1. Aufgaben: 1) Definition von $\mathfrak{A}(B)$ für nur stetige $A(x)$.

   2) Folgt aus $F(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$, $F(G(x)) \underset{H}{\gtreqqless} 0$ auch $G(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$?

   3) desgl. für $G(F(x)) \underset{H}{\gtreqqless} 0$

   4) Für $\Im m\, x \gtrless 0$ mögen alle EWerte von $F(x)$ posit. Imag.-teil haben. Ist dann $F(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$?

2. Schreibt man einer Matrix $F(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$ vor $\operatorname{Ord} F(x) = 1$, $F(\infty) = \mathfrak{F}$ mit $\det \mathfrak{F} \neq 0$, die Polstelle $\pi \neq \infty$, die Nullstelle $\nu \neq \pi$, $\nu \neq \infty$, und den Eigenraum R zu π (d.h. das Residuum bis auf positiven skalaren Faktor), so ist diese Aufgabe dann lösbar (und dann eindeutig), wenn

$$\operatorname{sign} \mathfrak{F} = \operatorname{sign} \overline{\mathfrak{F}} + \operatorname{sgn}(\nu - \pi),$$

wobei $\overline{\mathfrak{F}}$ die durch Einschränkung von $\mathfrak{F}$ auf den zu R total senkrechten Raum entstehende Matrix ist.

Bei $\nu = \pi$ ist notw. u. hinr. $\begin{cases} \operatorname{Gr} \mathfrak{F} \geq 2 \\ \operatorname{sign} \mathfrak{F} = \operatorname{sign} \overline{\mathfrak{F}} \end{cases}$, doch ist jetzt der positive Faktor beim Residuum willkürlich.

3. Vermutung: Man kann einer pos. Matrixfunktion $F(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$ dadurch vorschreiben $\left\{\begin{array}{l} n \text{ einfache Pole samt Eigenräumen} \\ n \text{ einfache Nullstellen mit gewissen Lageeinschränkungen} \\ \text{und den speziellen Wert } F(a) \text{ an einer weiteren Stelle } a. \end{array}\right.$

$\varphi^*(L-1)^{-1}\varphi$ ist >0 (L Integraloperator 08?)

Mögliche Spektren und positive Funktionen

s. hierzu 99

1. Ein eigentliches Spektrum $\{\mu_\nu\}$ ist dann möglich, wenn es eine Matrix $F(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$ gibt mit $F(x) = -\dfrac{M_0}{x} - \dfrac{M_1}{x^2} - \dfrac{M_2}{x^3} + \{\{\tfrac{1}{x^4}\}\}$, deren Pole alle unter den μ_ν vorkommen (einschl. Vielfachheit).

2. desgl. dann, wenn es ein $\mathfrak{G}(x) \underset{H}{\gtreqqless} 0$ gibt mit $\mathfrak{G}(x) = xM_0 - M_1 - \dfrac{\Delta}{x} + \{\{\tfrac{1}{x^2}\}\}$, dessen Nullstellen alle unter den μ_ν vorkommen, mit $\Delta = M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1$.

3. Ist $\operatorname{Ord} C'(G - xE)^{-1}C < \operatorname{Gr} G$, so hat $\begin{pmatrix} xE - G & -C' \\ -C & x - P \end{pmatrix}$ einen von P unabh. festen EW $\neq$ EV.

4. $$\begin{vmatrix} xE-G & -B' & 0 \\ -B & xE-H & -Q' \\ 0 & -Q & xE-R \end{vmatrix} = |xE-G||xE-R|\,\Big|\underbrace{xE - B(xE-G)^{-1}B'}_{\underset{H}{\gtreqqless} 0 \text{ gegeben}} + \underbrace{[-H - Q'(xE-R)^{-1}Q]}_{\underset{H}{\gtreqqless} 0 \text{ willkürlich, regul. in } \infty}\Big|$$

$$= |xE - C(xM_0 - M_1)^{-1}C' + \mathrm{Pos}| \quad \text{mit } C'C = \Delta \quad (\text{vgl } 2)$$

5. Rationaler Bewertungsansatz mit $\begin{vmatrix} xE-G & -B' & 0 \\ -B & xE-H & -Q' \\ 0 & -Q & xE-R \end{vmatrix} = |xE-R|\cdot|P|\cdot|xE-G-P'BP|$ mit $P = xE-H-Q'(xE-R)^{-1}Q$

6. Notw. u. hinr. für Möglichkeit von $\{\mu_\nu\}$ ist jede der folgenden Bedingungen: Es gibt

$$\frac{M_0}{x} + \frac{M_1}{a^4 x^2} + \frac{M_2}{a^8 x^3} + \cdots \underset{H}{\lesseqgtr} 0$$

$$-xM_2 - x^2M_1 - x^3M_0 + \cdots \underset{H}{\lesseqgtr} 0$$

$$\frac{1-cx}{x}\,[M_0 + 2cM_1 + c^2M_2] + \left(\frac{1-cx}{x}\right)^2 [M_1 + cM_2] + \left(\frac{1-cx}{x}\right)^3 M_2 + \cdots \underset{H}{\lesseqgtr} 0$$

sing. nur auf $\{\mu_\nu\}$

Unzerlegbare Spektren (normale EWAufgaben). (f Freiheitsgrade)

1. Aufgabe: Gegeben $\dot A$, $\bar A$ mit Typ $A = (n, f)$ und $Rg(\bar\mu \dot A - \dot\mu \bar A) = f$ für alle $\dot\mu\bar\mu \neq 0,0$. Gesucht sind die (homogenen) Polynome $\det(\bar\mu \dot M - \dot\mu \bar M) \neq 0$ für diejenigen Paare vertauschbarer normaler Matrizen $\dot M, \bar M$, für welche gilt $\dot M \bar A - \bar M \dot A = 0$.

Def: Ist $\det(\bar\mu\dot M - \dot\mu\bar M) = \prod_{\nu=1}^{n} (\bar\mu\dot\mu_\nu - \dot\mu\bar\mu_\nu)$, so heisst $\{\mu_\nu\} = \{\dot\mu_\nu/\bar\mu_\nu\}$ ein „mögliches Spektrum" bei der „Vorgabe" $\dot A \bar A$: Zeichen $\{\mu_\nu\}$ mSpA.

2. Zu A und UAP ($U^*U = E$, $\det P \neq 0$) gehören die gleichen möglichen Spektren.

Bew.: $\dot B = U\dot A P$, $\bar B = U\bar A P$ gilt mit $\dot N = U\dot M U^*$, $\bar N = U\bar M U^*$

$\dot N \bar B = U\dot M \bar A P = U\bar M \dot A P = \bar N \dot B$ und $\det(\bar\mu\dot N - \dot\mu\bar N) = \det(\bar\mu\dot M - \dot\mu\bar M)$.

Sei $\binom{\dot B}{\bar B} = T\binom{\dot A}{\bar A}$, d.h. mit $T = \begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$, $\det T \neq 0$:

3. Zu $\dot B = \alpha\dot A + \beta\bar A$, $\bar B = \gamma\dot A + \delta\bar A$ gehören die Spektren $\binom{\dot\nu_\alpha}{\bar\nu_\alpha} = T\binom{\dot\mu_\alpha}{\bar\mu_\alpha}$

Bew.: Aus $\begin{vmatrix}\dot M & \dot A\\ \bar M & \bar A\end{vmatrix} = 0$ folgt $\left|\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot M & \dot A\\ \bar M&\bar A\end{pmatrix}\right| = 0$, also mit $\binom{\dot N}{\bar N} = \begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\binom{\dot M}{\bar M}$:

$\begin{vmatrix}\dot N & \dot A\\ \bar N & \bar A\end{vmatrix} = 0$; Setzt man $\binom{\dot\nu}{\bar\nu} = T\binom{\dot\mu}{\bar\mu}$, so wird $\det(\dot\nu\bar N - \bar\nu\dot N) = \det\begin{pmatrix}\dot\nu E & \dot N\\ \bar\nu E & \bar N\end{pmatrix} = |T|^n \det\begin{pmatrix}\dot\mu & \dot M\\ \bar\mu & \bar M\end{pmatrix}$, daher mit $\binom{\dot\nu_\alpha}{\bar\nu_\alpha} = T\binom{\dot\mu_\alpha}{\bar\mu_\alpha}$:

$\det(\dot\nu\bar N - \bar\nu\dot N) = |T|^n \cdot \prod_\alpha \begin{vmatrix}\dot\mu & \dot\mu_\alpha\\ \bar\mu & \bar\mu_\alpha\end{vmatrix} = \prod \begin{vmatrix}\dot\nu & \dot\nu_\alpha\\ \bar\nu & \bar\nu_\alpha\end{vmatrix}$; $\binom{\dot\nu}{\bar\nu}$ sind daher frei veränderlich.

Kurz: Zu $B = T(A)$ gehören die Spektren $\nu = T(\mu)$, wenn μ zu A gehört.

Hier ist überall $\dot\mu$ durch μ_1, $\bar\mu$ durch μ_2 zu ersetzen, $\dot A$ – A_1, $\bar A$ – A_2 bis 5) hin.

Besser: Alles waagerecht schreiben! $(\mu_1|\mu_2)$ usw.

4. Stimmen für zwei Vorgaben $(\dot A\, \underline{A})$, $(\dot B\, \underline{B})$ die „Normenformen"

$M_A = (\underline{\mu}\dot A - \dot\mu\underline A)^*(\underline\mu\dot A - \underline A\dot\mu) = (\underline\mu\dot B - \dot\mu\underline B)^*(\underline\mu\dot B - \dot\mu\underline B)$ identisch in $\dot\mu, \underline\mu$ überein, so gehören zu ihnen die gleichen Spektren (wenn sie in n übereinstimmen).

Bew: $(\underline\mu, \dot\mu) = (1,0)$: $\dot A^*\dot A = \dot B^*\dot B$

$(\underline\mu,\dot\mu) = (0,1)$: $\underline A^*\underline A = \underline B^*\underline B$

$(\quad) = (1,1)$: $\dot A^*\underline A + \underline A^*\dot A = \dot B^*\underline B + \underline B^*\dot B$

$(\quad) = (1,i)$: $\dot A^*\underline A - \underline A^*\dot A = \dot B^*\underline B - \underline B^*\dot B$

$\begin{pmatrix}\dot A^*\dot A & \dot A^*\underline A\\ \underline A^*\dot A & \underline A^*\underline A\end{pmatrix} = (\cdots B \cdots)$ also $(\dot B\,\underline B) = U(\dot A\,\underline A)$; (2)

5. Sind für zwei Vorgaben die Normenformen äq.: $M_B = P^* M_A P$, $\det P \neq 0$, so gehören zu A und B dieselben Spektren. (2)

6. Die EWAufgabe ist gegeben durch Angabe (bis auf ψ-Äquivalenz) der vollständigen Normenform

$$N(A|\mu,\psi) = \psi^*(\mu_1A_2 - \mu_2A_1)^*\cdot(\mu_1A_2 - \mu_2A_1)\psi$$

mit $\psi = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_f\end{pmatrix}$.

Die Normenform ist (pos.) bihermitisch und definit: Aus $N(A|\mu,\psi) = 0$ folgt $(\mu_1,\mu_2) = (0,0)$ oder $x_1 = \dots = x_f = 0$.

d.h. aus $N = 0$ folgt $\sum^2 \mu_i^2 \cdot \sum^f x_\varphi^2 = 0$.

7. Ist $\Phi(\mu,\psi)$ eine bihermitesche Form (d.h. bihomogen in $\mu,\bar\mu,\psi,\bar\psi$ und stets reell), die pos. definit ist, so gibt es zu Φ als Normenform nicht stets ein mögliches Spektrum. z.B. ist $(|\mu_1|^2+|\mu_2|^2)(|x_1|^2+|x_2|^2) + a\mu_1\bar\mu_2 x_1\bar x_2 + \bar b\bar\mu_1\mu_2 x_1\bar x_2 + \bar a\bar\mu_1\mu_2\bar x_1 x_2 + b\mu_1\bar\mu_2\bar x_1 x_2$ pos. def. für $|a|+|b|<2$,

1. Jede Normenform ist volldefinit in dem folgenden Sinne:

 a) definit: Aus $|\mu_0|^2 |\mu_1|^2 \neq 0$ folgt $\Phi > 0$.

 b) Ist $\Phi = \mu_0\bar\mu_0 \, M_0 + \mu_0\bar\mu_1 \, M_1 + \bar\mu_0\mu_1 \, M_1^* + \mu_1\bar\mu_1 \, M_2$ mit hermiteschen, so ist $\begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix}$ nichtnegativ hermitesch.

 Bew: $= (A_0 A_1)^*(A_0 A_1)$.

2. Zu jeder volldefiniten bihermiteschen Form Φ gibt es als Normenform ein mögliches Spektrum. Bew: sei $\Phi = \mu_0\bar\mu_0 M_0 + \mu_0\bar\mu_1 M_1 + \mu_1\bar\mu_0 M_1^* + \mu_1\bar\mu_1 M_2$, so ist $\begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix} = (A_0 A_1)^*(A_0 A_1)$ lösbar nach $A_0 A_1$. f z. B. für $f = n$

Für Existenz eines selbständ. Spektrums zu $M_0 M_1 M_2$ ist notw. Bedingung: $M_1 = M_1^*$.

3. $\{\mu_\nu^{(\nu)}\}$ sei ein eigentl. Spektrum ($\neq \infty$). Genau dann ist $\{\mu^{(\nu)}, \infty^r\}$ $\overbrace{\text{m. Sp.}}^{\text{mögl. Spektrum bei}}$ (M_0, M_1, M_2), wenn es eine Hermitesche Matr. $R \geq 0$ vom Rg $\leq r$ gibt, sodass $\{\mu_\nu\}$ m. Sp. $(M_0, M_1, M_2 - R)$.

4. Ngb dafür, dass $\{\mu_\nu, \infty^r\}$ $\overset{\text{selbständ.}}{\text{m. Sp.}}$ $(M_0 M_1 M_2)$ ist, ist die Existenz einer Matrix $F(x) = xM_0 - M_1 - \frac{\Delta - R}{x} + \{\{\tfrac{1}{x^2}\}\} \underset{H}{\geq} 0$, welche genau die $\mu^{(\nu)}$ als Nullstellen hat.

5. Sonderfall von 4: Diejenigen selbständ. Spektren $\{\mu^{(\nu)}\}$, die zusammen mit ∞^f m. Sp. $(M_0 M_1 M_2)$ sind, sind die Nullstellen der

$$F(x) = xM_0 - M_1 - \frac{D}{x} - \{\{\tfrac{1}{x^2}\}\} \underset{H}{\geq} 0 \quad \text{mit } 0 \leq D \leq \Delta = M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1$$

6. Ngb dafür, dass $\{\mu^{(\nu)}\}$ als Normales Spektrum mit $(A_0 A_1)$ verträglich ist, ist: Für jede Hermitesche Matrix $V = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 \\ V_1^* & V_2 \end{pmatrix}$ für welche

$$|\mu_0|^2 V_0 + \bar\mu_0\mu_1 V_1 + \bar\mu_1\mu_0 V_1^* + |\mu_1|^2 V_2 \geq 0$$

ausfällt auf dem ganzen Spektrum $\{\mu^{(\nu)}\}$, ist Sp $V^*(A_0 A_1)^*(A_0 A_1) \geq 0$.

Bew.: 7)

7. Ngb dafür, dass ein Element C eines Banachraums dem von einer vorgegebenen endlichen Basis $\mathfrak{B}$ erzeugten +Modul angehört, ist: jedes auf $\mathfrak{B}$ nichtnegative Funktional [redacted] ist auch auf C nichtnegativ. Vorsicht: vgl. 157

(Anwendung auf $\mathfrak{B}$ = Gesamtheit der $\begin{pmatrix} |\mu_0|^2 & \bar\mu_0\mu_1 \\ \bar\mu_1\mu_0 & |\mu_1|^2 \end{pmatrix} \times P$, $P \geq 0$, $C = (A_0 A_1)^*(A_0 A_1)$.

8. Sei Rg $(\beta_0 A_1 - \beta_1 A_0) = f$. Dann sind die f (von selbst von $(\beta_0 \beta_1)$ verschiedenen) Nullstellen von $\det [\mu_0 A_1 - \mu_1 A_0]^*[\mu_0 A_1 - \mu_1 A_0] = 0$ zusammen mit f-mal (β_0, β_1) ein m. Sp. $(A_0 A_1)$ im selbständ. Fall.

 Bew: durch Transf. $\beta_0 = 0$ annehmen.

 $f = 2$: Doppelwurzel bei 103, 3 $\times$ nur wo linke Matrix $= 0$ ist.

9. Ist ein eigentl. Spektrum ($\neq \infty$) möglich, so nur bei $\det A_0 \neq 0$, und dann sogar bei $A_0 = E$. (Bei vorgegebenem Ansatz $(A_0 A_1)$.)

1. Für jede Matrizen M_0, M_1, M_2 gilt

$$\mu\nu M_0 - (\mu+\nu) M_1 + M_2 = (\mu M_0 - M_1) M_0^{-1} (\nu M_0 - M_1) + (M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1).$$

2. Ist $(A_0 A_1)^*(A_0 A_1) = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix}$, Rg A_0 voll, so ist $\Delta = M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1 \geqq 0$.

4 Beweise: a) $U A_0 P = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$ annehmen

b) $\Delta = A_1^* (\underbrace{E - A_0 (A_0^* A_0)^{-1} A_0^*}_{\text{idempotent und hermitesch}}) A_1$

c) $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -M_1^* M_0^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -M_1^* M_0^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$

das liefert sogar eine allgemeinere Aussage über Sign Δ.

d) $\Delta = C^* C$ mit $C = A_1 - A_0 M_0^{-1} M_1$.

3. Nsb dafür, dass zwei ~~nullsymmetr.~~ hermitesche Matrizen A, B (mit $\det(xA + yB) \neq 0$) simultan auf ~~Diagonale~~ Quadratsumme zu transformieren sind, ist die Realität und Linearität der primären Elementarteiler von $xA + yB$.

Bew: sei $T^{-1} A^{-1} B T = D$ diagonal. Dann ist für $A_1 = T' A T$, $B_1 = T' B T$

$A_1^{-1} B_1 = D$ symmetr., also A_1 vertauschbar mit B_1, also simultan transf.bar.

4. Kennt man bei einer EWaufgabe $(\lambda A - B) q = 0$ ($A^* = A$, $B^* = B$) nur ein q samt Aq und Bq, so folgt kein Einschliessungssatz: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\mu\nu+ \end{vmatrix} = -(\lambda^2 + \nu\lambda + \mu)$.

Auch die Bedg., dass eine (unbekannte) Linearverbindung $\gg 0$ sein soll, nützt nicht viel: Wählen wir $\mu = 0$, $\nu = -k^2$, dann sind $\pm k$ die EWe. Es gibt genau zwei Einschl.-Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

Vermutete Erfahrungen an den selbstadjung. Fall mit f Freiheitsgraden:

1) Jedes maximale offene Ausschliessungsgebiet besteht aus höchstens f Intervallen, und die Intervallendpkte bilden ein (bei Zählung der Vielfachheiten) m. fs. von $2f$ Zahlen. *s.u.

2) der grösste offene Bereich, in dem eine Nullmatrix $V_0 + V_1 x + V_2 x^2$ mit fs $\Sigma V_i M_i = 0$ pos. semidefinit ist, ist ein Ausschliessungsbereich.

3) Ist $(\mu^{(\nu)})$ ein Mögl.-sys. $(A_0 A_1)$, und zwar mit Diagonalmatrizen ~~M~~, und zwar bei $\mu E - \begin{pmatrix} G & C^* \\ C & P \end{pmatrix}$, so sind die Zeilen von A_0 die ~~ersten f~~ * von den f-Abschnitten der EVektoren q von $\begin{pmatrix} G & C^* \\ C & P \end{pmatrix}$: $q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Sie genügen der (freilich nicht hermiteschen)

Gl. 2. Grades $\{ E - C^{-1}(xE - P) C^{*-1} (xE - G) \} u = 0$ (*)

der hermiteschen des Grades 2 $(xE - G) \cdot \{ \}$ wenn $C = C^*$ (+)

und der hermiteschen Gl. d. Grades $f+1$

$$\{ |\mu E - P| \cdot (\mu E - G) - C^* \widehat{(\mu E - P)} C \} u = 0 \quad **$$

$\text{Sign} \{ \} = \text{sign} |\mu E - P| \cdot \left[\text{sign} \begin{pmatrix} xE - G & C^* \\ C & xE - P \end{pmatrix} - \text{sign}(xE - P) \right]$

4) Bei $f = 2$ ist ein Spektrum aus 4 Zahlen dann möglich, wenn die (Linkeseite von) Gl. (2*), mit einer passenden (konstanten) Links-multipl. hermitesch gemacht, in allen Nullstellen $\gg 0$ ausfällt. D.h. für variables μ soll sie die Signatur 2 0 2 0 haben, aber nicht 2 0 · 2 0.

Rezept: * u. ** mit ~~n~~ abhängigen Matrizen ... Fortsetzung 109 (2)

* Auf unmöglichen Spektren semidefinite Nullmatrizen V achten! gilt etwas für Rg R_1

109

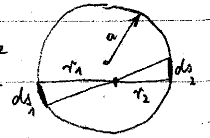
1) Vorgegebene Momente $M_0 M_1, M_2 M_3$ treten auf bei

$$\det\left(x\begin{pmatrix} M_0 + M_1 \\ M_1 \quad M_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{, oder}$$

$$\begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \\ M_1 & M_2 & xE \\ M_2 & M_3 & x^2E \end{vmatrix} = 0 .$$

2) Multipl. man 108 3* von links mit $(x-\bar{x})(C^{-1}PC) + A$ $(A = C^*C)$, so erhält man eine hermitesche kubische Gl. für $\bar{u}$ mit dem Leitglied $x^3 \cdot C^{-1}PC^{*-1}$. Ist also $C^{-1}PC^{*-1}$ von A^{-1} und E linear abhängig, so erhält man mit Hilfe von 3(*) und (**) eine quadratische hermitesche Gl. für $\bar{u}$! Das gibt wohl eine 2-parametrige Schar von Einschließungssätzen.

3) Potential eines gleichmässig belegten Kreises



A. Innen: Die Kraft auf einen Massenpunkt ist 0, da $\frac{ds_1}{r_1} = \frac{ds_2}{r_2}$

B. Aussen: $\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \log\left((r - a\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \cdot a^2\right) a\,d\varphi$

$$= 2\pi a \log r + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \log\left(\left(1 - \frac{a}{r}\cos\varphi\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}\sin^2\varphi\right) a\,d\varphi$$

$$\int = \frac{1}{2}\int \log\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\varphi + \frac{a^2}{r^2}\right) a\,d\varphi = \frac{a}{2}\int \log\left(\left(\frac{a}{r} - \cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi\right) d\varphi = 0 \text{ nach A}$$

FRAGE: Gibt es bei nicht selbstadjungierten Aufgaben eine adjungierte Methode?

110

1) $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,dx = n! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$

2) $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{e^x-1}\,dx = -\frac{1}{2t} + \frac{\pi}{2}\operatorname{Cotg} \pi t$

3) C. Schmiedens Weg: $\int_0^\infty \frac{x^3 + 4\pi^2 x}{e^x - 1}\,dx = \int_0^{2\pi i} + \int_{2\pi i}^{\infty} = \int_0^{2\pi} \frac{y^3 - 4\pi^2 y}{e^{iy} - 1}\,dy + \int_0^\infty \frac{(x+2\pi i)^3 + 4\pi^2(x+2\pi i)}{e^{x+2\pi i} - 1}\,dx$

Da $\int_0^\infty \cdot\cdot$ reell, ist es weiter $= \int_0^{2\pi} \frac{y^3 - 4\pi^2 y}{1} \cdot \Re \frac{1}{e^{iy}-1} \cdot dy$

$$+ \int_0^\infty \frac{x^3 - 12\pi^2 x + 4\pi^2 x}{e^x - 1}\,dx$$

Nun ist $\Re \frac{1}{e^{iy}-1} = -\frac{1}{2}$ (Kreisverwandtschaft), daher

$$\int_0^\infty = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (y^3 - 4\pi^2 y)\,dy + \int_0^\infty - 12\pi^2 \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1}$$

Also $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{1}{24\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} (4\pi^2 y - y^3)\,dy = \frac{8\pi^4 - 4\pi^4}{24\pi^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Ähnlich $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1}$ z.B. aus $\int_0^\infty \frac{x^3(x^2 + 4\pi^2)}{e^x - 1}\,dx$ usw.

[C. Schmieden selbst hatte $\int \frac{x}{e^x-1}\,dx$ aus $\int \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$ berechnet und den Pol bei $2\pi i$ durch Viertelkreis nach rechts umgangen.]

Allgemeine algebraische Eigenwertaufgaben $(\beta A - \alpha B)\mathfrak{z} = 0$.

Aufgabe „regulär", wenn Matrizen □ [und die Determinante $\not\equiv 0$ ist und für jeden Teilraum $\mathfrak{R}$ eines Ranges r $(1 \leq r \ldots n)$ der Rang des „Bildraums" $\mathfrak{S}\mathfrak{R}$ (= direkte$^{(\alpha,\beta)}$ Summe aller $(\beta A - \alpha B)\mathfrak{R}$) stets $\geq r$ ist].

$\mathfrak{R}$ heisst Eigenraum, wenn $R_g\, \mathfrak{S}\mathfrak{R} = R_g \mathfrak{R}$. Eigenräume der Dimension 1 sind gewöhnliche Eigenlösungen: $S\mathfrak{v} = 0$ für genau ein $S = \beta A - \alpha B$ (bis auf Proportionalität).

$\mathfrak{b}$ ist Hauptvektor ≤ 2. Stufe zu S, wenn $S\mathfrak{b} \subset \mathfrak{S}\mathfrak{v}$ mit $S\mathfrak{v} = 0$.

$\mathfrak{r}$ " Hauptvektor ≤ 3. Stufe zu S, wenn $S\mathfrak{r} \subset \mathfrak{S}\mathfrak{b}$, $S\mathfrak{b} \subset \mathfrak{S}\mathfrak{v}$, $S\mathfrak{v} = 0$.

Die Eigenvektoren zu S bilden einen lin. Raum $\mathfrak{n}_1$. Ist R lin. unab. von S, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{n}_1 = R\mathfrak{n}_1$, daher bilden die Hauptvekt. der Stufe ≤ 2 [mit $S\mathfrak{b} \in R\mathfrak{n}_1$] einen lin. Raum $\mathfrak{n}_2$. Es ist $\mathfrak{S}\mathfrak{n}_2 = R\mathfrak{n}_2$, daher bilden die Hauptv. der Stufe ≤ 3 [mit $S\mathfrak{r} \subset R\mathfrak{n}_2$] einen lin. Raum $\mathfrak{n}_3$.

Aus $\mathfrak{S}\mathfrak{n}_\nu = R\mathfrak{n}_\nu$ folgt, dass $\mathfrak{n}_\nu$ ein Eigenraum ist. Die Vereinigung $\sum_\nu \mathfrak{n}_\nu(S)$ heisst der Hauptraum $\mathfrak{f}(S)$. Und zwar ist $\mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{n}_\nu(S)$, wenn $[R^{-1}S\cdot]^\nu \mathfrak{b}_\nu = 0$, wobei R irgend eine nichtsinguläre Matrix aus $\mathfrak{S}$ ist. (Auf die Wahl von R kommt es nicht an!)

Allgemeinste Formulierung (mehrparametriger) linearer „Eigen"aufgaben:

Gegeben sind drei lineare Räume $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und eine bilineare Funktion auf $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ mit Werten aus $\mathfrak{T}$: $RS = T$.

S heisst Eigenlösung zu R (und umgekehrt), wenn $RS = 0$, $R \neq 0$, $S \neq 0$.

[im obigen Fall ist $\mathfrak{R}$ die 2parametrige Matrizengesamtheit $\beta A - \alpha B$; $\mathfrak{S}$ ist der Raum der $\mathfrak{z}$].

vgl. 158

Metrikfreie Eigenwerttheorie und Funktionalanalysis.

In einem linearen Raum A seien beschränkte Folgen definiert. $a_n \equiv a$ sei beschränkt. Def.: φ heisst Funktional auf A, wenn für jedes $a \in A$ eine Zahl φa erklärt ist, sodass 1) $\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)$ und

2) φa_n beschränkt, wenn a_n beschränkt.

(1) Def. Folge φ_n beschränkt, wenn $\varphi_n a_n$ beschränkt für jede beschr. Folge a_n (ist also eine Art gleichmässiger Beschränktheit.) Damit gilt in vielen Fällen: die Topologie in A ist dieselbe, wenn man A als Funktionalraum auf Φ betrachtet und durch naturgemässe Anwendung von (1) topologisiert.

Dazu ist notwendig:$^{(2)}$ aus der Beschränktheit von $\varphi_n a_n$ für jede beschränkte Folge φ_n folgt die Beschr. von a_n selbst.

Diese Bedg. (2) dürfte im Hilbertraum und den üblichen Banachräumen erfüllt sein; allgemein dann, wenn es zu jedem Element a mit $|a| = 1$ ein Funktional φ mit $|\varphi| \leq 1$ und $(\varphi a) \geq \frac{1}{2}$ gibt. (gilt (1) doch sicher nämlich)

Gilt also (2), so kann man A topologisch in den zu Φ adjungierten Raum Ψ einbetten, d.h. besser von vornherein diesen betrachten. Es ist dann Φ zu Ψ adjungiert und umgekehrt. $X = \Phi + \Psi$ dürfte selbstadjungiert sein: Es gibt zu jedem Funktional auf X ein Element von X, das ihm eineindeutig zugeordnet ist: $(\varphi, \psi) \leftrightarrow (\psi_0, \varphi_0) = \chi_0$ mit $\chi_0(\varphi, \psi) = \varphi_0\chi + \chi_0\varphi$

- Bei endlicher Dimension von A [illegible] zu normalen Operatoren M ähnlichen gekennzeichnet dadurch, dass aus „$(M - \mu E)^2 a_n$" beschränkt folgt, $()a_n$ [illegible]

Vollstetigkeit eines Operators auf A könnte erklärt werden durch gleichm. s. 115 Approximierbarkeit? durch Operatoren endlichen Ranges.

Der obige „Paarraum" („kanonische Raum"?) X ist nicht selbstadjungiert [aber im Gegensatz zu [illegible] nicht definit selbstadjungiert, d.h. es kann $(x, x) \gtrless 0$ sein], d.h. es gibt eine ~~topologische~~ lineare Abbildung T von X auf seinen adjungierten Raum. Vollstetigkeit eines Operators soll nur von Topologie abhängen, Selbstadjungiertheit nur vom inneren Produkt (das auch indefinit sein darf).

05 – Schon jede Abb. von A in Φ linear ergibt eine Metrik in A.

*Aufbau einer Theorie von $AX = \lambda BX$, A, B hermitesch in bezug auf eine indefinites inn. Prod. ~~[illegible]~~ A zugleich vollstetig:

1) Theorie vollstetiger ~~[illegible] auf einer definiten Metrik~~ Op. K (Hilbertraum) $\neq 0$

2) Ist Metrik semidefinit, so sei $\mathfrak{N}$ der Raum mit $(\bar{N}, N) = 0$, $\bar{X}$ werde Differenzraum $X - \mathfrak{N}$. In $\bar{X}$ ist Metrik definit, also EW-Theorie nach 1)

Ist $K\bar{X} = \lambda \bar{X}$, so ist $KX = \lambda X + N$, entweder ist nun

(3) $KM = \lambda M + N$ lösbar mit $M < \mathfrak{N}$,

dann auch $KY = \lambda Y$ lösbar: $Y = X - M$. Oder (3) ist unlösbar, dann ist $K\mathfrak{N} = \lambda \mathfrak{N}$ zu lösen. [illegible] EV, wenn nicht $K\mathfrak{N} < \mathfrak{N}$.

Unwichtig (?):

3) Ist $\lambda = 0$ kein EW, so ist $K = A^{-1}B$ vollst. und hermitesch in bezug auf die semidefinite Metrik $(X, BY) = [X, Y]$.

4) Hierin könnte die Theorie von Beiss [183] stecken: der verlangt bei $\dot{X} = \lambda BX$, dass es eine konstante Matrix T gibt mit $TB + B^*T = 0$, $|T| \neq 0$ und $TB = H^2 \geqq 0$ hermitesch. Dann gibt es aber auch konstante hermitesche Matrix S mit $|S| \neq 0$, ($SB + B^*S = 0$ und) $S \cdot iB = H^2 \geqq 0$

also ist dann $i\frac{d}{dx}$ und iB hermitesch für $[X, Y] = (X, SY)$,

und $iB \geqq 0$ in dieser Metrik.

5) Auch Hölders Theorie sollte darin stecken: $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

s. V 86 wobei in [184] in Kap. I $A = A^* \geqq 0$, $C = C^* \geqq 0$ vorausgesetzt wird, in Kap. II nur $C \geqq 0$.

6) Anordnung [184] von Beiss in Hölder: $\dot{X} = (A + \lambda B)X$: $X = TY$; $\dot{Y} = (A^* [illegible])$

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B^*T^{-1} & 0 \\ 0 & BT \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad x = \lambda \Xi \quad \sqrt{\ }!$$

Beiss setzt voraus $BT = T^*B^* \geqq 0$, $BT + TB^* = 0$ ... $B^*T^{-1} = +T^{*-1}BT \cdot T^{-1} \geqq 0$

Da bei Hölders Theorie die Grundmatrix definit, ist dadurch wie auch Beiss' Problem in eins verwandelt bei dem der Op. selbstadj. in bezug auf eine definite (und einer semidefinit) Matrix.

Allgemeine Formulierung selbstadj. EW-Probleme von Variationsrechnung:

Geg. zwei (hermitesche) quadratische Formen (y, y) & $[y, y] = (-2)$, sodass aus $(y, y) = [y, y] = 0$ folgt: $y = 0$.

Suche Stellen mit $\begin{vmatrix} \delta(\ ) & \delta[\ ] \\ (\ ) & [\ ] \end{vmatrix} = 0$.

Es gibt eine eindeutig bestimmte stärkste Topologie, in der (y, y) und $[y, y]$ stetig sind: $y_n \to y$ heisst $(z + y_n, z + y_n) \to (z + y, z + y)$ für jedes z, ebenso [ ].

Simultane Zerfällung von ( ) und [ ]?

Nach Beiss kein Unterfällbarkeit ?

Vollstetige Operatoren in C-Räumen: vgl. auch 120

Def.: C-Raum = linearer Konvergenzraum, in dem 1) das Cauchysche Konvergenzkriterium gilt und 2) aus $a_n \square$ ($a_n \in$ C-Raum), ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\sum_{\nu_n=1}^{N_n} |g_{\nu_n}|$ ~~[illegible]~~ folgt $\sum_{\nu_n=1}^{N_n} g_{\nu_n} a_n$ ~~[illegible]~~

Def.: $a_n \square$, wenn aus $\varepsilon_n \to 0$ folgt $\varepsilon_n a_n \to 0$.

Dann gilt: Aus $\sum |g_n| < \infty$ und $a_n \square$ folgt die Kgenz von $\sum g_n a_n$.

z.B. der Funktionalraum jedes B-Raums (in welchem beschränkte Folgen „$a_n \square$" erklärt sind, mit „$a_n \square$") ist ein C-Raum. [Gibt es zu jeder Folge $a_n \not\to 0$ eine beschränkte Funktionalfolge a_n^* mit $a_n^* a_n \not\to 0$, so ist A topologisch in A^{**} eingebettet.)

Def.: Operator M auf A ist eine Abb. von ganz A in sich, linear, die aus $a_n \to 0$ stets $Aa_n \to 0$ macht.

Def.: M_n heißt beschränkt, „$M_n \square$", wenn aus $a_n \square$ folgt $M a_n \square$.

" M heißt vollstetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Operator E endlichen Ranges gibt, für den $\left(\frac{M-E}{\varepsilon}\right)^n \square$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Satz: Ist M vollstetig, so hat $(1-M)x = 0$ ~~nur endl.~~ viele Lösungen linear unabh. ~~Ist keine~~ ~~Lsg. $\neq 0$, wenn für $a \neq 0$ $(1-M)y = a$ unlösbar.~~ ~~[illegible]~~

Ist ~~jedes~~ ~~[illegible]~~, so hat $(1-M)y = a$ f. jedes a genau eine Lsg.

Bew. mit Abspalten: $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{M-E}{\frac{1}{2}}\right)^n \square$, $M = E + N$, $\left(\frac{N}{\frac{1}{2}}\right)^n \square$. für N Kgiert Neumannsche Reihe.

Satz: Ist M vollstetig, so häufen sich die Eigenwerte λ mit $(1-\lambda M)x = 0$, $x \neq 0$ nicht im Endlichen. Bew.: In $|\lambda| < r$ nur endl. viele, denn zerlege $M = E + N$ mit $(2r N)^n \square$; $\sum \lambda^n N^n$ kgt für $|\lambda| < r$.

Ist M vollstetig und $(1-M)x = 0$ nur $x = 0$, so gibt es einen lösenden Op. M' mit

$$(1-M)(1-M') = (1-M')(1-M) = 1.$$

Aus der Stetigkeit Beschränktheit folgt die Differenzierbarkeit der Resolvente in λM, und daraus wird funktionentheoretisch die Kgenz von $\sum \lambda^n M^n$ im größten EW-freien Kreis folgen.

[Die Forderung 4: „Zu jeder Folge a_n ohne Nullen gibt es eine proportionale beschränkte, die keine Nullfolge ist" ~~[illegible]~~ wäre einschneidend; z.B. im Raum der Folgen $(c_1 c_2 c_3 \dots)$ wo Kgenz koordinatenweise definiert ist, stimmt die Ford. 3 nicht. Wähle

$$a_n = \{1^n, 2^n, 3^n, \dots\}.$$

]

Frage: Ist die Summe zweier vollstetiger Op. wie. vollstetig?

Bei der Übertragung von Operatoren von A auf A^* bleibt Beschränktheit und Rang erhalten, daher auch Vollstetigkeit.

Kann man von einem vollstetigen Operator M einen endl. Rges E abspalten, dass der Rest $N = M - E$ völlig eigenwertfrei wird im Endl., sodass die ~~Neumannsche Reihe überall~~ ~~[illegible]~~ Resolvente ganz in λ ist für $1-\lambda N$, so kann man eine ganze transzendente Determinante $\Delta(\lambda)$ vom n Reihen angeben, deren Nullstellen die EWe sind, sowie ein Fundamentalsystem des Rges n, ~~aus dem~~ unabhängig sich die Elem. ~~[illegible]~~ zusammensetzen.

Eine Schwierigkeit für die Funktionentheorie in allgemeinen C-Räumen scheint darin zu bestehen, dass aus der Stetigkeit nicht unmittelbar auf die Beschränktheit einer Funktion $a(z)$ zu schliessen ist. Gibt es aber genügend viele Funktionale, so gehts: jedes Funktional $b^*(a(z))$ hängt stetig von z ab, ist also beschränkt.

Die Schwierigkeit verschwindet durch Vor 3 über C-Räume:

V_3: Jede Folge $a_n \not\to 0$ enthält eine Teilfolge, die 0 nicht als Häufungspunkt besitzt. d.h. Wenn jede Teilfolge eine Nullfolge enthält, ist sie eine Nullfolge

Def: $a_n \to \infty$, wenn keine Teilfolge von a_n beschränkt ist.

Unter V_3 enthält jede unbeschränkte Folge eine Teilfolge $\to \infty$

Da $a_n \to \infty$ Widerspruch gegen $a_n \to a$, ist ~~...~~ unter V_4 jede auf einer kompakten Menge stetige Funktion mit Werten aus dem C-Raum A beschränkt.

Durch V_3 ist bei dem Funktionalraum jedes B-Raums von selbst erfüllt (ebenso wie Schritte von S. 116).

[illegible]

Frage: Bilden die stetigen Homomorphismen eines B-Raums in einen C-Raum selbst einen C-Raum? ~~Arbeite bequemer mit B-Räumen?~~

~~[B3] Ist $F_1, F_2, \ldots$ ein abzählbares System von Nullfolgen F_n, so kann man aus F_n ein Element so wählen, dass ... Gesamtheit a_n □.~~

Axiome für B-Räume (Beschränktheitsräume):

Linearer Raum A, in dem Teilmengen als beschränkt definiert sind, sodass

1) ~~die Menge a allein (ein Element) ist □~~: aus $a_n \to a$ folgt a_n □.

2) ~~A' □ enthält jede unendl. Teilfolge von a_n eine beschränkte unendliche Teilfolge, so ist a_n □.~~

B 2) Enthält jede Teilmenge von A', die unendlich viele verschiedene Punkte enthält, eine ebensolche beschränkte Teilmenge, so ist A' □.

D.h. jede unbeschränkte Menge enthält eine unendliche Folge verschiedener ..., von denen keine Teilfolge beschränkt ist.

B 1) Ist A' beschränkt, so ist jede Linearverbindung von Elementen aus A' mit einer Koeff.-absolutsumme $\leq c$ auch beschränkt. ($c \geq 0$ beliebig)

Aus 1) folgt: jede endl. Menge ist beschränkt; sind A' und A'' □, so auch ihre Vereinigung. nun folgt 2): auch A'+A'', d.h. Gesamtheit der a'+a'', ist □.

~~Jede Teilmenge einer beschr. Menge ist beschränkt.~~ Ist A' □, A''∈A, so auch A'' □ (2)

Axiom B 3) ~~...~~: Die Häufungspunkte einer □ Menge sind eine □ Menge

~~Satz~~ Sind A und $\bar{A}$ B_{12}-Räume, so ist die Gesamtheit der beschränkten linearen Abb. von A in $\bar{A}$ wieder ein B_{12} Raum.

Man nenne dazu eine Gesamtheit σ von solchen Abb. □, wenn aus A' □ folgt: σA' □.

Vorsicht: Hier könnte man beschränkte Mengen in einem Teilraum definieren, alles andere als unbeschränkt.

NB: „B_{12}-Raum" = Raum mit B_1 und B_2

In B_1-Räumen definiert sich die Konvergenz $a_n \to 0$ so: es gibt Zahlenfolge $g_n \to \infty$ mit $g_n a_n$ □.

Die Z-Räume entstehen, wenn man bezüglich dieser Konv. das Cauchy-Kriterium bequem fordert, und zwar in der folgenden scharfen Form:

V | Gibt es zu der Folge a_n eine Zahlenfolge $g_n \to \infty$ sodass die Vereinigung der Mengen $g_p\{a_p - a_q\}_{p<q}$ □ ist, so gibt es ein a mit $g_p(a_p - a)$ □.

Gilt V, so heißt A abgeschlossen.

Satz: ~~Die~~ Vervollständigung eines B_1-Raumes[1] in einem abgeschlossenen B_3-Raum $\bar{A}$ ist ein abgeschlossener B_3-Raum.

Bew: Sei $K_p \in A \subset \bar{A}$, $\bar{A}$ abgeschlossen.

Sei $g_p \to \infty$, $g_p(K_p - K_q)$ □ $(p<q)$

Sei a_n □, und (x) $g_p(K_p - K_q)a_n$ □ $(p<q, n)$

daher ~~$g_p(K_p K_q$~~

$g_p(K_p a_n - K_q a_n)$ □ $(p<q)$

und nach V $g_p(K_p a_n - K a_n)$ □ (p) für ein $K a_n \in \bar{A}$.

Da $K a_n$ Häufungspunkt von $K_p a_n$ (p,n) und $K_1 a_n$ □ und $g_1(K_1 - K_q)a_n$ □, also $K_q a_n$ □ ist nach B_3) auch $K a_n$ □, also K Operator.

Nun zeigt (x), dass, da $g_p(K_p - K)a_n$ Häufungspunkt

1) Es brauchen wohl überhaupt nur beschränkte Mengen definiert zu sein, sodass jedes a einer solchen angehört.

von $g_p(K_p - K_q)a_n$ ist, wegen B_3) auch $g_p(K_p - K)a_n$ □ (p, n).

In abgeschlossenen B_2-Räumen gilt die Funktionentheorie. (d.h. B_1, Beschränktheit)

Hauptsatz: In einem B_2-Raum A sei K ein vollstetiger Operator, welcher in Bezug auf eine im ganzen A erklärte stetige semidefinite Metrik selbstadjungiert ist: $[Ku, v] = [u, Kv]$. Gibt es ein u_1, u_2 sodass $(Ku_1, u_2) \neq 0$, so besitzt K mindestens einen Eigenwert.

Bew: Nach Bernoulli: $\frac{1}{1-\lambda K}$ wäre sonst ganz transzendent, ebenso $\sum \lambda^n [K^n u]^2$, während die Koeffverhältnisse doch monoton wachsen.

Oder mit Schranken. vgl III 13, 23, 24.

Kennzeichnung der zu einer hermiteschen Matrix ähnlichen Matrizen: (vgl III 131)

Bewiesen ist: M hermitesch, wenn ~~die Folge~~ ebenfalls eine Teilfolge von e^{inM} beschränkt ist.

Aufgabe: Folgt aus Beschränktheit von $e^{i(\alpha A + \beta B)}$ (für alle reellen α, β), dass A und B simultan in hermitesche Matrizen transformiert werden können? Stimmt für zweireihige.

Entwicklungssatz für vollstet. selbstadj. K sollte aus Partialbruchzerlegung von $\frac{K}{K-\lambda}$ folgen

In einem komplexen linearen Raum A seien zwei Hermitesche Formen u, v definiert, d.h. reellwertige Funktionen für die z.B. $u(\alpha a+\beta b)$ eine gewöhnliche Hermitesche Form in α und β ist.

Dann ist der Wertevorrat $\mathfrak{W}$ von $u+iv$ auf einer Teilmenge $\mathfrak{B}$ von A, die 1) im reellen Sinne konvex ist und 2) bei Multiplikation mit jedem ε in sich übergeht, selbst eine konvexe Punktmenge der (u,v)-Ebene.

Bew: 1) Im 2-dimensionalen A: es genügt zu zeigen, dass jede waagerechte Gerade ein zusammenhängendes Stück aus $\mathfrak{W}$ ausschneidet.

Vor: Aus $u(a)=v(a)=0$ folge $a=0$

Beh: Es gibt reelle p, q sodaß $pu(a)+qv(a) \geq 0$ für alle $a \neq 0$.

Bew: Der Wertevorrat $\mathfrak{W}$ von $u(a)+iv(a)$ für $a \neq 0$ ist konvex; das braucht nur für den Fall eines komplexen 2-dimensionalen Teilraums bewiesen zu werden. Dort folgt es aus S. 32. Und es ist $0 \notin \mathfrak{W}$.

Zusatz: Sind u, v in einem passenden Sinn vollstetig, so wird man $pu+qv>0$ erreichen.

Aufgabe: Übertragung auf mehrere Formen

In B-Räumen ist mitunter das Axiom nützlich:

B_4: Ist A_n eine Folge beschränkter Teilmengen aus dem B-Raum A, so gibt es $\varepsilon_n \neq 0$ sodass die Vereinigung $\varepsilon_n A_n$ beschränkt ist.

Dann gilt z.B., dass ein Operator A, der sich durch Operatoren E_n endlichen Ranges so annähern lässt, dass $A - E_n \to 0$, jede beschränkte Folge in eine gehäufte verwandelt.

Beispiel für allgemeine Eigenwerttheorie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & \ddots \end{pmatrix}$$ hat im Raum aller Zahlenfolgen (mit komponentenweiser Topologie!) zu jeder Zahl λ genau eine Eigenlösung.

Zur Randwertaufgabe $\sum (a_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)} - \lambda \sum^{n} (b_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)} = \lambda\, \delta(y)$

Sei $\mathfrak{D}$ („Vergleichsfunktionenraum") der Raum der Vektoren $\mathfrak{y} = (y(x), y(0), y'(0), \ldots, y^{(2m-1)}(0), \ldots)$ von Konstanten und $2m$ mal stetig differenzierbaren $y(x)$ (mit Kopplung der Konstanten mit der Funktion verbinden!)

Sei [illegible]

Allgemeine Diff.-Eigenwertaufgaben $(m>n)$ vom Grade $2n$.

Gegeben ist $A[y] = \sum^{m} a_\nu(x) y^{(\nu)}$, $B[y] = \sum_0^{n} b_\nu y^{(\nu)}$ und zwei Matrizen M, N.

$\mathfrak{D}$ sei der Raum der Vektoren $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(x) = \begin{pmatrix} v(x) \\ v(0) \\ \vdots \\ v^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$ ($v(x)$ m-mal stetig differenzierbaren $v(x)$) (Kopplung zwischen den Konstanten und den Funktionswerten!)

Die EW-Aufgabe $\mathfrak{A}w = \lambda \mathfrak{L}w$ mit $\mathfrak{A}w = \begin{pmatrix} A[v] \\ Mw \end{pmatrix}$, $\mathfrak{L}w = \begin{pmatrix} B[v] \\ Nw \end{pmatrix}$

heisst definit selbstadj., wenn für je zwei w, v aus $\mathfrak{V}$ die inneren Prod.

$[v_1, v_2] = \int \bar{v}_2 A[v_1] + \bar{w}_2' M w_1$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \int \bar{v}_2 B[v_1] + \bar{w}_2' N w_1$

hermitesch sind: $[v_1, v_2] = \overline{[v_2, v_1]}$ usw.

und wenn eine Linearverbdg.[1] von [ ] und < > definit in $\mathfrak{V}$ ist.

Mitunter kann man durch partielle Integrationen aus der Metrik (v_1, v_2) höhere Ableitungen herauswerfen; es mögen nur noch die Funktionen $v^{(\kappa)}$ $\kappa = 0 \dots k \geq 0$ und gewisse Ableitungen am Rande $v^{(\kappa)}(0)$ usw. auftreten: die kleinen Ableitungen.

Man erweitere $\mathfrak{V}$ zu dem Raum $\mathfrak{Z}$[1] aller Vektoren, die sich durch solche aus $\mathfrak{V}$ in dem Sinn gleichmässig annähern lassen, dass die kleinen Ableitungen gleichmässig konvergieren. $v^{(k)}$ br. stetig, $v_1, \dots$ stetig.

Schreibe mit Hilfe eines gewissen Integraloperators $\mathfrak{K}$ die obige Aufgabe um in $w = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{L} w$, d.h. $w = \lambda \mathfrak{K} w$.

$\mathfrak{K}$ liefert stückweise stetig diffbaren Vekt. Nun ist $\mathfrak{K}$ auch auf $\mathfrak{Z}$ definiert, und bildet den Teilraum $\mathfrak{V}$ in sich ab. Es ist aber sogar

$\mathfrak{K}\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{V}$; denn nimm $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, dann gibt es $w_\varsigma \Rightarrow \mathfrak{z}$ im obigen Sinn, daraus folgt $w_\varsigma \Rightarrow \mathfrak{z}$ im gewöhnlichen Sinn, also geht $\mathfrak{K}w_\varsigma \Rightarrow \mathfrak{K}\mathfrak{z}$; andererseits ist die Folge w_ς beschränkt im gew. Sinn $\mathfrak{K}$ ist hermitesch zunächst in $\mathfrak{V}$, dann auch in $\mathfrak{Z}$.

also ist die Folge $w_\varsigma' = \mathfrak{K} w_\varsigma$ gehäuft in $\mathfrak{V}$ wegen Vollstetigkeit und $\mathfrak{K}\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}$, folglich ist $\mathfrak{K}\mathfrak{z} \in \mathfrak{V}$. Daher hat auch in $\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{K}$ keine neuen Eigenlösungen ausser höchstens zu $\lambda = 0$. – Entwickelbar sind also wohl die sämtlichen quellenmässig darstellb. Fkt. aus $\mathfrak{Z}$ (= zulässige[1])

– Man braucht also Entwicklungssatz für Integralop., die bezüglich allgemeinerer Metriken selbstadj. sind, wie z.B. für $\int p(x) \cdot v''^2(x) + v_0'''^2$.

Der Entwicklungssatz dürfte hier darauf beruhen, dass $\mathfrak{K}$ in Bezug auf die Metrik ( ) vollstetig ist. Kurz: $\mathfrak{K}$ ist selbstadj. in einer Metrik ( ) Forts.: 125

die mindestens so stark ist wie die Hilbertsche $\mathfrak{H}\mathfrak{Z}$: aus $(u_n, u_n) \to 0$ folgt $\{u_n, u_n\} \to 0$.

[1] Zulässig sind gerade die Fkt., deren Fourierrest r_μ in der Metrik ( ) verschwindet: $(r_\mu, r_\mu) \xrightarrow[\mu]{} 0$.

Beispiel zur Einordnung: $-y'' = \lambda y$, $y'(0) + A y(0) = 0$, $y'(1) + B y(1) = 0$

Selbstadjungiertheitsbedingung für $[u, v] = -\int u'' v + \mathring{u}' M \mathring{v}$ verlangt, dass

$$M + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ symmetrisch ist, wobei } M = \text{willkürlich} \cdot \begin{pmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeinste solche Metrik ist $[u, v] = \int u'v' + B u(1) v(1) - A u(0) v(0)$

$$+ \alpha (A u(0) + u'(0))(A v(0) + v'(0))$$

$$+ \beta (A u(0) + u'(0))(B v(1) + v'(1))$$

$$+ \gamma (B u(0) + u'(0))(B v(1) + v'(1))$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ gibt die für den Entwicklungssatz geeignete Metrik.

Ferner ist hier $N = 0$, $\langle u, v \rangle = \int uv > 0$ in $\mathfrak{V}$ ~~aber nur ≥ 0 in $\mathfrak{Z}$~~.

damit eine Dgl.-EW-Aufgabe im neuen Sinn (122) selbstadj. sei, wird notwendig sein, dass A und B selbstadj. Differentialausdrücke sind; denn es gibt schon Raum endlichen Rangdefekts λ ∞, [illegible] der 2n Konstanten = 0 [illegible], aber zur Metrik entgegenstehend [illegible].

Aufgabe: Bedingungen für die Selbstadjungiertheit der Randbedgn. ermitteln, und auf allgemeinere Randbedgn. wie $\int y(x)\cdot c(x)\,dx + y(1) = 0$.

vgl [209] Zaanen

Frage: Entwicklungssatz für symmetrisierbare Integralgleichungen? oder polare? 127

Ist der Kern $K = LP$ mit $L = L^*$, $P = P^* >> 0$, so ist K selbstadj. in bezug auf die Metrik $[u,v] = \iint u(x)\,P(x,y)\,v(y)\,dy\,dx$, und jede Eigenfkt. $u_n(x)$ ist ~~ein~~ Fourierkoeff., nämlich von $L(x,y)$ bezgl. y; damit ~~folgt der Entwicklungssatz für quellenmäßig darstellbare Funktionen.~~

~~[illegible]~~, wenn $\Sigma\left(\frac{u_n(x)}{\lambda_n}\right)^2$ ~~[illegible]~~ beschränkt gl. in x.

Frage: Bei $\sum(a_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)} + \dots = \lambda\,\Sigma \dots$ dürfte die Fourier-Entwicklung noch für die k-te Ableitung ($k < n$) in jedem Teilintervall gleichmässig konvergieren, indem die 1., 2., .., k. Ableitung gleichmässig existieren.

1. Nach Kamke (MZ. 46, 231) gilt offenbar für hermitesche Matrizen A, B: Ist für jede zu einem festen λ gehörige Eigenlösung von $Ay = \lambda By$ $y^*By \neq 0$, so ist die Anzahl der zu λ gehörigen lin. un. Eklektoren gleich der Vielfachheit der Nullstelle von $\Delta(\lambda) = |A - \lambda B| = 0$.

1) λ ist reell, also $A - \lambda B$ selbstadj.

Bew.: 2) Aus Hauptlösung: $c\{AY - \lambda BY\} = BX$, $AX - \lambda BX = 0$ folgt

$$(BX, X) = c\cdot(\{A - \lambda B\}Y, X) = c(Y, \{A - \lambda B\}X) = 0.$$

Klar, da HL = [illegible] Elementen $\lambda \neq \lambda'$ und die gl. [illegible] $(X, AX') = (X, BX') = 0$ machen.

2. Entwicklungssatz im Hilbert-Raum:

Ist K vollstetig bezügl. einer definiten Metrik, selbstadj., so konvergiert jede Fourierreihe (im Sinn der Metrik) und stellt ein Element dar, das sich vom gegebenen nur um eine Lösung von $Ky = 0$ unterscheidet: $a = a_{00} + \sum_{(\lambda\nu)} a_\nu$ mit $Ka_{00} = 0$. Bew: Schliesse den von den EFunkt. aufgesp. unteren Raum ab. Im orthogonalen Komplement hat K keine EFn, also ist $Ky \equiv 0$ dort.

3. Ist man Kr[illegible], dass aus $b_\nu \to 0$ (im Sinn der Metrik) folgt $Kb_\nu \rightrightarrows 0$ im Sinn einer andern Topologie, so gilt für jede quellenmäßig dargestellte a der Entwicklungssatz im Sinn der Topologie (Bew.: 2).

Ist z. B. K ein Integraloperator mit reellem symmet. stückweise stetig diffbaren Kern, so konvergiert für jede qu. darg. Funktion a auch die gliedweis abgeleitete Fourierreihe gleichmässig $\Rightarrow a'$; denn ihre Ableitung $\frac{da}{dx}$ kann unter dem Int. zeichen [illegible]

127

Frage: Ist ~~...~~ L ein selbstadj. definiter Differentialausdruck der Ord. $2n$, folgt dann aus Beschränktheit von $\int u(x)\,(L\,u(\xi))\,dx$ auch Beschränktheit von $\int u^{(n)}(x)^2\,dx$?

Beruht hierauf die Theorie von Kamke für indefinites L ?

<u>Entwicklungssatz für ~~[illegible]~~ $y = \lambda\, \mathfrak{G}\, \mathfrak{K}\, y$</u>, wo ~~[illegible]~~ $\mathfrak{G}$ beschränkter hermitescher Operator für $(u,v) = \int u\,v\,dx$ ~~ist~~ und $\mathfrak{K}$ ein positiv definiter Integraloperator mit stetigem Kern.

Nach Mercer folgt aus $(u, \mathfrak{K}u)$ $\square$ auch $(\mathfrak{K}u, \mathfrak{K}u)$ $\square$ und daher ~~...~~ $\mathfrak{K}u(x)$ gl. beschränkt $\square$, daher folgt aus „$\mathfrak{G}$ beschränkt für (u,v)" auch „$\mathfrak{G}\mathfrak{K}$ beschränkt für $[u,v] = (u, \mathfrak{K}v)$", daher kgt. Fourierreihe in der Metrik $[u,u]$.

~~[illegible]~~ Falls $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft hat, gl. kgte Funktionenfolgen wieder in solche überzuführen, lässt sich jede quellenmässig durch $\mathfrak{G}\mathfrak{K}$ dargestellte Funktion in eine gleichm. kgte Reihe entwickeln.

Genauer: Die Entwickl. für $y = \mathfrak{G}\mathfrak{K}z$ entsteht aus der gleichm. kgten Reihe für $\mathfrak{K}z$, die aus der Fourierreihe für z kommt, durch Anwendung von $\mathfrak{G}$.

Bew.: Die Fourierreihe für z kgt in der Metrik $(z, \mathfrak{K}z)$, die durch Anwendung von $\mathfrak{K}$ hierauf entstehende Reihe kgt <u>gleichmässig</u> (Mercer).

~~Also Entwicklungssatz:~~ Jede durch $\mathfrak{K}$ quellenmässig dargestellte Funktion entsteht durch Anwendung von $\mathfrak{G}$ auf eine gleichm. kgte Reihe stetiger Funktionen, wenn $\mathfrak{K}$ ein pos. def. Intop. mit stetigem Kern und $\mathfrak{G}$ beschr. (u,v) hermit.

128

Entwicklungssatz für polare Inglen: Ist $\mathfrak{K}$ ein pos. def. Intop. mit stetigem Kern und führt $\mathfrak{G}$ jede gleichm. beschränkte Menge stetiger Funktionen in eine ebensolche über und ist $\int u \cdot \overline{\mathfrak{G}v} = \int \mathfrak{G}u\, \bar v$, so wird jede quellenmässig dargestellte Funktion durch ihre Fourierreihe dargestellt, und diese konvergiert gleichmässig.

$y = \lambda\, \mathfrak{K}\, \mathfrak{G}\, y$ im Hilbertraum:

Sei $\mathfrak{K}$ [illegible] 0 vollstetig, $\mathfrak{G}$ beschr. hermitesch.

Dann ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{Q}^2$, $\mathfrak{Q} \gg 0$, vollstetig (wegen Spektrum).

$y = \mathfrak{Q}z$ genügt der Gl. $z = \lambda\, \mathfrak{Q}\mathfrak{G}\mathfrak{Q}\, z = \lambda\, \mathfrak{T} z$. $\mathfrak{T}$ ist vollstetig.

Also wird jedes y durch seine Fourierreihe nach den EFunkt. z_i dargestellt:

$z_i = \lambda_i\, \mathfrak{T} z_i$ $(\lambda_i \neq \infty)$ im Sinne der Metrik kgt.

Nach Mercer ist jeder pos. def. stetige Kern der Quadrat eines ~~[illegible]~~ der iterierte eines beschränkten unstetigen pos. definiten Kerns.

Ist $P(x,y)$ positiv definiter Kern [illegible], so folgt aus $(u, u) \le 1$ ... für $v(x) = \int P(x,y)\, u(y)\, dy$:

$|v(x)|^2 \le \operatorname{Max} P(x,x)$ [und $v(x)$ ist stetig.]

Bew.: $v = \Sigma \frac{a_\nu \varphi_\nu}{\lambda_\nu}$, $|v|^2 \le \Sigma \frac{\varphi_\nu^2}{\lambda_\nu}$ ...

Aufgabe: einen EW fester Nummer von $K(x,y;t)$ als analytische Funktion von t untersuchen, wenn $K(x,y,t)$ eine positive (Matrix-)Funktion von t ist.

Frage: Konvergiert $\Sigma\, p_n(t)$ von selbst in weiteren Punkten, wenn ... falls die $p_n(t) \ge 0$?

Aufgabe: Kann man bei $My = \lambda Ny$ ... angeben ohne allein durch ~~Definitheit~~?

NB: Für ~~...~~ def ... m so definieren, dass die m-te ... quadr. integrabel ist. vgl. Kamke III (def. EW) S. 275

Ist M ein pos. definiter selbstadj. Diff.ausdruck für $U_\mu(u) = 0$, so ist

$\int u^2 dx \le \frac{1}{k} \int u \cdot M(u)\, dx$

~~...~~ k der kleinste EV von ... ~~...~~

Kamke 189, 762 III Bew. mit Einfangen ...

Ebenso ist vielleicht aus $My = \lambda(y \ldots)$ zu bekommen

$\int (y'')^2 dx \le \int y\, My$ für $U_\mu y = 0$ ...

Gilt sicher, wenn ausserdem alle Randwerte von $y = 0$ sind. Allg.: endl. Linearverbindung abziehen. – Mittelkonvergenz für $y, y', \ldots, y^{(n)}$ zieht gl. Kgenz für $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ nach sich. Systeme betrachten!

Man kann Randbedingungen für $y^{(3)}$ selbst stellen, wenn von y sonst nur Integrabilität vorausgesetzt wird: Definiere $y^{(3)}(0) = \lim_{w \to 0} \frac{\Delta_w^3}{3!\, w^3}$.

Auch bei mehreren Freiheitsgraden liegen die Frequenzwerte stets zwischen den Rayleighwerten und den iterierten Rayleighwerten. Genauer: Ist P Matrix, Typ (n,n), C Typ (n,f), so bilden bei festem l die Eigenwurzeln $\lambda_l^{(k)}$ von $\det(\mu C' P^k C - C' P^{k+1} C) = 0$ eine monoton wachsende Folge. Bew.: Minimaxkennzeichnung. Es ist für jedes g vom Typ $(f,1)$

$\frac{g' C' P^{k+1} C g}{g' C' P^k C g} \ge \frac{g' C' P^k C g}{g' C' P^{k-1} C g}$ ...

Es ist wohl $\begin{cases} \lim_{k \to +\infty} \lambda_k^{(l)} = \lambda^{(l)} \text{ von } P, \text{ wenn alle ...} \\ \lim \lambda_k^{(l)} = \lambda^{n-f+l} \text{ von } P, \quad " \end{cases}$

Allgemeiner:

Sind A, B, C quadratische Formen mit $t^2A + 2tB + C \geq 0$ f. alle t, so sind die EWe von $\det(AB - C) = 0$ grösser als die von $\det(\lambda A - B) = 0$. Denn $\mathfrak{x}'A\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}'C\mathfrak{x} \geq (\mathfrak{x}'B\mathfrak{x})^2$.

Sind die Integrationen gebrochener positiver Ordnung auch vollstetig? – Aufgabe: Variationsrechnung $\delta \frac{[u,u]}{\{u,u\}} = 0$ in abstrakten Räumen für zwei Metriken, die reell oder komplex sein dürfen. – Beim Zusammenlegen eines Raumes mit seinem konjugierten die Durchschnitte identifizieren, damit der entstehende „kanonische" Raum nicht unnötig gross wird. – Numerische Abschätzung der Genauigkeit von Differenzeneigenwerten: Die Dgl.-EF ist eine angenäherte Δ-EL. Nun Weinstein auf Δ-Gl.

Vermutg. – Analogon zum Satz von Stöhr: Ist $y_n(x)$ d. n-te EF v. $y'' + q(x\lambda)y = 0$, $y_n(0) = y_n(1) = 0$, $y'(0) > 0$, so ist d. Anzahl d. Zeichenwechsel der Folge $y_1(x), \ldots$, bis zum n-ten Glied $V_n(x) = nx + O(1)$.

z. B. bei $y'' + \lambda y = 0$ $y_n = \sin nx$ $V_n(x) = [nx]$

Vermutung: Ist $u_n(x)$ ein Orthogonalsystem mit

$u'(0) > 0$, so ist $V_n(x)$ eine monotone Fktion von x.

Gibt es Sätze über die Anzahl der Nullstellen in einem vorgegebenen Teilintervall? Nein, die kommen aus Sturms Zählensatz.

Der Vorteil, wenn man nicht überall-definierte Operatoren zulässt, besteht darin, dass sie sich den ihnen angemessenen Raum durch Abschliessung des ursprl. Def.-raums selbst schaffen können. – Hilbertschen Raum bezüglich schwacher Konv. abschliessen – hat dann jeder Operator nur noch Punktspektrum?

Aufgabe: Eigenwerttheorie in „linearen Räumen mit Operatoren" und beliebigen Gruppen.

Prüfers Theorie auf nichtselbstadjungierte Randbedingungen erweitern

" " auf Dglen erweitern

" auf Randwertaufgaben höherer Ordnung erweitern.

Die Def. der „brauchbaren unstetigen" Kerne sollte wohl die Kerne $K(x,y) = K(y,x)$ umfassen, für die 1) $K(x,y) \in \mathfrak{L}_2(y)$, 2) $K^{(2)}(x,x) \leq C$ gleichmässig. Es folgt dann aus $\int \varphi^2(x)\,dx \leq 1$ $\left|\int K(x,y)\varphi(y)\,dy\right| \leq C$ f. alle x. Also wird jede im Mittel konv. Folge durch Anwendg. von K in eine gleichm. konv. verwandelt, da wird der Entwicklungssatz gelten.

15.5.47 Verhältnis Rayleigh–Grammel: Berechnung der ersten EWe bei pos. def. EW-Aufg.

Ist D Diffop. $>>>0$, $\mathfrak{G} = D^{-1}$ Intop $>>0$, so setze bei $Dy = \lambda \mathfrak{G} y$

(Rayl.) $\rho(u) = \dfrac{(u, Du)}{(u, \mathfrak{G} u)}$ und $\tau(u) = \dfrac{(u, \mathfrak{G} u)}{(u, \mathfrak{G} \mathfrak{S} \mathfrak{G} u)}$ (Grammel).

Nützlich ist Gr. nur, wenn man $(u, \mathfrak{G}\mathfrak{S}\mathfrak{G} u) = (\mathfrak{L}u, \mathfrak{L}u)$ berechnen kann (halbe Iteration), sonst rechnet man mit der vollständig berechneten Iterierten genauer mit $\dfrac{(u, \mathfrak{G}u)}{(\mathfrak{G}u, \mathfrak{G}u)}$ = Rayleigh von der Iterierten $= \rho(\mathfrak{G}u)$.

Vermutung: Der Satz von Stöhr [190] lässt sich so verallgemeinern: Normiert man eine feste Komponente $y_j = 1$, so ist die Zahl der Zeichenwechsel in der Komponente k (bei nach den Eigenwerten geordneten Eigenlösungen) $|k-j|$.

– Bew. des Oszillationssatzes I: Sei $g_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ monoton wachsend, von $-\infty$ bis $+\infty$ für λ von $-\infty$ bis $+\infty$, stetig. Sei $\Delta^2 y_{i-1} + g_i(\lambda) y_i = 0$, $y_0 = y_{n+1} = 0$, EWe $= \lambda$ mit $y_{n+1}(\lambda) = 0$. Mit $g_i = q_i - 2$ u.

$$\mathfrak{M} y = \begin{pmatrix} g_1 & 1 & & & \\ 1 & g_2 & 1 & & \\ & 1 & g_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & g_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -y_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

also $y_k = \dots y_{k+1}$ Δ_{k-1} / Δ_k … $\Delta_0 = 1$.

$y_k = (-1)^{k} \dfrac{\dots}{\Delta_{k-1}}$

Sei $v_i(\lambda)$ die Zahl der Zeichenwechsel in $1, y_1(\lambda), \dots, y_i(\lambda)$, dann ist $v_i(\lambda)$ = Zahl der pos. unter $\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, wenn diese alle $\neq 0$ $(k \le i)$

also $v_i(\lambda) = \pi(M_{i-1})$, M_i: i-ter Abschnitt von M, π: pos. …

Insbesondere $v_n(\lambda) = \pi(M_{n-1})$, $v_n(\lambda_j) = \pi(M_n(\lambda_j)) = j-1$ wenn keine Nullstellen auftreten.

$\Delta_i(\lambda)$ hat genau i Nullstellen, da die i EWe monoton von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen. Zwischen je zwei Nullst. von Δ_i liegt genau eine von Δ_{i-1}, denn wenn $\pi(M_i)$ um 1 steigt, steigt $\pi(M_{i-1}) = \pi(M_i) - \dots$ um mindestens 1, also genau um 1, da nicht mehr als $i-1$ Nullstellen bei Δ_{i-1} vorhanden.

Umgekehrt zwischen je zwei Nullstellen von Δ_{i-1} genau eine von Δ_i.

Bew. von Stöhr ?: Ist A_k der k-te Abschnitt, so ist mit $T = \left(\begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} y_1 / y_{k+1} & \\ \vdots & \\ & 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

$$T' M T = \left(\begin{array}{c|c|c} A_k & & \\ \hline & -\dfrac{y_{k+1}\, y_{k+2}}{y_{k+1}} & g_{k+1} \\ \hline & g_{k+2} & 1 \\ & 1 & g_{k+3} \quad 1 \\ & & 1 \quad g_{k+4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_k & \\ \hline & \dots \end{array}\right)$$

Nun seien λ_j^*, λ_{j+p}^* zwei Nullstellen von Δ_k ($p \ge 1$). Dann wächst πA_k um $p-1$ von $\lambda_j^* - \varepsilon$ bis λ_{j+p}^*; da $\pi(R)$ nicht fällt, kann $\pi(\mathfrak{M})$ höchstens um 1 fallen, also steigt $\pi(M)$ mindestens um $p-1$. D.h. In einem abgeschl. Intervall, das $p+1$ Nullstellen eines Δ_k enthält, liegen mindestens p Nullstellen von Δ_{k+1}.

Sind daher im Schwarm der EVektoren keine Nullkomponenten, so macht sich jeder Zeichenwechsel von $\Delta_n(\lambda)$ an den EVektoren bei den EWerten λ_k von $\Delta_n = 0$ bemerkbar. Tritt bei Sp. an Stelle von T eine Integraltransformation?

AB und BA haben [illegible] dieselbe charakt. Gleichung.

Beweis bei Typ A = Typ B' = (m,n) [illegible]

$$\begin{vmatrix} xE_m & xA \\ B & xE_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} xE_m - AB & 0 \\ B & xE_n \end{vmatrix} = x^n \cdot |xE_m - AB|$$

und

$$= \begin{vmatrix} xE_m & 0 \\ B & xE_n - BA \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{vmatrix} = x^m |xE_n - BA|.$$

Anderer Beweis: [illegible]

dann $\det A = 0$ [illegible] ersetze A durch $A + tE$, t variabel, oder sämmtliche a_{ik} als Variable.

Satz von Toeplitz für normale Matrizen

Ist $Y = LX$, $X = \{x_1 \dots x_n\}$, $y = \{y_1 \dots y_n\}$, $LL^* = L^*L$, so enthält jeder Kreisbereich (Abgeschlossenes Inneres oder Äusseres eines Kreises oder eine Halbebene), der alle y_ν/x_ν enthält, mindestens einen Eigenwert von L.

Bew. Aus $\mathrm{Re}\, \Sigma \overline{(\gamma y_\nu + \delta x_\nu)}(\alpha y_\nu + \beta x_\nu) \geq 0$ folgt

$\mathrm{Re}\, \Sigma |\xi_\nu|^2 \overline{(\gamma \lambda_\nu + \delta)}(\alpha \lambda_\nu + \beta) \geq 0$, also für ein λ_ν

$\mathrm{Re}\, \overline{(\gamma\lambda_\nu + \delta)}(\alpha\lambda_\nu + \beta) \geq 0$

[illegible]

Aufgabe: [illegible] zum Satz von Toeplitz auf normale Matrizen übertragen; [illegible]

für reelle symm. [illegible] Eigenwerte [illegible] pos., [illegible]

so folgt aus $AX - uX$ [illegible]

Bew.: $X_i'(AX - uX) \geq 0$ [illegible] $(\lambda_\nu - u)(X'X) \geq 0$ [illegible]

Zur analytischen Fortsetzung linearer Operatoren in vollständigen Räumen Φ.

Def.: Spektrum von L: Gesamtheit der Punkte z, von denen es ein $\varphi \in \Phi$ gibt, sodass $(L-\lambda)^{-1}\varphi$ von ∞ her bis an z heran nicht fortgesetzt werden kann, [illegible]

[illegible] für die $(L-\lambda)^{-1}\varphi$ ausserhalb der Scheibe überall regulär [illegible]

[illegible] Spektrum von $f(L) = f$ (Spektrum L).

[illegible]

$(L-\lambda)^{-1}$ [illegible] einmal nach $\frac{1}{\lambda}$, einmal nach $(\lambda - L)$ entwickelt. [illegible]

[illegible] Operatoren [illegible], die [illegible] abgeschlossenen Teilraum invariant lassen. – Ist $V_n L = L V_n$ ($\boxed{V_n} = 1$) so bilden die

φ mit $V_n \varphi \to 0$ einen (abgeschlossenen) gegen L invarianten Teilraum. [illegible]

[illegible]

[illegible] Raum [illegible] gibt [illegible] Radius [illegible] Kugel [illegible]

[illegible] $|L\varphi| > \frac{1}{10}$ [illegible]

Folge beschränkter Operatoren, [illegible] φ mit $|\varphi| = 1$,

sodass $|L_n \varphi| > \frac{\boxed{L_n}}{10^n}$ [illegible] 10 [illegible]

Die analyt. Fortsetzung von $(L-\lambda)^{-1}\varphi$ [illegible]; denn

für [illegible] $(L-\lambda)$ [illegible] mal einen *offenen* Teilraum $\neq 0, \Phi$ festlässt, folgt aus $\left| \begin{matrix} |V_n| < \infty \\ V_n L = L V_n \end{matrix} \right.$ und $V_n \varphi \to 0$ auch $V_n \psi \to 0$ f. alle ψ, daher $|V_n| \to 0$, und die Approximation von φ durch ein Orthogonalsystem $\varphi,\ L\varphi + L^2\varphi + \dots$ gibt Cayley-Hamilton'sche Gleichungen: — Lässt L gar keinen Teilraum von Φ fest, so hat Φ die Dimension [illegible], denn der Raum der endlichen Linearverbdg. von $L\varphi, L^2\varphi, \dots$ muss der ganze sein. Also $\varphi = \sum_1^n c_\varrho L^\varrho \varphi$; $(L-\alpha)\psi = 0$. Wenn $0 \subset \underline{Sp\, L}$, $\underline{\boxed{Sp\, L} = 1}$, Re [illegible] sind vielleicht die Folge L^n und ein φ, das aus Annäherung an die Stelle $\lambda = 0$ gewonnen ist, geeignet, um einen abgeschlossenen invarianten Teilraum zu gewinnen. Vielleicht lässt sich so beweisen, dass ein Op. ohne abg. inv. Teilraum nur einen Punkt als Spektrum hat. Wenigstens eine direkte Theorie der normalen Operatoren sollte so herauskommen, ohne Rückgriff auf Hermitesche. – Gibt es für *solche* L ein $\sqrt{L}$?

22.5.47 Def.: **Normaler Ring** = Kommutativer Ring, vollständig bezgl. einer Abstandsfunktion $|a|$ mit $|a+b| \leq |a|+|b|$, $|ab| \leq |a||b|$ und $|a^n| = |a|^n$ (mit kompl. Zahlen als Operatoren)

Vielleicht sollte man noch hinzufügen, dass man ihn nicht mehr durch Quotientenbildung erweitern kann, ohne diese Eigensch. aufzugeben.

Hier gilt eine schöne Funktionentheorie: der Betrag eines Elements ist genau gleich dem größten Betrag seines Spektrums (wie bei normalen Matrizen), nicht $\geq$ wie ohne Bedg. $|a^n| = |a|^n$.

Einen normalen Ring erhält man aus einem (kommutativen) Banachring $\mathfrak{R}$ mit Abst. d

durch $|a| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{d(a^n)}$ und Übergang zum Restklassenring $\mathfrak{R} - \mathfrak{N}$ mit $n \in \mathfrak{N}$, wenn $d(n) = 0$ (dh. $\frac{1}{\lambda - n}$ ganze Fktion von $\frac{1}{\lambda}$) ist Radikal [illegible]

In einem normalen Ring gibt es zu jedem Element mit ~~Re~~ Spektrum ≥ 0, $|$Spektr. pos.$|$ $\geq$ pos., $0 \in$ Spekt. eine Quadrat- und n-te Wurzel. —

Der Übergang von der Banachmetrik d zu $|\ |$ liefert gerade die ursprüngliche normale Matrix wieder, wenn man diese durch Ähnlichkeitstransf. mit einer unitären Matrix verkorkst hatte.

Ist $f(z)$ ein Polynom und hat L das Spektrum $\{\lambda\}$ (definiert durch Nichtexistenz von $(L-\lambda)^{-1}$), so hat $\underline{f(L)}$ genau das Spektrum $\{f(\lambda)\}$. Denn $f(L) - \mu = \alpha \prod (L - z_\kappa)$, worin z_κ alle Lösungen von $f(z) = \mu$ durchläuft. — Also ist in normalen Ringen $|f(L)| = \max_{z \in Sp\, L} |f(z)|$ zunächst für Polynom f.

Da stets $Sp\, L^{-1} = \{Sp\, L\}^{-1}$, ist in normalen Ringen

$$\left|(\lambda - L)^{-1}\right| = \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, Sp\, L)}$$

Das Spektrum ist stets abgeschlossen [illegible]

Wird der normale Ring $\mathfrak{R}$ durch *ein* Element L erzeugt und hat dieses das Spektrum $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{R}$ metrisch isomorph dem Ring derjenigen Funktionen (mit kompl. [illegible]) auf $\mathfrak{A}$, die aus den Polynomen $f(z)$ durch Abschliessung in der Metrik $\|f(z)\| = \max_{z \in \mathfrak{A}} |f(z)|$ entstehen.