TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2003/04
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / Dr. C. Bohle Abgabe: 2.2.2004

10. Übung zur Vorlesung Differentialgeometrie von Mannigfaltigkeiten

(Cartansche Ableitung, Tensoren)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Für $f\colon M \to N$ und $\omega \in \Omega^k N$ gilt

$$d(f^*\omega) = f^* d\omega.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Für $\omega \in \Omega^k M$ und $X_0, ..., X_k \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$d\omega(X_0, ..., X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\omega(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_k)) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_k).$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Transformieren sie das 1-1-Tensorfeld

$$T = \frac{\partial}{\partial x} \otimes dx + \frac{\partial}{\partial y} \otimes dy + \frac{\partial}{\partial z} \otimes dz \in \Gamma(T^{(1,1)}\,\mathbb{R}^3)$$

auf sphärische Koordinaten.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine (injektive) geschlossene Kurve, die den Rand parametrisiert. Dann gilt:

$$Area(V) = \frac{1}{2} \int_0^1 \det(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Gesamtpunktzahl: 16