Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 30.10.2002
Abgabe: 06.11.2002

2. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Aufgabe 6. (3 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussage: Schneiden sich die Tangenten einer ebenen, regulären C^2-Kurve alle in einem Punkt, so ist diese Kurve eine Gerade.

Aufgabe 7. (5 Punkte)
Seien $x, \tilde{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zwei durch die Parametrisierungen

$$\begin{aligned} x(u,v) &:= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \\ \tilde{x}(u,v) &:= (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v) \end{aligned}$$

gegebene Flächenstücke im Euklidischen Raum. Überprüfen Sie x und $\tilde{x}$ auf Regularität. Berechnen Sie die zugehörigen ersten und zweiten Fundamentalformen, die Weingarten-Operatoren sowie die mittleren Krümmungen bezüglich der Parametrisierungen.

Hinweise: Die *mittlere Krümmung* H ist definiert als die normalisierte Spur des Weingarten-Operators: $2H := \operatorname{trace} S$. Die von x parametrisierte Fläche heißt *Katenoid*, die von $\tilde{x}$ parametrisierte Fläche heißt *Wendelfläche* oder *Helikoid*. Es existiert eine einparametrige Familie $x_t,\ t \in [0,1]$ von Minimalflächen mit gleicher erster Fundamentalform und $x_0 = x,\ x_1 = \tilde{x}$. Hier sind zwei Links zum Thema Visualisierung der beiden Flächen und der Überführung der einen in die andere:
`http://www.javaview.de` ($\to$ Demos $\to$ Animation)
`http://www.tfh-berlin.de/~schwenk/hobby/verbieg/Welcome.html`
Der Besuch dieser beiden Seiten ist Bestandteil der Hausaufgabe.

Aufgabe 8. (4 Punkte)
Sei $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $v \in T_pU$. Wir definieren einen Operator $\nabla_v : C^1(U) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\nabla_v f := \frac{d}{dt} f \circ c(t)|_{t=0},$$

wobei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ ist. Wir nennen ∇_v eine *Richtungsableitung* in p (in Richtung v). Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) ∇_v ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Kurve c. Andererseits ist zu zeigen, daß die Definition hier zu der im Skript S. 7 äquivalent ist.

(ii) Zu festem p bildet die Menge aller durch Vektoren $v \in T_pU$ definierten Richtungsableitungen ∇_v einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(iii) ∇_v erfüllt die Leibniz-Regel, d.h. für alle $f, g \in C^1(U)$ gilt

$$\nabla_v(fg) = f(p)\nabla_v g + g(p)\nabla_v f.$$

(iv) Für alle $f \in C^1(U)$ gilt $\nabla_v f = df_p(v)$.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Hinweis: In Verbindung mit der vorigen Aufgabe soll in dieser Aufgabe gezeigt werden, daß das Konzept der Richtungsableitungen mit dem der Derivationen (Definition siehe unten) übereinstimmt. Diese zwei Herangehensweisen zur Definition des Tangentialraums sind somit äquivalent.

Es sei $C^\infty(U)$ die Menge aller auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbaren Funktionen. Für einen festen Punkt $p \in U$ definieren wir eine Relation $\sim_p$ wie folgt:

$$f \sim_p g \iff \text{Es gibt eine offene Umgebung } V \text{ von } p \text{ mit} f|_V = g|_V.$$

Zeigen Sie, daß $\sim_p$ eine Äquivalenzrelation ist.

Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen unter $\sim_p$ mit $\mathcal{F}_p$, ihre Elemente mit $[f]$, wobei $f \in C^\infty(U)$. Ein Element $[f]$ wird auch *Abbildungskeim* von f in p genannt. Wir nennen eine Abbildung $D : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ *Derivation*, wenn sie $\mathbb{R}$-linear ist und für alle $[f], [g] \in \mathcal{F}_p$ die Leibniz-Regel

$$D([f][g]) = f(p)D([g]) + D([f])g(p)$$

erfüllt.

Definieren Sie die Addition und Multiplikation von Abbildungskeimen in p sowie die Multiplikation von Abbildungskeimen mit reellen Zahlen. Zeigen Sie, daß diese Operationen wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten in den Äquivalenzklassen) sind.

In Aufgabe 8 wurde gezeigt, daß jede Richtungsableitung in p eine Derivation definiert. (Genaugenommen ist noch die Unabhängigkeit der Richtungsableitung von der Wahl des Repräsentanten in der Äquivalenzklasse zu zeigen.)

Zeigen Sie nun umgekehrt, daß jede Derivation durch eine Richtungsableitung gegeben ist. Benutzen Sie hierzu das nachstehende Lemma, das im Tutorium am 30.10.2002 bewiesen wird. Folgern Sie, daß die Derivationen in p einen n-dimensionalen Vektorraum aufspannen. Die Derivationen können somit mit den Richtungsableitungen identifiziert werden. Geben Sie den natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Vektorräumen an.

Lemma. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge, $p \in V$ und $f \in C^\infty(V)$. Dann existieren Funktionen $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(V)$ mit

$$f(x) = f(p) + (x_1 - p_1)g_1(x) + \cdots + (x_n - p_n)g_n(x)$$

für alle $x \in V$.