TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2003/04
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / Dr. C. Bohle Abgabe: 3.11.2003

1. Übung zur Vorlesung Differentialgeometrie von Mannigfaltigkeiten

(Definition von Mannigfaltigkeiten, Beispiele, Untermannigfaltigkeiten)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Beweisen Sie die beiden folgenden Sätze:

Satz 1 *Jede Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Mannigfaltigkeit.*

Dabei heißt eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, wenn sie eine der Eigenschaften aus Satz 2 erfüllt.

Satz 2 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^n$. *Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

i) Für alle $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ *von* p, *eine offene Menge* $V \subset \mathbb{R}^m$ *und eine bijektive Immersion* $f\colon V \to U \cap M$, *deren Inverse stetig ist.*

ii) Für alle $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ *von* p *und einen Diffeomorphismus* $\Phi\colon U \to V$ *auf eine offene Menge* $V \subset \mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft* $\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

iii) Für alle $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ *von* p *und eine differenzierbare Abbildung* $h\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ *für die* 0 *eine regulärer Wert ist und für die gilt* $h^{-1}(0) = U \cap M$.

iv) Für alle $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ *von* p, *so daß* $U \cap M$ *der Graph einer Funktion* $(x_{j_1}, ..., x_{j_{n-m}}) = g(x_{i_1}, ..., x_{i_m})$ *ist. (Hier sind* $x_1, ..., x_n$ *kartesische Koordinaten des umgebenden Raumes* $\mathbb{R}^n$ *und* $(i_1, ..., i_m, j_1, ..., j_{n-m})$ *ist eine Permutation.)*

2. Aufgabe

Zeigem Sie, daß der eindimensionale *komplex projektive Raum* $\mathbb{CP}^1$ diffeomorph ist zur zweidimensionalen Sphäre $\mathbf{S}^2$.

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $\mathbf{S}^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\}$ die *Einheitssphäre.*

i) Zeigen Sie, daß $\mathbf{S}^n$ das Urbild eines regulären Wertes einer Funktion ist.

ii) Stellen Sie $\mathbf{S}^n$ lokal als Graph einer Funktion dar.

iii) Parametrisieren Sie $\mathbf{S}^2$ mit sphärischen Koordinaten.

iv) Sei $N = (1, 0, ..., 0)$ der Nordpol von $\mathbf{S}^n$. Für einen beliebigen Punkt $p \in \mathbf{S}^n \backslash \{N\}$ gibt es genau eine Gerade durch den Nordpol und p. Diese schneidet genau in einem Punkt die $(x_0 = 0)$–Ebene. Das definiert eine Abbildung $\mathbf{S}^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$, die man als *stereographische Projektion* bezeichnet. Zeigen Sie, daß sie ein Diffeomorphismus ist.

v) Wieviele "Karten" der in ii), iii) und iv) beschriebenen Typen braucht man für einen "Atlas" der $\mathbf{S}^2$?

2. Aufgabe

Wieviele Karten hat ein minimaler Atlas der 2–Sphäre und des 2–Torus?

3. Aufgabe

Der Würfel $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \max |x_i| = 1\}$ ist offensichtlich keine glatte Untermannigfaltigkeit (Warum?). Wie kann man ihn trotzdem zu einer glatten Mannigfaltigkeit machen?

4. Aufgabe

Sei $h(x, y) = xy$. Zeigen Sie, daß $h^{-1}(0)$ keine Untermannigfaltigkeit ist.

5. Aufgabe

Zeigen Sie, daß das Ellipsoid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ diffeomorph ist zu $\mathbf{S}^2$.

6. Aufgabe

i) Zeigen Sie direkt, daß Bedingung i) in Übungsaufgabe 1 Bedingung iv) impliziert.

ii) Zeigen Sie, wie man in Übungsaufgabe 1 direkt aus Bedingung iv) Bedingung ii) folgert.

7. Aufgabe

Zeigen Sie, daß

$$\{P \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid P^2 = P, P^* = P, \mathrm{tr}\, P = 1\} \subset \mathrm{Sym}(3) \cong \mathbb{R}^6$$

eine Untermannigfaltigkeit diffeomorph zu $\mathbb{RP}^2$ ist.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

i) Klären Sie mithilfe der Bücher des Handapparates in der Bibliothek, wie die Begriffe *Äquivalenz von Atlanten*, *maximaler Atlas* und *differenzierbare Struktur* definiert sind.

ii) Zeigen Sie: in jeder Äquivalenzklasse von Atlanten gibt es genau einen maximalen Atlas.

iii) Auf $\mathbb{R}$ sind durch die Atlanten $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, f)\}$ mit $f(x) = x^3$ zwei differenzierbare Strukturen definiert. Zeigen Sie, daß diese nicht gleich aber diffeomorph sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige Sie, daß die folgenden Mannigfaltigkeiten diffeomorph sind.

i) $\mathbb{R}^2 \,/\, \mathbb{Z}^2$

ii) $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ (Machen Sie sich klar, warum das Produkt von Mannigfaltigkeiten wieder eine Mannigfaltigkeit ist.)

iii) Rotationstorus in $\mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Der *reelle projektive Raum* ist $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ mit $x \sim y$ wenn $x = \lambda y$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Äquivalenzklasse von $x = (x_0, ..., x_n)$ wird mit $[x] = [x_0 : ... : x_n]$ bezeichnet. Zeigen Sie:

i) $\mathbb{RP}^n$ mit dem Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, ..., n\}$, $U_i = \{[x] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ und

$$\psi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n \quad [x] \mapsto (x_0/x_i, ..., \hat{x}_i, ..., x_n/x_i)$$

ist eine Mannigfaltigkeit.

ii) Die Abbildung $\mathbf{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ mit $x \mapsto [x]$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

iii) $\mathbb{RP}^1$ ist diffeomorph zu $\mathbf{S}^1$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen. Erklären Sie anschaulich, warum es sich nicht um Untermannigfaltigkeiten handelt. Beweisen Sie.

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } x - x^2 - y^2 = 0\}$

ii) $\{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0\} \cup \{(t, -t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq 0\}$

Gesamtpunktzahl: 16