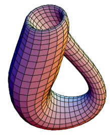
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik
Boris Springborn
Hanka Kouřimská
`http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/`



5. Blatt

Abgabe: 29. Mai vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine (nicht auf Bogenlänge parametrisierte) Frenet-Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot\gamma \times \ddot\gamma|}{|\dot\gamma|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\det(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{|\dot\gamma \times \ddot\gamma|^2}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei γ eine Helix mit Radius $r > 0$, $\gamma(0) = (r, 0, 0)$ und dem Höhenunterschied $h > 0$ (d.h. für das kleinste $t > 0$, für die gilt $\gamma(t) = (r, 0, z(t))$ gilt $z(t) = h$).

a) Parametrisieren Sie γ nach Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie den Frenet-Rahmen, seine Krümmung und seine Torsion.

c) Bestimmen den parallelen Rahmen $\{T, N, B\}$ und seine Krümmungen, wenn man annimmt, dass $N(0) = \frac{T'(0)}{|T'(0)|}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Raumkurve γ nennt man eine *verallgemeinerte Helix*, wenn ihr Tangentialvektor T einen konstanten Winkel mit einer festen Richtung schließt (d.h. es existiert ein $\theta \in [0, \pi/2]$ und ein $v \in \mathbb{S}^2$, so dass $\langle T, v\rangle = \cos\theta$).

a) Welche Kurven bekommt man im Fall $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$?

b) Zeigen Sie unter der Annahme, dass die Krümmung von γ nie verschwindet: γ ist eine verallgemeinerte Helix genau dann wenn $\frac{\tau}{\kappa}$ konstant ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Absolutkrümmung κ, sei $r < \frac{1}{\kappa(t)}$ für alle $t \in I$, und sei T, N, B ein angepasster Rahmen für γ. Zeigen Sie, dass die *Röhrenfläche*

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t, \varphi) = \gamma(t) + r(\cos(\varphi)N + \sin(\varphi)B)$$

regulär ist.

Gesamtpunktzahl: 16