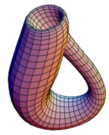
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik
Boris Springborn
Hanka Kouřimská
`http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/`

Differentialgeometrie I - SS 2017



3. Blatt

Abgabe: 15. Mai vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Kreis vom Radius $r > 0$ rolle innerhalb eines größeren Kreises vom Radius $R > r$ um den Ursprung. Sei γ die Spur eines Punktes auf dem kleinen Kreis.

a) Leiten Sie eine Formel für γ her.

b) Zeigen Sie: γ ist geschlossen genau dann wenn $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene reguläre Kurve.

a) Zu jedem Einheitsvektor $E \in \mathbb{S}^1$ existiert mindestens ein $t \in I$ so dass E Normalenvektor an γ ist.

b) Falls $|\gamma(t)| \leq r$ für alle $t \in I$, existiert ein $t \in I$ so dass $|\kappa(t)| \geq \frac{1}{r}$.

Bemerkung: Beide Teilaufgaben dürfen NICHT geometrisch gelöst werden.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve mit orientierter Krümmung $\kappa_\gamma > 0$ und sei β definiert durch

$$\beta(t) = \gamma(t) - rN(t),$$

wobei N der Normalenvektor von γ ist, $r > 0$ konstant. Zeigen Sie:

a) Länge(β) =Länge$(\gamma) + 2\pi rk$, wobei k die Umlaufzahl von γ ist.

b) $\kappa_\beta = \frac{\kappa_\gamma}{1+r\kappa_\gamma}$.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Leiten Sie die Formel für die Länge und Krümmung von Kurven gegeben in Polarkoordinaten.

Gesamtpunktzahl: 16