TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2003/04
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / Dr. C. Bohle Abgabe: 12.1.2004

7. Übung zur Vorlesung Differentialgeometrie von Mannigfaltigkeiten

(Riemannsche Metriken)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die stereographische Projektion konform ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f(x,y) = (r(x)\cos(y), r(x)\sin(y), h(x))$ eine Immersion. Zeigen Sie: f ist genau dann konform, wenn die Kurve $x \mapsto (r(x), h(x))$ im Halbraummodell der Hyperbolischen Ebene auf Bogenlänge parametrisiert ist (d.h. punktweise Geschwindigkeit 1 hat).

3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen sie, daß $\mathbf{SU}(2)$ mit der durch $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY)$ für $X, Y \in \mathbf{su}(2)$ gegebenen linksinvarianten Metrik isometrisch zu $\mathbf{S}^3$ mit der Standardmetrik ist. Wie kann man die Metrik $\langle , \rangle$ positiv definit auf die Liealgebra $\mathbf{gl}(n, \mathbb{C})$ fortsetzen?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ eine Karte und $g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$. Die Matrix (g^{ik}) bezeichne die inverse Matrix zu (g_{ik}).

i) Der *Gradient* von $f \in C^\infty(M)$ ist definiert über die Gleichung $g(\operatorname{grad} f, X) = df(X)$ für alle $X \in TM$. Zeigen Sie, daß in der Karte (U, φ) gilt:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{ik} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

ii) Berechnen Sie den Gradienten einer Funktion auf $\mathbb{R}^3$ bezüglich sphärischer und zylindrischer Koordinaten.

Gesamtpunktzahl: 16