Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 18.12.2002
Abgabe: 08.01.2003

9. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Alle die Zahl 12 übersteigenden Punkte dieser Aufgabenserie sind Zusatzpunkte. Frohe Weihnachten und ein gesundes und erfolgreiches Jahr 2003!

Aufgabe 26. (4 Punkte)
Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2$. Es bezeichne $K \in C^\infty(M)$ die Schnittkrümmung. Zeigen Sie, daß für die von g erzeugten Größen gilt: $R(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$, $Ric = Kg$, $S = 2K$, $K = R_{1212}$.

Aufgabe 27. (8 Punkte)
Sei (M, g) eine zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Man sagt, (M, g) ist von konstanter Krümmung, falls die Schnittkrümmung $K_p(u, v)$ sowohl als Funktion von p als auch als Funktion von u und v konstant ist.

Man zeige, daß (M, g) genau dann von konstanter Krümmung ist, wenn die Schnittkrümmung nur von p, nicht aber von der Wahl der durch u und v aufgespannten nichtdegenerierten Ebene abhängt. Dies ist der Satz von F. Schur (1886). Anleitung zur Lösung:

(i) Wenn K nur von p abhängt, so kann man R (wie in der vorigen Aufgabe) als $R(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$ schreiben. Um dies zu beweisen, untersuche man $\tilde{R}(X, Y)Z := R(X, Y)Z - K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$.

(ii) Aus der zweiten Bianchi-Identität folgert man nun, daß $K = \text{const}$.

Aufgabe 28. (4 Punkte)
Beweisen Sie für $\phi, \psi \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathcal{X}(M)$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\phi\psi) &= \phi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \phi, \\ \operatorname{div}(\phi X) &= \phi \operatorname{div} X + X(\phi), \\ \Delta(\phi\psi) &= \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2g(\operatorname{grad} \phi, \operatorname{grad} \psi). \end{aligned}$$

Aufgabe 29. (4 Punkte)
Beweisen Sie für $\phi \in C^\infty(M)$, $\phi > 0$ und $k \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\Delta(\phi^k) = k\phi^{k-2}\big((k-1)|| \operatorname{grad} \phi||^2 + \phi\Delta\phi\big).$$

Aufgabe 30. (4 Punkte)
Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung K. Der Levi-Civita-Zusammenhang von g sei ∇. Es sei $H_f(X,Y) = \operatorname{Hess} f(X,Y) + Kfg(X,Y)$. Begründen Sie, daß H_f ein symmetrisches $(0,2)$-Tensorfeld ist. Zeigen Sie, daß ∇H_f ein total symmetrisches $(0,3)$-Tensorfeld ist.

Wie läßt sich der Krümmungstensor R geometrisch deuten?
Wieviele nichttriviale Komponenten hat R?

Aufgabe A. (keine Punkte)
Sei (M, g) eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, Ric bezeichne den Ricci-Tensor von g, $S := \operatorname{trace}_{\mathrm{g}} \operatorname{Ric}$ ist die Skalarkrümmung von g. Man zeige die Identität

$$dS = 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric}.$$

Aufgabe B. (keine Punkte)
Beweisen Sie für $\phi \in C^\infty(M)$, $\phi > 0$ die Identität

$$\phi \Delta \log \phi = \Delta \phi - \phi^{-1} || \operatorname{grad} \phi ||^2.$$

Aufgabe C. (keine Punkte)
Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben. Betrachte die folgenden Gebiete und Riemannschen Metriken:

$$\begin{aligned}
G_1 :=& \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, & g_1(\cdot,\cdot) :=& \frac{1}{x^2+y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle, \\
G_2 :=& \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, & g_2(\cdot,\cdot) :=& \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle, \\
G_3 :=& \mathbb{R}^2, & g_3(\cdot,\cdot) :=& \langle \cdot, \cdot \rangle, \\
G_4 :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}, & g_4(\cdot,\cdot) :=& \frac{4}{x^2+y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß alle diese Gebiete mit den angegebenen Riemannschen Metriken lokal isometrisch sind.