Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 06.11.2002
Abgabe: 13.11.2002

3. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Es sei $f : M \to N$ eine C^∞-Abbildung zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten M und N. Die Abbildung $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ist definiert durch $df_p(X)(\varphi) := X(\varphi \circ f)$ für beliebiges $X \in T_pM$ und $\varphi \in C^\infty(N)$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) df_p ist wohldefiniert, d.h. für alle $X \in T_pM$ ist $df_p(X) \in T_{f(p)}N$.

(ii) df_p ist linear.

(iii) Sei $\tilde{f} : N \to \tilde{M}$ eine weitere differenzierbare Abbildung. Dann gilt die Kettenregel $d(\tilde{f} \circ f)_p = d\tilde{f}_{f(p)} \circ df_p$.

Aufgabe 11. (3 Punkte)
Es sei $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x(u, v) = (u^2 + v^2, \cos u, e^v)$. Das Vektorfeld Z auf $\mathbb{R}^2$ sei definiert durch $Z_{(u,v)} := -v\partial_u + u\partial_v$. Berechnen Sie $dx(Z)$.

Aufgabe 12. (5 Punkte)
Sei $0 < r < R$. Zeigen Sie, daß der Ringtorus

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \quad \text{und}$$

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u_1^2 + u_2^2 = 1,\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \right\}$$

diffeomorphe Mannigfaltigkeiten sind.