Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 18.10.2002
Abgabe: 30.10.2002

1. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie"

Die Abgabe der Lösungen zu den Übungsaufgaben hat am jeweiligen Abgabetag *vor dem Tutorium* zu erfolgen.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$, wahlweise versehen mit dem Euklidischen oder Minkowskischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$. Für $u=(u_1,u_2)$ und $v=(v_1,v_2)$ sind diese definiert durch

$$\langle u,v\rangle_E := u_1v_1+u_2v_2, \qquad \langle u,v\rangle_M := u_1v_1-u_2v_2.$$

(i) Welche Länge hat die Geraden $t\mapsto(t,t), t\in\mathbb{R}$ bezüglich beider Skalarprodukte?

(ii) Skizzieren Sie nun die Lage der Kurven der folgenden Familie:

$$c_k:(1,\infty)\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}(t-t^{-k},t+t^{-k});\quad 1\le k\in\mathbb{R}.$$

(iii) Berechnen Sie die Länge der c_k, wieder bezüglich beider Skalarprodukte.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei I ein offenes Intervall und seien $v_i : I\to\mathbb{R}^n$, $(i=1,\ldots,n-1)$ differenzierbare Abbildungen. Es seien $\{v_1(t),\ldots,v_{n-1}(t)\}$ für alle $t\in I$ linear unabhängig. Wir nehmen weiterhin an, es gibt eine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix $A=(a_{ij})$ aus reellen Zahlen, so daß

$$v_i'(t)=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}v_j(t),\quad (i=1,\ldots,n-1).$$

Unter welcher Bedingung ist $[v_1,\ldots,v_{n-1}]\in\mathbb{R}^{n*}$ konstant? Beweisen Sie hierzu auch eine Produktregel für die Ableitung des Kreuzprodukts.

Stellen Sie sich vor, sie müßten eine Animation der von der Zeit $t\in I$ abhängenden Vektoren v_i und ihres Kreuzproduktes herstellen. Formulieren Sie frei, was in der Animation zu sehen wäre.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei b eine symmetrische (möglicherweise degenerierte) Bilinearform auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum V. Wir definieren den *Nullraum* N von b als

$$N:=\{v\in V\,|\,b(v,w)=0 \text{ für alle } w\in V\}.$$

Der *Nullkegel* von b ist die Menge L aller Nullvektoren in V. Bezeichne $A := L \cup \{0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) N ist ein Untervektorraum von V. A ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $A = \{0\}$ oder $A = V$.

(ii) b ist genau dann nichtdegeneriert, wenn $N = \{0\}$.

(iii) b ist genau dann definit, wenn $A = \{0\}$.

(iv) b ist genau dann semidefinit, wenn $N = A$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt vom Index k auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V. Bezeichne $l := \min(k, n-k)$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Es gibt einen l-dimensionalen Untervektorraum W von V, so daß $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W^2} = 0$.

(ii) Die Zahl l ist die maximale Dimension eines Untervektorraums mit der Eigenschaft aus (i).

Aufgabe 5. (4 Zusatzpunkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Wir sagen, f hat *lokal konstanten Rang* um $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine offene Menge U mit $x_0 \in U$ gibt, so daß $(\operatorname{Rang} f)(x) = k$ für alle $x \in U$ ist; hierbei hängt k nur von U, nicht aber von der Wahl von x ab.

Man beweise, daß es einen dichte offene Menge A in $\mathbb{R}^n$ gibt, so daß f lokal konstanten Rang um jedes $x_0 \in A$ besitzt.