TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2003/04
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / Dr. C. Bohle Abgabe: 17.1.2004

8. Übung zur Vorlesung Differentialgeometrie von Mannigfaltigkeiten

(Hyperbolischer Raum)

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei d die (topologische) Metrik, die zur (Riemannschen) Metrik der hyperbolischen Ebenen gehört. Wie sieht die Menge $\{q \mid d(p,q) = \epsilon\}$ für festes p und $\epsilon > 0$ aus, wenn man sie im Halbraum– bzw. Kreismodell der Hyperbolischen Ebene betrachtet?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei S eine Sphäre in $\mathbb{R}^n$, die senkrecht den Rand der Einheitskugel B_1^n schneidet. Zeigen Sie, dass die Inversion an S eine Isometrie von B_1^n mit der Hyperbolischen Metrik erzeugt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (in der hyperbolischen Ebene)?

i) Je zwei Punkte lassen sich durch genau eine Geodätische verbinden.

ii) Zwei Geodätische sind gleich oder schneiden sich genau in einem Punkt.

iii) Gegeben eine Geodätische l und Punkt $p \notin l$. Dann gibt es genau eine Geodätische l' mit $p \in l'$ und $l \cap l' = \emptyset$.

iv) Gegeben eine Geodätische l und Punkt $p \notin l$. Dann gibt es genau eine Geodätische l' mit $p \in l'$ und $l \perp l'$.

Welche treffen für den Euklidischen Raum, die Sphäre bzw. allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 zu?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Die Gruppe $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ wirkt auf H_+^2 durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

i) Zeigen Sie, daß $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ eine Isometrie von H_+^2 ist.

ii) Zeigen Sie, daß die Wirkung transitiv ist. (Jeder Punkt p kann auf jeden Punkt q bewegt werden mittels eines Gruppenelementes.) Wann genau können zwei Punkte auf zwei andere Punkte abgebildet werden mit einem Element von $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$? Ist dieses dann Eindeutig?

iii) Zeigen Sie, daß die Gruppe erzeugt wird von Translationen in x–Richtung, von Streckungen und von der Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$.

(Tip: Lösen sie iii) zuerst.)

Gesamtpunktzahl: 16