et cette équation, jointe à la précédente, permet d'obtenir l'expression générale suivante

$$A_{ikl} = \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix} + \varepsilon_{ikl} \tag{63}$$

des quantités A_{ikl}.

En substituant ces valeurs des A_{ikl} dans les formules (53), on obtiendra un système de relations différentielles entre les coefficients de la forme quadratique et les déterminants ε_{ikl}. Ces déterminants seront tous nuls si, comme nous l'avons supposé d'abord, le trièdre n'a pas de rotations. Mais, dans les autres cas, quelques-uns au moins seront différents de zéro. Leur emploi permettra de traiter les différents problèmes que l'on peut se poser et qui concernent la relation entre le trièdre mobile et celui qui est formé par les plans tangents aux surfaces coordonnées. Si, par exemple, on annulait les trois déterminants ε_{ikl} pour lesquels les indices sont différents, on exprimerait, par cela même, que la rotation dont les composantes sont p_k, q_k, r_k a son axe situé dans le plan tangent à la surface de paramètre ρ_k et cela pour les trois valeurs 0, 1, 2 de k.

CHAPITRE III.

RECHERCHE D'UN SYSTÈME TRIPLE PARTICULIER.

Avant de poursuivre la théorie, on veut indiquer des applications des équations fondamentales à la recherche d'un système triple particulier. — Dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Lamé a attaché une importance toute particulière aux systèmes composés de trois familles isothermes. — Définition d'une famille isotherme. — Condition d'isothermie; elle est vérifiée pour le système des ellipsoïdes homofocaux. — Il existe donc au moins un système triple, à la fois orthogonal et isotherme. — Lamé s'est proposé de déterminer tous les systèmes de ce genre. En mettant le problème en équation, on reconnaît que ces systèmes particuliers ont une première propriété signalée par M. J. Bertrand : les surfaces qui les composent sont isothermiques, c'est-à-dire sont divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Mais cette propriété n'est nullement caractéristique; elle appartient, par exemple, au système des cyclides homofocales, qui n'est pas isotherme. — Par suite, en se proposant la recherche de tous les systèmes triples composés de surfaces isothermiques, on est assuré d'obtenir non seulement tous les systèmes isothermes, comme le désirait Lamé, mais d'autres systèmes plus généraux. — Pour accroître encore l'intérêt qui s'attache à ce problème général, on remarque que l'on sera encore conduit à le poser si l'on approfondit une belle découverte de Lamé. — L'illustre géomètre a montré que, si ρ, ρ_1, ρ_2 désignent les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace, l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de la forme suivante : $f(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2)$. — Si l'on cherche tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels on peut formuler une proposition analogue, on reconnaît encore qu'ils doivent être composés de surfaces isothermiques. — Toutes ces remarques nous conduisent donc à entreprendre l'étude du problème le plus général : détermination des systèmes triples composés de surfaces isothermiques. — Mise en équation; forme des valeurs de H, H_1, H_2. — On exprime d'abord que ces valeurs satisfont au système (B), ce qui conduit à préciser leur forme. — On obtient ainsi trois types différents de solutions. — Pour étudier ces trois types et achever la solution, on exprime que les valeurs de H, H_1, H_2, vérifient le système (B'). — Forme générale des équations qui en résultent. — Conditions pour qu'elles soient compatibles avec celles que l'on a déduites du système (B). — Application aux trois types précédemment obtenus. — Le premier type nous conduit à trois systèmes triples comprenant, soit une famille de plans parallèles et deux familles de cylindres isothermes; soit une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes isothermes; soit une famille de plans passant par une droite et deux familles de révolution ayant cette droite pour axe, et dont les méridiens forment un système à la fois orthogonal et isotherme. D'une manière générale, il faut joindre à ces systèmes leurs transformés par inversion, qui jouissent évidemment de la même propriété. — Le second type ne fournit aucune solution du problème et doit être rejeté. — Quant au troisième, il sera étudié dans le Chapitre suivant.

119. Nous avons établi maintenant les équations fondamentales qui se présentent dans la théorie générale des systèmes orthogonaux. Avant de poursuivre le développement de cette théorie, il convient que nous indiquions quelques applications de la méthode de recherche qui a été développée dans les Chapitres précédents. Nous étudierons tout d'abord un problème célèbre que Lamé s'est proposé dans ses *Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*.

On sait que, dans un milieu solide homogène en équilibre de chaleur, la température stationnaire V doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

et, réciproquement, toute fonction finie V satisfaisant à cette équation définit un état de température pour lequel le milieu se trouve en équilibre de chaleur. Les surfaces pour lesquelles la température conserve la même valeur sont ce que Lamé a appelé les *surfaces isothermes* du milieu relatives à l'état d'équilibre considéré.

Pour qu'une famille de surfaces représentée par l'équation

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z, \lambda) = 0$$

soit isotherme, il faut évidemment que l'on puisse prendre pour V une fonction de λ,

$$V = \Phi(\lambda),$$

satisfaisant à l'équation (1); ce qui donnera la condition

$$\Phi''(\lambda)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right] + \Phi'(\lambda)\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right] = 0;$$

d'où résulte la règle énoncée par Lamé : *Pour que la famille de surfaces représentée par l'équation* (2) *soit isotherme, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(3) \qquad \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = f(\lambda).$$

Du reste, quand la condition sera remplie, la température V, relative à l'état de distribution de la chaleur pour lequel les surfaces

sont isothermes, se calculera par la relation

$$\frac{d^2 V}{d\lambda^2} + f(\lambda)\frac{dV}{d\lambda} = 0,$$

dont l'intégrale est donnée par la formule

$$(4) \qquad V = \int e^{-\int f(\lambda)d\lambda}\, d\lambda;$$

elle est, par rapport aux constantes arbitraires C, C′ introduites par les quadratures, de la forme

$$(5) \qquad V = CV_0 + C',$$

de sorte qu'à une même famille isotherme correspondent une infinité d'états stationnaires différents.

120. Considérons, par exemple, l'une des trois familles de quadriques homofocales définies par l'équation

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0,$$

où λ désigne le paramètre de la famille. Si l'on pose, pour abréger,

$$A = \mathbf{S}\frac{x^2}{(a-\lambda)^2}, \qquad B = \mathbf{S}\frac{2x^2}{(a-\lambda)^3},$$

on aura d'abord

$$\frac{2x}{a-\lambda} + A\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0;$$

ce qui donnera

$$\Delta(\lambda) = \frac{4}{A},$$

puis, en prenant les dérivées secondes,

$$\frac{2}{a-\lambda} + 4\frac{x}{(a-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + A\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = 0.$$

En ajoutant cette équation aux deux équations analogues en y et z, et tenant compte des précédentes, on trouvera

$$\frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c}\right).$$

La condition de Lamé est donc remplie et la température V correspondante à chaque famille sera déterminée par la formule (4), qui donnera ici

$$V = C\int \frac{d\lambda}{\sqrt{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}} + C'. \tag{7}$$

Ainsi, les quadriques homofocales et orthogonales définies par l'équation (6) constituent un système composé de trois familles isothermes. En d'autres termes, il existe dans un milieu homogène trois états différents d'équilibre de chaleur pour lesquels la températnre demeure constante, soit sur des ellipsoïdes, soit sur des hyperboloïdes à une nappe, soit sur des hyperboloïdes à deux nappes, homofocaux.

On peut démontrer ce résultat par une méthode toute différente. Étant donné un système triple orthogonal, nous savons (n° **111**) qu'en gardant toutes les notations précédentes, on a

$$HH_1H_2\Delta_2 V = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{H_1H_2}{H}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{HH_2}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{HH_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right). \tag{8}$$

Cette relation nous permet d'écrire en coordonnées curvilignes l'équation aux dérivées partielles qui régit la température. Et, en particulier, elle nous permet de reconnaître immédiatement si la condition d'isothermie est vérifiée pour l'une ou l'autre des familles qui composent le système orthogoual.

Si l'on veut exprimer, par exemple, qu'il existe un état stationnaire de distribution de la chaleur dans lequel les surfaces de paramètre ρ sont isothermes, il faudra exprimer que l'équation

$$\Delta_2 V = 0$$

est vérifiée quand on y remplace V par une fonction $F(\rho)$ de ρ, ce qui donnera

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{H_1H_2}{H}F'(\rho)\right] = 0,$$

ou, en intégrant,

$$\frac{H_1H_2}{H}F'(\rho) = S, \tag{9}$$

S désignant une fonction qui ne dépendra que de ρ_1 et de ρ_2.

Appliquons cette condition au système triple formé par les surfaces homofocales (6). On sait [1] qu'avec ce système l'élément linéaire de l'espace est donné par la formule

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}d\rho^2 \\ & + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}d\rho_2^2, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

où l'on a posé

$$f(\rho) = 4(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho). \tag{11}$$

On a ici

$$\left\{\begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}}{\sqrt{f(\rho)}}, \\ H_1 &= \frac{\sqrt{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}}{\sqrt{f(\rho_1)}}, \\ H_2 &= \frac{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}}{\sqrt{f(\rho_2)}}, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

et la condition (9) devient

$$\frac{(\rho_1-\rho_2)\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{-f(\rho_1)f(\rho_2)}}F'(\rho) = S.$$

Elle sera vérifiée pourvu que l'on ait

$$\sqrt{f(\rho)}\,F'(\rho) = 2C,$$

C désignant une constante, ce qui donnera

$$V = 2C\int\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + C'. \tag{13}$$

Nous retrouvons la formule déjà obtenue plus haut.

121. On voit qu'il existe au moins un système triple, à la fois orthogonal et isotherme, c'est-à-dire un système triple composé de trois familles isothermes. Lamé s'est proposé de déterminer tous les systèmes de coordonnées curvilignes qui satisfont à cette

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces* (Ire Partie, p. 158).

double condition. Il est aisé de trouver tout d'abord les relations différentielles que doivent vérifier alors les fonctions H, H_1, H_2.

Supposons que ρ, ρ_1, ρ_2 aient été choisis de manière à être, selon l'expression de Lamé, les paramètres thermométriques des trois familles isothermes, c'est-à-dire vérifient les équations

$$\Delta_2\rho = 0, \qquad \Delta_2\rho_1 = 0, \qquad \Delta_2\rho_2 = 0.$$

En substituant ρ, ρ_1, ρ_2 dans l'expression générale de $\Delta_2(V)$, on aura tout de suite les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{H_1H_2}{H}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{HH_2}{H_1}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{HH_1}{H_2}\right) = 0,$$

qui expriment la propriété cherchée. Elles donnent, en intégrant,

$$(14) \qquad \frac{H_1H_2}{H} = S, \qquad \frac{HH_2}{H_1} = S_1, \qquad \frac{HH_1}{H_2} = S_2,$$

S_i *désignant, pour abréger, une fonction qui ne contiendra pas la variable* ρ_i.

On déduit des équations précédentes les valeurs

$$(15) \qquad H = \sqrt{S_1S_2}, \qquad H_1 = \sqrt{SS_2}, \qquad H_2 = \sqrt{SS_1}$$

de H, H_1, H_2; de sorte que l'on aura, pour l'élément du système triple cherché, l'expression suivante

$$(16) \qquad ds^2 = S_1S_2\,d\rho^2 + SS_2\,d\rho_1^2 + SS_1\,d\rho_2^2.$$

Cette formule permet de vérifier immédiatement une propriété des systèmes triples isothermes, qui a été signalée par M. J. Bertrand [1]. *Chacune des surfaces qui les composent peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure.* Si l'on suppose, en effet, $d\rho_2 = 0$, l'élément linéaire de la surface de paramètre ρ_2 sera défini par la formule

$$(17) \qquad ds^2 = S_2(S_1\,d\rho^2 + S\,d\rho_1^2).$$

---

[1] J. BERTRAND, *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales* (*Journal de Liouville*, t. IX, p. 117; 1844).

Le paramètre ρ_2 étant constant, S_1 deviendra une fonction de ρ, S une fonction de ρ_1; par suite, le rapport des coefficients de $d\rho^2$ et de $d\rho_1^2$ sera le quotient d'nne fonction de ρ par une fonction de ρ_1. Cette relation caractérise, sur une surface quelconque, les systèmes de coordonnées jouissant de la propriété annoncée [1].

122. Ainsi, tous les systèmes triples, à la fois orthogonaux et isothermes, sont nécessairement composés de surfaces qui peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Mais la réciproque n'est pas vraie, et l'on connaît au moins un système orthogonal, celui des cyclides homofocales, qui, sans être isotherme, jouit de la même propriété. On sait, en effet [2], que, si l'on considère les cyclides homofocales définies en coordonnées pentasphériques par l'équation

$$(18) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0,$$

il passera trois de ces surfaces par chaque point de l'espace; et, si l'on désigne par ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres de ces trois surfaces, l'élément linéaire de l'espace sera défini par la formule

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} M^2\,ds^2 = {} & \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}\,d\rho^2 \\ & + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$(20) \qquad f(\rho) = (\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_5)$$

et

$$(21) \qquad M = 2\sum_1^5 \frac{1}{R_k}\sqrt{\frac{(a_k-\rho)(a_k-\rho_1)(a_k-\rho_2)}{f'(a_k)}},$$

R_k étant le rayon de la sphère coordonnée (S_k). Quant aux coordonnées x_i, elles s'expriment en fonction des coordonnées curvi-

---

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces* (Ire Partie, n° 115).

[2] *Leçons sur la théorie des surfaces* (Ire Partie, n° 154). *Voir* aussi plus loin, n° 164.

lignes par les formules

$$(22)\qquad x_i = \sqrt{\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}}, \qquad (i=1,2,\ldots,5).$$

La formule (19), en même temps qu'elle met en évidence l'orthogonalité du système de coordonnées curvilignes ainsi constitué, montre aussi que chaque cyclide peut être découpée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, car si l'on fait, par exemple, $\rho_2 = \text{const.}$, on obtient, pour l'élément linéaire de la surface de paramètre ρ_2, l'expression

$$(23)\qquad ds^2 = \frac{\rho-\rho_1}{M^2}\left[\frac{\rho-\rho_2}{f(\rho)}\,d\rho^2 - \frac{\rho_1-\rho_2}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2\right];$$

d'où résulte immédiatement la propriété annoncée. Nous avons déjà exprimé cette propriété en disant que la surface est *isothermique* (1).

123. Proposons-nous, d'une manière générale, de rechercher tous les systèmes triples orthogonaux, nécessairement plus nombreux que les systèmes isothermes, pour lesquels toute surface de chacune des trois familles peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, c'est-à-dire est isothermique. Il est facile de trouver quelle doit être, dans ce cas, la forme de l'élément linéaire de l'espace. Posons toujours

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Sur la surface de paramètre ρ_2, l'élément linéaire aura pour expression

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2;$$

et, pour que le réseau des lignes de courbure soit isotherme, il faudra que l'on ait

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho)}{f_1(\rho_1)};$$

mais, ρ_2 étant constant sur la surface, les fonctions f et f_1 peu-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (IIe Partie, n° 434).

vent contenir ρ_2, et l'on doit écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho,\rho_2)}{f_1(\rho_1,\rho_2)}.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par une grande lettre affectée d'indice, A_i par exemple, une fonction ne contenant pas la variable ρ_i, et par une petite lettre affectée d'indice, a_i par exemple, une fonction de la seule variable ρ_i. L'indice zéro correspondant à la variable ρ sera supprimé. L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{A_1}{A}.$$

On devra avoir de même, en considérant les deux autres familles,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{B_2}{B_1}, \qquad \frac{H_2}{H} = \frac{C}{C_2}.$$

La multiplication des trois équations nous donne

$$\frac{CA_1B_2}{AB_1C_2} = 1.$$

Il est facile de voir que la solution la plus générale de cette équation est fournie par les formules

$$\frac{C}{A} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{a}{a_2}, \qquad \frac{B_2}{C_2} = \frac{a_1}{a},$$

qui donnent, en introduisant les fonctions S, S_1, S_2 de même définition que A, A_1, ...,

$$S = Aa_2 = Ca_1, \qquad S_1 = A_1a_2 = aB_1, \qquad S_2 = B_2a = C_2a_1.$$

On déduit de là les relations

$$\frac{H}{H_1} = \frac{S_1}{S}, \qquad \frac{H_1}{H_2} = \frac{S_2}{S_1}, \qquad \frac{H_2}{H} = \frac{S}{S_2},$$

et l'on pourra adopter les expressions suivantes

$$(24)\qquad H = \frac{S_1S_2}{M}, \qquad H_1 = \frac{SS_2}{M}, \qquad H_2 = \frac{SS_1}{M},$$

où M désignera une fonction quelconque de ρ, ρ_1, ρ_2. Pour la commodité des calculs, nous prendrons

$$(25) \qquad H = \frac{1}{M} e^{R_1+R_2}, \qquad H_1 = \frac{1}{M} e^{R+R_2}, \qquad H_2 = \frac{1}{M} e^{R_1+R},$$

R, R_1, R_2 étant de même définition que S, S_1, S_2, c'est-à-dire ne contenant chacune que les deux variables d'indices différents. On obtiendra les expressions données plus haut relatives aux systèmes isothermes en faisant

$$M = 1.$$

124. On est encore conduit à rechercher les mêmes systèmes orthogonaux si l'on se propose une question très intéressante dont l'origine remonte à la plus belle découverte de Lamé.

Si l'on applique l'expression (8) de $\Delta_2 V$ au système de coordonnées elliptiques pour lequel l'élément linéaire est défini par la formule (10), on reconnaît immédiatement que l'on a

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_2 V = {} & \frac{\sqrt{f(\rho)}}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\sqrt{f(\rho)}\,\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] \\ & + \frac{\sqrt{f(\rho_1)}}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)} \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\sqrt{f(\rho_1)}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right] \\ & + \frac{\sqrt{f(\rho_2)}}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)} \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left[\sqrt{f(\rho_2)}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right]; \end{aligned} \right.$$

et de là il résulte que l'on aura des solutions de l'équation de la chaleur

$$\Delta_2 V = 0,$$

si l'on peut satisfaire aux trois relations

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{f(\rho)}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\sqrt{f(\rho)}\,\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] &= (A\rho + B)V, \\ \sqrt{f(\rho_1)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\sqrt{f(\rho_1)}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right] &= (A\rho_1 + B)V, \\ \sqrt{f(\rho_2)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left[\sqrt{f(\rho_2)}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right] &= (A\rho_2 + B)V, \end{aligned} \right.$$

où A et B sont deux fonctions quelconques. C'est ce qui aura lieu si l'on suppose A et B constantes, et si l'on prend

$$(28) \qquad V = \varphi(\rho)\,\varphi_1(\rho_1)\,\varphi_2(\rho_2),$$

les fonctions d'une seule variable $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ étant déterminées par

les équations linéaires

$$\begin{aligned} \sqrt{f(\rho)}\,\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{f(\rho)}\,\frac{d\varphi}{d\rho}\right] &= (A\rho + B)\varphi, \\ \sqrt{f(\rho_1)}\,\frac{d}{d\rho_1}\left[\sqrt{f(\rho_1)}\,\frac{d\varphi_1}{d\rho_1}\right] &= (A\rho_1 + B)\varphi_1, \\ \sqrt{f(\rho_2)}\,\frac{d}{d\rho_2}\left[\sqrt{f(\rho_2)}\,\frac{d\varphi_2}{d\rho_2}\right] &= (A\rho_2 + B)\varphi_2. \end{aligned}$$

Il y aura, en définitive, pour trouver la solution particulière définie par la formule (28), à intégrer l'unique équation linéaire

$$(29) \qquad \sqrt{f(\rho)}\,\frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{f(\rho)}\,\frac{du}{d\rho}\right) = (A\rho + B)u,$$

où A et B sont des constantes quelconques.

On sait comment l'emploi des solutions particulières (28) a permis à Lamé de résoudre le beau problème de la distribution de la chaleur à l'intérieur d'un ellipsoïde, et comment l'étude de l'équation linéaire précédente, faite par M. Hermite, a été l'origine des plus importantes découvertes analytiques. Il était donc naturel de se proposer la recherche de tous les systèmes orthogonaux auxquels on pourra appliquer la méthode de Lamé, et avec lesquels on pourra trouver une infinité de solutions de l'équation de la chaleur, en prenant pour V une fonction de la forme

$$(30) \qquad V = P f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2),$$

où P désignera une fonction tout à fait déterminée de ρ, ρ_1, ρ_2, mais où les fonctions f, f_1, f_2 pourront être choisies d'une infinité de manières différentes et devront satisfaire à des équations du second ordre. La forme précédente, un peu plus générale que celle (28) de Lamé, la comprend comme cas particulier et s'y réduit pour $P = 1$. Voyons comment on pourra traiter le problème ainsi posé.

Si, pour abréger, on pose

$$\alpha = \frac{H_1 H_2}{H}, \qquad \alpha_1 = \frac{H H_2}{H_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{H H_1}{H_2},$$

l'équation de la chaleur prendra la forme

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\,\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\alpha_1\,\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\alpha_2\,\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right) = 0.$$

Si l'on y substitue la valeur (30) de V, elle devient

$$(31)\qquad P\alpha\frac{f''(\rho)}{f(\rho)}+\left(2\alpha\frac{\partial P}{\partial\rho}+P\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}\right)\frac{f'(\rho)}{f(\rho)}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\ldots=0,$$

les termes non écrits s'obtenant par des permutations circulaires, effectuées sur l'indice. Les fonctions f, f_1, f_2 doivent donc satisfaire à des équations linéaires. Par exemple si, dans l'équation précédente, on donne à ρ_1 et à ρ_2 deux valeurs constantes quelconques, on trouvera pour f une équation de la forme suivante :

$$af''+bf'+cf=0,$$

où a, b, c sont des fonctions quelconques de ρ.

Réciproquement, *si l'on veut que les deux solutions d'une telle équation puissent être associées aux fonctions f_1, f_2 pour donner une intégrale de l'équation de la chaleur*, comme cela a lieu dans le cas des surfaces homofocales du second degré, il faudra que l'équation (31) soit identiquement vérifiée par l'emploi de trois équations de la forme précédente, l'une pour f, la seconde pour f_1, la troisième pour f_2. Écrivons ces trois équations sous la forme suivante :

$$(32)\qquad \begin{cases} f''(\rho)+\varphi(\rho)f'(\rho)+\psi(\rho)f=0,\\ f_1''(\rho_1)+\varphi_1(\rho_1)f_1'(\rho_1)+\psi_1(\rho_1)f_1=0,\\ f_2''(\rho_2)+\varphi_2(\rho_2)f_2'(\rho_2)+\psi_2(\rho_2)f_2=0,\end{cases}$$

il faudra que, si l'on en tire les valeurs des dérivées secondes $f''(\rho)$, $f_1''(\rho_1)$, $f_2''(\rho_2)$ pour les porter dans l'équation (31), celle-ci soit vérifiée au moins pour *deux valeurs différentes* des rapports $\frac{f'}{f}, \frac{f_1'}{f_1}, \frac{f_2'}{f_2}$. Comme elle est linéaire par rapport à ces rapports, il faudra égaler à zéro le coefficient de chacun de ces rapports ainsi que l'ensemble des termes qui ne les contiennent pas. On obtient ainsi les conditions

$$(33)\qquad \begin{cases} 2\alpha\frac{\partial P}{\partial\rho}+P\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}=P\alpha\varphi(\rho),\\ 2\alpha_1\frac{\partial P}{\partial\rho_1}+P\frac{\partial\alpha_1}{\partial\rho_1}=P\alpha_1\varphi_1(\rho_1),\\ 2\alpha_2\frac{\partial P}{\partial\rho_2}+P\frac{\partial\alpha_2}{\partial\rho_2}=P\alpha_2\varphi_2(\rho_2),\\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\alpha_1\frac{\partial P}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\alpha_2\frac{\partial P}{\partial\rho_2}\right)\\ \qquad -P(\alpha\psi+\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2)=0,\end{cases}$$

qui devront être satisfaites grâce à un choix convenable des fonctions φ, φ_1, φ_2 et ψ, ψ_1, ψ_2. Réciproquement, toutes les fois qu'elles seront vérifiées, on pourra affirmer que l'équation de la chaleur admet huit solutions particulières, linéairement distinctes, de la forme suivante

$$Pf(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2)$$

où $f(\rho)$, $f_1(\rho_1)$, $f_2(\rho_2)$ désignent respectivement des intégrales particulières des équations linéaires (32).

Il nous reste maintenant à examiner les conséquences des relations (33).

La discussion se simplifie beaucoup si l'on remarque que les équations (32) sont linéaires ; on peut donc, en remplaçant respectivement ρ, ρ_1, ρ_2 par des fonctions convenablement choisies de ces paramètres, les ramener à une forme nouvelle pour laquelle seront nulles les fonctions φ, φ_1, φ_2. Alors les trois premières équations (33) se réduiront aux suivantes :

$$(34)\qquad \frac{\partial(\alpha P^2)}{\partial\rho}=\frac{\partial(\alpha_1 P^2)}{\partial\rho_1}=\frac{\partial(\alpha_2 P^2)}{\partial\rho_2}=0,$$

et donneront, en intégrant,

$$\alpha P^2=S^2,\qquad \alpha_1 P^2=S_1^2,\qquad \alpha_2 P^2=S_2^2,$$

S_i ne dépendant pas de ρ_i. Si l'on se rappelle la signification de α, α_1, α_2, cela donne, pour H, H_1, H_2, des valeurs de la forme suivante

$$(35)\qquad H=\frac{S_1S_2}{P^2},\qquad H_1=\frac{SS_2}{P^2},\qquad H_2=\frac{SS_1}{P^2},$$

identiques, aux notations près, à celles que nous avons obtenues plus haut.

Ainsi, l'on est encore ramené à la recherche des systèmes triples pour lesquels H, H_1, H_2 sont donnés par les formules (25). Pour ces systèmes, on aura

$$(36)\qquad \alpha_i=\frac{1}{M}e^{2R_i},$$

de sorte que les équations (34) nous donneront

$$\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\frac{P^2}{M}\right)=0,$$

et, par conséquent, le rapport $\frac{P^2}{M}$ sera une constante. On pourra prendre

$$P = M^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur de P ainsi que les valeurs de α, α_1, α_2 dans la dernière équation (33), elle deviendra

$$e^{2R}\left(\frac{\partial^2 M^{-\frac{1}{2}}}{\partial\rho^2} + \psi\, M^{-\frac{1}{2}}\right) + e^{2R_1}\left(\frac{\partial^2 M^{-\frac{1}{2}}}{\partial\rho_1^2} + \psi_1 M^{-\frac{1}{2}}\right) + e^{2R_2}\left(\frac{\partial^2 M^{-\frac{1}{2}}}{\partial\rho_2^2} + \psi_2 M^{-\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Mais nous ne ferons pas usage, au début tout au moins, de cette condition supplémentaire pour M.

125. Proposons-nous donc de déterminer tous les systèmes orthogonaux pour lesquels les valeurs de H, H_1, H_2 sont données simplement par les formules déjà écrites

$$(37)\qquad H = \frac{1}{M}e^{R_1+R_2}, \qquad H_1 = \frac{1}{M}e^{R+R_2}, \qquad H_2 = \frac{1}{M}e^{R+R_1}.$$

Il faudra former les fonctions β_{ik}, exprimer ensuite que ces fonctions vérifient les systèmes (B) et (B′) du Chapitre précédent. Calculons d'abord ces fonctions β_{ik}. On aura

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \beta_{01} &= e^{R-R_1}\left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right), & \beta_{10} &= e^{R_1-R}\left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right),\\ \beta_{12} &= e^{R_1-R_2}\left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R}{\partial\rho_1}\right), & \beta_{21} &= e^{R_2-R_1}\left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R}{\partial\rho_2}\right),\\ \beta_{20} &= e^{R_2-R}\left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right), & \beta_{02} &= e^{R-R_2}\left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial\rho}\right). \end{aligned}\right.$$

Nous avons, pour abréger, désigné par x_0, x_1, x_2 les dérivées premières de M; nous adopterons une notation analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Les fonctions β_{ik} doivent d'abord satisfaire aux équations (B) du Chapitre précédent

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho} = \beta_{10}\beta_{02}, \qquad \frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_1} = \beta_{21}\beta_{10}, \qquad \frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_2} = \beta_{02}\beta_{21}.$$

En substituant leurs expressions dans ces équations, on ob-

tiendra le système

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} x_{12} &= x_2\frac{\partial R}{\partial\rho_1} + x_1\frac{\partial R}{\partial\rho_2} + MU,\\ x_{20} &= x_0\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} + x_2\frac{\partial R_1}{\partial\rho} + MU_1,\\ x_{01} &= x_1\frac{\partial R_2}{\partial\rho} + x_0\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1} + MU_2, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{\partial(R-R_2)}{\partial\rho_1}\,\frac{\partial(R-R_1)}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R}{\partial\rho_1}\,\frac{\partial R}{\partial\rho_2},\\ U_1 &= \frac{\partial(R_1-R)}{\partial\rho_2}\,\frac{\partial(R_1-R_2)}{\partial\rho} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\,\frac{\partial R_1}{\partial\rho},\\ U_2 &= \frac{\partial(R_2-R_1)}{\partial\rho}\,\frac{\partial(R_2-R)}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho}\,\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}. \end{aligned}\right.$$

Pour que les équations (39) soient compatibles, il faudra que les trois valeurs différentes de

$$\frac{\partial^3 M}{\partial\rho\,\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = x_{012}$$

que l'on peut en déduire par la différentiation soient égales. Or, en différentiant la première équation par rapport à ρ et remplaçant x_{20}, x_{10} par leurs valeurs déduites des deux autres, on trouve

$$x_{012} = x_0\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\,\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1} + x_1\frac{\partial R}{\partial\rho_2}\,\frac{\partial R_2}{\partial\rho} + x_2\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\,\frac{\partial R}{\partial\rho_1} + M\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} + U_1\frac{\partial R}{\partial\rho_1} + U_2\frac{\partial R}{\partial\rho_2}\right).$$

Les valeurs que l'on trouvera en opérant de même avec les deux autres équations (39) ne différeront évidemment de la précédente que par le coefficient de M. On doit donc avoir

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial\rho} + U_1\frac{\partial R}{\partial\rho_1} + U_2\frac{\partial R}{\partial\rho_2}\\ &\quad = \frac{\partial U_1}{\partial\rho_1} + U_2\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} + U\frac{\partial R_1}{\partial\rho} = \frac{\partial U_2}{\partial\rho_2} + U\frac{\partial R_2}{\partial\rho} + U_1\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}. \end{aligned}\right.$$

Or il est aisé de vérifier les identités

$$U_1\frac{\partial R}{\partial\rho_1} + U_2\frac{\partial R}{\partial\rho_2} = U_2\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} + U\frac{\partial R_1}{\partial\rho} = U\frac{\partial R_2}{\partial\rho} + U_1\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}.$$

Les équations (41) se réduisent donc aux suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2}.$$

Comme un calcul direct permet de constater que l'on a identiquement

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0,$$

on voit que les équations (41) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(42) \qquad \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0.$$

Chacune des trois fonctions U_i ne doit donc pas dépendre de la variable de même indice. Par suite, en désignant par K, K_1, K_2 trois fonctions de deux variables telles que K_i ne dépende pas de ρ_i, on pourra toujours écrire

$$U = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\frac{\partial R}{\partial \rho_2},$$

et de même pour U_1 et U_2. Nous mettons une dérivée seconde pour la commodité des calculs qui vont suivre.

Nous aurons ainsi le système suivant :

$$(43) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\right)\left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right) = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2},\\ &\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\right)\left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2},\\ &\left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}\right) = \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1},\end{aligned}\right.$$

qui devra être vérifié quand on choisira pour K, K_1, K_2 des fonctions convenables des variables dont elles dépendent.

Quant aux équations auxquelles doit satisfaire M, elles prendront la forme

$$(44) \qquad \left\{\begin{aligned} x_{12} &= x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + M\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right),\\ x_{20} &= x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} + x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + M\left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_1}{\partial \rho}\right),\\ x_{01} &= x_0 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + M\left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho}\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}\right);\end{aligned}\right.$$

et elles deviendront compatibles, c'est-à-dire elles admettront une solution dépendant de trois fonctions arbitraires d'une variable, si le système (43) est vérifié.

126. Nous allons d'abord chercher la forme des fonctions R, R_1, R_2; K, K_1, K_2 qui peuvent satisfaire aux équations (43). Ces équations, différentiées respectivement par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2, nous donneront les suivantes :

$$(45) \quad \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\right)\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\right)\frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}.$$

Supposons d'abord que l'un des binomes

$$(46) \qquad \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}$$

soit nul et que l'on ait, par exemple,

$$(47) \qquad \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} = 0,$$

ce qui donne, en différentiant,

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0.$$

Alors les équations (45) seront vérifiées. Nous avons ainsi une première solution du problème proposé. On déduit facilement des trois équations précédentes que l'on a

$$(48) \qquad R_1 = a + a_2, \qquad R_2 = a + a_1,$$

a_i ne dépendant que de la variable ρ_i. Quant à R, comme il ne doit satisfaire à aucune condition, ce sera une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2. Mais on peut simplifier cette première solution.

Remarquons en effet que, si, dans les expressions (37) de H, H_1, H_2, on remplace R, R_1, R_2 respectivement par

$$R' + \alpha_1 + \alpha_2, \quad R'_1 + \alpha + \alpha_2, \quad R'_2 + \alpha + \alpha_1,$$

α_i ne dépendant que de ρ_i, R', R'_1, R'_2 seront des fonctions de même définition respectivement que R, R_1, R_2. Remplaçons maintenant M par $M' e^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}$; les nouvelles expressions de H,

H_1, H_2 seront

$$H = \frac{1}{M'} e^{R'_1+R'_2+\alpha}, \qquad H_1 = \frac{1}{M'} e^{R'+R'_2+\alpha_1}, \qquad H_2 = \frac{1}{M'} e^{R'+R'_1+\alpha_2}$$

et ne différeront des anciennes que par la présence des facteurs e^{α}, e^{α_1}, e^{α_2}. Mais on pourra faire disparaître ces facteurs en substituant aux coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 de nouvelles coordonnées ρ', ρ'_1, ρ'_2, définies par les quadratures

$$\rho' = \int e^{\alpha}\, d\rho, \qquad \rho'_1 = \int e^{\alpha_1}\, d\rho_1, \qquad \rho'_2 = \int e^{\alpha_2}\, d\rho_2.$$

On voit donc que, sans diminuer la généralité du système cherché, on peut remplacer les fonctions R, R_1, R_2 par les suivantes :

$$R + \alpha_1 + \alpha_2, \quad R_1 + \alpha + \alpha_2, \quad R_2 + \alpha + \alpha_1,$$

où α, α_1, α_2 désignent trois fonctions quelconques qui dépendent chacune de la variable de même indice.

Appliquons cette remarque générale à notre première solution, définie par les formules (48). Nous voyons que les fonctions R_1, R_2 pourront être ramenées à zéro pourvu que l'on prenne

$$\alpha + a = 0, \qquad \alpha_1 + a_1 = 0, \qquad \alpha_2 + a_2 = 0.$$

Ainsi cette solution est caractérisée par les deux relations

$$R_1 = 0, \qquad R_2 = 0. \tag{49}$$

127. Supposons maintenant qu'aucun des binomes (46) ne soit nul, mais que l'une des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho\,\partial\rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1} \tag{50}$$

le soit. Alors, d'après les équations (45) et l'hypothèse précédente, ces trois dérivées seront nulles en même temps, ce qui donnera

$$R = a_1 + b_2, \qquad R_1 = a_2 + b, \qquad R_2 = a + b_1,$$

a_i, b_i désignant des fonctions de la seule variable ρ_i. En introduisant comme précédemment des fonctions α, α_1, α_2, on pourra ramener les valeurs précédentes à la forme plus élégante

$$R = a_1 - a_2, \qquad R_1 = a_2 - a, \qquad R_2 = a - a_1; \tag{51}$$

mais, pour qu'aucun des binomes (46) ne soit nul, il sera *nécessaire qu'aucune des fonctions a_i ne se réduise à une constante.*

Tel est le type de notre deuxième solution.

128. En dehors de ces deux premières solutions, il n'en existe aucune pour laquelle l'un des binomes (46) ou l'une des dérivées secondes (50) soit nulle. Par suite, la comparaison des équations (43) et (45) nous conduira, pour toutes les autres solutions cherchées, aux relations suivantes :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}}{\dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 K_1}{\partial\rho\,\partial\rho_2}}{\dfrac{\partial^2 R_1}{\partial\rho\,\partial\rho_2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\dfrac{\partial^2 R_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}.$$

La valeur commune de ces trois rapports, le premier ne dépendant pas de ρ, le deuxième de ρ_1 et le troisième de ρ_2, ne peut être qu'une constante h, différente de zéro. Il suit de là que les équations (43) se changeront dans les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial R}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right) = h\,\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2},\\
&\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R}{\partial\rho_2}\right)\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right) = h\,\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho\,\partial\rho_2},\\
&\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R}{\partial\rho_1}\right) = h\,\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1},
\end{aligned}\right. \tag{52}$$

où ne figurent plus les fonctions K, K_1, K_2. Nous allons voir qu'on peut aisément les intégrer.

Prenons, par exemple, la première et effectuons-y la substitution

$$R = R_1 + R_2 - h \log\theta,$$

elle deviendra

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = 0.$$

On aura donc

$$\theta = S_1 + S_2, \qquad R = R_1 + R_2 - h\log(S_1 + S_2),$$

S_1, S_2 étant des fonctions de même définition que R_1, R_2, c'est-à-dire ne contenant pas respectivement ρ_1 et ρ_2.

Comme R ne doit pas dépendre de ρ, on pourra, dans la formule précédente, donner à ρ une valeur constante qui transformera R_1, S_1 en des fonctions de ρ_2, R_2, S_2 en des fonctions de ρ_1. On a donc pour l'expression générale de R

$$(53) \qquad R = \alpha_1 + \alpha_2 - h\log(a_1 - a_2),$$

α_i, a_i dépendant seulement de ρ_i. Aucune des fonctions a, a_1, a_2 ne peut se réduire à une constante; car, sans cela, deux des trois dérivées secondes (50) seraient nulles, contrairement à l'hypothèse qui caractérise cette troisième solution.

Cela posé, prenons la première des équations (52) et remplaçons-y R par la valeur précédente. Elle pourra se mettre sous la forme

$$\frac{ha'_1}{\dfrac{\partial R_2}{\partial\rho_1} - \alpha'_1} + a_1 = \frac{ha'_2}{\dfrac{\partial R_1}{\partial\rho_2} - \alpha'_2} + a_2.$$

Les deux membres de l'équation précédente sont indépendants, l'un de ρ_2, l'autre de ρ_1. Ils sont donc égaux à une même fonction de ρ, que nous désignerons par a. On aura donc

$$\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1} - \alpha'_1 = \frac{ha'_1}{a - a_1}, \qquad \frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} - \alpha'_2 = \frac{ha'_2}{a - a_2},$$

ce qui donnera en intégrant

$$(54) \qquad \begin{cases} R_2 = \alpha_1 + \alpha - h\log(a - a_1), \\ R_1 = \alpha_2 + \beta - h\log(a_2 - a), \end{cases}$$

α et β désignant des fonctions de ρ.

Substituons ces valeurs, ainsi que celle de R, dans la seconde équation (52); si l'on se rappelle qu'aucune des fonctions a_i ne peut se réduire à une constante, il viendra

$$\alpha' = \beta'.$$

On peut supposer, sans restreindre la généralité,

$$\alpha = \beta;$$

car on peut, sans changer la valeur (53) de R, remplacer α_1, α_2 par $\alpha_1 + h'$, $\alpha_2 - h'$, h' désignant une constante quelconque. On obtient donc, pour la forme définitive de la troisième solution, les expressions suivantes

$$(55) \qquad \begin{cases} R = \alpha_1 + \alpha_2 - h\log(a_1 - a_2), \\ R_1 = \alpha + \alpha_2 - h\log(a_2 - a), \\ R_2 = \alpha + \alpha_1 - h\log(a - a_1) \end{cases}$$

de R, R_1, R_2.

129. En résumé, nous avons les trois types de solutions caractérisés respectivement par les formules (49), (51) et (55). Nous allons les examiner successivement. Mais auparavant indiquons d'une manière précise le point où nous sommes parvenus.

La fonction M devra satisfaire aux trois équations aux dérivées partielles (44), qui seront compatibles; mais il nous reste à exprimer que les fonctions β_{ik} satisfont encore au système (B') du Chapitre précédent

$$(56) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_2} + \beta_{01}\beta_{02} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_2} + \dfrac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho} + \beta_{10}\beta_{12} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1} + \beta_{20}\beta_{21} = 0; \end{cases}$$

ce qui va nous donner trois nouvelles équations aux dérivées partielles pour M. Or, ces équations ne contiennent, outre les dérivées premières, que les dérivées secondes x_{00}, x_{11}, x_{22} de M, et il est aisé de les résoudre par rapport à ces dérivées. Si on les ajoute, par exemple, après les avoir multipliées respectivement par $-$H, H_1 et H_2, on aura

$$(57) \qquad \begin{cases} e^{2R}\left[-\dfrac{2x_{00}}{M} + \dfrac{x_0^2}{M^2} + \dfrac{2x_0}{M}\left(\dfrac{\partial R_1}{\partial\rho} + \dfrac{\partial R_2}{\partial\rho}\right) - 3\dfrac{\partial R_1}{\partial\rho}\dfrac{\partial R_2}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2 R_1}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial^2 R_2}{\partial\rho^2}\right] \\ \quad + e^{2R_1}\left[\left(\dfrac{x_1}{M} - \dfrac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 R_2}{\partial\rho_1^2} - \dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho_1^2} + \dfrac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\left(\dfrac{\partial R}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)\right] \\ \quad + e^{2R_2}\left[\left(\dfrac{x_2}{M} - \dfrac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 R_1}{\partial\rho_2^2} - \dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho_2^2} + \dfrac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\left(\dfrac{\partial R}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)\right] = 0. \end{cases}$$

Les équations que l'on obtiendrait en permutant les indices donneraient de même les dérivées secondes x_{11} et x_{22}.

Ces nouvelles équations ne sont pas nécessairement compatibles avec les équations (44). Cherchons d'abord quel est le degré de généralité de la solution commune qu'elles doivent avoir.

S'il existe un système orthogonal répondant à la question, ses transformés par inversion donneront aussi des solutions pour lesquelles les rapports mutuels de H, H_1, H_2 seront les mêmes; Mais M sera remplacée (n° 98) par

$$kM[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2],$$

x, y, z étant les coordonnées rectilignes et a, b, c, k quatre constantes arbitraires. Il faut donc que la solution commune des six équations (44), (57) contienne au moins quatre constantes, c'est-à-dire que l'on puisse prendre arbitrairement, pour un système donné de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, la fonction M et ses trois dérivées premières. Or, comme ces équations font connaître toutes les dérivées secondes de M, on reconnaît immédiatement qu'elles ne peuvent admettre une solution plus générale. Pour exprimer qu'elles sont compatibles, on les différentiera, ce qui permettra d'obtenir deux ou trois expressions différentes pour les dérivées troisièmes de M relatives à deux au moins des variables ρ, ρ_1, ρ_2; ces expressions d'une même dérivée, qu'on pourra ramener à ne contenir que les dérivées premières x_0, x_1, x_2, devront être égales pour toutes les valeurs de ces dérivées, c'est-à-dire qu'elles devront être les mêmes, terme pour terme.

On a déjà exprimé, en étudiant le système (44), que les trois valeurs obtenues pour x_{012} par la différentiation de ces équations sont égales; il resterait à exprimer que, si l'on calcule de deux manières différentes une dérivée telle que x_{001}, soit en différentiant par rapport à ρ la troisième équation (44), soit en différentiant par rapport à ρ_1 l'équation (57), les deux expressions obtenues sont égales terme à terme. Cela fait, les six équations auraient une solution commune avec quatre constantes arbitraires et formeraient un système complet.

130. Le calcul indiqué n'est pas impraticable; mais on peut l'abréger beaucoup et le faire sous une autre forme en remarquant que les six équations (B), (B′) offrent des combinaisons intégrables.

Considérons, en effet, les deux équations

$$\frac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}+\beta_{20}\beta_{21}=0,$$
$$\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}+\frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_2}+\beta_{10}\beta_{12}=0$$

du groupe (B′), et multiplions-les respectivement par $\beta_{10}\,d\rho_1$, $\beta_{20}\,d\rho_2$. En vertu des équations (B), elles pourront s'écrire

$$\beta_{10}\frac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1}\,d\rho_1+\beta_{20}\frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_1}\,d\rho_1+\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}\,d\rho_1=0,$$
$$\beta_{10}\frac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_2}\,d\rho_2+\beta_{20}\frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_2}\,d\rho_2+\beta_{20}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}\,d\rho_2=0.$$

Eu les ajoutant et *supposant constante la variable* ρ, on trouve

$$d\,\frac{\beta_{10}^2+\beta_{20}^2}{2}+\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}\,d\rho_1+\beta_{20}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}\,d\rho_2=0. \tag{58}$$

Or on a, dans tous les cas, en vertu des équations (B),

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\beta_{20}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}\right);$$

et, par conséquent, si l'on regarde toujours ρ comme une constante, la différentielle

$$\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}\,d\rho_1+\beta_{20}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}\,\partial\rho_2$$

peut être exactement intégrée.

Dans le cas particulier que nous avons à traiter, ce point peut être vérifié comme il suit. On a, en se servant des expressions (38) des fonctions β_{ik},

$$\begin{aligned}\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}&=-\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\beta_{01}\beta_{10}+\left(\frac{x_1}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)\\&=-\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\beta_{10}\beta_{01}+\frac{\partial}{\partial\rho}(\beta_{10}\beta_{01})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)^2.\end{aligned}$$

On trouve, d'autre part, en tenant compte de la troisième équation (44),

$$\beta_{01}\beta_{10}=\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(-\frac{x_0}{M}+\frac{\partial K_2}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}(K_2-\operatorname{Log}M);$$

ce qui permet d'écrire

$$\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial K_2}{\partial\rho}\right)$$
$$+\frac{\partial^3}{\partial\rho^2\,\partial\rho_1}(K_2-\operatorname{Log}M)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)^2.$$

En intégrant, on trouve

$$\int\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}\,d\rho_1=\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial K_2}{\partial\rho}\right)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(K_2-\operatorname{Log}M)-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)^2$$
$$-L_1+\frac{\partial^2 K_1}{\partial\rho^2}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\frac{\partial K_1}{\partial\rho},$$

L_1 désignant une fonction qui ne dépend pas de ρ_1; quant aux deux termes qui suivent et qui ne dépendent pas non plus de ρ_1, ils sont ajoutés pour la symétrie des calculs. On trouverait de même

$$\int\beta_{20}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}\,d\rho_2=\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial K_1}{\partial\rho}\right)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(K_1-\operatorname{Log}M)-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{M}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\right)^2$$
$$-L_2+\frac{\partial^2 K_2}{\partial\rho^2}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\frac{\partial K_2}{\partial\rho},$$

L_2 ne contenant pas ρ_2. Les deux fonctions L_1, L_2 doivent être telles que ces intégrales soient égales, ce qni donne, en retranchant,

$$L_1-L_2=\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial K_1}{\partial\rho}+\frac{\partial K_2}{\partial\rho}-\frac{1}{2}\frac{\partial R_1}{\partial\rho}-\frac{1}{2}\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right).\tag{59}$$

Il est facile de vérifier que la dérivée seconde du second membre, prise par rapport à ρ_1, ρ_2, est nulle comme celle du premier. Le second membre est donc de la forme A_1-A_2, A_i ne contenant pas ρ_i; et, comme l'équation pourra s'écrire

$$L_1-A_1=L_2-A_2,$$

la valeur commune des deux membres ne pourra dépendre que

de ρ; on aura donc

$$\left\{\begin{aligned}L_1&=A_1+f(\rho),\\ L_2&=A_2+f(\rho),\end{aligned}\right.\tag{60}$$

ce qui détermine L_1, L_2 à une fonction près de ρ.

En intégrant la formule (58), on obtiendra la relation

$$\beta_{10}^2+\beta_{20}^2+2\int\left(\beta_{10}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho}d\rho_1+\beta_{20}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}d\rho_2\right)=0;$$

et, en substituant la valeur de l'intégrale que nous venons de calculer, on trouvera

$$e^{2R}\left[\frac{2x_{00}}{M}-\frac{x_0^2}{M^2}-\frac{2x_0}{M}\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho}+\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\left(\frac{\partial K_1}{\partial\rho}+\frac{\partial K_2}{\partial\rho}\right)-2\frac{\partial^2 K_1}{\partial\rho^2}-2\frac{\partial^2 K_2}{\partial\rho^2}+2L_1+\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)^2\right]$$
$$-e^{2R_1}\left(\frac{x_1}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)^2-e^{2R_2}\left(\frac{x_2}{M}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)^2=0,$$

ce qui donnera une nouvelle équation aux dérivées partielles à laquelle devra satisfaire la fonction M. Si l'on compare cette équation à la première (57) qui donne aussi x_{00}, on trouve qu'en éliminant cette dérivée on fait disparaître toutes les autres, et il reste l'équation de condition

$$\left\{\begin{aligned}&e^{2R}\left[2\frac{\partial^2 K_1}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial^2 K_2}{\partial\rho^2}-2L_1-2\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\left(\frac{\partial K_1}{\partial\rho}+\frac{\partial K_2}{\partial\rho}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)^2+3\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\frac{\partial R_2}{\partial\rho}-\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho^2}\right]\\ &+e^{2R_1}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1^2}-\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}-\frac{\partial R}{\partial\rho_1}\right)\right]\\ &+e^{2R_2}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_2^2}-\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}-\frac{\partial R}{\partial\rho_2}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.\tag{61}$$

Cette formule, où L_1 est défini par les équations (59), (60), constitue une condition nouvelle à laquelle doivent satisfaire les fonctions R, R_1, R_2. En permutant les indices dans les formules (59), (60), (61), on aurait deux autres conditions de même nature entre les mêmes fonctions.

131. Maintenant, toute difficulté relative à la fonction M a disparu. Nous avons à reprendre nos trois types de solutions, à exprimer que les valeurs correspondantes des fonctions R, R_1, R_2 vérifient l'équation (61) et les deux équations semblables. Si elles peuvent satisfaire à cette nouvelle et triple condition, il ne restera plus qu'à intégrer les six équations simultanées du second ordre, formant un système complet, auxquelles doit satisfaire la fonction M.

Appliquons cette méthode à nos trois types de solutions (49), (51) et (55). Pour le premier, on a

$$R_1 = R_2 = 0, \qquad K_1 = K_2 = 0.$$

Les valeurs de H, H_1, H_2 sont les suivantes

$$(62) \qquad H = \frac{1}{M}, \qquad H_1 = \frac{e^R}{M}, \qquad H_2 = \frac{e^R}{M}.$$

L'élément linéaire du système triple orthogonal correspondant est donné par la formule

$$(63) \qquad ds^2 = \frac{1}{M^2}[d\rho^2 + e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)].$$

La forme même de cette expression montre immédiatement que les surfaces de paramètre ρ sont des sphères ou des plans ; car on peut changer les variables ρ_1, ρ_2 en d'autres ρ'_1, ρ'_2 qui dépendent seulement de ρ_1, ρ_2 et obtenir, *d'une infinité de manières,* la relation

$$d\rho_1^2 + d\rho_2^2 = \lambda^2(d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2).$$

Par conséquent, les surfaces de paramètre ρ ont une infinité de systèmes de lignes de courbure et ne peuvent être, par suite, que des sphères ou des plans. On voit même que les autres surfaces les coupent suivant des lignes formant un système isotherme ou isométrique.

Ici l'équation (59) devient

$$L_1 - L_2 = 0$$

et donne

$$L_1 = f(\rho).$$

La condition (61) se réduit à la suivante

$$-2f(\rho)e^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0;$$

et comme R ne contient pas ρ, il faut que $f(\rho)$ soit une constante, ce qui donne, en désignant cette constante par $\frac{-C}{2}$,

$$(64) \qquad Ce^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Cette équation nous apprend (¹) que les surfaces dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

ont leur courbure constante et égale à C.

Supposons d'abord $C = 0$. Alors, en remplaçant ρ_1, ρ_2 par de nouvelles variables ρ'_1, ρ'_2 et, sans changer ρ, on pourra toujours ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2;$$

nous aurons, par suite, pour le système orthogonal formé avec les variables ρ, ρ'_1, ρ'_2 un élément linéaire dont l'expression sera

$$(65) \qquad ds^2 = \frac{1}{M^2}(d\rho^2 + d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2).$$

Or, nous avons vu (n° 96) que cette forme de l'élément linéaire ne peut convenir qu'au système formé de trois familles de plans rectangulaires et à ses transformés par inversion. Si l'on tient compte de la substitution opérée sur ρ_1, ρ_2, on voit que ce premier cas nous donne les *systèmes triples orthogonaux formés d'une famille de plans parallèles, de deux familles de cylindres isothermes,* et les systèmes qui en sont les transformés par inversion.

(¹) *Leçons sur la théorie des surfaces* (IIᵉ Partie, n° 499, p. 371).

132. Traitons maintenant le cas où la constante C est positive et égale à $\frac{1}{a^2}$. Alors on pourra ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

par un simple changement des seules variables ρ_1 et ρ_2, ce qui donnera, pour l'élément linéaire du système triple cherché, l'expression suivante

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(d\rho^2 + a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

ou, en remplaçant ρ par $a \log \rho$ et $M\rho$ par aN,

$$ds^2 = \frac{1}{N^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{66}$$

On reconnaît, dans la parenthèse, la forme de l'élément linéaire qui convient aux coordonnées polaires. Si l'on tient compte de la substitution effectuée sur les variables ρ_1, ρ_2, on voit que notre seconde hypothèse nous conduit aux *systèmes formés d'une famille de sphères concentriques, de deux familles de cônes isothermes* et à leurs transformés par inversion.

133. Enfin, supposons la constante C négative et égale à $-\frac{1}{a^2}$. On pourra alors ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2};$$

en remplaçant ρ par $a\omega$ et M par $\frac{aN}{y}$, on aura, pour le système orthogonal,

$$ds^2 = \frac{1}{N^2}(y^2 d\omega^2 + dx^2 + dy^2). \tag{67}$$

Cette forme convient au système de coordonnées semi-polaires constitué avec une famille de plans parallèles (de paramètre x),

avec une famille de cylindres de révolution (de paramètre y) et une famille de plans passant par une droite (de paramètre ω), ainsi qu'à ses transformés par inversion. En tenant compte du changement des variables ρ_1, ρ_2, on voit que nous obtenons ici *tous les systèmes triples formés d'une famille de plans passant par une droite, de deux familles de surfaces de révolution ayant cette droite pour axe et dont les méridiens forment dans le plan un système à la fois orthogonal et isotherme,* ainsi que leurs transformés par inversion.

134. Tels sont les résultats auxquels nous conduit l'étude de notre première solution. Envisageons maintenant la seconde, pour laquelle on a

$$R = a_1 - a_2, \qquad R_1 = a_2 - a, \qquad R_2 = a - a_1.$$

On peut prendre ici

$$K = -4a_1a_2, \qquad K_1 = -4aa_2, \qquad K_2 = -4aa_1,$$

et l'on a

$$L_1 - L_2 = -8a'^2(a_1 + a_2),$$

a' désignant la dérivée de a, ce qui permet de prendre

$$L_1 = -8a'^2 a_2 + f(\rho).$$

L'équation (61) à vérifier devient donc

$$\left\{\begin{aligned} &-4(a'' + a'^2)a_1 - 4(a'' - a'^2)a_2 + 4f_1(\rho) \\ &\quad + e^{4a_2 - 2a - 2a_1}(a_1'' + a_1'^2) - e^{2a + 2a_2 - 4a_1}(a_2'' - a_2'^2) = 0, \end{aligned}\right. \tag{68}$$

$4f_1(\rho)$ désignant une nouvelle fonction de ρ provenant de la réunion à $-f(\rho)$ de tous les termes qui ne dépendent que de ρ.

Si l'on prend la dérivée seconde par rapport à ρ_1, ρ_2, on trouve

$$a_2' e^{-2a} e^{4a_2} \frac{d}{d\rho_1} e^{-2a_1}(a_1'' + a_1'^2) + a_1' e^{2a} e^{-4a_1} \frac{d}{d\rho_2} e^{2a_2}(a_2'' - a_2'^2) = 0.$$

Comme la fonction a ne peut être constante, cette équation ne sera vérifiée que si les coefficients de e^{2a}, e^{-2a} sont nuls, ce qui donne

$$e^{-2a_1}(a_1'' + a_1'^2) = 4C, \qquad e^{2a_2}(a_2'' - a_2'^2) = 4C',$$

C et C′ étant des constantes. L'équation (68) devient donc

$$-(a'' + a'^2)a_1 - (a'' - a'^2)a_2 + f_1(\rho) + C e^{4a_2 - 2a} - C' e^{2a - 4a_1} = 0.$$

Prenant les deux dérivées du premier membre par rapport à ρ_1 et à ρ_2, nous trouvons

$$a'' + a'^2 = 4C' e^{2a - 4a_1},$$
$$a'' - a'^2 = 4C e^{4a_2 - 2a}.$$

Comme aucune des fonctions a, a_1, a_2 ne peut se réduire à une constante, il est évidemment impossible de satisfaire à ces conditions : donc *le second type de solution doit être rejeté.*

CHAPITRE IV.

RECHERCHE D'UN SYSTÈME PARTICULIER (SUITE). EXAMEN DU TROISIÈME TYPE DE SOLUTION.

Le troisième type de solution du problème que l'on a commencé à étudier dans le Chapitre précédent correspond aux valeurs suivantes

$$H = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h}(\rho - \rho_2)^{-h}}{M\sqrt{a}},$$
$$H_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^{-h}(\rho_1 - \rho)^{-h}}{M\sqrt{a_1}},$$
$$H_2 = \frac{(\rho - \rho_2)^{-h}(\rho_2 - \rho_1)^{-h}}{M\sqrt{a_2}}$$

de H, H_1, H_2. Dans ces formules, M désigne une fonction quelconque, h une constante, a_i une fonction de la seule variable ρ_i. En écrivant que les équations de condition données au Chapitre précédent sont vérifiées, on obtient les solutions suivantes. — Pour la première, on a $h = -\frac{1}{2}$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynomes identiques du 5^e^ degré ; ces hypothèses correspondent au système formé par les cyclides homofocales et à ses variétés. — La seconde solution correspond à l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynomes identiques du 3^e^ degré. — La troisième solution correspond à la valeur $h = 1$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynomes du second degré qui doivent satisfaire à l'identité

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

La quatrième solution correspond à la valeur $h = 2$; les fonctions a, a_1, a_2 se réduisent alors à des constantes dont la somme est nulle. — Remarques générales sur la manière dont on pourra déterminer la valeur de M correspondant à chaque solution. — Étude détaillée du cas pour lequel on a $h = 1$. — Le système correspondant est exclusivement formé de *cyclides de Dupin*. — On démontre qu'il est identique à ceux qui ont été étudiés au Livre I^er^, Ch. III. — Pour l'étude des systèmes qui correspondent aux valeurs $h = 2$, $h = \frac{1}{2}$ et qui n'apparaîtront pas, d'ailleurs, dans le Chapitre suivant, il est renvoyé à un Mémoire de l'auteur.

135. Il nous reste maintenant à étudier la troisième solution, celle qui est donnée par les formules (55) du Chapitre précédent. Comme, dans ces formules, a, a_1, a_2, qui ne dépendent respecti-