TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik
Boris Springborn
Hanka Kouřimská

Differentialgeometrie I - SS 2017

`http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/`

10. Blatt

Abgabe: 3. Juli vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Skizzieren Sie die durch die folgenden Gleichungen beschriebene Flächen und bestimmen Sie eine Asymptotenlinienparametrisierung.

a) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,

b) $z = xy$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine positiv definite Bilinearform, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ selbst-adjungierter linearer Operator, und $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x, x) = g(Ax, x)$.
Seien weiter $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei linear unabhängige Vektoren mit

$$g(v, v) = g(w, w) = 1, \qquad h(v, v) = h(w, w) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\sqrt{2}}(v + w)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(v - w)$ eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von A bilden.

b) Folgern Sie, dass auf einer Fläche mit negativer Gaußscher Krümmung die Winkelhalbierenden der Asymptotenrichtungen die Krümmungsrichtungen sind.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $p \in U$ mit $H(p) = 0$. Zeigen Sie:

> Wenn p kein Flachpunkt ist, gibt es in p zwei orthogonale Asymptotenrichtungen.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit $K < 0$ und γ eine Asymptotenlinie auf $f(U)$ mit Frenet-Torsion τ.
Zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung der Gleichung

$$H = \pm\tau \cot(\varphi),$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Asymptotenlinien ist, genügt.

Gesamtpunktzahl: 16