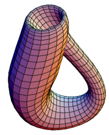
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik
Boris Springborn
Hanka Kouřimská



`http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/`

4. Blatt

Abgabe: 22. Mai vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen $5x + 3y + 2z - 4 = 0$ und $3x + 4y - 7z = 0$.

b) Seien $v \neq 0$ und w zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: es existiert ein $u \in \mathbb{R}^3$ so dass $u \times v = w$ genau dann wenn v senkrecht zu w ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

a) Sei $A : [a, b] \to O(n)$ eine stetig differenzierbare Kurve in der orthogonalen Gruppe, und seien $U, V : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch $U = A^{-1}A', V = A'A^{-1}$. Zeigen Sie, dass $U(t)$ und $V(t)$ schiefsymmetrisch sind für alle $t \in [a, b]$.

b) Sei $U : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig differenzierbar, so dass für alle $t \in [a, b]$ $U(t)$ eine schiefsymmetrische Matrix ist. Die Abbildung $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ erfülle die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} A(a) &\in O(n) \\ A' &= AU \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es gilt $A(t) \in O(n)$ für alle $t \in [a, b]$.

Hinweis: Sei $U : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und schiefsymmetrisch für alle $t \in [a, b]$, $B : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} B(a) &= I \\ B' &= -UB + BU, \end{aligned}$$

dann ist $B(t) = I$ für alle $t \in [a, b]$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\alpha, \beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(2t)), \quad \beta(t) = \frac{1}{1 + \sin^2(t)} \left(\cos(t), \sin(t)\cos(t)\right).$$

Finden Sie eine reguläre Homotopie von α nach β.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Für $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ finde eine 3×3-Matrix U, so dass $\omega \times v = Uv$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

Gesamtpunktzahl: 16