Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 15.01.2003
Abgabe: 22.01.2003

11. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie"

Aufgabe 33. (7 Punkte)
Für $m > 0$ sei $h(r) = 1 - \frac{2m}{r}$, $M = \{(t,r) \in \mathbb{R}^2 | \, r > 2m\}$. Wir versehen M mit der semi-Riemannschen Metrik

$$g = -h(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2.$$

(M,g) heißt die *Schwarzschild-Halbebene.*

(i) Berechnen Sie die Krümmung von M. (3 Punkte)

(ii) Die Abbildungen $(t,r) \mapsto (\pm t + b, r)$ sind für festes b Isometrien. (1 Punkt)

(iii) Bestimmen Sie alle Nullgeodätischen (bis auf Parametrisierung), d.h. die Geodätischen c mit $g(\dot{c},\dot{c}) = 0$. (mit Skizze!, 3 Punkte)

Aufgabe 34. (5 Punkte)
Die *Wellung* W eines Vektorfeldes $U \in \mathcal{X}(M)$ ist durch

$$W_U(X,Y) := g(\nabla_X U, Y) - g(\nabla_Y U, X)$$

definiert. Es sind folgende Aussagen zu zeigen:

(i) W_U ist ein antisymmetrisches $(0,2)$-Tensorfeld mit Tensorkomponenten

$$W_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial x^i} - \frac{\partial U_i}{\partial x^j}, \quad \text{wobei} \quad U = \sum_{l=1}^{n} U^l \frac{\partial}{\partial x^l}. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(ii) $W_{\operatorname{grad} f} = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$. (1 Punkt)

(iii) $W_U = d\theta$, wobei $\theta = g(U,\cdot)$, d.h. θ ist die zu U metrisch äquivalente 1-Form. Folgende Formel für das Differential einer 1-Form darf benutzt werden: (1 Punkt)

$$d\theta(X,Y) := X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y]).$$

(iv) Im $\mathbb{R}^3$ gilt $W_U(X,Y) = \langle X \times Y, \operatorname{grad} \times U\rangle$, wobei grad $\times U$ als formales Kreuzprodukt zu verstehen ist. (1 Punkt)

Im Tutorium am 15.01.2003 geht es um die Schwarzschild-Kruskal-Lösung; Aufgabe 33 stellt einen Sonderfall mit einer geringeren Zahl von Dimensionen dar.