Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 04.12.2002
Abgabe: 11.12.2002

7. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Aufgabe 21. (5 Punkte)
Sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > 0\}$ und $X := \partial_x$, $Y := \partial_y$ die Gaußschen Basisfelder zur Standardkarte $\mathrm{id_M} : M \to \mathbb{R}^2$. Auf M sei die Riemannsche Metrik g gegeben durch

$$g(X, X) := y^{-2} =: g(Y, Y), \qquad g(X, Y) := 0.$$

(i) Berechnen Sie alle Christoffel-Symbole der Levi-Civita-Ableitung ∇ von g in der gegebenen Basis. (Hinweis: Christoffel-Symbole sind 0 oder $\pm y^{-1}$, 2 Punkte).

(ii) Bei regulärer Parametrisierung sind die auf dem Rand von M (d.h. auf der x-Achse) senkrecht stehenden Halbgeraden in M und die Halbkreise in M mit Zentrum auf der x-Achse Prägeodätische von ∇. (3 Punkte)

Aufgabe 22. (7 Punkte)
Wir betrachten eine immersierte, nichtdegenerierte Hyperfläche $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum. Wir nehmen an, der Ortsvektor $x(p)$ ist für beliebiges $p \in M$ nicht in $dx(T_pM)$ enthalten. Die Gaußsche Strukturgleichung läßt sich schreiben als

$$\bar{\nabla}_u dx(v) = dx(\nabla_u v) + II(u, v)\mu, \quad u, v \in \mathcal{X}(M). \tag{1}$$

(i) In einer Karte von M bilden die n partiellen Ableitungen von x und μ eine Basis. Beweisen Sie die Beziehung

$$x = \frac{1}{2} dx(\mathrm{grad}_g ||x||^2) - \rho\mu, \quad \rho := -\langle x, \mu\rangle,$$

indem Sie x bezüglich dieser Basis darstellen. Hierbei ist $|| \cdot ||$ die Euklidische Norm und grad_g der Gradient bezüglich g. Der Gradient $\mathrm{grad}_g f$ einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ bezüglich einer Riemannschen Metrik g ist implizit durch $g(\mathrm{grad}_g f, X) := df(X) = X(f)$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$ definiert. (3 Punkte)

(ii) Benutzen Sie nun x als neues Normalenvektorfeld indem Sie (1) in der Form

$$\bar{\nabla}_u dx(v) = dx(\nabla^c_u v) + h(u, v)x$$

schreiben und ∇^c und h mit den bereits vorhandenen Größen ausdrücken. (1 Punkt)

(iii) Zeigen Sie, daß ∇^c eine kovariante Ableitung und h eine symmetrische, nichtdegenerierte Bilinearform ist. (1 Punkt)

(iv) Zeigen Sie, daß die Bilder der Geodätischen bezüglich ∇^c genau die Schnitte von 2-dimensionalen Ebenen mit $x(M)$ sind. Benutzen Sie hierzu nachstehendes Lemma, das im Rahmen der Kurventheorie im zweiten Vorlesungsteil bewiesen wird. (2 Punkte)

Lemma. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Kurve mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt $t \in I$ die zweite Ableitung $\ddot{c}$ linear abhängig von c und $\dot{c}$ ist. Dann ist das Bild von c bereits in einem zweidimensionalen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ enthalten.

Aufgabe A. (keine Punkte)
Wir betrachten eine C^∞-Mannigfaltigkeit M mit einem Zusammenhang ∇. Es sei $c : I \to M$ eine eingebettete Kurve. c erfülle die Gleichung $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \lambda\dot{c}$, wobei $\lambda : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion ist.

Zeigen Sie, daß es eine C^∞-Umparametrisierung $\phi : J \to I$ mit $\phi' > 0$ gibt, so daß $c \circ \phi$ eine Geodätische ist. Ein solches c wird auch *Prägeodätische* von (M, ∇) genannt. Da sich eine Geodätische von all ihren Prägeodätischen nur in der Parametrisierung unterscheidet, haben all diese Kurven dasselbe Bild.

Aufgabe B. (keine Punkte)
Gibt es eine Riemannsche Metrik

(i) auf dem $\mathbb{R}^2$, so daß alle Kreise Geodätische sind?

(ii) auf dem $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so daß alle Kreise mit Mittelpunkt 0 Geodätische sind?

(iii) wie (ii), aber zusätzlich soll kein Strahl durch den Ursprung Geodätische sein.

(iv) auf dem $\mathbb{R}^2$, so daß alle Geraden durch 0, aber kein Kreis mit Mittelpunkt 0 Geodätische sind?

Aufgabe C. (keine Punkte)
(Stereographische Projektion) Sei S^n mit der üblichen Einbettung im $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeben. Es bezeichnen $p_N = (0, \ldots, 0, 1)$ und $p_S = (0, \ldots, 0, -1)$ den Nord- bzw. Südpol. Ferner sei $H := \{(x_1, \ldots, x_n, 0) | \, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ die Ebene durch den Äquator von S^n. Die stereographische Projektion $\varphi_N : S^n \backslash \{p_N\} \to H$ bildet einen Sphärenpunkt p auf den Schnittpunkt der Geraden durch p_N und p mit H ab. Analog ist φ_S definiert.

Es ist die erste Fundamentalform der Hypersphäre in diesen Koordinaten auszudrücken. Was ergibt der Vergleich mit der ersten Fundamentalform von H? Berechnen Sie die Christoffelsymbole der Hypersphäre in diesen Karten.