Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 11.12.2002
Abgabe: 18.12.2002

8. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Aufgabe 23. (4 Punkte)
Es seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang und $\varphi \in C^\infty(M)$. Folgendes ist zu zeigen:

(i) Auch $\tilde{g} := e^\varphi g$ ist eine semi-Riemannsche Metrik auf M, mit gleichem Index wie g.

(ii) Der Levi-Civita-Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ von $(M, \tilde{g})$ erfüllt für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ die Beziehung

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\big(X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - g(X, Y)\,\mathrm{grad}_g\,\varphi\big).$$

Aufgabe 24. (4 Punkte)
Es sei $D^n := \{p \in \mathbb{R}^n | \, ||p||_E^2 < 1\}$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und

$$g_p(u, v) = \frac{4}{(1 - ||p||_E^2)^2}\langle u, v\rangle_E$$

eine Riemannsche Metrik. $H^n := (D^n, g)$ heißt der *n-dimensionale hyperbolische Raum*. Berechnen Sie den Levi-Civita-Zusammenhang von g.

Aufgabe 25. (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf der reellen Achse und

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad x(u, v) = (u, v, uv + f(v))^T,$$

gegeben zusammen mit der Transversale $y(u, v) = (0, 0, 1)^T$.

(i) Berechnen Sie ∇ und h aus der Gaußschen Strukturgleichung

$$\bar{\nabla}_u dx(v) = dx(\nabla_u v) + h(u, v)y, \quad u, v \in \mathcal{X}(M).$$

(ii) Berechnen Sie den Levi-Civita-Zusammenhang $\hat{\nabla}$ von h.

(iii) Berechnen Sie die Differenz $C(u, v) = \nabla_u v - \hat{\nabla}_u v$. Zeigen Sie (ganz allgemein), daß die Differenz zweier torsionsfreier Zusammenhänge ein symmetrisches $(1, 2)$-Tensorfeld ist.

(iv) Berechnen Sie alle möglichen Verjüngungen (Spuren) von C.

Die Abgabe der Hausaufgaben ist am 18.12.2002 wie immer *vor* dem Tutorium fällig.

Aufgabe A. (keine Punkte)
Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine linearer Operator. Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) A ist *konform*, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so daß $\langle Au, Av \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(ii) A ist die Komposition einer orthogonalen Abbildung und einer Streckung.

(iii) A erhält Winkel.

(iv) A erhält Orthogonalität.

Zeigen Sie weiterhin, daß A genau dann flächentreu ist, wenn $\det A = 1$.

Aufgabe B. (keine Punkte)
Eine Abbildung $f : (M, g) \to (N, h)$ zwischen zwei semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension n induziert eine Metrik $\tilde{g}$ auf M durch $\tilde{g}_p(X, Y) := h_{f(p)}(df(X), df(Y))$. Man schreibt für $\tilde{g}$ auch häufig $f_* h$ („pullback of h").

(i) f heißt *konform*, falls $\tilde{g} = e^{\varphi} g$ für eine Funktion $\varphi \in C^\infty(M)$.

(ii) f heißt *flächentreu*, falls die Volumenformen von g und $\tilde{g}$ übereinstimmen. Die Volumenform ω von g ist definiert als $\omega := |\det g_{ij}|^{\frac{1}{2}}$.

(iii) f heißt *geodätisch*, falls die Spuren der Geodätischen von g und $\tilde{g}$ in M übereinstimmen. Dies ist äquivalent zu $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X$ für eine 1-Form θ. Hierbei bezeichnen ∇, $\tilde{\nabla}$ die Levi-Civita-Zusammenhänge von g bzw. $\tilde{g}$. Die 1-Form θ läßt sich durch $\theta_k = \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^n (\tilde{\Gamma}_{kr}{}^r - \Gamma_{kr}{}^r)$ ermitteln.

Gibt es eine Landkarte, die gleichzeitig wenigstens zwei der obigen drei Eigenschaften erfüllt?