Technische Universität Berlin
Fakultät II — Institut für Mathematik
Simon, Binder

Wintersemester 2002/2003
Ausgabe: 22.01.2003
Abgabe: 29.01.2003

12. Übungsblatt zur Veranstaltung „Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Geometrie“

Aufgabe 35. (8 Punkte)
Es bezeichne $M(n, K)$ den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Zeigen Sie, daß die folgenden Mengen Liegruppen sind. Berechnen Sie die zugehörigen Liealgebren und ihre Dimensionen.

(i) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) |\ \det A = 1\}$,

(ii) $\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) |\ A\bar{A}^T = I\}$,

(iii) $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) |\ \det A = 1\}$.

Aufgabe 36. (4 Punkte)
Es sei $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre lineare Transformation und B die durch $B(u, v) = \langle Su, v \rangle_E$ gegebene Bilinearform. Es bezeichne weiterhin

$$G_B := \{g \in GL(n, \mathbb{R}) |\ B(gu, gv) = B(u, v) \text{ für alle } u, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Die Gruppe G_B ist eine abgeschlossene Untermenge von $GL(n, \mathbb{R})$ und darum auch eine Lie-Untergruppe. Es sei $\mathfrak{g}_B$ die Liealgebra von G_B. Durch Identifikation von $\mathfrak{g}_B$ mit einem Untervektorraum von $\mathrm{M}(n, K)$ weiß man (aus dem Tutorium), daß

$$\mathfrak{g}_B = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) |\ A^T S = -SA\}.$$

Man berechne $\mathfrak{g}_B$ und $\dim \mathfrak{g}_B$ für jedes der folgenden S.

(i) Es sei $p + q = n$; S habe die Matrix $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. Die Gruppe G_B wird mit $\mathrm{O}(p, q)$ bezeichnet; sie ist nicht kompakt.

(ii) Es sei $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ eine schiefsymmetrische Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Die zugehörige Gruppe G_B wird die *symplektische Gruppe* genannt.

Im Tutorium am 15.01.2003 wird eine Einführung in die Theorie der Liegruppen gegeben.

Wie geht es weiter mit Differentialgeometrie?

Im Sommersemester 2003 bietet Prof. Simon die VL „Differentialgeometrie der Kurven und Flächen“ an. Dort wird das wesentlich vertieft, was in diesem Semester als Beispielmaterial nur anklang. Es wird dort anschaulicher und elementarer zugehen.

Für diejenigen, die weiterführende LV suchen, gibt es vertiefende Vorlesungen, in denen die Vorleser in der Regel ihre Spezialgebiete vorstellen. Darüberhinaus gibt es die Differentialgeometrie-Seminare von Simon/Wiehe (Affine Differentialgeometrie und PDEs auf Untermannigfaltigkeiten) und Bobenko/Ferus/Pinkall (Geometrie und Visualisierung), die sich ebenfalls thematisch unterscheiden. Aktuelle Informationen sind unter

`http://www.math.TU-Berlin.DE/geometrie/Lehre/veranstaltungsplanung.shtml`

zu finden.