verschwindender konstanter mittlerer Krümmung* sagen müsste.
- Eine Fläche mit kleinstem Flächeninhalt bei vorgegebenem Rand ist eine Minimalfläche. (Seifenhäute)
- Glatte Flächen mit kleinstem Flächeninhalt bei festem umschlossenen Volumen (oder größtem Volumen bei festem Flächeninhalt, isoperimetrisches Problem) sind cmc-Flächen.
- Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung beschreiben Seifenhäute, falls der Druck auf beiden Seiten nicht gleich ist.

13 Rotationsflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung 15

Für Rotationsflächen mit nach der Bogenlänge parametrisierter Leitkurve $t \mapsto (r(t), h(t))$,

$$f(t,\phi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\phi \\ r(t)\sin\phi \\ h(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot r^2 + \dot h^2 = 1, \qquad r > 0,$$

erhält man

$$\kappa_1 = \dot r \ddot h - \dot h \ddot r, \qquad \kappa_2 = \frac{\dot h}{r},$$

und, mit $K = \kappa_1 \kappa_2$,

$$\ddot r + K r = 0, \qquad \dot h(t) = \int^t \sqrt{1 - \dot r^2(s)}\,ds.$$

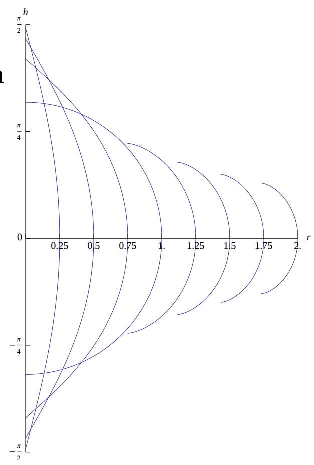
Sei nun K konstant. Drei Fälle sind zu unterscheiden.

- $K > 0$: Nach Skalierung der Fläche, wenn nötig, ist $K = 1$ und man erhält

  $$r(t) = a\cos(t), \quad h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2\sin^2 s}\,ds = E(t,a) \quad \text{für} \quad a > 0, \quad |t| < \frac{\pi}{2}, \quad |\sin t| < \frac{1}{a}.$$

  Die Funktion $E(t,a)$ heißt *elliptisches Integral 2. Art*. Nach dem Wert der Konstanten a sind drei Unterfälle zu unterscheiden:

  - ⋄ $0 < a < 1$: *Spindel*
  - ⋄ $a = 1$: $h(t) = \sin t$. *Sphäre*
  - ⋄ $a > 1$: *Tonne*



- $K = 0$: $r(t) = at + b$
  - $a = 0$: $r = b$, $h(t) = t$. *Zylinder*
  - $0 < a < 1$: $r(t) = at$, $h(t) = \sqrt{1-a^2}\,t$. *Kegel*
  - $a = 1$: $r(t) = t$, $h(t) = 0$. *Ebene*
- $K < 0$: Nach Skalierung der Fläche, wenn nötig, ist $K = -1$ und man erhält

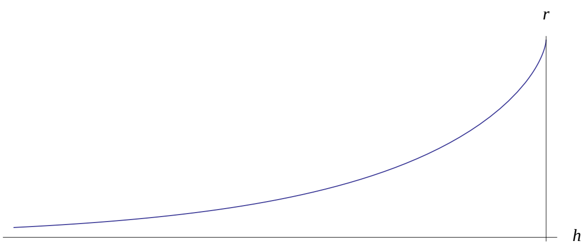
$$r(t) = Ae^t + Be^{-t}.$$

Wieder sind je nach dem Wert der Konstanten drei Fälle zu unterscheiden:

- $AB = 0$. Nach Parameterverschiebung und -spiegelung, wenn nötig, erhält man

$$r(t) = e^t, \qquad h(t) = \int_0^t \sqrt{1-e^{2s}}\,ds$$
$$= \sqrt{1-e^{2t}} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-e^{2t}}}{1-\sqrt{1-e^{2t}}}.$$

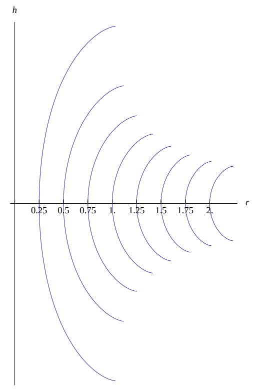
Die Leitkurve ist die *Traktrix*. Ihre Rotationsfläche (um die h-Achse) heißt *Pseudosphäre*.



- $AB > 0$. Nach Verschiebung im Parameterbereich, wenn nötig, erhält man

$$r(t) = a\cosh t,$$
$$h(t) = \int_0^t \sqrt{1-a^2\sinh^2 s}\,ds \qquad (|t| < \operatorname{arsinh}\frac{1}{a})$$
$$= -iE(it, ia)$$

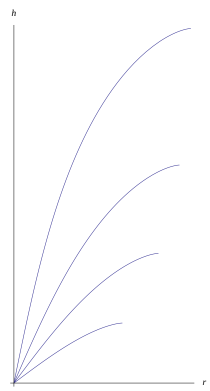
Fläche mit zwei Kreisrändern.



- $AB < 0$. Auf ähnliche Weise erhält man

$$r(t) = a\sinh t$$
$$h(t) = \int_0^t \sqrt{1-a^2\cosh^2 s}\,ds \qquad (|t| < \operatorname{arcosh}\frac{1}{a})$$

Flächen mit einem Kreisrand und einer Spitze.



14 Rotationsflächen mit konstanter mittlerer Krümmung

Aus

$$2H = \dot r\ddot h - \dot h\ddot r + \frac{\dot h}{r}$$

erhält man durch Multiplikation mit $r\dot r$ bzw. $r\dot h$ und Ausnützen der Bogenlängenparametrisierung:

$$2Hr\dot r = r\ddot h + \dot r\dot h = (r\dot h)^{\cdot}$$
$$2Hr\dot h = -r\ddot r - \dot r^2 + 1 = -(r\dot r)^{\cdot} + 1$$

Die Substitution $u = r\dot{h}$, $v = r\dot{r}$ ergibt:

$$\dot{u} = 2Hv$$
$$\dot{v} = -2Hu + 1$$

Aus u und v erhält man die erzeugende Kurve:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad h(t) = \int \frac{u}{r}.$$

- $H = 0$: Minimalflächen. Man erhält $u = a$, $v = t$ und daraus zwei Unterfälle:
  - $a = 0$: $r(t) = t$, $h(t) = 0$. *Ebene*
  - $a \neq 0$:
  $$r(t) = \sqrt{a^2 + t^2}, \qquad h(t) = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} ds = a \operatorname{arsinh} \frac{t}{a} \quad \Longrightarrow \quad r = a \cosh \frac{h}{a}.$$
  Die erzeugende Kurve heißt *Kettenlinie*, und der Rotationsfläche heißt *Katenoid*.
- $H \neq 0$: Nach Skalierung und Umorientierung, wenn nötig, ist $H = \frac{1}{2}$. Man erhält dann
  $$u(t) = a\cos(t) + 1, \qquad v(t) = -a \sin t.$$
  - $a = 0$: $r = 1$, $h(t) = t$. *Zylinder*
  - $0 < a^2 < 1$: *Unduloid*
  - $a^2 = 1$: *Sphäre*
  - $a^2 > 1$: *Nodoid*

  Rotationsflächen mit konstanter Krümmung $H \neq 0$ heißen *Delaunay–Flächen* nach Charles-Eugène Delaunay, der folgenden Satz gefunden hat: Die erzeugenden Kurven dieser Flächen entstehen als Bahnen eines Brennpunktes, wenn ein Kegelschnitt auf einer Geraden abrollt.

15 Krümmungs- und Asymptotenlinienparametrisierungen 16

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück mit Normalenvektorfeld N, erster Fundamentalform g, zweiter Fundamentalform h und Weingarten-Abbildung A. Sei $\gamma = f \circ \hat{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve auf f. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma \text{ ist Krümmungslinie} &\iff (N \circ \hat{\gamma})' \in \mathbb{R}\gamma' \\
&\iff \hat{\gamma}' \text{ ist Eigenvektor von } A_{\hat{\gamma}}. \\
\gamma \text{ ist Asymptotenlinie.} &\iff (N \circ \hat{\gamma})' \perp \gamma' \\
&\iff h(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}') = 0 \\
&\iff \gamma'' \text{ ist tangential an } f. \\
&\iff \text{Die Schmiegebene von } \gamma \text{ (sofern definiert) ist in jedem} \\
& \text{ Punkt die Tangentialebene von } f.
\end{aligned}$$

Definition 15.1. Die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^3$ heißt $\begin{Bmatrix}\textit{Krümmungs}\\ \textit{Asymptoten}\end{Bmatrix}$*linienparametrisierung*, wenn die Parameterlinien $u \mapsto f(u,v)$ und $v \mapsto f(u,v)$ $\begin{Bmatrix}\text{Krümmungs}\\ \text{Asymptoten}\end{Bmatrix}$linien sind.

Satz 15.2 (Existenz von Krümmungslinienparametrisierungen)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und sei $p_0 \in U$ kein Nabelpunkt. Dann gibt es eine offene Umgebung U_0 von p_0, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to U_0$, so dass $f \circ \Phi$ eine Krümmungslinienparametrisierung ist.*

Satz 15.3 (Existenz von Asymptotenlinienparametrisierungen)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, und für $p_0 \in U$ sei die Gauß-Krümmung $K(p_0) < 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_0 von p_0, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to U_0$, so dass $f \circ \Phi$ eine Asymptotenlinienparametrisierung ist.*

Bemerkung 15.4. Diese Parametrisierungen sind nicht eindeutig. Wenn $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3$ eine Krümmungs- oder Asymptotenlinienparametrisierung ist, und wenn $\varphi : (\tilde{a}, \tilde{b}) \to (a,b)$ und $\psi : (\tilde{c}, \tilde{d}) \to (c,d)$ Diffeomorphismen sind, dann ist auch die Abbildung $\tilde{f} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \times (\tilde{c}, \tilde{d}) \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{f}(u,v) = f(\varphi(u), \psi(v))$ eine Krümmungs- bzw. Asymptotenlinienparametrisierung.

Die Sätze 15.2 und 15.3 folgen aus den folgenden Lemmas 15.5–15.7. Wie üblich verlangen wir von allen Abbildungen, dass sie C^∞ sind.

Lemma 15.5. *Unter der Voraussetzung von Satz 15.2 gibt es eine offene Umgebung U_0 von p_0 und zwei Vektorfelder $X_1, X_2 : U_0 \to \mathbb{R}^2$, so dass für alle $p \in U_0$ gilt: $X_1(p)$ und $X_2(p)$ sind linear unabhängige Eigenvektoren der Weingartenabbildung A_p.*

Lemma 15.6. *Unter der Voraussetzung von Satz 15.3 gibt es eine offene Umgebung U_0 von p_0 und zwei Vektorfelder $Y_1, Y_2 : U_0 \to \mathbb{R}^2$, so dass für alle $p \in U_0$ gilt: $Y_1(p)$ und $Y_2(p)$ sind linear unabhängig und*

$$h(Y_1(p), Y_1(p)) = 0 = h(Y_2(p), Y_2(p)).$$

Lemma 15.7. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und seien $X_1, X_2 : U \to \mathbb{R}^2$ zwei Vektorfelder, so dass für alle $p \in U$ die Vektoren $X_1(p)$ und $X_2(p)$ linear unabhängig sind. Dann gibt es für jeden Punkt $p_0 \in U$ eine offene Umgebung U_0 von p_0, eine offene Menge $V \in \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq V \to U_0$, so dass für alle $q \in V$ gilt:*

$$\partial_1\Phi(q) \in \mathbb{R} \cdot X_1(\Phi(q)), \qquad \partial_2\Phi(q) \in \mathbb{R} \cdot X_2(\Phi(q)).$$

Bemerkung 15.8. Lemma 15.7 gilt nur im Zweidimensionalen. Würde man $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, ersetzen, 17
wäre die Aussage im Allgemeinen falsch.

Lemma 15.7 beweisen wir mit Hilfe des folgenden Satzes.

Satz 15.9 (Lokale Existenz einer Erhaltungsgröße)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und sei $X : U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld, das keine Nullstellen hat. Für alle $p_0 \in U$ gibt es eine offene Umgebung U_0 von p_0 und eine Abbildung $g : U_0 \to \mathbb{R}$, so dass für alle $p \in U_0$ gilt: $dg(X(p)) = 0$, aber $dg_p \neq 0$.*

Bemerkung 15.10. Satz 15.9 gilt auch im Mehrdimensionalen: Die Aussage bleibt wahr, wenn man $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt. Für ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$ gibt es lokal sogar $n-1$ Erhaltungsgrößen, von denen keine eine Funktion der anderen ist.

Zum Beweis von Satz 15.9 verwendenden wir folgenden Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Satz 15.11 (Existenz von Integralkurven und lokalem Fluss)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei X ein C^∞-Vektorfeld auf U.*

(i) Für jeden Punkt $p \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^∞-Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, so dass

$$\gamma(0) = p \qquad \text{und} \qquad \gamma' = X(\gamma).$$

Eine solche Kurve, deren Geschwindigkeit stets gleich dem Wert des Vektorfeldes X an der momentanen Position ist, heißt Integralkurve *von X.*

(ii) Für jeden Punkt p_0 gibt es eine offene Umgebung U_0 von p_0, ein $\varepsilon > 0$ und eine C^∞-Abbildung

$$\Phi : U_0 \to U \times (-\varepsilon, \varepsilon),$$

so dass

$$\Phi(p, 0) = p \quad \text{für alle} \quad p \in U_0$$

und

$$\partial_2 \Phi(p, t) = X(\Phi(t, p)) \quad \text{für alle} \quad (p, t) \in U_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon),$$

d.h. für jedes $p \in U_0$ ist die Kurve $t \mapsto \Phi(t, p)$ Integralkurve von X. Die Abbildung Φ heißt der lokale Fluss *von X.*

Einen Beweis dieses wichtigen Satzes findet man z.B. in V. I. Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Kapitel 4. In Kapitel 2 findet man einen Beweis von Satz 15.9 im Mehrdimensionalen. (Und Kapitel 1 behandelt Tangentialräume an Vektorräume.)

16 Abwickelbare Flächen

Definition 16.1. Ein parametrisiertes Flächenstück $f : U \to \mathbb{R}^3$ heißt *abwickelbar*, wenn es lokal isometrisch parametrisiert werden kann. Das heißt, wenn es zu jedem $p_0 \in U$ eine offene Umgebung U_0, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to U_0$ gibt, so dass $f \circ \Phi$ isometrisch ist.

Satz 16.2. *Ein Flächenstück ist genau dann abwickelbar, wenn es konstante Gauß-Krümmung* 0 *hat.*

Wir werden diesen Satz in dieser Vorlesung nicht vollständig beweisen. Die Implikation 18

$$\text{abwickelbar} \quad \Longrightarrow \quad K = 0$$

folgt aus Gauß' Theorema Egregium, das wir später noch beweisen wollen, und mit Satz 16.3 folgt immerhin

$$K = 0 \quad \text{und ohne Nabelpunkte} \quad \Longrightarrow \quad \text{abwickelbar.}$$

Abwickelbare Flächen werden in fast jedem Differenzialgeometrie-Buch über Kurven und Flächen behandelt, aber traditionell auf etwas andere Art. Die folgende Darstellung folgt handschriftlichen Notizen von Ulrich Pinkall zu seiner Differenzialgeometrie-Vorlesung vom Wintersemester 1996.

Satz 16.3. *(i) Sei $\gamma : (-a,a) \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und (T,N,B) ein paralleler Rahmen. Sei ferner*

$$f : (-a,a) \times (-b,b) \to \mathbb{R}^3, \qquad f(u,v) = \gamma(u) + v\,B(u),$$

und $b > 0$ klein genug, dass f regulär ist. Dann ist f abwickelbar.

(ii) Sei $f : (-a,a) \times (-b,b) \to \mathbb{R}^3$ Krümmungslinienparametrisierung einer Fläche ohne Nabelpunkte mit konstanter Gauß-Krümmung $\kappa_1\kappa_2 = 0$. Ferner sei f so parametrisiert, dass $\kappa_2 = 0$ ist, und außerdem für alle $u \in (-a,a)$, $v \in (-b,b)$ gilt

$$|f_u(u,0)| = 1 = |f_v(0,v)|.$$

Dann ist

$$f(u,v) = \gamma(u) + v\,B(u),$$

wobei $\gamma(u) = f(u,0)$, und $B(u) := f_v(u,0)$ ein paralleles Einheitsnormalenvektorfeld längs γ ist.

Beweis. (i) Wir werden eine reguläre Abbildung $\tilde{f} : \underbrace{(-a,a) \times (-b,b)}_{=:M} \to \mathbb{R}^2$ konstruieren, so dass für alle $p \in M$ und alle $X, Y \in T_pM$ gilt:

$$\langle df(X), df(Y)\rangle = \langle d\tilde{f}(X), d\tilde{f}(Y)\rangle.$$

Mit anderen Worten, f und $\tilde{f}$ haben die gleiche erste Fundamentalform, $g = \tilde{g}$. Weil die Abbildung $\tilde{f}$ regulär ist, ist sie lokal invertierbar: Zu jedem Punkt $p_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung U_0, so das die Inverse $\Phi = (\tilde{f}|_{U_0})^{-1}$ existiert. Dann ist $f \circ \Phi$ ist isometrisch.

Nun zur Konstruktion von $\tilde{f}$. Die Ableitungsgleichungen des parallelen Rahmens sind

$$T' = \kappa_1 N + \kappa_2 B, \qquad N' = -\kappa_1 T, \qquad B' = -\kappa_2 T.$$

Sei $\tilde{\gamma} : (-a,a) \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmungsfunktion κ_2. (So eine Kurve existiert und ist bis auf eine starre Bewegung eindeutig bestimmt.) Sei

$$\tilde{T} = \tilde{\gamma}', \qquad \tilde{B} = J\tilde{T}.$$

Dann gelten die Ableitungsgleichungen

$$\tilde{T}' = \kappa_2 \tilde{B}, \qquad \tilde{B}' = -\kappa_2 \tilde{T}.$$

Definiere $\tilde{f}$ durch

$$\tilde{f}(u,v) = \tilde{\gamma}(u) + v\tilde{B}(u).$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \tilde{f}_u &= \tilde{T} + v\tilde{B}' = (1 - v\kappa_2)\tilde{T}, \qquad & \tilde{f}_v &= \tilde{B},\\ f_u &= T + vB' = (1 - v\kappa_2)T, \qquad & f_v &= B, \end{aligned}$$

und somit
$$|f_u| = 1 - v\kappa_2 = |\tilde{f}_u|, \qquad |f_v| = 1 = |\tilde{f}_v|, \qquad \langle f_u, f_v\rangle = 0 = \langle \tilde{f}_u, \tilde{f}_v\rangle.$$
Also haben f und $\tilde{f}$ die gleiche erste Fundamentalform.

(ii) Weil f eine Krümmungslinienparametrisierung ist, gilt
$$N_u = -\kappa_1 f_u, \qquad N_v = -\kappa_2 f_v = 0. \tag{6}$$
Insbesondere hängt $N(u,v)$ nicht von v ab.

Behauptung A. Es gilt sogar $|f_v(u,v)| = 1$ für alle $(u,v) \in M$, und nicht nur für $u = 0$ wie vorausgesetzt.

Beweis A. Nach Voraussetzung gilt $|f_v(0,v)| = 1$. Deshalb reicht es zu zeigen, dass $\langle f_v, f_v\rangle_u = 0$. Das sieht man so:
$$\tfrac{1}{2}\langle f_v, f_v\rangle_u = \langle f_v, f_{vu}\rangle = \langle f_v, f_{uv}\rangle = \underbrace{\langle f_v, f_u\rangle}_{=0}{}_v - \langle f_{vv}, f_u\rangle$$
Also folge Behauptung A aus der folgenden Behauptung B. $\boxed{A}$

Behauptung B. $\langle f_{vv}, f_u\rangle = 0$

Beweis B. Mit (6) erhält man
$$\langle f_{vv}, f_u\rangle = -\tfrac{1}{\kappa_1}\langle f_{vv}, N_u\rangle = -\tfrac{1}{\kappa_1}(\langle f_v, \underbrace{N_u}_{-\kappa_1 f_u}\rangle_v - \langle f_v, N_{uv}\rangle) = \underbrace{\langle f_v, f_u\rangle}_{=0} + \tfrac{1}{\kappa_1}\underbrace{\langle f_v, N_{vu}\rangle}_{=0 \text{ weil } N_v = 0} = 0$$
$\boxed{B}$

Behauptung C. $f_{vv} = 0$

Beweis C. Es gilt
$$\langle f_{vv}, f_u\rangle \overset{B}{=} 0, \qquad \langle f_{vv}, f_v\rangle = \tfrac{1}{2}\langle f_v, f_v\rangle_v \overset{A}{=} 0, \qquad \langle f_{vv}, N\rangle = -\langle f_v, N_v\rangle \overset{(6)}{=} 0,$$
und weil f_u, f_v, N stets eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, folgt die Behauptung. $\boxed{C}$

Aus Behauptung C folgt
$$f(u,v) = \underbrace{f(u,0)}_{=\gamma(u)} + v\,\underbrace{f_v(u,0)}_{=B(u)}.$$
Es bleibt zu zeigen, dass B eine paralleles Einheitsnormalenvektorfeld von γ ist. (Selber machen.) $\square$

17 Variation der Bogenlänge auf einer Fläche 19

Definition 17.1 (Variation einer Kurve im $\mathbb{R}^n$). Eine *Variation* einer Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist eine glatte Abbildung
$$H : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (t,\tau) \longmapsto H(t,\tau) =: c_\tau(t),$$
so dass
$$H(.,0) = c.$$
Eine Variation H heißt *Variation mit festen Endpunkten*, wenn
$$H(a,\tau) = c(a), \qquad H(b,\tau) = c(b) \qquad \text{für alle} \quad \tau \in (-\epsilon, \epsilon).$$
Das *Variationsvektorfeld* einer Variation H ist das durch
$$V : (a,b) \to \mathbb{R}^n, \qquad V(t) = \partial_2 V(t,0).$$
definierte Vektorfeld längs c.

- Zu jedem Vektorfeld $V : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist $H(t,\tau) = c(t) + \tau V(t)$ eine Variation mit V als Variationsvektorfeld. Diese Variation hat genau dann feste Endpunkte, wenn $V(a) = V(b) = 0$.

Satz 17.2 (Erste Variation der Bogenlänge für Variation in $\mathbb{R}^n$). *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, und sei $(t,\tau) \mapsto c_\tau(t)$ eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V. Dann gilt*

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} L(c_\tau) = \langle V(b), T(b)\rangle - \langle V(a), T(a)\rangle - \int_a^b \langle V(t), \dot{T}(t)\rangle\, dt,$$

wobei $T = \frac{1}{|\dot{c}|}\,\dot{c}$ das Einheitstangentialvektorfeld längs c ist.

- Für Kurven mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{c}|$ ist

$$\dot{T} = \frac{1}{|\dot{c}|}\,\ddot{c}.$$

(Benutze z.B. Formel (1) für $\dot{T}$ aus der 2. Vorlesung.)

Satz 17.3. *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{c}|$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Für jede Variation c_τ von c mit festen Endpunkten ist

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} L(c_\tau) = 0.$$

(ii) $\ddot{c} = 0$, also $c(t) = c(a) + (t-a)\dot{c}(a)$.

Korollar 17.4. *Wenn $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{c}|$ ist und außerdem eine kürzeste Kurve von $c(a)$ nach $c(b)$, dann ist $\ddot{c} = 0$.*

Definition 17.5 (Variation einer Kurve auf einer Fläche). Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $\gamma = f \circ c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f. Eine *Variation der Kurve γ auf der Fläche f* ist eine Variation von γ der Form

$$\gamma_\tau(t) = f \circ H(t,\tau)$$

wobei

$$H : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M, \qquad (t,\tau) \longmapsto H(t,\tau) =: c_\tau(t)$$

eine Variation von c ist.

- Das Variationsvektorfeld der Variation $f \circ H$ ist das Vektorfeld

$$t \longmapsto \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} f(H(t,\tau) = df_{c(t)}(V(t)),$$

wobei V das Variationsvektorfeld der Variation H von c ist.

Satz 17.6 (Erste Variation der Bogenlänge für Variation auf einer Fläche). *Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, sei $\gamma = f \circ c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f und sei $(t,\tau) \to \gamma_\tau(t) = f(c_\tau(t))$ eine Variation von γ mit festen Endpunkten, wobei $(t,\tau) \to c_\tau(t)$ eine Variation von c mit Variationsvektorfeld $V : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist. Dann gilt*

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} L(\gamma_\tau) = \left\langle df_{c(t)}(V(t)), T(t)\right\rangle\Big|_a^b - \int_a^b \left\langle df_{c(t)}(V(t)), \dot{T}(t)\right\rangle dt.$$

Satz 17.7. *Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, und sei $\gamma = f \circ c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve auf f mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{\gamma}|$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Für jede Variation γ_τ von γ auf der Fläche f mit festen Endpunkten ist

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} L(\gamma_\tau) = 0.$$

(ii) Für alle $t \in [a,b]$ ist $\ddot{\gamma}(t)$ orthogonal zum Tangentialraum $df_{c(t)}(\mathbb{R}^2)$.

(iii) $\ddot{\gamma} = \lambda(N \circ c)$, wobei $N : M \to \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenvektorfeld von f ist, und $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $\lambda = \langle \ddot{\gamma}, N \circ c\rangle$.

Definition 17.8 (Geodätische). Eine Kurve $\gamma = f \circ c$ auf einem parametrisierten Flächenstück f heißt *Geodätische [Kurve] auf f*, wenn die Geschwindigkeit $|\dot{\gamma}|$ konstant ist und $\ddot{\gamma}(t)$ für alle $t \in [a,b]$ orthogonal zum Tangentialraum $df_{c(t)}(\mathbb{R}^2)$ ist.

- Anders gesagt: Eine Geodätische auf f ist eine Kurve γ auf f mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{\gamma}|$ und geodätischer Krümmung $\kappa_g = 0$.

18 Die kovariante Ableitung

20

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : M \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Für jeden Punkt $p \in M$ ist $\mathbb{R}^3$ die orthogonale direkte Summe aus Tangential- und Normalraum von f in p:

$$\mathbb{R}^3 = df_p(\mathbb{R}^2) \oplus \mathbb{R}N(p).$$

Seien

$$[\cdot]^T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow df_p(\mathbb{R}^2), \qquad [\cdot]^N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}N(p)$$

die dazugehörigen orthogonalen Projektionen, also

$$[X]^T = X - \langle X, N\rangle N, \qquad [X]^N = \langle X, N\rangle N.$$

Definition 18.1 (tangentiales Vektorfeld längs f)**.** Ein *tangentiales Vektorfeld längs f* ist eine glatte Abbildung

$$\tilde{Y} : M \to \mathbb{R}^3,$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $p \in M$ der Vektor $\tilde{Y}(p) \in \mathbb{R}^3$ im Tangentialraum von f in p liegt:

$$\tilde{Y}(p) \in df_p(\mathbb{R}^2).$$

Lemma 18.2. *Für jedes tangentiale Vektorfeld $\tilde{Y} : M \to \mathbb{R}^3$ längs f gibt es ein eindeutig bestimmtes und glattes(!) Vektorfeld $Y : M \to \mathbb{R}^2$, so dass für alle $p \in M$*

$$\tilde{Y}(p) = df_p(Y(p)). \tag{7}$$

[ohne Beweis, um Zeit zu sparen]

Definition 18.3 (Pushforward f_*Y)**.** Für ein Vektorfeld $Y : M \to \mathbb{R}^2$ ist der *Pushforward f_*Y* das durch

$$f_*Y : M \to \mathbb{R}^3, \qquad f_*Y(p) = df_p(Y(p))$$

definierte tangentiale Vektorfeld längs f.

- Man kann Gleichung (7) also auch so schreiben: $\tilde{Y} = df_*Y$.
- Für
$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$
ist
$$f_*Y = Y_1\,\partial_1 f + Y_2\,\partial_2 f. \tag{8}$$

Definition 18.4 (kovariante Ableitung)**.** Für zwei Vektorfelder $X, Y : M \to \mathbb{R}^2$ ist die *kovariante Ableitung von Y in Richtung X* das Vektorfeld

$$\nabla_X Y : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$df_p(\nabla_X Y(p)) = [d(f_*Y)_p(X(p))]^T.$$

Satz und Definition 18.5 (Christoffel-Symbole)**.** *Für zwei Vektorfelder $X = \binom{X_1}{X_2}$ und $Y = \binom{Y_1}{Y_2}$ auf M gilt*

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{2} \left(dY_k(X) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_i Y_j \right) e_k, \tag{9}$$

wobei e_1, e_2 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^2$ sind, und die Christoffel-Symbole $\Gamma_{ij}^k : M \to \mathbb{R}$ *durch die Gleichung*

$$[\partial_i \partial_j f]^T = \Gamma_{ij}^1\,\partial_1 f + \Gamma_{ij}^2\,\partial_2 f$$

definiert sind. Die Christoffel-Symbole sind symmetrisch in den unteren Indizes:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{10}$$

Beweis. Sei
$$\nabla_X Y =: Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}.$$
Dann gilt einerseits
$$df(\nabla_X Y) = df(Z) = Z_1\,\partial_1 f + Z_2\,\partial_2 f$$
und andererseits
$$\begin{aligned} df(\nabla_X Y) &= \big[d(f_* Y)(X)\big]^T \\ &\overset{(8)}{=} \big[d(Y_1\,\partial_1 f + Y_2\,\partial_2 f)(X)\big]^T \\ &= \big[dY_1(X)\,\partial_1 f + dY_2(X)\,\partial_2 f + X_1 Y_1(\partial_1\partial_1 f) + X_2 Y_1(\partial_2\partial_1 f) + X_1 Y_2(\partial_1\partial_2 f) + X_2 Y_2(\partial_2\partial_2 f)\big]^T \\ &= \Big(dY_1(X) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^1 X_i Y_j\Big)\,\partial_1 f + \Big(dY_2(X) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^2 X_i Y_j\Big)\,\partial_2 f. \end{aligned}$$
Koeffizientenvergleich ergibt (9). Die Symmetrie (10) folgt aus $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$. □

Korollar 18.6. *Es gilt*
$$\nabla_X Y = dY(X) + \Gamma(X,Y),$$
wobei für $p \in M$ die Abbildung
$$\Gamma_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
durch die Gleichung
$$df(\Gamma(X,Y)) = \big[D^2 f(X,Y)\big]^T.$$
definiert ist. Für jedes p ist die Abbildung Γ_p bilinear und symmetrisch.

Definition 18.7. Ein *tangentiales Vektorfeld längs einer Kurve $\gamma = f \circ c : I \to \mathbb{R}^3$* auf f ist eine glatte Abbildung
$$\tilde{Y} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
mit der Eigenschaft, dass $\tilde{Y}(t)$ stets im Tangentialraum von f in $c(t)$ ist:
$$\tilde{Y}(t) \in df_{c(t)}(\mathbb{R}^2) \qquad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Lemma 18.8. *Für jedes tangentiale Vektorfeld $\tilde{Y}$ längs $\gamma = f \circ c : I \to \mathbb{R}^3$ gibt es eine eindeutig bestimmte und glatte(!) Abbildung $Y : I \to \mathbb{R}^2$, so dass für alle $t \in I$*
$$\tilde{Y}(t) = df_{c(t)}(Y(t)). \tag{11}$$
[erst recht ohne Beweis]

Definition und Satz 18.9 (kovariante Ableitung und parallele Vektorfelder längs einer Kurve auf einer Fläche)**.** Die *kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $Y : I \to \mathbb{R}^2$ längs einer Kurve $c : I \to M$* ist das Vektorfeld
$$\nabla_{\frac{d}{dt}} Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
welches durch
$$df_{c(t)}\big(\nabla_{\frac{d}{dt}} Y(t)\big) = \big[\dot{\tilde{Y}}(t)\big]^T,$$
eindeutig bestimmt ist, wobei $\tilde{Y} : I \to \mathbb{R}^3$ das durch (11) definierte tangentiale Vektorfeld längs $f \circ c$ ist. Es gilt
$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}} Y &= \sum_{k=1}^{2} \Big(\dot{Y}_k + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \dot{c}_i Y_j\Big) e_k \\ &= \dot{Y} + \Gamma(\dot{c}, Y). \end{aligned}$$
Das Vektorfeld Y heißt *parallel längs c*, wenn 21
$$\nabla_{\frac{d}{dt}} Y = 0. \tag{12}$$

- Gleichung (12) ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für Y. In Koordinaten lautet sie:

$$\dot{Y}_k = -\sum_{ij=1}^{2} \Gamma_{ij}^k Y_i \dot{c}_j. \tag{13}$$

Korollar 18.10. • *Für $t_0 \in I$ und $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $Y : I \to \mathbb{R}^2$ längs c mit $Y(t_0) = Y_0$.*

- *Wenn X und Y parallele Vektorfelder längs c sind, dann ist für $a, b \in \mathbb{R}$ auch $aX + bY$ ein paralleles Vektorfeld längs c.*
- *Die parallelen Vektorfelder längs c bilden einen 2-dimensionalen reellen Vektorraum.*

Satz 18.11 (Geodätischengleichung). *Eine Kurve $\gamma \circ f : I \to \mathbb{R}^3$ auf f ist genau dann eine Geodätische, wenn $\dot{c}$ ein paralleles Vektorfeld längs c ist, also wenn c die* Geodätischengleichung *erfüllt:*

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = 0. \tag{14}$$

- Die Geodätischengleichung (14) ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (mit variablen Koeffizienten). In Koordinaten lautet sie:

$$\ddot{c}_k = -\sum_{ij=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \dot{c}_i \dot{c}_j. \tag{15}$$

Korollar 18.12. *Für jeden Punkt $p_0 \in M$ und jeden Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine eindeutige maximale Geodätische $f \circ c : I \to \mathbb{R}^3$ auf f mit $0 \in I$, $c(0) = p_0$ und $\dot{c}(0) = v_0$.*

Satz 18.13 (Eigenschaften der kovarianten Ableitung). *(i) Für die Standardbasisvektorfelder $E_1, E_2 : M \to \mathbb{R}^2$ gilt*

$$\nabla_{E_1} E_2 = \nabla_{E_2} E_1. \tag{16}$$

(Die kovariante Ableitung ist symmetrisch.)

(ii) Für drei Vektorfelder $X, Y, Z : M \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$d\big(g(X,Y)\big)(Z) = g(dX(Z), Y) + g(X, dY(Z)). \tag{17}$$

(Die kovariante Ableitung ist mit der ersten Fundamentalform verträglich.)

Satz 18.14. *Die kovariante Ableitung gehört zur inneren Geometrie einer Fläche. Das heißt, für ein parametrisiertes Flächenstück $f : M \to \mathbb{R}^3$ und zwei Vektorfelder $X, Y : M \to \mathbb{R}^2$ ist das Vektorfeld $\nabla_X Y$ schon durch X, Y und die erste Fundamentalform g von f eindeutig bestimmt.*

Beweisskizze. Für $g_{ij} = g(E_i, E_j)$ betrachte $\partial_i g_{jk}$, benutze (16), betrachte zwei weitere Gleichungen, die durch zyklische Vertauschung der Indizes entstehen, ziehe eine Gleichung von der Summe der beiden anderen ab und erhalte, unter Beachtung von (17),

$$g_{k1}\Gamma_{ij}^1 + g_{k2}\Gamma_{ij}^2 = \tfrac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

Das sind zwei eindeutig lösbare lineare Gleichungen für Γ_{ij}^1 und Γ_{ij}^2. □

Beispiel 18.15. Parallele Vektorfelder längs Kreisen auf S^2 (oder längs Breitenkreisen einer Rotationsfläche).

19 Gauß–Gleichung und Theorema Egregium 22

Die kovariante Ableitung gehört zur inneren Geometrie einer Fläche (Satz 18.14). Nun werden wir zeigen, dass auch die Gauß-Krümmung zur inneren Geometrie gehört.

Sei f ein parametrisiertes Flächenstück mit erster Fundamentalform g, zweiter Fundamentalform h und kovarianter Ableitung ∇. Die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform bezeichnen wir mit

$$g_{ij} = g(E_i, E_j), \qquad h_{ij} = h(E_i, E_j),$$

wobei $E_1 = \binom{1}{0}$, $E_1 = \binom{0}{1}$, die Standardbasisvektorfelder von $\mathbb{R}^2$ sind. Außerdem sei

$$R_{ijkl} = g\big(\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_k - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_k,\ E_l\big).$$

Nach Satz 18.14 ist R_{ijkl} durch die erste Fundamentalform eindeutig bestimmt: Es gibt eine (ziemlich komplizierte) Formel für R_{ijkl}, in der nur die Koeffizienten g_{ij} und ihre Ableitungen vorkommen.

Satz 19.1 (Gauß–Gleichung)**.** *Die erste und zweite Fundamentalform erfüllen folgende Verträglichkeitsbedingung:*

$$R_{ijkl} = h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}. \tag{Gauß}$$

Mit der Gleichung

$$K = \det(A) = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

folgt daraus der „herausragende Satz“ von Gauß:

Satz 19.2 (Theorema Egregium)**.** *Die Gauß–Krümmung K ist durch die erste Fundamentalform eindeutig bestimmt, und zwar gilt*

$$K = \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,.$$

Korollar 19.3. *Abwickelbare Flächen (d.h. Flächen, die lokal isometrisch parametrisiert werden können) haben konstante Gauß–Krümmung* 0.

- Exkurs über diskretes Theorema Egregium für konvexe Polyeder.

20 Wiederholung und Ausblick 23

...