Normalkrümmungen und der Normalvektor

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $N : U \to \mathbb{S}^2$ der zugehörige Normalvektor. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass dann dN_p eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf die Tangentialebene $T_{f(p)}M$ von $M = f(U)$ ist.

Warum ist II eine symmetrische Bilinearform und was ist das überhaupt?

Die zweite Fundamentalform ist durch $\mathrm{II}_p(v, w) := -\langle dN_p(v), df_p(w)\rangle$, $v, w \in \mathbb{R}^2$ definiert. Es gilt:

$$\langle N, \partial_1 f\rangle = \langle N, \partial_2 f\rangle = 0,$$

und wenn man die erste Gleichung ableitet, bekommt man:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1(\langle N, \partial_1 f\rangle) = \langle \partial_1 N, \partial_1 f\rangle + \langle N, \partial_1 1 f\rangle \\ &\Leftrightarrow -\langle \partial_1 N, \partial_1 f\rangle = \langle N, \partial_1\partial_1 f\rangle, \end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{II}_p(e_1, e_1) = -\langle dN_p(e_1), \partial_1 f\rangle = -\langle \partial_1 N, \partial_1 f\rangle = \langle N(p), \partial_1\partial_1 f\rangle.$$

Analog bekommt man:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p(e_2, e_2) &= -\langle dN_p(e_2), \partial_2 f\rangle = -\langle \partial_2 N, \partial_2 f\rangle = \langle N(p), \partial_2\partial_2 f\rangle, \\ \mathrm{II}_p(e_1, e_2) &= -\langle dN_p(e_1), \partial_2 f\rangle = -\langle \partial_1 N, \partial_2 f\rangle = \langle N(p), \partial_1\partial_2 f\rangle, \\ \mathrm{II}_p(e_2, e_1) &= -\langle dN_p(e_2), \partial_1 f\rangle = -\langle \partial_2 N, \partial_1 f\rangle = \langle N(p), \partial_2\partial_1 f\rangle = \mathrm{II}_p(e_1, e_2), \end{aligned}$$

II_p ist also insbesondere symmetrisch und es gilt:

$$\mathrm{II}_p(v, w) = -\langle dN_p(v), df_p(w)\rangle = \langle N, D_p^2 f(v, w)\rangle.$$

Was hat II_p mit Normalkrümmungen zu tun?

In der Übung haben wir gesehen, dass man Hauptkrümmungen mittels Normalkrümmungen bestimmen kann, und dass Normalkrümmungen Krümmungen von Normalschnitten sind. Hier machen wir was ähnliches: wir wählen eine Richtung $v \in \mathbb{S}^1$ und betrachten den Normalschnitt $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$, mit $\gamma(0) = f(p)$ und $\frac{d}{ds}\gamma(0) = d_p f(v)$ (entspricht $\hat{\gamma}(0) = p$, $\frac{d}{ds}\hat{\gamma}(0) = v$). Nun gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p(v, v) = \mathrm{II}_p\left(\frac{d}{ds}\hat{\gamma}(0)\right) &= -\left\langle dN_p\left(\frac{d}{ds}\hat{\gamma}(0)\right), df_p\left(\frac{d}{ds}\hat{\gamma}(0)\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d}{ds}N(\hat{\gamma}(0)), \frac{d}{ds}(f\circ\hat{\gamma})(0)\right\rangle \\ &= \left\langle N(\hat{\gamma}(0)), \frac{d^2}{ds^2}\gamma(0)\right\rangle \\ &= \langle N(p), \kappa n(0)\rangle \\ &= \kappa_n(p), \end{aligned}$$

wobei n der Normalvektor von γ ist.

Was hat II_p mit Hauptkrümmungen zu tun?

Aus der Übung wissen wir, dass die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 die maximale und minimale Normalkrümmung darstellen. Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen e_1 und e_2 bilden eine Orthonormalbasis, wie das folgende Theorem beweist:

Theorem 1. *Sei B eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$. Dann existiert eine Orthonormalbasis e_1, e_2 auf $\mathbb{R}^2$, so dass, falls $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v = \alpha e_1 + \beta e_2$, gilt*

$$B(v, v) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \beta^2,$$

wobei $\lambda_1 = \max_{v \in \mathbb{R}^2 |\, |v|=1} B(v, v)$ und $\lambda_2 = \min_{v \in \mathbb{R}^2 |\, |v|=1} B(v, v)$.

Beweis. Siehe Do Carmo, Appendix zur Kapitel 3. $\square$

Jede andere Richtung $v \in \mathbb{S}^1$ lässt sich als $v = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$ darstellen, wobei φ der Winkel zwischen e_1 und v ist. Laut Theorem bekommt man dann für die Normalkrümmung in Richtung v:

$$\kappa_n = \mathrm{II}_p(v) = \kappa_1 \cos^2\varphi + \kappa_2 \sin^2\varphi.$$