Differentialgeometrie I
Kurven und Flächen

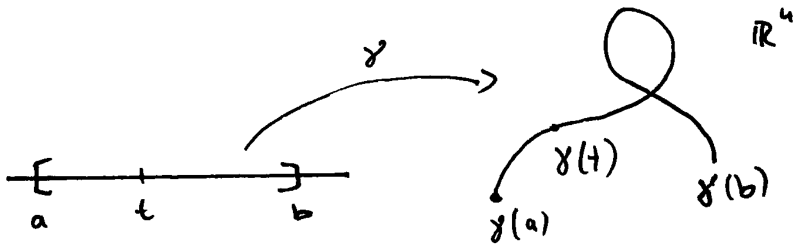
Prof. Dr. Ulrich Pinkall
Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

3. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven

Definition 1.1. Eine *parametrisierte Kurve* in $\mathbb{R}^n$ ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.



Bemerkung 1.2.

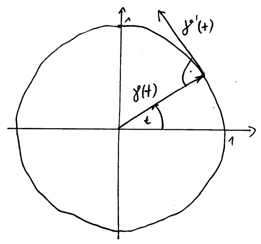
- Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt
$$f\colon M \to \mathbb{R}^k$$
glatt oder C^∞, wenn $f = \tilde{f}|_u$, $\tilde{f}\colon U \subset \mathbb{R}^m$ glatt U offen, $M \subset U$
- Als Definitionsbereich von parametrisierten Kurven sind oft auch halboffene und offene Intervalle möglich.

Definition 1.3. Eine parametrisierte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in M$. $\gamma'(t)$ heißt der *Tangentialvektor* von γ zum Parameterwert t.

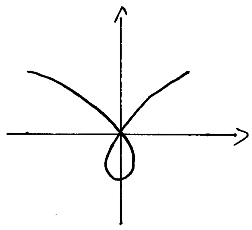
► **Beispiel 1.4.** a) Kreis (unendlich oft durchlaufen): $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0$ also ist γ regulär.

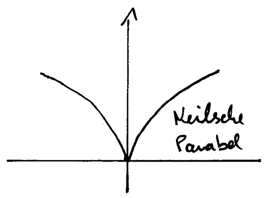
b) $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $\gamma'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0$ also ist γ regulär.

c) Neilsche Parabel: $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $\gamma'(0) = 0$, γ nicht regulär.



(a)

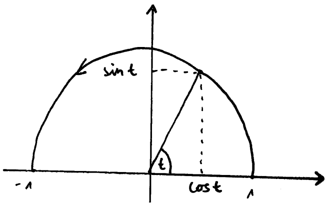

(b)



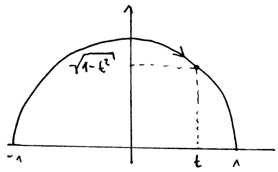
(c)

d) Halbkreis: $t \in (-1,1)$, $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$.

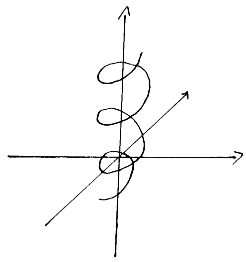
e) Halbkreis: $t \in (0,\pi)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.



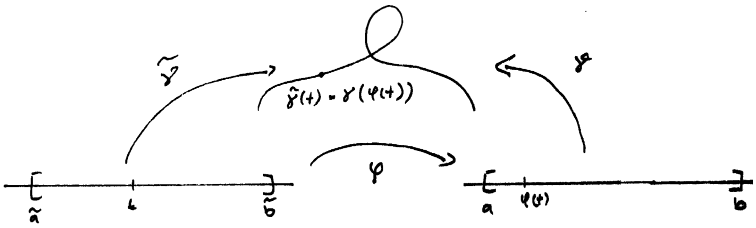
(d) Halbkreis positiv



(e) Halbkreis negativ



(f) Helix

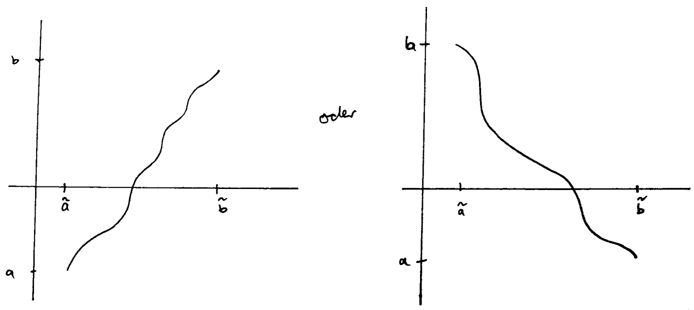


f) Helix: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$.

Definition 1.5. Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma}\colon [\tilde{a},\tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven. Dann heißt $\tilde{\gamma}$ eine *Umparametrisierung* von γ, wenn es eine bijektive (C^∞)-Abbildung $\varphi\colon [\tilde{a},\tilde{b}] \to [a,b]$ gibt mit

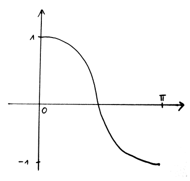
a) $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$,

b) $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [\tilde{a},\tilde{b}]$.



φ ist entweder streng monoton wachsend oder fallend.

► **Beispiel 1.6.** γ und $\tilde{\gamma}$ aus Beispiel 1.4 d) und e), dann gilt



$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t)) = (\cos t, \sqrt{1-\cos^2 t})$$

mit der Umparametrisierung $\varphi\colon (0,\pi) \to (-1,1)$, $t \mapsto \cos t$.

Definition 1.7. Eine Umparametrisierung φ heißt *orientierungstreu*, wenn für alle t gilt $\varphi'(t) > 0$.

Definition 1.8. Zwei parametrisierte Kurven γ und $\tilde{\gamma}$ in $\mathbb{R}^n$ heißen (orientierungstreu) *äquivalent*, wenn $\tilde{\gamma}$ (orientierungstreue) Umparametrisierung von γ ist.

Satz 1.9. *(Orientierungstreue) Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der parametrisierten Kurven in* $\mathbb{R}^n$*.*

Beweis. 1) $\gamma \sim \gamma$: Für $\varphi = \mathrm{id}_{[a,b]}$ gilt $\gamma = \gamma \circ \mathrm{id}_{[a,b]}$.

2) $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Rightarrow \tilde{\gamma} \sim \gamma$: Wenn $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, dann $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi^{-1}$.

3) $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} \sim \hat{\gamma} \rightarrow \gamma \sim \hat{\gamma}$: Wenn $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ und $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} \circ \tilde{\varphi}$, dann gilt $\hat{\gamma} = \gamma \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi})$. □

Satz 1.10. $\gamma \sim \tilde{\gamma}, \gamma$ *regulär, dann ist* $\tilde{\gamma}$ *regulär.*

Beweis. $\tilde{\gamma}'(t) = \underbrace{\gamma'(\varphi(t))}_{\neq 0,\text{ da } \gamma \text{ regulär}} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\neq 0} \neq 0 \quad \forall t$ □

Definition 1.11. Eine *(orientierte) Kurve* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$ unter (orientierungstreuer) Äquivalenz.

► **Beispiel 1.12.** Die parametrisierten Kurven aus Beispiel 1.4 e) und f) beschreiben dieselbe Kurve, aber verschiedene orientierte Kurven.

Nach Satz 1.10 macht es Sinn, von regulären Kurven in $\mathbb{R}^n$ zu sprechen.

2 Länge von Kurven

Definition 2.1. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt$$

die Länge von γ.

Satz 2.2. *Äquivalente parametrisierte Kurven haben dieselbe Länge.*

Beweis. Im Fall $\varphi'(t) > 0$:

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\gamma'(\varphi(t))| \overbrace{|\varphi'(t)|}^{=\varphi'(t)} dt \overset{\text{Subst.}}{=} \int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} \left|\gamma'(s)\right| ds = L(\gamma)$$

□

► **Beispiel 2.3.** a) Kreis: $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $|\gamma'(t)| = 1$ für alle t, also ist $L(\gamma) = \pi$.

b) Strecke: $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, 0)$ und $L(\gamma) = b - a$.

Definition 2.4. Eine *euklidische Bewegung* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$g(y) = Ay + b$$

mit $A \in O(n)$ (orthogonale $n \times n$-Matrix), $b \in \mathbb{R}^n$.

Satz 2.5. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Bewegung. Dann gilt*

$$L(g \circ \gamma) = L(\gamma).$$

Beweis. $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma$. Dann ist $\tilde{\gamma}(t) = A\gamma(t) + b$, $\tilde{\gamma}'(t) = A\tilde{\gamma}'(t)$ und $|\tilde{\gamma}'(t)| = |A\gamma'(t)| = |\gamma'(t)|$. □

Definition 2.6. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt γ eine *nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve*, wenn $|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in [a,b]$.

Satz 2.7. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Dann gibt es eine orientierungstreue Umparametrisierung*

$$\tilde{\gamma}\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$$

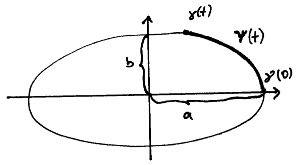
von γ, wobei L die Länge von γ ist, mit $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ für alle $s \in [0,L]$.

Beweis. Setze $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau = L(\gamma|_{[a,t]}).$$

Dann ist $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = L$, $\psi'(t) = |\gamma'(t)| > 0$, also $\psi\colon [a,b] \to [0,L]$ bijektiv. Sei $\varphi := \psi^{-1}\colon [0,L] \to [a,b]$. Dann gilt für $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$, $\tilde{\gamma}\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \frac{1}{|\gamma'(\varphi(s))|} \Longrightarrow |\tilde{\gamma}'(s)| = 1.$$

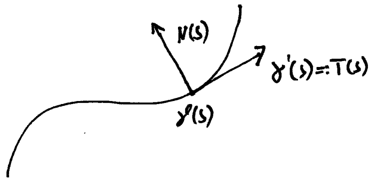


► **Beispiel 2.8.** Ellipse: $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$,
$\psi(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$.

3 Krümmung ebener Kurven

Sei $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist der *Tangenteneinheitsverktor* $T := \gamma'$ eine Abbildung $T\colon [0,L] \to S^1$ in den Einheitskreis $S^1 = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$.
Bezeichne

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



die *Drehung um* $90°$ im positiven Sinn. Wichtige Eigenschaften von J:

$$\begin{aligned}
\langle Jx, y \rangle &= -\langle x, Jy \rangle \\
J^2 &= -I \\
\det(x, Jx) &= \langle x, y \rangle \\
\langle Jx, Jy \rangle &= \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

$N := JT$ heißt der *Normalenvektor* von γ. Wir wissen $\langle T, T \rangle = 1$. Daraus folgt:

$$0 = \langle T, T' \rangle = \langle T', T \rangle + \langle T, T' \rangle = 2\langle T, T' \rangle.$$

Demnach gibt es eine Funktion $\kappa \colon [0, L] \to \mathbb{R}$ mit

$$T' = \kappa \cdot N.$$

Aber es gilt auch

$$\begin{aligned}
\langle N, N \rangle = 1 &\Longrightarrow \langle N, N' \rangle = 0, \\
\langle T, N \rangle = 0 &\Longrightarrow \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0 \\
&\Longrightarrow N' = \langle N', T \rangle T + \langle N', N \rangle N = -\kappa T.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir folgenden Satz.

Satz 3.1. *Sei $\gamma \colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gibt es eindeutige Abbildungen $T, N \colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $\kappa \colon [0, L] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften*

1. *Für jedes $s \in [0, L]$ ist $(T(s), N(s))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$.*

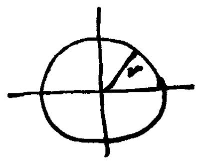
2. *Es gelten die Ableitungsgleichungen*

$$\begin{aligned}
\gamma' &= T, \\
T' &= \kappa N, \\
N' &= -\kappa T.
\end{aligned}$$

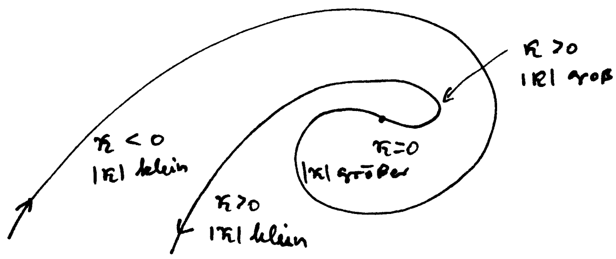
Definition 3.2. Die Funktion κ aus Satz 3.1 ist die *Krümmung* der Kurve.

► **Beispiel 3.3.** Krümmung vom Kreis:

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right),\\
\gamma'(s) &= \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) =: T(s)\\
N(s) &= \left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}\right).\\
T'(s) &= \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}N(s)\\
\Rightarrow \kappa(s) &= \frac{1}{r} \text{ für alle s.}
\end{aligned}$$



Ein Kreis vom Radius r hat also die Krümmung $\frac{1}{r}$, wenn er positiv durchlaufen wird, anderenfalls $-\frac{1}{r}$.



Satz 3.4 (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie). *a) Sei $\kappa\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ eine beliebige (C^∞)-Funktion. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ.*

b) Seien $\gamma, \tilde\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ zwei nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven mit derselben Krümmung $\kappa = \tilde\kappa$. Dann gibt es

$$\begin{aligned}
&A \in \mathrm{S0}(2), A = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R} \textit{ und}\\
&b \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

so dass $\tilde\gamma(s) = A\gamma(s) + b$.

Beweis. Zuerst Teil b). Wähle A so, dass $\tilde T(0) = AT(0)$, und setze $b := \tilde\gamma(0) - A\gamma(0)$. Sei

$$\hat\gamma := A\gamma + b \quad \text{und} \quad \hat T := \hat\gamma'(t) = AT.$$

Dann lösen $\hat T$, $\tilde T$ beide das AWP

$$y = \kappa J y, \qquad y(0) = AT(0),$$

da $\hat T' = AT' = \kappa AJT = \kappa JAT = \kappa J\hat T$. Mit dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf für gewöhnliche DGL folgt dann $\hat T = \tilde T$.

Aus

$$(\hat{\gamma} - \tilde{\gamma})' = \hat{T} - \tilde{T}' = 0 \text{ und } \hat{\gamma}(0) = A\gamma(0) + b = \tilde{\gamma}(0)$$

folgt $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$.
Nun zu Teil a). Setze $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \int_0^s \kappa(t)dt, \\ T(s) &:= (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))), \\ \gamma(s) &:= \int_0^s T(t)dt. \end{aligned}$$

Dann gilt $|T(s)| = 1$ für alle s und $\gamma'(s) = T(s)$. Also ist γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ, da

$$T'(s) = \alpha'(s)(-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)) = \alpha'(s)JT(s) = \kappa(s)N(s).$$

$\square$

Die Funktion α aus obigem Beweis gibt die Richtung der Kurve im entsprechenden Punkt an und $\alpha' = \kappa$ ist die Krümmung in diesem Punkt.
Abschließend sollen noch die Ableitungsgleichungen aus Satz 3.1 und eine Formel für die Krümmung hergeleitet werden, falls $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Nach Satz 2.7 gibt es eine zu γ äquivalente nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{\gamma}\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$. D.h., es gibt $\varphi\colon [a, b] \to [0, L]$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = L$, $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$, sodass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$
Setze

$$\begin{aligned} v(t) &:= |\gamma'(t)| = |\overbrace{\tilde{\gamma}'(t)}^{=1}| \cdot \varphi'(t). \\ \tilde{T} &:= \tilde{\gamma}', \qquad \tilde{N} := J\tilde{T} \end{aligned}$$

und $T = \tilde{T} \circ \varphi$, $N = \tilde{N} \circ \varphi$. Dann gilt

$$\gamma'(t) = \underbrace{\tilde{\gamma}'(\varphi(t))}_{=T(t)} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{=v(t)} = v \cdot T$$

Weiter ist

$$T'(t) = \underbrace{\tilde{T}(\varphi(t))}_{\tilde{\kappa}(\varphi(t)) \cdot JT(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) = v(t)\kappa(t)N(t),$$

wobei die Krümmung von γ durch

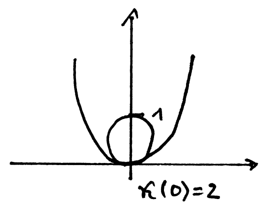
$$\kappa := \tilde{\kappa} \circ \varphi$$

definiert ist. Wir erhalten insgesamt:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma' &= vT \\ T' &= v\kappa N \\ N' &= -v\kappa T \end{aligned}}$$

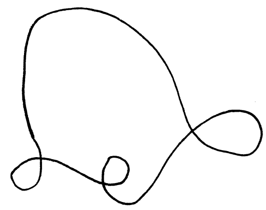
Es gilt weiterhin $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ und $N = JT$. Aus $\gamma'' = v'T + v^2\kappa N$, und $\det(\gamma', \gamma'') = \det(vT, v'T + v^2\kappa N) = v^3\kappa$ erhalten wir folgende Formel für die Krümmung einer nicht nach der Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve γ:

$$\boxed{\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3}}$$



► **Beispiel 3.5.** Krümmung der Parabel: $\gamma(t) = (t, t^2)$, $\gamma'(t) = (1, 2t)$, $\gamma''(t) = (0, 2)$. Also $\kappa(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}^3}$.

4 Ebene geschlossene Kurven



Definition 4.1. Eine *geschlossene parametrisierte Kurve* in $\mathbb{R}^n$ ist ein Paar (γ, τ) aus einer τ–periodischen Abbildung $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und ihrer Periode $\tau > 0$, d.h.

$$\gamma(t + \tau) = \gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

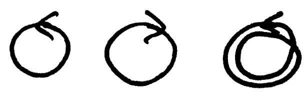
Definition 4.2. Eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine Äquivalenzrelation von geschlossenen parametrisierten Kurven, wobei

$$(\gamma, \tau) \sim (\tilde{\gamma}, \tilde{\tau})$$

genau dann, wenn eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass

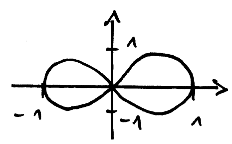
a) $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$,

b) $\varphi(t + \tilde{\tau}) = \varphi(t) + \tau$ für alle $t \in \mathbb{R}$.



► **Beispiel 4.3.** a) Der einfach durchlaufene Kreis $(\gamma(t), 2\pi)$, der in negativer Richtung durchlaufene Kreis $(\gamma(-t), 2\pi)$ und der zweifach durchlaufene Kreis $(\gamma(t), 4\pi)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ sind drei verschiedene geschlossene Kurven.

b) Die „Acht“ $((\cos(t), \sin(2t)), 2\pi)$ ist eine Beispiel für eine Lissajou Figur $((A\cos(at + a_0), B\sin(bt + b_0)$ für Konstanten $A, B, a, b, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.)



Für eine geschlossene, parametrisierte Kurve (γ, τ) ist die Länge

$$L(\gamma) = \int_0^\tau |\gamma'(t)| dt$$

unabhängig von der Parametrisierung. Man spricht auch von einer *Invarianten* der geschlossenen Kurve, da die Länge auf der Äquivalenzklasse wohldefiniert und unter Euklidischen Bewegungen invariant ist.
Weiter globale Invarianten ebener geschlossener Kurven:

$$\begin{aligned} \text{Totalkrümmung:} \qquad F(\gamma) &:= \int_0^\tau \kappa(s) ds \qquad \text{(Bogenlängenparametrisiert)} \\ &= \int_0^\tau \kappa(t) v(t) dt \qquad \text{(allgemein, } v(t) = |\gamma'(t)|.\text{)} \\ \text{Biegeenergie:} \qquad E(\gamma) &:= \int_0^\tau \kappa(s)^2 ds \end{aligned}$$

Satz 4.4. *Für jede ebene geschlossene Kurve (γ, τ) gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\int_0^\tau \kappa ds = 2\pi n.$$

Definition 4.5. Die Zahl n heißt *Tangentenumlaufzahl* der ebenen geschlossenen Kurve (γ, τ).

Beweis. O.B.d.A. $|\gamma'| = 1$. Sei

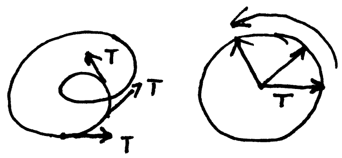
$$\alpha(s) := \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma + \alpha_0$$

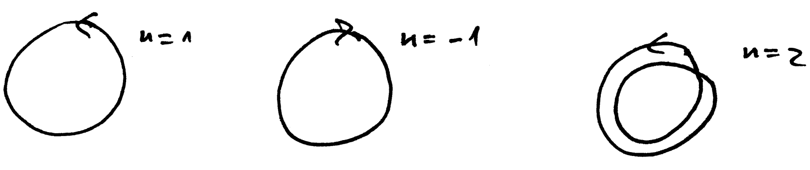
und α_0, so dass $T(0) = (\cos\alpha_0, \sin\alpha_0)$. Wie im Beweis des Hauptsatzes der ebenen Kurventheorie 3.4 folgt

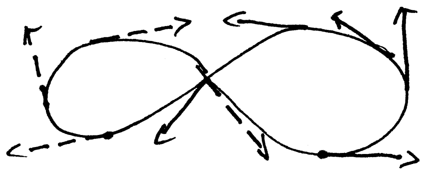
$$T(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$$

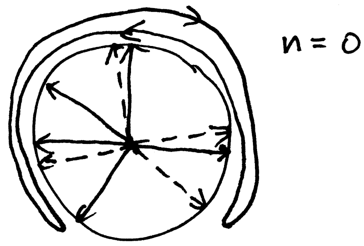
für alle $s \in \mathbb{R}$. Da γ geschlossen ist, gilt $T(\tau) = T(0)$, also $(\cos\alpha(\tau), \sin\alpha(\tau)) = (\cos\alpha(0), \sin\alpha(0))$ und somit $\int_0^\tau \kappa(\sigma) d\sigma = \alpha(\tau) - \alpha(0) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. □

Im Beweis haben wir gesehen, dass die Tangentenumlaufzahl n angibt, wie oft sich T um den Einheitskreis herumbewegt, wenn man einmal durch die Kurve läuft.









Definition 4.6. Eine *reguläre Homotopie* zwischen zwei geschlossenen Kurven (γ, τ) und $(\tilde{\gamma}, \tau)$ ist eine glatte (C^∞) Abbildung

$$h\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

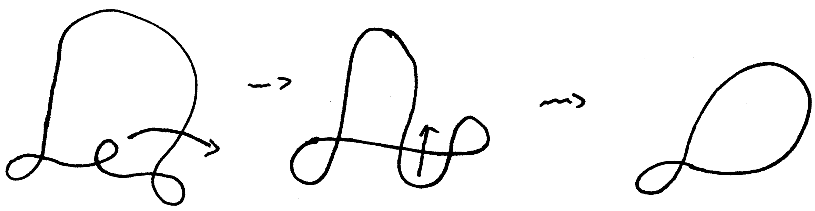
mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Kurven $\gamma_u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto h(t,u)$ sind alle geschlossen, genauer: es gibt eine stetige Abbildung $u \to \tau_u$, sodass $h(t+\tau_u, u) = h(t,u)$ für alle $t \in \mathbb{R}, u \in [0,1]$.

b) Diese Kurven sind alle regulär, d.h. $\gamma_u'(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,u) \neq 0$ für alle t, u.

c) $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1 = \tilde{\gamma}$.

Definition 4.7. Zwei geschlossene Kurven (γ, τ), und $(\tilde{\gamma}, \tilde{\tau})$ heißen *regulär homotop*, wenn es eine reguläre Homotopie zwischen ihnen gibt.



Behauptung 4.8. *Reguläre Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.*

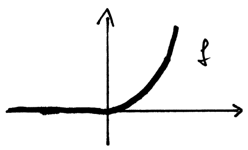
Beweis. 1) $\gamma \sim \gamma$: $h(t,u) := \gamma(t)$ für alle $u \in [0,1]$.

2) $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Rightarrow \tilde{\gamma} \sim \gamma$: Sei h eine reguläre Homotopie zwischen γ und $\tilde{\gamma}$, dann ist $\tilde{h}(t,u) = h(t, 1-u)$ eine reguläre Homotopie zwischen $\tilde{\gamma}$ und γ.

3) $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma} \sim \hat{\gamma} \Rightarrow \gamma \sim \hat{\gamma}$:

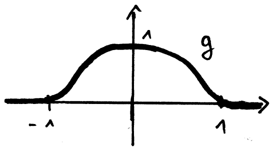
Man hat folgende Toolbox von glatten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, der Form:



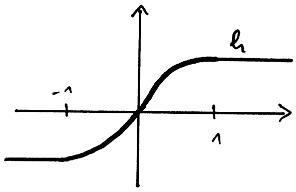
z.B. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$

2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, der Form:



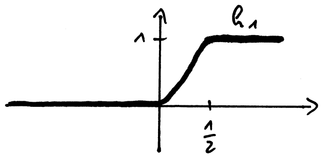
z.B.: $g(x) = f(1 - x^2)$.

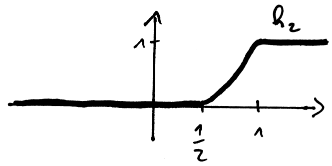
3) $\exists h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, der Form:



z.B.: $h(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi$.

Hier wählen wir h_1, h_2 der Form:



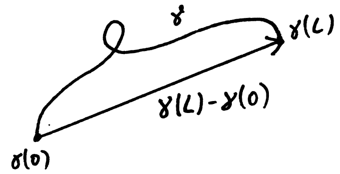


Seien h und $\tilde{h}$ reguläre Homotopien zwischen $\gamma, \tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$. Dann ist $\hat{h}(t, u) = \begin{cases} h(t, h_1(u)), & 0 \le u \le \frac{1}{2} \\ \tilde{h}(t, h_2(u)), & \frac{1}{2} \le u \le 1 \end{cases}$ eine reguläre Homotopie zwischen γ und $\hat{\gamma}$.

□

Satz 4.9 (Whitney-Graustein, 1932). *Zwei geschlossene Kurven in $\mathbb{R}^2$ sind genau dann regulär homotop, wenn sie dieselbe Tangentenumlaufzahl haben.*

Anders gesagt, ist die Abbildung, die eine geschlossen Kurve auf ihre Tangentenumlaufzahl abbildet, eine bijektive Abbildung zwischen den Äquivalenzklassen homotoper geschlossener Kurven und den ganzen Zahlen (Man könnte sogar eine Addition auf den Kurven definieren, sodass diese Abbildung eine Gruppenisomorphismus wird).
Vorher noch ein Satz, den wir im Beweis verwenden wollen.



Satz 4.10. *Sei γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve der Länge L. Dann ist*

$$|\gamma(L) - \gamma(0)| \le L$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma'(s) = \frac{1}{L}(\gamma(L) - \gamma(0))$. Insbesondere ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Strecke.

Beweis. Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ und o.B.d.A. $\gamma(0) = 0$, $\gamma(L) = (\gamma_1(L), 0)$. Dann gilt

$$|\gamma(L) - \gamma(0)| = \left| \int_0^L \gamma'(s) ds \right| \le \int_0^L |\gamma_1'(s)| ds \le \int_0^L 1 ds = L$$

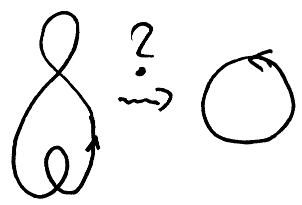
und Gleichheit nur für $\gamma_1'(s) = 1$ und $\gamma_2'(s) = 0$. □

Beweis von Whitney-Graustein. $\Longrightarrow$: klar, da

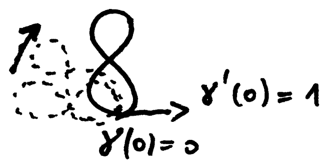
$$n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau_u} \kappa_u(t)v_u(t)dt$$

eine stetige Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$, die Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, ist. Also ist $n(u)$ konstant, insbesondere $n(0) = n(1)$.
$\Longleftarrow$:

- O.B.d.A. $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$, durch Homotopie skalieren: $\gamma_u(t) = (u-1)\gamma(t) + u\frac{L(\tilde{\gamma})}{L(\gamma)}\gamma(t)$.

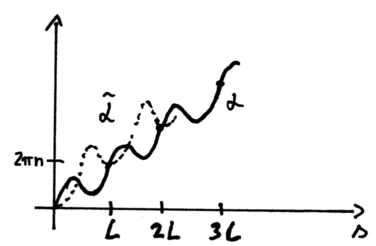


- O.B.d.A. $\hat{\gamma}(0) = \gamma(0)$, durch Homotopie verschieben: $\gamma_u(t) = \gamma(t) - u\gamma(0)$.
- O.B.d.A. γ, $\tilde{\gamma}$ nach der Bogenlänge parametrisiert, durch Homotopie umparametrisieren: $\gamma_u(t) = \gamma(ut + (u-1)s^{-1}(t))$.
- O.B.d.A. $T(0) = \tilde{T}(0) = (1,0)$, durch Homotopie drehen: wenn $T(0) = (\cos\alpha_0, \sin\alpha_0)$, dann



$$\gamma_u(t) = \begin{pmatrix} \cos((u-1)\alpha_0) & \sin((u-1)\alpha_0) \\ -\sin((u-1)\alpha_0) & \cos((u-1)\alpha_0) \end{pmatrix} \gamma(t)$$

Wie im Hauptsatz der ebenen Kurventheorie 3.4 setze $\alpha(s) = \int_0^s \kappa(\sigma)d\sigma$, dann gilt $T(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$ und $\gamma(s) = \int_0^s T(\sigma)d\sigma$. Analog $\tilde{\alpha}$ für $\tilde{\gamma}$.
Dann gilt



$$\alpha(s+L) - \alpha(s) = \int_s^{s+L} \kappa(\sigma)d\sigma = 2\pi n$$

und genauso für $\tilde{\alpha}$. Definiere für $u \in [0,1]$

$$\alpha_u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha_u(s) = (1-u)\alpha(s) + u\tilde{\alpha}(s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\alpha_u(s+L) &= (1-u)\alpha(s+L) + u\tilde{\alpha}(s+L) \\ &= \alpha_u(s) + 2\pi n(1-u+u) = \alpha_t(s) + 2\pi n.\end{aligned}$$

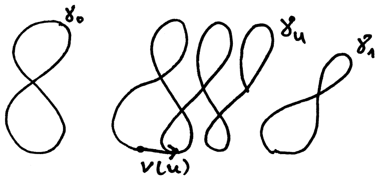
Also definiert

$$T_u(s) := (\cos(\alpha_u(s)), \sin(\alpha_u(s)))$$

eine reguläre Homotopie zwischen den geschlossenen Kurven (T, L) und $(\tilde{T}, L)$.

Problem: die Kurven

$$\hat{\gamma}_u(s) := \int_0^s T_u(\sigma)d\sigma$$



sind nicht unbedingt periodisch, d.h.,

$$\begin{aligned} v(u) := \gamma_u(s+L) - \gamma_u(s) &= \int_s^{s+L} T_t(\sigma)d\sigma \\ &= \int_0^L T_t(\sigma)d\sigma = \int_0^L (\cos\alpha_t(\sigma), \sin\alpha_t(\sigma))d\sigma. \end{aligned}$$

ist nicht unbedingt für all u gleich Null. Lösung: Ersetze $\hat{\gamma}_u$ durch

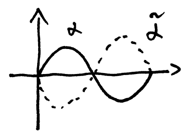
$$\gamma_u(s) = \hat{\gamma}_u(s) - \frac{s}{L}v(u).$$

Das ist periodisch, da $\gamma_t(s+L) = \hat{\gamma}_t(s) + v(t) - \frac{s+L}{L}v(t) = \gamma_t(s)$. Also ist

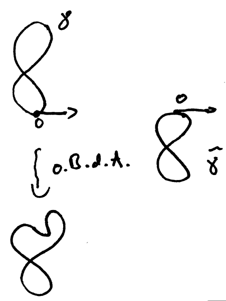
$$h(u,s) = \gamma_u(s)$$

eine glatte Homotopie geschlossener Kurven zwischen γ und $\tilde{\gamma}$, weil $v(0) = v(1) = 0$ ist. Ist sie regulär, d.h., ist $\gamma_u'(s) \neq 0$ für alle u, s? Es gilt

$$\gamma_u'(s) = T_u(s) - \frac{1}{L}v(u).$$



Es wäre gut, wenn $|v(u)| < L$ gelten würde. Nach Satz 4.10 ist $|v(u)| \leq L$ und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\alpha_u(s)$ bzgl. s konstant ist. Wegen $\alpha_u(0) = 0$ müssen wir ausschließen, dass $\alpha_u(s) = 0$ für alle s. Aber weder für $u = 0$ noch für $u = 1$ ist $\alpha_u(s) = 0$ für alle s (da geschlossene Kurven keine Strecken sind). Wenn $\alpha_u(s) = 0$ für alle s und ein $u \in (0,1)$ gilt, dann gilt das genau für dieses u. Durch Ausbeulen der einen Kurve auf einem kleinen Intervall kann man das verhindern (noch zu den o.B.d.A's am Anfang hinzufügen).



□

5 Ebene elastische Kurven

Wir haben schon zwei invariante Funktionale auf dem Raum der ebenen Kurven untersucht: die Länge und die Tangentenumlauf $\int_0^L \kappa ds$. Ein weiteres invariantes Funktional ist die Biegeenergie.

Definition 5.1. Sei $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$E = \int_0^L \kappa^2 ds$$

die *Biegeenergie* dieser Kurve (dabei und im Folgenden: $ds = v(x)dx$, $v(x) = |\gamma'(x)|$).

Definition 5.2. Eine C^∞–Abbildung

$$\gamma\colon [0,L]\times[-\epsilon,\epsilon]\to\mathbb{R}^2, \qquad (x,t)\mapsto\gamma(x,t)$$

heißt *Variation* der Abbildung $\gamma\colon [0,L]\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto\gamma(x,0)$. $\dot\gamma(x):=\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,0)$ heißt *Variationsvektorfeld* von γ. Eine Variation γ wird *Variation mit kompaktem Träger* genannt, wenn es $\delta>0$ gibt, so daß

$$\gamma(x,t)=\gamma(x,0), \qquad \text{für alle } x\in[0,\delta]\cup[L-\delta,L],\ t\in[-\epsilon,\epsilon].$$

Übung: Ist $\gamma(x,0)$ eine parametrisierte Kurve, so sind (eventuell nach Verkleinerung von ϵ) alle Abbildungen $x\mapsto\gamma(x,t)$ parametrisierte Kurven.
Ab jetzt sei o.B.d.A: $|\gamma'(x,0)|=v(x,0)=1$.

5.1 Geodätische

Die kritischen Punkte des Längenfunktionals heißen Geodätische.

Definition 5.3. Eine parametrisierte Kurve heißt *Geodätische*, falls für alle ihre Variationen mit kompaktem Träger

$$\dot L := \frac{\partial\gamma}{\partial t}\bigg|_{t=0}\int_0^L ds = 0$$

gilt.

Zur Einstimmung auf die Variationsrechnung zeigen wir hier, dass die Geodätischen die Minima des Längenfunktionals sind.

Satz 5.4. *Die Geodätischen in $\mathbb{R}^2$ sind Strecken.*

Beweis. Im folgenden verwenden wir für Funktionen $g(x,t)$ die Abkürzung

$$\boxed{\dot g(x):=\tfrac{\partial g}{\partial t}(x,0)}.$$

$$\begin{aligned}
\dot L &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\int_0^L ds, && ds = v dx,\ ds =_{|t=0} dx\\
&= \int_0^L \dot v ds, && \gamma' = vT \implies \dot\gamma' = \dot v T + v\dot T\\
& && \qquad\implies \dot v = \langle\dot\gamma', T\rangle\\
&= \int_0^L \langle\dot\gamma', T\rangle ds, && \langle\dot\gamma, T\rangle' = \langle\dot\gamma', T\rangle + \langle\dot\gamma, T'\rangle\\
&= [\langle\dot\gamma, T\rangle]_{x=0}^L - \int_0^L\langle\dot\gamma, T'\rangle, && T' = \kappa N,\ \text{falls } t=0,\\
& && \dot\gamma(0)=\dot\gamma(L)=0, \text{ da Var. m. komp. Tr.}\\
&= -\int_0^L \kappa\langle\dot\gamma, N\rangle ds
\end{aligned}$$

Aus $\dot{L} = -\int_0^L \kappa\langle\dot{\gamma}, N\rangle ds$ und Lemma 5.6 unten folgt, dass eine parametrisierte Kurve genau dann eine Geodätische ist, wenn $\int_0^L \kappa\, g\, ds = 0$ für die Krümmung κ und alle $g \in C_0^\infty[0, L]$. Nach dem Fundamentallemma 5.7 unten ist dies zu $\kappa \equiv 0$ äquivalent. Nach dem Hauptsatz der ebenen Kurventheorie 3.4 bedeutet das, dass $\gamma(x, 0)$ eine Strecken ist. $\square$

Definition 5.5.

$$C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^2) = \{\, Y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \mid \exists \delta > 0\colon Y_{|[a,a+\delta]\cup[b-\delta,b]} \equiv 0 \,\}$$
$$C_0^\infty[a,b] = C_0^\infty([a,b], \mathbb{R})$$

Lemma 5.6 (Übung)**.** *Zu jedem Vektorfeld $Y \in C_0^\infty([0, L], \mathbb{R}^2)$ und jeder parametrisierten Kurve gibt es eine Variation γ mit kompaktem Träger, so dass*

$$\dot{\gamma} = Y.$$

Lemma 5.7 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Auf dem Vektorraum $C^\infty[a, b]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ gilt:*

$$C_0^\infty[a, b]^\perp = \{0\}.$$

Beweis des Fundamentallemmas der Variationsrechnung 5.7. Sei $f \in C^\infty[a, b]$ und $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und $x_0 \pm \delta \in (a, b)$. Wähle aus der Toolbox von Funktionen auf Seite 12: $g \in C_0^\infty[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset C_0^\infty[a, b]$ mit $g \geq 0$ und $g(x_0) = 1$. Für diese Funktion gilt $\langle f, g\rangle > 0$, also $f \notin C_0^\infty[a, b]^\perp$. $\square$

5.2 Freie elastische Kurven

Definition 5.8. Eine parametrisierte Kurve heißt *freie elastische Kurve* falls für alle ihre Variationen mit kompaktem Träger

$$\dot{E} = 0$$

gilt.

Satz 5.9. *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann frei elastisch, wenn*

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0.$$

Beweis. Mit $v(x, 0) = 1$ folgt

$$\dot{E} = \frac{\partial\gamma}{\partial t}\bigg|_{t=0} \int_0^L \kappa^2 v dx = \int_0^L 2\dot{\kappa}\kappa + \kappa^2\dot{v}\, ds$$

Wie haben bereits im Beweis zu Satz 5.4 gesehen, dass $\dot{v} = \langle\dot{\gamma}', T\rangle$. Was ist nun aber $\dot{\kappa}$?

Aus $T' = v\kappa N$ folgt $\dot{T}' = \dot{v}\kappa N + v\dot{\kappa}N + v\kappa\dot{N}$ und damit

$$\langle \dot{T}', N\rangle = \dot{v}\kappa + \dot{\kappa}$$

Andererseits folgt aus $\gamma' = vT$ zuerst $\dot{\gamma}' = \dot{v}T + \dot{T}$ dann $\dot{\gamma}'' = \dot{v}'T + \dot{v}\kappa N + \dot{T}'$, also

$$\langle \dot{T}', N\rangle = \langle \dot{\gamma}'', N\rangle - \dot{v}\kappa.$$

Zusammen erhalten wir

$$\dot{\kappa} = \langle \dot{\gamma}'', N\rangle - 2\dot{v}\kappa.$$

Setzen wir das und $\dot{v} = \langle \dot{\gamma}', T\rangle$ in die obige Formel von $\dot{E}$ ein, so erhalten wir (mit ähnlichen Begründungen wie im Beweis zu Satz 5.4):

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \int_0^L 2\kappa\langle \dot{\gamma}'', N\rangle - 3\kappa^2\langle \dot{\gamma}', T\rangle ds \\
&= \int_0^L -2\kappa'\langle \dot{\gamma}', N\rangle \underbrace{-2\kappa\langle \dot{\gamma}', N'\rangle - 3\kappa^2\langle \dot{\gamma}', T\rangle}_{-\kappa^2\langle \dot{\gamma}', T\rangle} ds \\
&= \int_0^L 2\kappa''\langle \dot{\gamma}, N\rangle + \underbrace{2\kappa'\langle \dot{\gamma}, N'\rangle + 2\kappa'\kappa\langle \dot{\gamma}, T\rangle}_{(*)} + \kappa^2\langle \dot{\gamma}, T'\rangle ds \\
&= \int_0^L (2\kappa'' + \kappa^3)\langle \dot{\gamma}', N\rangle ds
\end{aligned}$$

Dass sich die beiden Summanden von $(*)$ wegheben, liegt an der Parametrisierungsinvarianz von E. Wenn die Summanden $(*)$ nicht wegfielen, würde die Tangentialkomponente von $\dot{\gamma}$ Einfluss auf $\dot{E}$ haben, insbesondere würde es dann ein Variation die eine reine Umparametrisierung ist mit $\dot{E} \neq 0$ geben, was der Parametrisierungsinvarianz von E widerspräche. Natürlich ist das Wegfallen von $(*)$ direkt mit $N' = -\kappa T$ für $t = 0$ einsehbar.
Mit Lemma 5.6 und Lemma 5.7 folgt wieder, dass $\dot{E} = 0$ für alle Variation einer gegebenen Kurve mit kompaktem Träger, genau dann wenn für ihre Krümmung κ gilt:

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0.$$

□

5.3 Elastische Kurven

Bei einem elastischen Stab ist auch die Länge fest. Feste Länge bedeutet, das wir nur Variationen zulassen für die $\dot{L} = 0$ gilt. Im Beweis von Satz 5.4 haben wir gesehen, dass das $\int_0^L \kappa\langle \dot{\gamma}, N\rangle = 0$ bedeutet.

Definition 5.10. Eine parametrisierte Kurve heißt *elastische Kurve*, falls für alle ihre Variationen γ mit kompaktem Träger mit $\int_0^L \kappa\langle \dot{\gamma}, N\rangle = 0$

$$\dot{E} = 0$$

gilt.

Satz 5.11. *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann elastisch, wenn für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + a\kappa = 0.$$

Beweis. Im Beweis zu Satz 5.9 haben wir gesehen, dass

$$\dot{E} = \int_0^L (\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3)\langle\dot{\gamma}, N\rangle ds.$$

Jetzt sind aber nur Variationen mit $\int \kappa\langle\dot{\gamma}, N\rangle = 0$ zugelassen.
D.h. κ ist die Krümmung einer elastischen Kurve genau dann, wenn $(\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3) \perp u$ für alle $u \in C_0^\infty[0, L]$ mit $\kappa \perp u$. Wir müssen noch zeigen, dass daraus die lineare Abhängigkeit von κ und $\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3$ folgt (Umkehrung ist klar). Dies folgt, wenn man in folgendem Lemma $H = C^\infty[0, L]$, $V = C_0^\infty[0, L]$ und $U = \kappa\mathbb{R}$ setzt. $\square$

Lemma 5.12. *Sei H ein (möglicherweise unendlich dimensionaler) Prähilbertraum (d.h., Vektorraum mit Skalarprodukt). Sei $V \subset H$ ein Unterraum mit $V^\perp = \{0\}$ und $U \subset H$ endlich dimensional. Dann gilt:*

$$(U^\perp \cap V)^\perp = U.$$

Beweis von Lemma 5.12. Die Inklusion $U \subset (U^\perp \cap V)^\perp$ ist leicht gezeigt, denn $u \in U$ impliziert $\langle u, x\rangle = 0$ für alle $x \in U^\perp \cap V$.
Um $(U^\perp \cap V)^\perp \subset U$ zu zeigen, wähle eine ON–Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ von U, und definiere

$$P\colon H \to U, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i.$$

P ist die Orthogonalprojektion von H auf U, d.h., $P^2 = P$, $P^* = P$, $\mathrm{Bild}(P) = U$.
Für $u \in U$ und $h \in H$ gilt $\langle u, h\rangle = \langle P(u), h\rangle = \langle u, P(h)\rangle$. Daher ist $U \cap P(V)^\perp \subset V^\perp = \{0\}$ und somit $P(V) = U$. Es gibt also $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$ mit $P(v_i) = x_i$. Sei

$$Q\colon H \to V, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle v_i.$$

Diese Abbildung ist symmetrisch (d.h. $Q^* = Q$), $\mathrm{Bild}(Q) \subset V$ und $P \circ Q|_U$ ist die Identität auf U. Damit folgt für $x \in (U^\perp \cap V)^\perp$ und $v \in V$:

$$\langle x - P \circ Q(x), v\rangle = \langle x, v - Q \circ P(v)\rangle = 0,$$

da $v - Q \circ P(v) \in U^\perp \cap V$. Also $x - P \circ Q(x) \in V^\perp = \{0\}$, und daher $x = P \circ Q(x) \in U$. $\square$

Das qualitative Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung $\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + a\kappa = 0$ kann man mit der Bewegung im Potentialtopf beschreiben. Mit dem Potential

$$V(\kappa) = \frac{1}{8}\kappa^4 + \frac{a}{2}\kappa^2$$

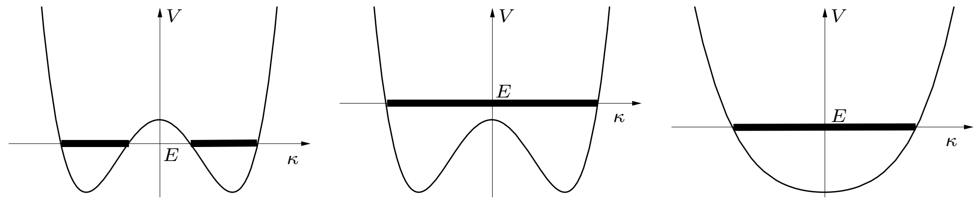
bekommt die Differentialgleichung die Form

$$\kappa'' + \frac{\partial V}{\partial \kappa}(\kappa) = 0.$$

Multipliziert man beide Seiten mit κ' und integriert einmal, so erhält man

$$\frac{1}{2}\kappa'^2 + V(\kappa) = E, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Also ist $V(\kappa) \leq E$, und $|\kappa'|$ proportional zu $\sqrt{E - V(k)}$.



Potentialtopf $V(\kappa)$, 2–mal $a < 0$ und 1–mal $a > 0$, mit zulässigem Bereich für κ.

Eine überraschende geometrische Eigenschaft elastischer Kurven ergibt sich aus dem folgenden Satz.

Satz 5.13. *γ ist genau dann eine nach der Bogenlänge parametrisierte elastische Kurve, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$b = \kappa' N + (\tfrac{1}{2}\kappa^2 + a)T$$

konstant ist.

Beweis. $b' = \kappa'' N - \kappa'\kappa T + \kappa'\kappa T + (\frac{1}{2}\kappa^2 + a)\kappa N = (\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + a\kappa)N.$ □

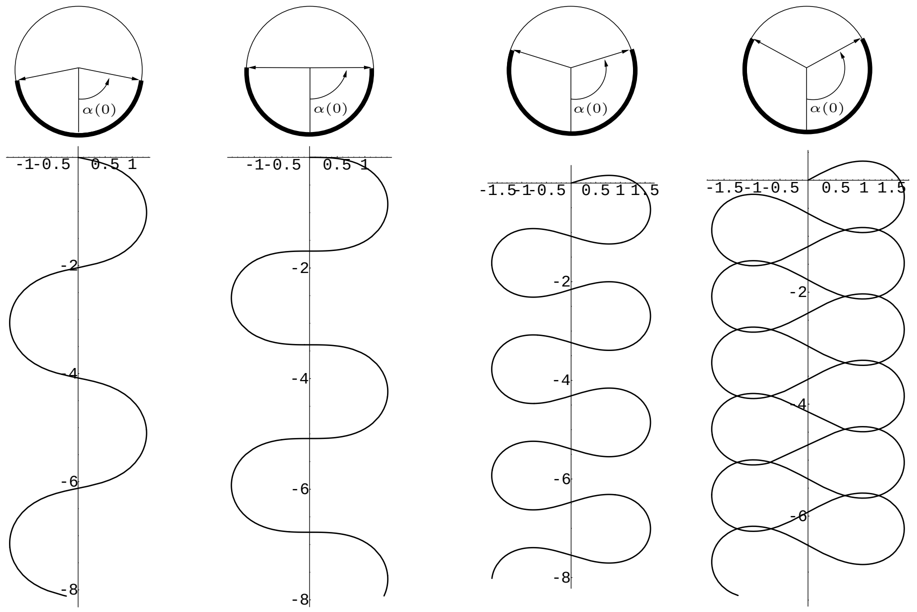
Den Vektor b nennt man eine Erhaltungsgröße (2-dimensional). Wie bei der Bewegung im Potentialtopf lassen sich aus dieser Erhaltungsgröße qualitative Aussagen über das Aussehen elastischer Kurven ableiten.
Wenn $b = 0$, dann ist $a \leq 0$ und κ konstant und die Kurve ein Kreis vom Radius $(-2a)^{\frac{1}{2}}$ oder eine Gerade in Richtung b.
Ist $b \neq 0$, dann setze $\rho = |b|$, $e_1 = \rho^{-1}Jb$, $e_2 = Je_1$ und $\gamma = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$. Dann gilt

$$\gamma_1' = \langle \gamma, e_1 \rangle = \langle T, \rho^{-1}Jb \rangle = -\rho^{-1}\langle JT, b \rangle = -\rho^{-1}\langle N, b \rangle = -\rho^{-1}\kappa'.$$

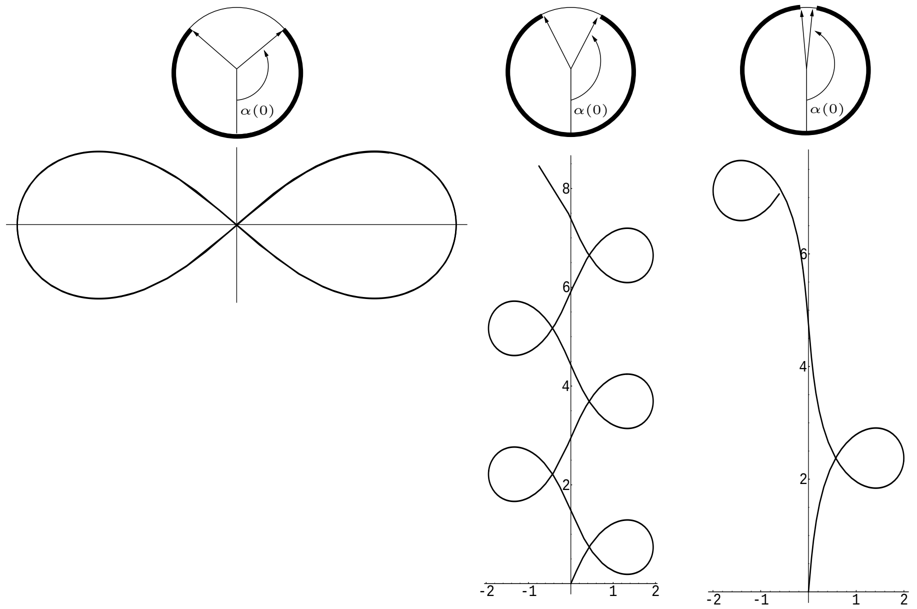
Der Abstand von γ zu einer festen zu e_2 parallelen Geraden ist also proportional zur Krümmung κ.
Sei $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}$, so dass $T = e_1 \sin\alpha - e_2 \cos\alpha$ dann erhalten wir

$$\alpha'' = \kappa' = \langle N, b \rangle = \langle JT, -\rho e_2 \rangle = -\rho \sin\alpha.$$

Der Tangentenvektor einer elastischen Kurve ist also ein mathematisches Pendel (das erklärt auch, warum wir den Winkel α von T – wie beim Pendel üblich – auf die negative y-Achse beziehen). Damit kann man den Verlauf elastischer Kurve gut verstehen

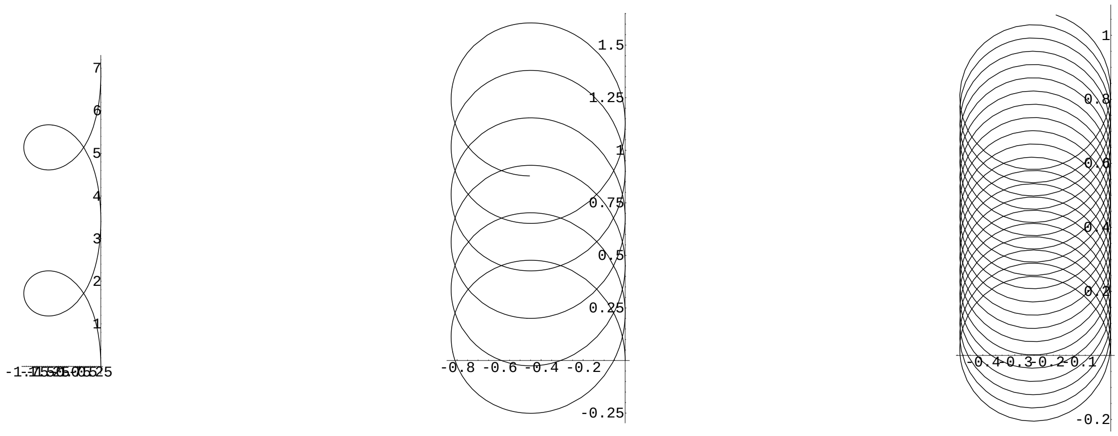


Elastische Kurven $\rho = 1,\ \alpha'(0) = 0,\ \alpha(0) = \frac{\pi}{2} - .2,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + .3,\ \frac{\pi}{2} + .5$



Elastische Kurven $\rho = 1,\ \alpha'(0) = 0,\ \alpha(0) = \frac{\pi}{2} + .71,\ \frac{\pi}{2} + 1.1,\ \pi - .1$

Die Gleichung für α kann man natürlich auch direkt herleiten: Sei γ nach der Bogenlänge



Elastische Kurven $\rho = 1$, $\alpha(0) = \pi$, $\alpha'(0) = .2,\ 2,\ 4$

parametrisiert, dann gilt

$$\gamma(s) = \int_0^s T(\sigma)d\sigma = \left(\int_0^s \sin\alpha(\sigma)d\sigma, -\int_0^s \cos\alpha(\sigma)d\sigma \right),$$

$$E = \int_0^L (\alpha')^2 ds.$$

Wenn nun α eine Variation mit kompaktem Träger ist, dann variiert T mit kompaktem Träger und die Länge der Kurve $x \mapsto \gamma(x,t)$ ist konstant gleich L. Damit auch γ mit kompaktem Träger variiert, müssen wir noch dafür sorgen, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \int_0^L (\sin\alpha, -\cos\alpha) = 0.$$

Die Kurve γ ist also elastisch, wenn

$$\dot{E} = \int_0^L 2\dot{\alpha}'\alpha' ds = \int_0^L 2\dot{\alpha}\alpha'' ds$$

für alle $\alpha \in C_0^\infty[0,L]$ mit

$$\int_0^L \dot{\alpha}\sin\alpha = \int_0^L \dot{\alpha}\cos\alpha = 0$$

ist. Das bedeutet: $\alpha'' \in (\mathrm{Span}\{\cos\alpha, \sin\alpha\} \cap C_0^\infty[0,L])^\perp$. Also folgt mit Lemma 5.12, dass $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\alpha'' = \rho\sin\alpha + \sigma\cos\alpha$, und nach Drehung des Koordinatensystems

$$\alpha'' = -\rho\sin\alpha.$$

Daraus folgt dann $\kappa'' + \rho\kappa\cos\alpha = 0$ und $\frac{1}{2}(\alpha')^2 - \rho\cos\alpha = -a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, und damit wieder die Gleichung

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + a\kappa = 0.$$

6 Gerahmte Raumkurven

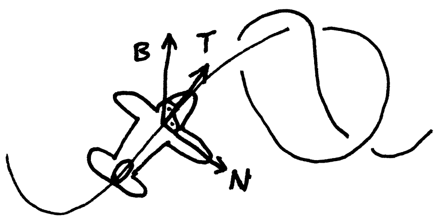
Bei den ebenen Kurven hatten wir für $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$, $|\gamma'| = 1$ in jedem Kurvenpunkt die positiv orientierte Orthonormalbasis $T, N\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$.
Sei nun $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^3$, $|\gamma'| = 1$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Dann können wir wieder fordern: $T\colon\ = \gamma'$, $|N(s)| = 1$, $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$. Dann kann man für $N(s)$ einen beliebigen Einheitsvektor in der Ebene senkrecht zu $T(s)$ wählen.

Definition 6.1. Sei $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Ein Tripel glatter Abbildungen $T, N, B\colon [0,L] \to \mathbb{R}^3$ heißt *angepasster Rahmen* für γ, wenn $\gamma' = T$ und $T(s), N(s), B(s)$ für alle $s \in [0,L]$ eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^3$ ist.

Bemerkung 6.2. T und N bestimmen B durch $B = T \times N$. Ist T, N, B ein angepasster Rahmen und $\alpha\colon [0,L] \to \mathbb{R}$, dann ist $\tilde{T} = T$, $\tilde{N} = \cos(\alpha)N + \sin(\alpha)B$, $\tilde{B} = -\sin(\alpha)N + \cos(\alpha)B$ wieder ein angepasster Rahmen, und man erhält so jeden angepassten Rahmen.

Ableitungsgleichungen für angepasste Rahmen:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma' &= T \\ T' &= \kappa_1 N + \kappa_2 B \\ N' &= -\kappa_1 T + \tau B \\ B' &= -\kappa_2 T - \tau B \end{aligned}}$$



„Abfliegen der Kurve“: κ_1 Höhenruder, κ_2 Seitenruder, τ Querruder.
Jede Kurve kann man ohne Querruder abfliegen (paralleler Rahmen, Definition 6.6). Kurven mit FrenetRahmen (Definition 6.4) kann man ohne Seitenruder abfliegen.

Definition 6.3. Die glatten Abbildungen κ_1, κ_2 bzw. $\tau\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ heißen *Normalen-* und *Binormalenkrümmung* bzw. *Torsion* des Rahmens.

Zum Beweis der Ableitungsgleichungen. Die erste Gleichung ist Definition. Für die anderen drei definiert man die Abbildungen $\kappa_1 := \langle T', N\rangle$, $\kappa_2 := \langle T', B\rangle$ und $\tau := \langle N', B\rangle$. Dann impliziert $\langle T, T\rangle = 1$ die Beziehung $\langle T', T\rangle = 0$, damit und mit der Definition von κ_1 und κ_2 folgt die zweite Gleichung, weil T, N, B eine ONB ist. Genauso ist $\langle N', N\rangle = 0$ und aus $\langle T, N\rangle = 0$ folgt $\langle T, N'\rangle = -\langle T', N\rangle = -\kappa_1$. Damit folgt die dritte Gleichung. Die vierte folgt analog. □

Aus der ebenen Kurventheorie ergeben sich mögliche Wünsche an T, N, B:

1. $T' = \kappa N$

2. $N' = -\kappa T$

Wir werden sehen (Satz 6.13), dass beides zusammen impliziert, dass die Kurve in einer Ebene enthalten ist. Einzeln ergeben sich Frenet- und parallele Rahmen.

Definition 6.4. Ein angepasster Rahmen T, N, B heißt *Frenet-Rahmen*, wenn es $\kappa\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ gibt mit $T' = \kappa N$.

Anders gesagt: Im Frenet-Rahmen ist $\kappa_2 = 0$.

6.1 Parallele Rahmen

Definition 6.5. $N\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ heißt *Normalenvektorfeld* längs γ, wenn $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$ für alle s, und *Einheitsnormalenvektorfeld*, wenn außerdem $|N(s)| = 1$.

Definition 6.6. Ein Normalenvektorfeld N heißt *parallel*, wenn es $\kappa\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ gibt mit $N' = -\kappa T$. Ein angepasster Rahmen T, N, B heißt *parallel*, wenn N parallel ist (B ist dann automatisch auch parallel).

Anders gesagt: Im parallelen Rahmen ist $\tau = 0$.

Satz 6.7. *Sei $N_0 \in \mathbb{R}^3, |N_0| = 1, \langle N_0, T(0)\rangle = 0$. Dann gibt es genau ein paralleles Einheitsnormalenvektorfeld N längs γ mit $N(0) = N_0$.*

Beweis. Eindeutigkeit: Aus $\langle N, T\rangle = 0$ folgt $\kappa = \langle N', T\rangle = -\langle N, T'\rangle$. Also löst N das lineare AWP

$$N' = -\langle N, T'\rangle T, \qquad N(0) = N_0. \tag{$*$}$$

Existenz: Sei N die Lösung des AWP $(*)$. Dann gilt

$$\langle N, T\rangle' = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle -\langle N, T'\rangle T, T\rangle + \langle N, T'\rangle = 0.$$

Da $\langle N(0), T(0)\rangle = 0$ folgt daraus $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$ für alle s. Weiterhin gilt

$$\langle N, N\rangle' = 2\langle N, N'\rangle = 2\langle N, -\langle N, T'\rangle T\rangle = 0.$$

Da $\langle N(0), N(0)\rangle = \langle N_0, N_0\rangle = 1$ folgt daraus $|N(s)| = 1$ für alle s. □

Bemerkung 6.8. Sei T, N, B ein paralleler Rahmen einer Raumkurve. $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ ist genau dann ein weiterer paralleler Rahmen, wenn es $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\tilde{N} = \cos(\alpha)N + \sin(\alpha)B, \qquad \tilde{B} = -\sin(\alpha)N + \cos(\alpha)B.$$

Dazu ist zu zeigen, dass die Funktion $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ aus Bemerkung 6.2 genau dann konstant ist, wenn $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ auch parallel ist. Letzteres ist aber äquivalent zu $0 = \langle \tilde{N}', \tilde{B}\rangle = \langle -\alpha' \sin(\alpha)N + \alpha' \cos(\alpha)B + \cos(\alpha)N + \sin(\alpha)B, -\sin(\alpha)N + \cos(\alpha)B\rangle = \alpha'$.

6.2 Frenet-Kurven

Definition 6.9. Eine reguläre Kurve heißt *Frenet-Kurve*, wenn für ihre Parametrisierung nach der Bogenlänge $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ für alle $s \in [0, L]$ gilt $\gamma''(s) \neq 0$.

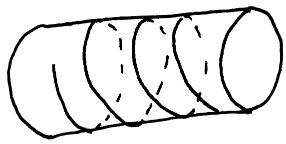
Satz 6.10. *Jede Frenet-Kurve besitzt einen eindeutig bestimmten Frenet-Rahmen mit positiver Krümmung.*

Beweis. Aus $T = \gamma'$ und $|T| = 1$ folgt $T' = \gamma''$ und $\langle T, T' \rangle = 0$. Also ist $N := \frac{1}{|T'|}T'$, $B = T \times N$ der eindeutig bestimmte Frenet-Rahmen von γ mit positiver Krümmung. □

► **Beispiel 6.11.** Betrachte die Helix: $\gamma(s) = (as, \cos(bs), \sin(bs),\ a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|\gamma'(s)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Setze also $a^2 + b^2 = 1$ voraus. Dann ist

$$\gamma''(s) = (0, -b^2 \cos(bs), -b^2 \sin(bs).$$

Also ist der Frenet-Rahmen von γ:



$$\begin{aligned} T(s) &= (a, -b\sin(bs), b\cos(bs)), \\ N(s) &= (0, -\cos(bs), -\sin(bs)), \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = (b, a\sin(bs), -a\cos(bs)), \end{aligned}$$

die Krümmung $\kappa = |\gamma''| = b^2$ und die Torsion $\tau = \langle N', B \rangle = ab$.

Definition 6.12. Die Funktionen κ und τ aus den Ableitungsgleichungen des Frenet-Rahmens heißen *Krümmung* und *Torsion* der Kurve.

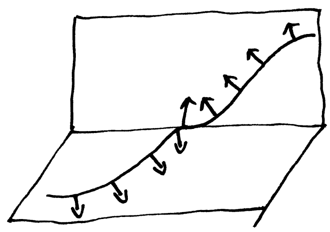
Satz 6.13. *Die Torsion einer Frenet-Kurve ist genau dann identisch Null, wenn die Kurve in einer Ebene liegt.*

Anders gesagt: Ist der Frenet-Rahmen einer Kurve parallel, so ist die Kurve eben.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Liegt γ in einer Ebene, dann gibt es $Y \in \mathbb{R}^3$, $|Y| = 1$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $\langle Y, \gamma(s) \rangle = d$ für alle $s \in [0, L]$. Dann folgt $\gamma', \gamma'' \perp Y$, also $T, N \perp Y$. Also ist $Y = \pm B(s)$ für alle s. Also $B'(s) = 0$ und daher $\tau(s) = 0$ für alle s.
„$\Longrightarrow$“: Aus $\tau \equiv 0$ folgt $B' = 0$. Sei $Y := B(s) \in \mathbb{R}^3$. Für $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \langle Y, \gamma(s) \rangle$, gilt dann $f'(s) = \langle Y, T(s) \rangle = \langle B(s), T(s) \rangle = 0$. Also $f(s) = d \in \mathbb{R}$ für alle s und γ liegt in der Ebene $\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Y, x \rangle = d \}$. □

► **Beispiel 6.14.** Problem: Nicht alle nach der Bogenlänge parametrisierten Kurven $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ sind Frenetkurven, z.B. Strecken. Schlimmer noch: Nicht alle regulären Kurven haben einen Frenet-Rahmen, z.B.:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{\frac{1}{t}}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t}}), & t > 0 \end{cases}$$



Bei $t = 0$ muss Frenet N unstetig sein.

6.3 Hauptsatz für gerahmte Raumkurven

Satz 6.15. *Seien $\kappa_1, \kappa_2, \tau\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ mit einem angepassten Rahmen T, N, B,* *sodass die Ableitungsgleichungen auf Seite 23 gelten. Ist $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ ein angepasster Rahmen längs $\tilde{\gamma}$ ebenfalls mit denselben κ_1, κ_2, τ, so gibt es ein $A \in \mathrm{SO}(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$, sodass*

$$\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + b,$$
$$\tilde{T}(s) = AT(s), \quad \tilde{N}(s) = AN(s), \quad \tilde{B}(s) = AB(s).$$

Vorbereitungen zum Beweis des Hauptsatzes:
$F\colon [0, L] \to \mathrm{SO}(3)$, $F(s) = (T(s), N(s), B(s))$. F ist durch

$$F(s)e_1 = T(s), \qquad F(s)e_2 = N(s), \qquad F(s)e_3 = B(s)$$

eindeutig bestimmt. Die Abbildung $y \mapsto F(s)$ bewegt die Standardbasis in den Rahmen zur Zeit s. Jede Art von Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} T' &= Y_{11}T + Y_{21}N + Y_{31}B \\ N' &= Y_{12}T + Y_{22}N + Y_{32}B \\ B' &= Y_{13}T + Y_{23}N + Y_{33}B \end{aligned}$$

lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$F' = FY, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix}$$

Definition 6.16. Die $n \times n$ Matrizen bezeichnen wir mit $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$. Weitere wichtige Matrizengruppen und -unterräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &:= \{ A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}. \\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &:= \{ A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}, \\ \mathrm{sl}(n, \mathbb{R}) &:= \{ Y \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, Y = 0 \}. \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{ A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = I, \det A = 1 \}, \\ \mathrm{so}(n) &:= \{ Y \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \mid Y^T = -Y \}. \end{aligned}$$

Satz 6.17. *Sei $Y\colon [0, L] \to gl(n, \mathbb{R})$ glatt, $F_0 \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$. Dann gibt es genau eine glatte Abbildung*

$$F\colon [0, L] \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$$

mit $F' = FY$, $F(0) = F_0$

Beweis. Dies ist der Satz von Picard-Lindelöf angewendet auf das lineare AWP $F' = FY$, $F(0) = F_0$. F ist glatt, da aus Y glatt, F n-mal stetig differenzierbar und $F' = FY$ folgt, dass F $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar ist. $\square$

Lemma 6.18. *Sei $F\colon [0,L] \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, $F' = FY$, $Y\colon [0,L] \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ glatt. Dann gilt* $(\det F)' = \mathrm{tr}(Y)\det F$

Beweis. Seien $f_1, \ldots, f_n$ die Spalten von F. Dann folgt aus $F' = FY$:

$$\begin{aligned} f_j' &= Y_{1j} f_1 + Y_{2j} f_2 + \ldots + a_{nj} f_n, \\ \det((f_1, \ldots, f_n)' &= \underbrace{\det(f_1', f_2, \ldots, f_n)}_{Y_{11}\det(f_1,\ldots,f_n)} + \ldots + \underbrace{\det(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n')}_{Y_{nn}\det(f_1,\ldots,f_n)} \\ &= (Y_{11} + \ldots + Y_{nn}) \det(f_1, \ldots, f_n). \end{aligned}$$

□

Satz 6.19. *Sei F Lösung von $F' = FY, F(0) = F_0$.*

a) Aus $F_0 \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ folgt $F(s) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ für alle s.

b) Aus $F_0 \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $Y(s) \in \mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ folgt $F(s) \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ für alle s.

c) Aus $F_0 \in \mathrm{SO}(n)$, $Y(s) \in \mathrm{so}(n)$ folgt $F(s) \in \mathrm{SO}(n)$ für alle s.

Beweis. a) und b): $(\det F)' = \mathrm{tr}\, Y \det F$, d.h., die Abbildung $f\colon [0,L] \to \mathbb{R}$, $f(s) = \det F(s)$ löst eine lineare DGL erster Ordnung, d.h. entweder $f \equiv 0$ oder f hat keine Nullstelle. Also folgt aus $f(0) \neq 0$, dass $f(s) \neq 0$ für alle s. Aus $\mathrm{tr}\, Y = 0$ folgt $(detF)' = 0$ und damit folgt $\det F(s) = 1$ für alle s aus $\det F(0) = 1$.
c) Aus $Y^T = -Y$ folgt $\mathrm{tr}\, Y = 0$ also mit b) $\det F(s) = 1$. Weiterhin gilt

$$(FF^T)' = FYF^T + F\underbrace{F'^T}_{FY} = FYF^T + FY^TF^T = F\underbrace{(Y + Y^T)}_{=0}F^T = 0.$$

Also folgt $F(s)F(s)^T = I$ aus $(FF^T)(0) = F_0F_0^T = I$. □

Lemma 6.20. *Sei $F\colon [0,L] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Dann gilt $(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}$.*

Beweis. $FF^{-1} = I$ impliziert $F'F^{-1} + F(F^{-1})' = 0$. □

Beweis des Hauptsatzes 6.15. Existenz: Das lineare AWP erster Ordnung $F(0) = I$, $F' = FY$ mit

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\tau \\ \kappa_2 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Definiere

$$(T, N, B) := F \qquad \text{und} \qquad \gamma(s) := \int_0^s T(\sigma)d\sigma.$$

Nach Satz 6.19 c) ist $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^3$ und somit eine angepasster Rahmen von γ mit den vorgegebenen Krümmungsgrößen.

Eindeutig: Sei $\tilde\gamma$, $\tilde T$, $\tilde N$, $\tilde B$ eine weitere Lösung, d.h. $\tilde\gamma' = \tilde T, \tilde F' = \tilde F Y$ für $\tilde F = (\tilde T, \tilde N, \tilde B)$. Dann folgt

$$(F\tilde F^{-1})' = \underbrace{F'}_{FY}\tilde F^{-1} - F\tilde F^{-1}\underbrace{\tilde F'}_{\tilde F Y}\tilde F^{-1} = FY\tilde F^{-1} - FY\tilde F^{-1} = 0.$$

Also ist $F\tilde F^{-1}(s) =: A^{-1}$ eine Konstante aus SO(3). Aus $AF = \tilde F$ folgt dann $\tilde T = AT, \tilde N = AN, \tilde B = AB$. Aus

$$(\tilde\gamma - A\gamma)' = \tilde T - AT = 0$$

folgt genauso, dass $\tilde\gamma - A\gamma =: b$ eine Konstante in $\mathbb{R}^3$ ist und $\tilde\gamma = A\gamma + b$. □

6.4 Zusammenhang zwischen Frenet- und parallelen Rahmen

Sei γ eine Frenet-Kurve mit Frenet-Rahmen T, N, B, d.h.,

$$\gamma' = T, \qquad T' = \kappa N, \qquad N' = -\kappa T + \tau B, \qquad B' = -\tau N.$$

Dann ist

$$\tilde T = T, \qquad \tilde N = \cos\alpha N - \sin\alpha B, \quad \tilde B = \sin\alpha N + \cos\alpha B$$

mit $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ ein weiterer Rahmen. Dieser ist genau dann parallel, wenn

$$\begin{aligned} 0 = \tilde\tau &= \langle \tilde N', \tilde B'\rangle \\ &= \langle -\kappa\cos\alpha T - \alpha'\sin\alpha N - \tau\sin\alpha N + \tau\cos\alpha B - \alpha'\cos\alpha B, \sin\alpha N + \cos\alpha B\rangle \\ &= \sin^2\alpha(\tau - \alpha') + \cos^2\alpha(\tau - \alpha') = \tau - \alpha'. \end{aligned}$$

D.h., wenn wir $\alpha(s) = \int_0^s \tau(\sigma)d\sigma$ setzen, so ist $\tilde T, \tilde N, \tilde B$ parallel.
Die Krümmungen κ_1, κ_2 des parallelen Rahmens $\tilde T, \tilde N, \tilde B$ ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \langle \tilde T', \tilde N\rangle = \langle T', \tilde N\rangle = \langle \kappa N, \tilde N\rangle = \kappa\cos\alpha, \\ \kappa_2 &= \kappa\sin\alpha \end{aligned}$$

Also $\binom{\kappa_1}{\kappa_2} = \kappa\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
Rückwärts: Sei $\tilde T, \tilde N, \tilde B$ paralleler Rahmen mit Krümmungen κ_1, κ_2. Dann sind die (Frenet-) Krümmung und Torsion:

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}, \qquad \tau = \alpha' = \frac{\kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1'}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2},$$

wobei $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $\binom{\kappa_1}{\kappa_2} = \kappa\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.