TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik
Boris Springborn
Hanka Kouřimská
`http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS17/DGI/`

Differentialgeometrie I - SS 2017

12. Blatt

Abgabe: 17. Juli vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Helix auf einem Zylinder eine Geodätische ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, sei $b = \gamma' \times n$ der Binormalvektor des Frenet-Rahmens von γ, und sei $\epsilon > 0$ klein genug, so dass

$$f(s,v) = \gamma(s) + vb(s), \qquad s \in I, v \in (-\epsilon, \epsilon),$$

eine reguläre parametrisierte Fläche ist. Zeigen Sie, dass γ auf dieser Fläche eine Geodätische ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei γ eine Kurve auf der Fläche f mit geodätischer Krümmung κ_g im Punkt $p = \gamma(0)$, und sei $\tilde{\gamma}$ ihre Projektion auf T_pM. Zeigen Sie, dass die Krümmung $\tilde{\kappa}$ von $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\kappa} = |\kappa_g|$$

erfüllt.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole der zugehörigen Rotationsfläche.

Bonusaufgabe (4 Punkte)
Für zwei Vektorfelder $X, Y : U \to \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist die *Lie-Klammer* $[X,Y] : U \to \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld $[X,Y] = dY(X) - dX(Y)$.
Zeigen Sie: Für kovariante Ableitung gilt $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$.

Gesamtpunktzahl: 16