Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 20.11.2002
Abgabe: 27.11.2002

5. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Aufgabe 15. (4 Punkte)
Es seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten, M zusammenhängend, $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $df_p = 0$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 16. (3 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung $c : (-\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}^2$ durch $c(t) = (\sin t, \sin 2t)$. Prüfen Sie nach, ob c eine Immersion bzw. eine Einbettung ist. (Die Punkte gibt es hier nicht für das Hinschreiben der Antwort, sondern für das exakte Durchrechnen der Eigenschaften.)

Aufgabe 17. (5 Punkte)
Der reelle projektive Raum ist definiert durch $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$, wobei $x \sim y$ genau dann wenn $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Äquivalenzklasse von $x = (x_0, \dots, x_n)$ wird mit $[x] = [x_0 : \ldots : x_n]$ bezeichnet. Es sind folgende Aussagen zu zeigen:

(i) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit dem Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) |\, i = 0, \dots, n\}$, wobei $U_i = \{[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \,| x_i \neq 0\}$ und

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad [x] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x_n}{x_i}\right)$$

ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

(ii) Die Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $x \mapsto [x]$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

(iii) $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ ist diffeomorph zu S^1.

(iv) Zusatzpunkte: $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist diffeomorph zu S^2. (Die Definition des komplex projektiven Raumes ist analog zu der des reellen.)

Die Abgabe der Hausaufgaben ist — wie immer — am 27.11.2002 *vor* dem Tutorium fällig. Die weiteren Aufgaben sind Inhalt des Tutoriums am 20.11.2002.

Aufgabe A. (keine Punkte)
Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$ eine Funktion. Ein Punkt $p \in M$ heißt *kritischer Punkt* von f, wenn $df_p = 0$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) An einem kritischen Punkt p existiert eine wohldefinierte Abbildung $H : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ mit $H(X_p, Y_p) = X_p(Yf) = Y_p(Xf)$ für alle $X, T \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) H ist bilinear, symmetrisch und erfüllt $H(\partial_i|_p, \partial_j|_p) = \frac{\partial^2(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j}|_{\phi(p)}$ in einer beliebigen Karte (U, ϕ).

(iii) Für eine Kurve c mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ gilt $H(v, v) = (f \circ c)''(0)$.

Aufgabe B. (keine Punkte)
Es sind Beispiele mit den folgenden Eigenschaften zu finden: Eine injektive, aber nicht surjektive Immersion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie eine nicht injektive Immersion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Kann man erreichen, daß $\tilde{f}$ auch surjektiv ist?

Aufgabe C. (keine Punkte)
Noch eine Aufgabe zu differenzierbaren Strukturen: Man betrachte den (zweidimensionalen) Würfel $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \max(|x|, |y|, |z|) = 1\}$. Ist dies eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$? Wenn nein, wie wird W doch noch eine C^∞-Mannigfaltigkeit?

Quellenangaben der erwähnten Resultate:

Wir benutzen ständig die differenzierbare Standardstruktur des $\mathbb{R}^n$. Es läßt sich zeigen, daß diese für $n \neq 4$ eindeutig ist. (Die Eindeutigkeit ist natürlich bis auf Diffeomorphismus, die Äquivalenzabbildung der Differentialtopologie, gemeint.) Der $\mathbb{R}^4$ dagegen hat überabzählbar viele differenzierbare Strukturen. Dies geht auf Michael Freedman und Simon Donaldson zurück. [siehe z.B. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357-453].

John Milnor bewies, daß auf S^7 genau 28 verschiedene differenzierbare Strukturen möglich sind. Die Standardstruktur (die durch die Einbettung in den $\mathbb{R}^8$ erzeugte) ist nur eine von diesen 28 „exotic spheres". [*On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. 64 (1956), 399-405]. Für einige andere n ist G_n, die Gruppe der differenzierbaren Strukturen auf S^n, in der folgenden Tabelle[1] dargestellt. Hier kann man mit der Lösung für $n = 4$ noch einen Blumentopf gewinnen!

n	G_n	n	G_n	n	G_n	n	G_n	n	G_n
1	1	5	1	9	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	13	$\mathbb{Z}_3$	17	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2	1	6	1	10	$\mathbb{Z}_6$	14	$\mathbb{Z}_2$	18	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$
3	1	7	$\mathbb{Z}_{28}$	11	$\mathbb{Z}_{992}$	15	$\mathbb{Z}_{8128} \times \mathbb{Z}_2$		
4	unbekannt	8	$\mathbb{Z}_2$	12	1	16	$\mathbb{Z}_2$		

[1] Quelle: Kramer et. al., wesentlich mehr Details und Literaturhinweise finden sich unter `http://www.lns.cornell.edu/spr/1999-12/msg0019934.html`.