



# 1. Blatt

Abgabe: 2. oder 3. Mai vor dem Tutorium

---

## 1. Aufgabe (2 Punkte)

Zeigen Sie: Eine reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^n$ , deren Tangenten sich alle in einem Punkt schneiden, hat Krümmung 0 (und ist damit eine Gerade).

## 2. Aufgabe (4 Punkte)

- a) Parametrisieren Sie den Graphen  $y = \cosh x$  nach der Bogenlänge.
- b) Ein Kreis vom Radius 1 rolle auf der x-Achse. Betrachten Sie die Spur, die ein Punkt auf diesem Kreis beschreibt. Diese Kurve heißt Zykloide. Berechnen Sie ihre regulären Punkte und ihre Bogenlänge auf einem maximalen regulären Stück.

## 3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion, und sei  $\gamma$  ihr Graph (d.h.  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ).

- a) Zeigen Sie, dass  $\gamma$  immer eine reguläre Kurve ist.
- b) Beweisen Sie, dass die Krümmung  $\kappa$  von  $\gamma$  der Gleichung

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

genügt.

- c) Berechnen Sie die Krümmung des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$ .
- d) Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  für  $x \in [-\pi, \pi]$ .

#### 4. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left( \frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t \right).$$

(Diese Kurve heißt Traktrix.)

- a) Untersuchen Sie  $\gamma$  auf Regularität.
- b) Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen  $\gamma(t)$  und dem Schnittpunkt der y-Achse mit der Tangenten  $\{\gamma(t) + s\gamma'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$  für  $t \neq 0$  konstant bleibt.
- c) Berechnen Sie die Krümmung von  $\gamma$ .

Gesamtpunktzahl: 16