TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik
Boris Springborn
Hanka Kouřimská

Differentialgeometrie I - SS 2017

http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/

9. Blatt

Abgabe: 26. Juni vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Fläche M berührt eine Ebene entlang einer Kurve γ. Zeigen Sie, dass γ sowohl eine asymptotische Linie als auch eine Krümmungslinie von M ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$ eine Kurve auf einer regulären parametrisierten Fläche $f : U \to \mathbb{R}^3$ mit Normalabbildung N. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) γ ist eine Krümmungslinie

b) Die durch $g : U \to \mathbb{R}^3,\ g(t, v) = \gamma(t) + vN(\hat{\gamma}(t))$, definierte Fläche hat Gaußsche Krümmung $K_g = 0$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien β und δ zwei Raumkurven, mit $|\delta| = 1$, und sei eine Fläche definiert durch

$$f(t, v) = \beta(t) + v\delta(t).$$

Zeigen Sie:

Wenn $\langle \delta \times \delta', \beta' \rangle = 0$ für alle t, dann hat f Gaußsche Krümmung $K = 0$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Eine (allgemeine) Traktrix δ zur Leitkurve γ ist eine Kurve, für die gilt:

$$\delta' = \lambda(\gamma - \delta), \quad |\delta(t) - \gamma(t)| = l \text{ für alle } t \in I,$$

für eine Konstante $l \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$.
Man kann λ eliminieren und landet damit bei einer Differentialgleichung

$$\delta' = \frac{1}{|\gamma - \delta|^2} \langle \gamma', \gamma - \delta \rangle (\gamma - \delta).$$

a) Finden Sie eine Gleichung von δ im Falle, dass $\gamma(t) = (t, 0), l = 1$ und $\delta(0) = (0, 1)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Pseudosphäre eine Rotationsfläche von δ (aus a)) ist.

Gesamtpunktzahl: 16