**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN**
**Fakultät II - Institut für Mathematik**
Boris Springborn
Hanka Kouřimská
`http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/`

Differentialgeometrie I - SS 2017

# 2. Blatt

Abgabe: 8. Mai vor der Vorlesung

---

**1. Aufgabe** (9 Punkte)

**Evolute und Evolvente:**

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrizierte Kurve, und seien $N(t) = JT(t)$ der Einheitsnormalenvektor und $\kappa(t)$ die orientierte Krümmung von $\gamma$. Angenommen $\kappa(t) \neq 0$ for all $t \in I$, definiere die folgende Kurve:

$$\beta : I \to \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$$

$\beta$ heißt die *Evolute* von $\gamma$.

a) Zeigen Sie, das der Tangentialvektor von $\beta$ immer senkrecht auf $\gamma$ steht.

Eine Normalgerade von $\gamma$ im Punkt $t \in I$ ist wie folgt definiert:

$$N_t = \{\gamma(t) + sN(t) \mid s \in R\}$$

b) Betrachten Sie die Normalgeraden von $\gamma$ an zwei Punkten $t_1, t_2 \in I$. Zeigen Sie, dass für $t_1 \to t_2$ der Schnittpunkt von $N_{t_1}$ und $N_{t_2}$ auf der Spur von $\beta$ liegt.

c) Berechnen Sie die Evolute von

- der logaritmischen Spirale: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t), a \in \mathbb{R}$,
- der Zykloide: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

Was stellen Sie fest?

Eine *Evolvente* von $\gamma$ ist eine Kurve $\eta : I \to \mathbb{R}^2$, die die Tangenten von $\gamma$ senkrecht schneidet, d.h. erfüllt die folgenden Bedigungen:

$$\eta(t) = \gamma(t) + \lambda(t)T(t), \quad \langle \eta'(t), T(t) \rangle = 0.$$

d) Bestimmen Sie $\lambda$.

e) Zeigen Sie, dass die Evolvente der Evolute einer Kurve wieder die Kurve selbst ist.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

a) Sei $\gamma$ eine reguläre Kurve, deren Normalgeraden sich alle in einem Punkt treffen. Zeigen Sie, dass die Spur von $\gamma$ ein Kreis ist.

b) Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen den Tangenten der Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$$

und der Geraden $y = 0, z = x$ konstant bleibt.

**3. Aufgabe** (3 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine Formel für die orientierte Krümmung eines Graphen $y = f(x)$.

b) Was ist der Radius des Schmiegkreises des Graphen der Parabel $y = x^2$ in ihrem Scheitelpunkt $(0, 0)$?

Gesamtpunktzahl: 16