# Private Notebook IV

Helmut Wielandt
Göttingen, Herzberger Ldstr.32
Heimatanschr.: Tübingen, Goesstr.31

## Iterationsverfahren 6 - 28, 60 - 74

**Seite 1**

Aufgabe: Flügelumströmung rein durch Betrachtung der Beschleunigung behandeln. An Stelle des Abwindes die "Aufbeschleunigung" aus Ort des Flügels zur Randbedingung heranziehen.

Beispiel für $\int\limits_1^\infty f^2(x)\,dx$ konvergent, $\int\limits_1^\infty |f(x)|^2 dx$ divergent:
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (1 + \imath\sqrt{2} \cdot \sin x)$. (Zu Söhngen III [111]

### Beziehung zwischen $\omega_0(x)$ und $\omega_0(-x)$:

(Zu $B\,44(I)\,45\,\&\,39$)
Wegen $\hat{H}(x) = \hat{H}(-x)$ ist
$(\omega_0(-x) \cdot e^{-\frac{i\,\nu}{v}x})' = -e^{-\frac{2\,i\,\nu}{v\,(1-\beta^2)}x} \cdot (\omega_0(x) \cdot e^{+\frac{i\,\nu\,x}{v}})'$
und daher z.B. für $x > 0$
$\omega_0(x) = -e^{i\,\alpha\,(1-\beta)\,x} \cdot \omega_0(-x) - \frac{2\,i\,\nu}{v\,(1-\beta^2)} \cdot \int\limits_x^\infty e^{\frac{2\,i\,\nu}{v\,(1-\beta^2)}\,\xi - \frac{i\,\nu}{v}\,(\xi+x)} \omega_0(-\xi)\,d\xi$
$+ \frac{\nu}{2\,v} \cdot e^{-\frac{i\,\nu}{v}x}$

Aufgabe: Faltungssatz auf Cauchysche Hauptwerte übertragen.
Wie hängt $\mathfrak{L}\{\int\limits_0^\infty I(t)\,\frac{dt}{x-t}\}$ mit $\mathfrak{L}\{I\}$ zusammen ? s. S.81

**Seite 2**

Sinnvoll ist diese Frage eigentlich nur beim komplexen Faltungstyp, dh. etwa bei **???** $(t) =$ **???** $I(s)\,\frac{ds}{t-s}$, und das führt auf Fourier-Integrale.

**Seite 3**

### Cauchysche Hauptwerte

(Forts. von III 166)

1. **???** $\frac{d\,\xi}{(x-\xi)\,(1+\xi)} = \frac{log\,x}{1+x} \qquad 0 < x$

2. **???** $\frac{d\xi}{1-\xi}\,\sqrt{\xi} = -2\,\sqrt{x} + \log\,|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}|$ **???**

3. **???** $e^{-s\,t} \cdot \frac{\sqrt{t}}{t-1}\,dt =$ **???** $e^{-st} \cdot \frac{dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{-P(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}. \qquad (s > 0)$

**???** : $\varphi' + \varphi$ bilden

4. $\frac{d}{ds}$ **???** $e^{-s\,(t-1)} \cdot \varphi(t) \cdot \frac{dt}{t-1} = -e^s \cdot \mathfrak{L}_{\searrow\text{Laplace-Transf.}}\{\varphi;\,s\}$ in der Kgenzhalbebene, falls $\varphi'(1)$ existiert.

5. **???** $e^{-s\,(t-1)}\sqrt{t}\,\frac{dt}{t-1} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{e^s}{\sqrt{s}} - \sqrt{\pi}\int\limits_0^s \cdot \frac{e^\sigma}{\sqrt{\sigma}}\,d\,\sigma$ **???** für **???** $s \geqq 0$ Bew.
$e^s \cdot \mathfrak{L}\{$**???**$\}$ anziehen **???**.
$= \pi\,i +$ **???** $e^{-s\,(t-1)}\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t-1}$ (**???** = Hauptzweig)

6. **???** $e^{-s\,t}\sqrt{t}\,\frac{dt}{t-x} = \sqrt{\pi} \cdot \{\frac{1}{\sqrt{s}} - x\int\limits_0^s e^{-(s-t)\,x}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}\} \qquad (Ru\,s \geqq 0;\,x > 0)$

7. $\mathfrak{A}(x)$ **???** $\frac{1}{\pi\,i}$ **???** $e^{ix\,(t-1)}\sqrt{t}\,\frac{dt}{t-1} = \frac{e^{-\frac{i\,\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-i\,x}}{\sqrt{x}} + \frac{e^{\frac{i\,\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-it}\,\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{i\,\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot$
$\frac{e^{-i\,x}}{\sqrt{x}} + \frac{2\,e^{\frac{i\,\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\sqrt{x}}^0 e^{-i\,\breve{u}^2}\,d\,\breve{u} \qquad (x > 0)$
$(7') = 1 + \frac{e^{-\frac{i\,\pi}{4}}}{\pi} \cdot e^{-ix} \cdot \mathfrak{L}\{\frac{\sqrt{t}}{t+i};\,x\}$
$(7'') = 1 + \frac{1}{2\,\sqrt{\pi}} \cdot e^{3\,i\,\pi\,/4} \cdot \int\limits_{+\infty} e^{-it}\,\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ (Bew.: *III* 166 (8)

8. $\mathfrak{L}\{\mathfrak{A}(t);\,s\} = e^{-\frac{i\,\pi}{4}} \cdot \cdot \frac{\sqrt{s+1}}{s}$ $(s' > 0)$ mit $\mathfrak{A}(t)$ nach (7) Bew.: $7'$ rechts
**???** Faltungssatz

**Seite 5**[1]

## Jede Schar des Ranges $n$ von $n$-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n$, für welche die Wronslaysche Determinante $W \neq 0$ ist im Intervall $< a,\,b >$, lässt sich eindeutig einem geordnetem $n$-tupel von in $< a,\,b >$ stetigen Funktionen $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ zuordnen, nämlich den Koeff. der Dgl.

$$y^n + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = 0,$$

welche für alle Funktionen der Schar erfüllt ist. Es ist

$$a_1 = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

[1]Seite 4 ist nicht beschrieben.

Eine andere, aber mehr Willkür enthaltende Art, die Schar auf ein geordnetes $n$-tupel abzubilden, wäre die Wahl einer normierten Basis, etwa $y_i^k(x_0) = \delta_{i\,k}$. (Ähnliches für Vektoren scheint es vernünftig nicht zu geben, nur nach Numerisierung der Komponenten, also ist die Funktion $f(x)$ **???** als dem Vektor verwand.)

<u>Aufgabe:</u> Die Mechanik entwickeln für Kraftgesetze mit Nachwirkung: **???** zur Zeit $t_0$ hängt durch eine Fktion von $(t_0 - t)$ von allen früheren Lagen ab.

**Seite 6**

## Zum allgemeinen Einschliessungssatz für hermitesche Matrizen.

a) Sind $A$ und $B$ rechteckige Matrizen desselben Typus, so ist dund $A = U\,B$ mit einer unitären Matrix $U$, wenn (1) $A^*A = B^*B$
Bew: wenn (1) gilt, und die erste Spalte von $A \neq 0$ ist, gibt es **???**

$$U_1 A = \left(\begin{array}{c|c} p & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right), \quad V_1 B = \left(\begin{array}{c|c} p & \cdots \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \end{array}\right) \qquad (p \neq 0)$$

Aus (1) folgt dann Überstimmung der ersten Zeile von $U_1 A$ mit $V_1 B$, und mit $U_1 A = \begin{pmatrix} \mathfrak{z} \\ A_1 \end{pmatrix}$; $V_1 A = \begin{pmatrix} \mathfrak{z} \\ B_1 \end{pmatrix}$ folgt
$A_1^* A_1 = B_1^* B_1$ Induktion nach Komponenten-Zahl.
Anderer Beweis: Satz inv. gegen unit. Ähnl. Trans: $A$ **???** $A = \begin{pmatrix} c_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n^2 \end{pmatrix}$ **???**
b) Sind $X$ und $Y$ rechteckige Matrizen derselben Typus $(m, n)$ und **???** $s$ ist $m$ reelle Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_m$ vorgegeben, so ist die folgende Bedingung notwendig & hinreichend dafür, daßes eine hermitesche Matrix $M$ mit den Wurzeln $\mu_1, \cdots, \mu_m$ gibt, für welche $M\,X = Y$ ist:
Das Gl.-System

$$\begin{aligned} &P_1 + P_2 + \cdots + P_m = \mathcal{R} = X^*X \\ &\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \cdots + \mu_m P_m = \mathcal{S} = X^*Y = Y^*X \\ &\mu_1^2 P_1 + \mu_2^2 P_2 + \cdots + \mu_m^2 P_m = \mathcal{T} = Y^*Y \end{aligned}$$

ist lösbar mit hermiteschen Matrizen $P_i$, die $\geqq 0$ und vom Range $\leq 1$ sind. Bew.:

Setze $P_i = \xi_i^* \cdot \xi_i$ **???** $\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$ und wähle $U$ mit $U\,\Xi = X$, $U\,M\Xi = Y$ und setze **???**

**Seite 7**

c) Sämtliche Zerllgungen (1) $\mathcal{R}= P_1 + \cdots + P_m$ einer nichtnegativen herm. Matrix $\mathcal{R}$ in nicht negative $P_i$ vom $Rg \leq 1$ erhält man, indem man sämtliche Produktdarstellungen

$$\mathcal{R} = \mathrm{X}^*\mathrm{X}$$

mit $X = \begin{pmatrix} \mathfrak{q}_1 \\ \mathfrak{q}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{q}_m \end{pmatrix}$ bildet und $P_i = \mathfrak{q}_i^*\mathfrak{q}_i$ setzt.

**???**

Diese erhält man aus einer von ihnen, $\mathcal{R}= X_0^*X_0$, durch $X = U\,X_0$ mit beliebigen unitären $U$. Wählt man etwa für $X_0$ die Jacobische Zerlegung und für die $U$ eine Parameterdarstellung, so erhält man eine Parameterdarstellung aller Lösungen von (1).

d) Zu $(k + 1)$ reellen Spalten $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_1, \cdots \mathfrak{q}_k$ **???** $m$ Komponenten gibt es dund eine Matrix $\mathcal{M}$ reell symmetrisch derart, daß1) $\mathcal{M}\mathfrak{q}_\nu = \mathfrak{q}_{\nu+1}$ und **???** $M$ genau $m$ vorgegebene Eigenwerte $\mu_1, \cdots, \mu_m$ hat, wenn folgende Bedingg. erfüllt ist: Es ist $s_{\alpha+\beta} = \mathfrak{q}'_\alpha \mathfrak{q}_\beta$ nur von $(\alpha + \beta)$ abhängig, und das Gl. system

$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = s_0$ (2) $\quad \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \cdots + \mu_m p_m = s_1$
**???**

**Seite 8**

besitzt eine Lösung $p_i \geq 0$.
Bew.: Setze $\xi_0 = (\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}})$, $\xi_\alpha = M^\alpha \xi_0$ und $U\,\xi_\nu = \nu$, $U\,M\,N^{-1} = \mathcal{M}$.

e) Ist $m > 2\,k + 1$, so besitzt das System (7.2), falls es überhaupt lösbar ist, auch eine Lösung, bei der nur $2\,k + 1$ von den $p_i \neq 0$ sind.

f) Ist $m = 2\,k+1$ und sind alle $\mu_i$ verschieden, etwa $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{2k+1}$, so ist das System (7.2) dund lösbar, wenn

(1) $s_{2\,k} - d_1^{(i)} s_{2\,k-1} + d_2^{(i)} s_{2\,k-2} - + \cdots + s_0 \cdot d_{2\,k}^{(i)} = q_i \cdot (-1)^{i-1}$ mit $q_i \geqq 0$.

Dabei ist $d_e^{(i)}$ die $l - k$ elementarsymmetr. Funktion der $2k$ Zahlen

$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \cdots \mu_{2k+1}$.
Bew.: Der linke Ausdruck (8.1) ist gleich
$\xi_0' \cdot \Pi_{\rho\neq i}(M - \mu\,\rho) \cdot \xi_0 = p_i \cdot \Pi_{\rho\neq i}(\mu_i - \mu\,\rho)$ falls (7.2) lösbar ist; also gilt (8.1).
Ist umgekehrt (8.1) richtig, so setze man $\hat{p}_i = \frac{q_i \cdot (-1)^{i-1}}{\Pi_{\rho\neq i}(\mu_i - \mu\rho)} \geqq 0$ und wieder $\hat{\xi}_0 =$ **???** . Dann wird
für die $(2k+1)$ Polynome $f_i(M) = \Pi_{\rho\neq i}(M - \mu\rho)$
$\hat{\xi}_0' \cdot f_i(M) \cdot \hat{\xi}_0 = (\hat{p}_i \cdot \Pi_{\rho\neq i}(\mu_i - \mu\,\rho) =)$ linke Seite von (8.1)

**Seite 9**
Also ist mit $\hat{s}_\rho = \hat{\xi}_0' \cdot$ **???** $\cdot \hat{\xi}_\rho$ sicher

1. $(s_{2\,k} - \hat{s}_{2\,k}) - d_1^{(i)}(s_{2k-1} - \hat{s}_{2k-1}) + \cdots = 0$ woraus $s_{rho} = \hat{s}_\rho$ folgt, so daß(7.2) Lösung $\hat{p}_i$ hat. Es wären sonst nämlich die verschiedenen Zeilen (9.1) lin. abh., d.h. die Polynome $f_i(x)$ wären linear abhängig, was durch Einsetzen $x = \mu_i$ widergelegt wird.

   g) Zur Vereinfachung der Bedingg. (8.1) führe die elementarsymm. Fktionen $c_p$ von $\mu_1, \cdots, \mu_{2k+1}$ ein. Es ist

   $$d_1 = c_1 - \mu_i c$$
   $$d_2 = c_2 - \mu_i c_1 + \mu_i^2$$
   $$d_3 = c_3 - \mu_i c_2 + \mu_i^2 - \mu_i^3 \qquad \text{usw.}$$

   daher ist (8.1) gleichwertig zu

2. $\mu_i^{2k} + [s_i - c_1 s_0]\,\mu_i^{2k-1} + \cdots + [s_{2k-1} - c_1 s_{2k-2} + c_2 s_{2k-2} + c_2 s_{2k-3} - \cdots] \cdot \mu_i + [s_{2k} - c_1 s_{2k-1} + c_2 s_{2k-2} - \cdots + c_{2k} s_0] = q_i(-1)^{i-1}$ mit $q_i \geqq 0$.
   Sind sogar alle $q_i > 0$, so besagt (9.2). daßdie Nullstellen der normierten Polynome $f(x) = \Pi_1^{2k+1}(x - \mu_i) = x^{2k+1} - c_1 x^{2k} + \cdots - c_{2\,k+1}$

**Seite 10**

$f^*(x) = x^{2k} + [s_1 - c_1 s_0]\,x^{2k-1} + \cdots + [s_{2k} - \cdots + c_{2k} s_0]$ sich gegenseitig trennen (und alle reell sind).

Das Entsprechende gilt dann für je zwei aufeinander folgende Glieder der aus $f$ und $g$ gebildeten Sturmschen Kette: (deren höchste Koeff sind $> 0$)
• Nullstellen von $f$, x Nullstellen von $g$, $f = q\,g - f_1$.
**Graph** (NB: wo $g = 0$, ist $f_1 = -f$)

<u>10.1.45</u> (h) Zur bequemeren Rechnung setze für Polynome $p(x)$ des Grades $\leq 2k$ $[A\,x^m + B\,x^{m-1} + \cdots C] = A\,s_m + B\,s_{m-1} + \cdots + C\,s_0$.
Dann lautet die notwendige & hinr. Bedgg. (8.1) für die Lösbarkeit von (7.2) folgendermassen: Bei $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{2k+1}$ ist

$$(10.1) \begin{cases} [(x-\mu_2)(x-\mu_3)\cdots(x-\mu_{2k+1})] \geqq 0 \\ [(x-\mu_1)(x-\mu_3)\cdots(x-\mu_{2k+1})] \leqq 0 \\ \cdots \\ [(x-\mu_1)(x-\mu_2)\cdots(x-\mu_{2k})] \leqq 0 \end{cases}$$

(i) Der Fall $\underline{k=1}$. Die Galerkin-Näherung $\gamma$ **???** lautet $\gamma = \frac{s_1}{s_\rho}$, daher ist $[x-\gamma]=0$

**Seite 11**

Daher gilt für Polynome $p(x)$ des Grades $\leq 2$, $p(x) = x^2+ax+b$,
(11.1) $[p(x)] = [(x-\gamma)^2] + p(\gamma)\cdot s_0 = r_1^2 + s_0 \cdot p(\gamma)$ und (10.1) lautet hier

$$(11.2) \begin{cases} r_1^2 + (\gamma-\mu_2)(\gamma-\mu_3) \geqq 0 \\ r_1^2 + (\gamma-\mu_1)(\gamma-\mu_3) \leqq 0 \\ r_1^2 + (\gamma-\mu_1)(\gamma-\mu_2) \geqq 0 \end{cases}$$

Es liegen also oberhalb und unterhalb von $\gamma$ Werte $\mu$, und **???** für die "inneren" ist $(\gamma-\mu_1)(\mu_2-\gamma) \leq r_1^2$, für die "äußeren"
(11.2.1) $(\gamma-\mu_1)(\mu_3-\gamma) \geqq r_1^2$
$< u,\, v >$ ist durch Einschliessungsintervall, wenn $[(x-n)(x-v)] \leqq 0$.

(j) $\underline{\text{der Fall } k=2.}$ Setze $\Delta(u,\,v) = \begin{vmatrix} [x^2(x-u)(x-v)] & [x(x-u)(x-v)] \\ [x(x-u)(x-v)] & [(x-u)(x-v)] \end{vmatrix}$.
Es ist
(11.3) $\Delta(u,\,v) = |\aleph'(M-u)(M-v)\aleph|$ mit $\aleph = (M\,\mathfrak{q}_0,\, \mathfrak{q}_0)$. Ferner
(11.4) $\Delta(u,\,v) = \frac{[G^2(x)y]}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}^2} \cdot [(x-u)(x-v)] - \frac{G(u)\cdot G(v)\cdot G(\gamma)\cdot s_0^2}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}^3}$
Darin bedeutet $\gamma$ die Galerkinzahl **???** und $G(x)$ die linke Seite des Galerkin-Gleichung; sie ist bis auf konst. Faktor gekennzeichnet durch (vgl. S.16)
(11.5) $[G(x)] = [x\,G(x)] = 0$; sei $G(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdot \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}$
(11.6) Ist $\Delta(n,\,v) \leqq 0$, so ist $< u,\, v >$ Einschliessungsintervalle, sogar

**Seite 12**

schon auf Grund einer passend ausgewählten 1 Fr $\cdots$ Gr.-Rechnung. Denn es gibt **???** $= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq 0$ mit $c'\aleph'(M-v)(M-v)\aleph\, c \leqq 0$.

Ist umgekehrt $< n, v >$ ein Einschliessungsintervall, dessen Enden ausserdem sich mit $\gamma_1$, $\gamma_2$ trennen (d.h. $G(u)\cdot G(v) < 0$), so ist $\Delta(n,\,v) \leqq 0$.
Bew.: Ist $\Delta(n,\,v) > 0$, so gibt es, falls etwa $\gamma_1 < n < \gamma_2 < v$, eine Zahl $p < \gamma_1$ derart, daßdie Bedingungen (10.1) für $\mu_1 \div \mu_5 = p,\, \gamma_1,\, u,\, v,$ **???** erfüllt sind, also **???** $< u,\, v >$ kein Einschl.-Int.; zu benutzen ist: Aus $\Delta > 0$ folgt nach (11.4) $[(x-u)(x-v)] > 0$, da $G(n)\cdot G(v) < 0$ und $G(\gamma) \leqq 0$. Das letztere folgt aus $\begin{cases} (11.1): 0 = [G(x)] = [(x-\gamma)^2] + G(\gamma). \\ (11.5) \end{cases}$.

(11.5) besagt, daß$< \gamma_1, \gamma_2 >$ ein optimales Einschl.intervall für $k = 1$ ist. Nützlich ist die Reihenregel (aus (11.5)):

$$[(x-\gamma_1)\cdot(ax^2+bx+c)] = [x-\gamma_1]\cdot(a\,\gamma_2^2+b\,\gamma_2+c).$$

$< \gamma_1, \gamma_2 >$ ist ein Einschliessungsintervall nach (11.6), (11.4), und zwar ein optimales, da $-\infty$, $\gamma_1$, $p$, $\gamma_2$, $+\infty$ für $\gamma_1 < p < \gamma_2$ stets realisierbar nach (10.1). Alle übrigen optimalen Einschl.-Intervalle trennen sich aus dem selben Grunde mit $< \gamma_1, \gamma_2 >$.

**Seite 13**

Bestimmung aller optimalen Einschliessungsintervalle mit einem gegebenem Ende $u$:
1) $u < \gamma_1$; dann ist nach (11.4) $\Delta\,(u,\,\gamma_2) < 0$, also hat die Gl. $\Delta\,(u,\,v) = 0$, die in $v$ quadratisch ist, zwei reelle Lösungen $v_1 < (\gamma_2 <) v_2$, und $< u,\, v_1 >$ ist das einzige opt. **???**
2) $\gamma_1 < u < \gamma_2$, dann ist nach (11.4) $\Delta\,(u,\,\pm\infty) < 0$, also gibt es $< v_1,\, u >$ und $< v_2,\, u >$ mit $v_1 < \gamma_1 < u < \gamma_2 < v_2$. Diese Einschl.int.sind wirklich optimal, denn man kann z.B.
im Falle 1) $v_1$ nicht mehr nach links verschieben, weil sonst nach Konst. von $v_1$ $\Delta > 0$ wird; man kann aber auch nicht $\breve{u}$ nach rechts verschieben, weil sonst nach Fall 2) $\Delta > 0$ wird.

Die Zahlenrechnung bei gegebenen $S_\mu = \mathfrak{q}_0' M^\nu \mathfrak{q}$, verläuft so , $\gamma = \frac{s_1}{s_0}$;
$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}^{-1}$ $G(x) = x^2 + g_1 x + g_2$ mit $g_1 = \frac{S_0S_3 - S_1S_2}{S_0S_2 - S_1^2}$ $g_2 = \frac{S_1S_3 - S_2^2}{S_0S_2 - S_1^2}$
$G(\gamma)$; $G(u)$; $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}^{-2}$ $[G^2] = S_4 + g_1 S_3 + g_2 S_2$. Hieraus $A = \frac{[G^2]}{G(\gamma)G(u)\cdot s_0^2}$
und schliesslich die Gl. für $v$ (11.4):

$$(13.1) \qquad 0 = v^2 + \{g_1 + A(s_1 - u\,s_0)\}\cdot v + \{g_2 - A\,(s_2 - u\,s_1)\}$$

NB: Bei beliebig an $k$ lautet die Galerkin-Gleichung

**Seite 14**

$$\det\left\{\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{pmatrix}\cdot X - \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

Die übrigens vielleicht neue **???** Tatsache , daßzwischen $\gamma_1$ und $\gamma_2$ stets ein EW liegt, läßt sich auf beliebiges $k$ verallgemeinern :
Für $\mu \neq v$ ist stets ein EW $\mu_i$ zwischen $\gamma_{mu}$ und $\gamma_\nu$ vorhanden.

Bew für $k = 3$: Setze wie in (11.3)

$$\Delta(u, v) = \begin{vmatrix} [(x-u)(x-v)] & [x(x-u)(x-v)] & [x^2(x-u)(x-v)] \\ [x(x-u)(x-v)] & [x^2(x-u)(x-v)] & [x^3(x-u)(x-v)] \\ [x^2(x-u)(x-v)] & [x^3(x-u)(x-v)] & [x^4(x-u)(x-v)] \end{vmatrix}$$

Für jedes $t$ ist

$$\Delta(u, v) = \begin{vmatrix} [(x-u)(x-v)] & [x(x-u)(x-v)] & [x^2(x-u)(x-v)] \\ [(x-t)(x-u)(x-v)] & [x\cdot(x-t)(x-u)(x-v)] & [x^2(x-t)(x-u)(x-v)] \\ [x(x-t)(x-u)(x-v)] & [x^2(x-t)(x-u)(x-v)] & [x^3(x-t)(x-u)(x-v)] \end{vmatrix}$$

Für $u = \gamma$, $v = \gamma_2$, $t = \gamma_3$ verschwindet die vorletzte Zeile nach (11.5)

Aus $\Delta(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ folgt aber die Existenz einer Spalte $\tau$ mit $\tau'\aleph' \cdot (M - \gamma_2)(M - \gamma_2) \cdot \aleph\,\tau = 0$ und daher Existenz von $\mu_i \subset < \gamma_1, \gamma_2 >$.

Für Galerkin-Gl. bei $k$ beliebigen Ausgangsspalten gilt dieser Satz nicht. Sonst müsste die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da für Galerkin-Gl. des Grades 2 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ist, ebenfalls die Wurzel 0 haben.

**Seite 15**

(k) Aufgaben: Hat die zweite Wn von $\Delta(u, v) = 0$ (11.4) etwa mit zweifachen Einschliessungsintervallen zu tun, die zwei EWe enthalten ? ja (= kürzeste 2 fache Einschl. Int.)
Normale Matrizen behandeln durch Polynome in zwei Variablen: $x$, $\overline{x}$;
$m_{\alpha\,\beta} = [$**???**$] = (M^\alpha \mathfrak{q})^* \cdot M^\beta \mathfrak{q}$ setzen. -Bedggen (10.1) vereinfachen analog (11.2.1) - Auch unter der Nebenbedingg. der Positiv-definitheit alle optimalen Einschliessungsintervalle bestimmen ! Z.B. ist bei Fr.Gr. $< \frac{s_1}{s_0}, +\infty >$ nicht mehr optimales, sondern $< \frac{s_2}{s_1}, \infty >$. Ferner kann man unter der Voraussetzung, dass ein EW-freies Intervall bekannt ist, nach den opt. Einschl.-Int. fragen, oder allgemeiner: Man setzt alle EWe in einem vorgebenen Intervall als bekannt voraus, d.h. man kennt mehrere EW-freie Intervalle. - Bei Ausarbeitung betonen, dass bei Dglen "Iteration" ein Operator mit den EWen $\lambda_i^{-1} = K_i$ ist. -Prüfen, ob die Vereinigung der zu den Unendlichen in einer 2 Fr.-Gr.-Rechnungen gehörigen notw. & hinr. Bedgg. (10.1) ausmacht; wenn ja, Hoffnung auf Ähnliches bei allgemeiner Wahl der **???** zu iterierenden Vektor.

**Seite 16**

(h) Der Fall eines beliebigen $k$ = Schrittzahl Hier ist $[p(x)]$ definiert für Polynome $p(x)$ des Grades $\leq 2k$: $[x^\nu] = s_\nu$. Sei nun $M_0$ reell. Es gibt mindestens ein reelles nomiertes Polynom $q_0(x)$ des Grades $\leq k$, für welches (16.1) $[x^\rho(x - n_0)\,q_0(x)] = 0$ $(\rho = 0, 1, \cdots, h-1)$ gilt, da dies $n$ Gl. für $(n+1)$ Koeff. von $q(x)$ sind. Fr jedes solche $q_0(x)$ ist $q_0(n_0) \neq 0$, das sonst $[q_0^2(x)] = 0$ wäre, d.h. $\mathfrak{q}_0, \cdots, \mathfrak{q}\,h$ linear abhängig. Also gibt es auch nur ein

normiertes $q_0(x)$ dieser Art.
Nun hat die Gl. $\Delta(u_0, v) = 0$ (wenn $G_{(n_0)} \neq 0$) genau $n$ reelle Lösungen $v = u_1, u_2, \cdots, u_n$, Denn
$\Delta(u_0, v) = \det X'(M-n_0)(M-v)X = \det(X'(M-n_0)MX - vX'(M-n_0)X)$ und die Linearverbindg $X'(M-n_0)^2X$ dieser bei den reellen symm. Matrizen ist pos. definit. Die Determinanten des Gl.systems
(16.2) $[x^\rho(x-n)$ **???** $=0 \qquad (\rho = 0, \cdots, k-1)$ für die Koeff. von $q_i(x)$ ist gerade $\Delta(u_0, u_i) = 0$, also gibt es mindestens eine normierte Lösung $q_1(x)$, es muß also

$$q_0(x) = (x-u_i) \cdot q_i(x)$$

sein, dh. (16.3) $q_0(u_i) = 0$. Nun folgt, daß alle $\nu_i$ einfach sind. Wäre $u_1 = u_2$, so wäre $Rg\ X'(M-n_0)(M-u_1)X \leq n-2$ und es gäbe zwei lin. un. Lösungen $Q_1$ von (16.2). Also ist (16.4) $q_0(x) = (x-u_1) \cdot (x-u_2) \cdot \cdots \cdot (x-$ **???** $)$ mit reellen verschiedenen $n_i$.
(16.3) $\qquad [f(x)\ (x-n) \cdot \Delta(x, n)] \equiv 0$ f. alle $f(x)$
**???**

**Seite 17**

Da es nur ein Polynom $q_1(x)$ mit $[x^\rho(x-u_1)\,q_1(x)] = 0$ geben kann und $(x-u_0)(x-u_2)\cdots(x-n\,k)$ schon eins ist, folgt $(x-u_0)\,q_0(x) = (x-n_1)\,q_1(x) = \cdots = (x-n_k)\,q_n(x)$.
Dh. (17.1) $\Delta$**???** $= 0 \qquad (i \neq k = 0, \cdots, k)$.
Von den $k+1$ Zahlen $n_0, \cdots, n_k$ sind also, wenn ein $n$: herausgegriffen wird, die übrigen die Wurzeln von $\Delta(n_i, v)$; sie heissen eine "Familie".
(17.2) Hauptsatz: Je zwei aufeinander folgende Zahlen einer Familie begrenzen ein optimales Einschliessungsintervall (wobei für $n_{min}$ und $n_{max}$) das $\infty$ enthaltende "Intervall": $\mu \leq n_{\min}$ oder $\geq n_{\min}$ gemeint ist).
Bew.: $\alpha$) Aus $\Delta(n_i, n_k) = 0$ folgt $\tau' X'(M-n_i)(M-n_k)X\,\tau = 0$ dh. mit $x\,v = \mathsf{q}$: $\mathsf{q}'(M-n_i)(M-n_k)\,\mathsf{q} = 0$, also innerhalb und ausserhalb $< n_i, n_k >$ oder auf dem Rand mindestens ein $\mu_\rho$.
$\beta$) Diese Intervalle können nicht mehr verkleinert werden, weil falls etwa $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ numeriert wird, die $2n+1$ Eigenwerte $u_0$; $u_1$; $n_1$;$n_2$; $u_2$; $\cdots$; $n_h$, $n_h$ realisierbar sind nach (10.1), (16.1) & (16.4); in (10.1) ist immer der = Zeichene erfüllt außer inder ersten Gl., dort > wegen $[q_0(x)^2] > 0$.
(NB: Aus Hauptsatz (17.2) folgt, daß sich je zwei Familien trennen: $n_0 < v_0 < v_1 < u_1 < u_2 < v_2$ ?

**Seite 18**

Man erhält nach (17.2) die beiden optimalen Einschl.-Int. mit gegebenem Ende $u$ durch $< v_1, u >$ und $< n, v_2 >$, wobei $v_{1,2}$ die zunächst ober- und unterhalb von $n$ gelegenen Wurzeln von $\Delta(n, v) = 0$ sind. Dund ist $< n, v >$ Einschl.-Int., wenn es $v^*$ gibt mit $n < v^* \leq v$ und $\Delta(n, v^*) = 0$.
Vgl auch VII, S.27 für kürzeste Einschl.-Intervalle bei Schrittzahl 2

(m) <u>Gebrochene lin. Transf. von $M$</u>

Aus $M\,X = Y$ folgt für $\overline{M} = \frac{a\,M+b}{c\,M+d}$: $\tilde{M}\,\tilde{X} = \tilde{Y}$ mit $(\tilde{X}\,\tilde{Y}) = (X\,Y)\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{d} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} \end{pmatrix}}_{\text{genau( )}x\text{???}}$

Es wird für $S = (X\,Y)^*(X\,Y) \quad : \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{d} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} \end{pmatrix}^* S \begin{pmatrix} \mathrm{d} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} \end{pmatrix}$

und daher

$\tilde{\Delta}\,(n,\,v) = (a - n\,c)^n(a - c\,c)^n \cdot \Delta\,(\frac{b-d\,n}{a-c\,n},\ \frac{b-d\,v}{a-c\,v})$

Damit läßt sich für $k = 1$ leicht eine Gruppe gebrochener linearer Transf finden, die jede realisierbare EW-Verteilung wie der in eine solche überführen; für $k > 1$ scheint es das, nach Parameterzählung, nicht zu geben.

(n) Fortsetzg von (l): Fall beliebigen $k_1'$. Sind $n_0, \cdots, n_k$ eine Familie und $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ beliebig, so sind sie zusammen realisierbar, Bew: Für Polynome $a(x)$ des Grades $\leq k$

**Seite 19**

und das "Familienpolynom" $F(x) = \Pi_0^k(x - n_\nu)$ gilt (19.1) $\qquad [a(x) \cdot \frac{F(x)}{x-n_i}] = a(u_i) \cdot F'(u_i) \cdot p_i$ mit $p_i = \frac{[(\frac{F(x)}{x-n_i})^2}{F'(n_i)^2} > 0$ und bei der Ordnung

$$n_k < n_{k-1} < \cdots < n_0$$

gilt **???** $F'(n_i) = (-1)^i$; setze $a(x) = \Pi_1^p(x - \alpha_\rho)$ und **???** .

Damit werden sich alle optimalen mehrfachen Einschliessungsintervalle bestimmen lassen. NB: Die opt. $S$-fachen Einschl.<u>intervalle</u> sind begrenzt von 2 Mitgl. einer Familie $\mu_1,\ \mu_{s+1}$. Frage: Mehrfache E.-**???** = **???** Intervallen ?!

Falsch ist die folgende naheliegende Vermutung : Eine **???** $\mathfrak{z}$ ist Einschliessungsmenge, dh. enthält von jeder realisierbaren EW-Verteilung mindestens einen EW, wenn sie zu jedem $n$ eine $z \subset \mathfrak{z}$ enthält mit $\Delta\,(n,\,z) = 0$. Gegenbeispiel $k = 1$: **???**

Sehr schöne Vermutung (aber falsch für $\geqq$ 2 Schritte).

Dund sind $\mu_1 < \mu_2 \cdots < \mu_n$ realisierbar, wenn **???** $\geqq 0$ für $\mu_i \leq m,\ v \leq \mu_{i\,n}$ und $\Delta\,(n,\,v) \leq 0$ für $n,\ v \leq \mu_1$ oder $\geq \mu_n$. (Auch für $n < 2\,k + 1$ ?) **???** für $k = 1$. Die Bedgg verlangt, dass sie Matrix von $\Delta$ **???** **???** ist. Der Hauptsatz (17.2) kann so ausgesprochen werden: Dund ist $< n,\,v >$ Einschliessungsintervall, wenn Signatur $X^*(M - n)\,(M - v)\,X < n$ dh. wenn es $p(x)$ gibt mit $[(x - n)\,(x - v)\,p^2(x)] \leqq 0$.

**Seite 20**

Beweis-Ansatz: Produkte wie in (10.1) als **???** ungeformter Determinanten $\Delta\,(\mu_i,\,\mu_k)$ wie in S.14 Mitte auffassen und die Definitheit benutzen. So

ausgehend von gewiss realisierbarer EW-Verteilung durch stetige Deformation zu der vorgegebener gelangen.
Für $n < 2k + 1$ kommt noch die Bedgg. hinzu:
Für $P(x) = \Pi_1^n (x - \mu_i)$ ist $[P(x)\, f(x)] = 0$ f. alle $f(x)$ mit Grad $\leq 2\,k - n$.

$\left\{ \begin{array}{c} n < 2\,k+1 \\ \text{Mehrfache EWe: Analog (10.1) gilt: Ges. seien } \mu_1, \cdots, \mu_n \text{ mit } n \leq 2\,k+1 \end{array} \right.$
Sei $P(x)$ das kleinste Polynom, für welche alle $P(\mu_i) = 0$. Dund sind $\mu_1, \cdots, \mu_n$ realisierbar, wenn
(20.1) alle $[\frac{P(x)}{x-\mu_i}] \cdot P'(\mu_i) \geqq 0$ dh. alle Residuen **???** $\frac{P^*(t)}{P(t)}$ sind $\geqq 0$ und außerdem $[P(x) \cdot f(x)] = 0$ f. alle $f(x)$ mit Grad $f \leq 2\,k - n$.
Bew: (7.2). NB: Also ist jede Familie realisierbar ! Frage: Wann $k + 2$ EWe realisierbar ?

Spezielle Formeln: (20.2) $G(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = |x\, s_{p+q-2} \quad s_{p+q-1}|$
Bew: (11.5) vgl Bauer oder **???**, Satz von **???** über

(20.3) $(v - n) \cdot \Delta\,(u,\, v) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \\ 1 & v & v^2 & v^3 \end{vmatrix}$ Abzählung reeller Wurzeln

Bew: (16.3)
s. Muir S.169 172

(20.4) $\Delta\,(u,\, v) = - \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & u \\ S_2 & S_3 & S_4 & u^2 \\ 1 & v & v^2 & 0 \end{vmatrix}$ $\leftarrow$ Dies läßt sich vielleicht auf alle

selbst Aufg. $Y = A\,X$ erweitern ? Bew.: (**???**
(20.6) $\Phi\,(u,\, v,\, w) = (u - v) \cdot \Delta\,(u,\, v) \cdot G(w) + zykl. \equiv 0$ Bew.: $[\Phi\, f(v)]_v = 0$ wenn $Gr\, f \leq k - 1$. Nun enthält aber $\Phi$ selbst kein Glied, das durch $u^k v^k w^k$ **???** ist,

**Seite 21**

(21.1) $G(t) = [(t - x_1)\,(t - x_2)\, x_1\,(x_1 - x_2)] = \frac{1}{k!} [\Pi_1^k (t - x_\nu) \cdot D^2\,(x_1 \cdots x_k)]_k$
$D =$ Differenzprodukt
(21.2) $\Delta\,(u,\, v) = [\Pi_1^k\,(u - x_v)(v - x_v) \cdot D^2 (x_1, \cdots, x_k)]_k \cdot \frac{1}{k!}$
NB: Die symbolische Darst. einer Form in $S_0 - S_n$ durch symmetrische Fkt. ist eindeutig !
(21.3) $[f(x) \cdot \Delta\,(u,\, x)]_x = f(u) \cdot [\Delta\,(u,\, x)]_x$ $(Gr\, f \leqq k)$

(21.4) $\Delta\,(n,\, x) = G(u) \cdot x^k + \cdots$

(21.5) $[\Delta(u,x)] = [x^k G(x)] = [\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \end{vmatrix}]_3 = \frac{1}{3!}[D^2(x_1 x_2 x_3)]_3$

(21.6) $M(u,v) = X^*(M-u)(M-v)X = [\mathfrak{q}(x-u)(x-v)\mathfrak{q}']$ mit

$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ & \cdots & \end{pmatrix} = [\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}']$

Deutung von $[\Pi_1^{2k}(x-c_2)]$:

<u>(21.7)</u> mit $\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ist $\mathfrak{u}'\,M(n,v)\,b = [a(x)\cdot(x-n)(x-v)\,b(x)]$ mit $a(x) = a_1 x \cdots + a_{k-1}x^{k-1}, \cdots$

(21.8) $f^*(t) = [\frac{f(x)-f(t)}{x-t}]_x$ (vgl. S.10 oben) s. auch 74

(21.9) $(u-v)(t-w)\,\Delta(u,v)\,\Delta(t,w) + \cdot + \cdot$ ($u, v, w$ zyklisch)$= 0$
Bew. wie (20.6) oder wohl

**Seite 22**

Definiert man für rationale (mindestens bei $\infty$ rationale) Funktionen, die in $\infty$ einen **???** höchstens der Ordnung $2k$ haben,
(22.1) $[f(x)] = [$ Hauptteil bei $\infty$ von $f(x)]$,
dh. z.B. $[\frac{1}{x}] = [\frac{1}{x-a}] = [\frac{1}{p(x)}] = 0$ (Gr $p \geq 1$) so gilt einfach (vgl. 21.8)
(22.2) $f^*(t) = [\frac{f(x)}{x-t}] = f'(t) + [x-t]\cdot\frac{f''(t)}{2!} + [(x-t)^2]\cdot\frac{f'''(t)}{1!} + \cdots$

(22.3) (Verallg. von 21.7) $[a(x)\cdot(\alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma)\,b(x)] = \mathfrak{u}'\,(\alpha\,Y'Y + \beta Y'X + \gamma)\,b$ für Gr $a,\, b \subseteq k-1$.
(22.4) Die <u>Eigenwerte</u> von $N = \alpha\,Y'Y + \beta\,Y'X + \gamma\,X\,X$ sind diejenigen $k$ Zahlen (reellen) $\rho_1, \cdots, \rho_k$, zu denen es Polynome $p_K(x)$ des Grades $\leq k-1$ gibt mit
$[f(x)\ (alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma - \rho_K)\,p_K(x)] \equiv 0$ f. alle $f$ mit Gr $\leq k-1$
<u>Vorsicht:</u> Daher ist vorausgesetzt: $X'X = E$: dh. allgemeiner: die $\rho$ sind die Lösungen von $\det(N - \rho\,X'X) = 0$

(22.5) Ein Polynom $F(x)$ des Grades $k+1$, das alle $f(x)$ des Grades $\leq k-1$ zu Null macht: $[F(x)\,f(x)] = 0$ hat nur reelle und von **???** verschiedene Wurzeln & je zwei sind **???**. Denn sonst wäre $F(x) = (x^2 + ax + b)\cdot F_1(x)$, $\mathrm{Gr}\,F_1 = k-1$, mit definitem $x^2 + ax + b$. Dann ist aber $x^2 + ax + b$. Dann ist aber $x^2 + ax + b = (x - \alpha^2) +$ **???**

**Seite 23**

(v) Beliebige $k$ Ausgangsvektoren $(\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k) = X$. Setze $\Delta(n, v) = \det M(n, v)$, $M(u, v) = X'(M-u)(M-v)X$.
Auch hier gilt: Liegen in Intervall $u \leq x \leq v$ $r$ Nullstellen von $\Delta(u, x)$, so liegen mindestens $r$ EWe von $M$ in demselben Intervall. Fortsetzg. S. 56
Bew: Die Signatur der quadrat. Form mit der Matrix $M(u, x)$ fällt monoton, wenn $x$ von $U$ bis $v$ läuft; denn aus $\mathfrak{u}'M(u, x)\,u \leq 0$ folgt $\mathfrak{u}'x'(M -$ **???** und daher für $y > x$ $\quad \mathfrak{u}'M(n, y)\,\mathfrak{u} = \mathfrak{u}'M(u, x)\,\mathfrak{u} - (y - x) \cdot \mathfrak{u}'X'(u - n)\,X\,\mathfrak{u}$
1) wegen $M(\breve{u}\,x) = M(\breve{u}$ **???** $) - (x - \breve{u}) \cdot x'(M - \breve{u})\,x \leq 0$. Kürzerer Schluß: $\mathfrak{u}'M(\breve{u}\,x)\,\mathfrak{u}$ hängt linear von $x$ ab und ist $> 0$ für $x = \breve{u}$.
Also hat $M(n, v)$ mindestens $r$ negative EWe und daher $(M - n)(M - v)$ erst recht ? Die Dimension **???** ein Raum $A$ mit $\mathfrak{u}'M(n\,x)\,\mathfrak{u}$ kann **???** steigen bei $x \nearrow$, $x > 0$.
Es gilt aber nicht mehr der Satz von S.16, daßaus $\Delta(n, v)$: $\Delta(n, w) = 0$, $v \neq w$ folgt: $\Delta(v, w) = 0$.

Gegenbeispiel **???**: $n = 4$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hier $M(n, v) = (u\,v + 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (n + v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ also sind die beiden Wurzeln von $\Delta(n, v) = 0$

$$v_1 = \frac{-u - 2}{n + 1} \qquad , \qquad v_2 = \frac{n - 2}{n - 1}$$

Diese beiden Substitutionen erzeugen aber eine unendl. Gruppe, da $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ mit <u>posit.</u> Koeff.
2) Die Anzahl der negativen EWe von $M(\breve{u}, v)$ ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $\Delta(\breve{u}, x)$ (und $\Delta(x, v)$) im Intervall $\breve{u} \leq x \leq v$ **???** $\Delta = \det(E - X$ **???** $)$ **???**

**Seite 24**

Dieses Zerfallen von $\Delta(n, v)$ in zwei Bilinearfaktoren ist Zufall. Es braucht nicht einmal bei Ein-Freiheitsgrad mit $k =$ **???** einzutreten; z.B.

b) $M = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right)$ gibt

$$\Delta(n, v) = u^2 v^2 + 3\,u\,v + 2 - (n + v)^2$$

Da $\Delta(t, t) = 0$ die Wurzeln $\pm\rho$, $\pm\overline{\rho}$ mit $\rho^2 = \frac{1}{2} + \frac{v'}{2}\sqrt{7}$ hat, kommen nur folgende Bilinearfaktoren in Betracht:

1. $(t+\rho)(t-\rho) \to n\,v - \rho^2$
2. $(t+\rho)(t+\overline{\rho}) \to n\,v +^{Rn} \rho \cdot (n+v) + |\rho|^2 = n\,v + \frac{1}{2}(n+v) + 2$
3. $(t+\rho)(t-\overline{\rho}) \to n\,v + i \cdot Im\,\rho \cdot (n+v) - |\rho|^2 = n\,v - \frac{i}{2}\sqrt{7}\,(n+v) - 2$
   Widerbeggen: 1) $n\,v = \rho^2$, $n+v = 0$ 2) $n = 0$, $v = 4$ 3) $n+v=0$ $n \cdot v = 2$
   hier ist $v$ keine sehr lin Fkt. von $n$ **???**

Zu Beispiel a): In der Kette $u$, $v_1$, $v_2\,v_1$, $v_1\,v_2\,v_1, \cdots$ ist jeder Glied $z$ von den Wurzeln von $\Delta(x, z) = 0$ eingerahmt. Für $\breve{u} = \pm\sqrt{2}$ wird $v_1 = v_2 = -\breve{u}$ !
Beispiel einer Kette: $0 \quad -2 \quad \frac{4}{3} \quad -\frac{10}{7} \quad \frac{24}{17} \quad -\frac{58}{41} \quad \frac{140}{99} \to \pm\sqrt{2}$
(p) 1-Fr.-Gr.-**???** , $k = 2$, $n = 4, 5$
$n = 4$: Dann sind $\mu_1 \leq \leq \mu_4$ realisierbar, wenn $[\Pi\,(x-\mu_i)] = 0$ und wenn außerdem $(\mu_1, \mu_2)$ und $(\mu_3, \mu_4)$ Definitheitsintervalle von $\Delta(u, v)$ sind.
$n = 5$: $\mu_1, \cdots, \mu_5$ alle fünf $\mu_i$, $\mu_{i+1})$ Definitheitsintervalle und sind sie trotzdem nicht realisierbar, so ist genau eine Bedgg. von (10.1) verletzt, und die darin auftretenden vier $\mu_i$ bilden schon für sich eine definite Punktgruppe. Daher ist bei $n = 5$, $n = 2$

**Seite 25**

die folgende Bedgg. not & hinr. für Realisierbarkeit: $\mu_1, \cdots, \mu_5$ bilden eine definite Pktgruppe (dh. zwischen zwei **???** (25.1) benachbarten ist $\Delta(n, v) > 0$) und er ist $R(P, P^*) \geqq 0$ mit $R(P, P^*) = \Pi_1^5\, P^*(\mu_i)$; $P(x) = \Pi_1^5\,(x - \mu_i)$.
Ein Pkt einer <u>definiten</u> Gruppe von 5 Pkten **???** entbehrlich wenn auch noch seiner Streichung noch eine definite Pktgruppe übrig bleibt. Es gilt: Dund ist $\mu$ entbehrlich, wenn für seine beiden
(25.2) Nachbarn $\Delta(\lambda, \nu) \geq 0$.
<u>Aufgabe:</u> Für die zunächst bei $n$ gelegene Wurzel von $\Delta(n, x) = 0$ eine Entwicklung finden. Kettenbruch ? Iterationsverfahren ?
<u>(q) Entfernung zweier Familien.</u> Fortsetzg **???** Fall $s = 2$ in VII 74
Setzt man
(25.3) $\delta(n, v) = \frac{(n-v)\,\Delta(n, v)}{G(u) \cdot G(v)}$ , $\delta(n, v) + \delta(u, n) = 0$
so ist nach (20.6) & (21.9)
(25.4) $\delta(u, v) + \delta(u, w) + \delta(w, u) = 0$
(25.5) $\delta(u, v) \cdot \delta$**???** +zykl.$(u\,v\,w) = 0$
Nach (24.2) kann $\delta(n, v)$ als "Abstand" von $n$ und $u$ angesehen werden: Es ist additiv. $\delta(n, v) = 0$ dund, wenn $u$, $v$ derselben Familie angehören, also nach (25.4) $\delta(n, v) = \delta(n, w)$, wenn $v$ mit $w$ derselben Familie angehören.
$G(u) \cdot G(v) = 0$ ist gleichbedeutend mit

(25.4) $\delta(n,\, v) = \infty$

**Seite 26**

wegen (26.1) $\mathfrak{q}_1 \cdot \Delta(u,\, v) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} & G(u) \\ G(v) & \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & 1 \\ S_1 & S_2 & u \\ 1 & v & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$

$G(u) \cdot G(v) + \mathfrak{q}_2 \cdot \Delta_1(n,\, v)$ mit $\mathfrak{q}_1 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} > 0$, $\mathfrak{q}_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} > 0$

gilt:

(26.2) $\delta(u,\, v) = \frac{u-v}{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_2 \cdot \frac{\Delta_1(u,\, v)}{\Delta(u,\, v)}}$

Aus (21.9) folgt: Ist $(u \cdot v) \cdot \Delta(n,\, v) = 0$, so ist f. **???** $t,\, w$,

(26.3) $\frac{u-t}{u-w} \cdot \frac{\Delta(u,\, t)}{\Delta(u,\, w)} = \frac{v-t}{v-w} \cdot \frac{\Delta(v\, t)}{\Delta(v\, w)} = \mathfrak{q}_{tw}(u) = \mathfrak{q}_{tw}(v)$

eine Familieninvariante von $u$, Die für verschiedene Wahl von $t$, $w$ entstehenden, Invarianten hängen durch gebr. lin. Transf. zus.:

(26.4) $\mathfrak{q}_{tw}(\breve{u}) = \frac{\delta(\breve{u})-\delta(t)}{\delta(\breve{u})-\delta(w)} \cdot \frac{G(t)}{G(w)}$ mit $\delta(\breve{u}) = \delta(\breve{u},\, n)$; $n$ fest **???**

Es ist bei $\Delta(u,\, v) = 0$ ferner

(26.5) Kann man hiermit oder mit $\mathfrak{q}_{tw}$ natürliche (Familien-) Koordinaten einführen, durch die sich die not. & hinr. Bedggen für Realisierung übersichtlicher formulieren lassen ?

Gibt es ähnliche Formel wie (26.1) mit $\Delta(u,\, t)$ statt $G(u)$ ?

Für die Familie $u_0, \cdots, u_k$ die aus den Nullstellen eines "Familienpolynoms" $F(x)$ besteht (gekennzeichnet durch (26.5,5) $[x^\rho F(x)] = 0$), ist die Invariante (26.3)

(26.6) $\mathfrak{q}_{tw}(u_0) = \frac{F(t)}{F(w)}$

NB: Wohl die **???** ist die Spur $\Sigma\, \mu_i$

**Seite 27**

(27.1) Das Familienpolynom zu gegebener Invariante $\mathfrak{q}_{tw}$ ist const. $((u-t)\,\Delta\,(u\,t) - \mathfrak{q}_{tw} \cdot (u-w)\,\Delta\,(u\,w))$

Die sämtlichen Familienpolynome erhält man nach Wahl von $\alpha\,\beta\,\gamma$ durch

$$F(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \alpha & \beta & \gamma & p \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} \qquad -\infty < p \leq +\infty$$

insbes. $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & p \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$

(27.2) Schneidet man im projektiven Raum $R_3$ die Raumkurve mit der Parameterdarstellung $\{1\ n\ n^2\ n^3\}$ mit einer Ebene durch die festen Punkte $\{s_0\ s_1\ s_2\ s_3\}$, $\{s_1\ s_2\ s_3\ s_4\}$, so bilden die Parameterwerte der drei Schnittpunkte gerade eine Familie.

(27.3) Die Familienpolynome bilden lineare Schar vom Rang 2 (nach 26.5,5). Nach Wahl von Basis $F_a(x)$, $F_b(x)$ ist das Beiwertverhältnis eine Familieninvariante: $F_n(x) = \alpha\, F_a(x) + \beta\, F_b(x)$; $0 = \alpha\, F_a(n) + \beta\, F_b(n)$.

(27.4) Jedes Polynom **???** des Grades **???** $k + 1$ $(l \leq k)$, für welches **???** , $P(x)] = 0$ für $\rho = 0, 1, \cdots, k - l - 1$, läßt sich eindeutig schreiben (mit Gr $A$, $B \leq l$)

$P(x) = A(x) \cdot \frac{(x-u)\,\Delta\,(u\,x)}{G(u)} + B(x) \cdot G(x)$ 1) mit fester Zahl $n \neq \gamma_i$

Daraus und mit (28.3') folgt mit $c_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$:

(27.5) $P^*(t) \cdot G(t) = A(t) \cdot C_2 + P(t) \cdot G^*(t) \leftarrow$ s. auch 74.1.2 ! Daher: Hat $P$ mit $A\,G$ und $P'$ keine Wurzel gemein, so ist notw. **???** hinr. für die Realisierbarkeit von $P$: $A$ hat $l$ reelle Wu, und Frage: Gilt 27.6 auch für Gr $P > 2n + 1$ ?!

(27.6) Vgl. S. 71 $B(\alpha) \cdot A'(\alpha) < 0$ für $A(\alpha) = 0$. dh **???**

**Seite 28**

(28.1) Oder: Die Wurzeln von $G\,A$ sollen die **???** trennen.

(28.2) Mit $E(x\,y) = (x - y)\,\Delta(x\,y)$ sagt 20.6:

(28.3) $E\,(x\,y)\,G(z) + E\,(y\,z)\,G(x) + E(z\,x)\,G(y) = 0$

(28.3') daher $E\,(x,\,u) = \frac{G(n)}{G(t)}\,E\,(t\,n) + \frac{G(u)}{G(t)}\,E\,(x\,t)$. (28.4) Alle normierten realisierbaren $P(x)$ erhält man, indem man ein beliebiger Polynom des Grade z.B. mit nur reellen Nullstellen in der Form $A\,B$ zerlegt, wobei die Nullstellen umschichtig zu $A$ & $B$ geschlagen werden und $A$ normiert wird. Ob die grösste Nullst. zu $A$ oder $B$ kommt, bestimmt sich aus $A\,B\,(\infty)$. $n = k+2$: Realisierbar sind genau die

(28.5) $P(x) = (x - a) \cdot \frac{(x-u)\,\Delta\,(u\,x) + b\,G(x)}{G(u)} + p(x - a -$

1) $G(x)$ $\left\{ \begin{array}{c} p \geq 0 \\ a,\, b \text{ beliebig} \\ u \text{ fest},\, G(u) \neq 0 \end{array} \right.$ $= (x - a)$. normiertes Familienpolynom

$+p\,(x - a - 1) \cdot G(x)$

**???**

Aufgabe: Gröbners Verf. der kleinsten Quadrate entlarven; **???**

NB: All diese Schlüsse beruhen darauf, dass $[f^2(x)] > 0$; lassen sie sich auf geordnete Körper übertragen ?

Aufgaben: Die untere Schranke für $\kappa_1$ bei gegebener unterer Schranke $l_2 < K_2$ oder $l_3 < K_3$ als $\gamma_1 - h$ schreiben, Gl. für $h$ aufstellen und iterativ lösen **???** stellen von $A$ **???** $B$ haben $\operatorname{Im}\lambda > 0$; dh. $P = \Re n\, W(x)\, \{\frac{(x-n)\,\Delta\,(n\,x)}{G(n)} - G(x)\}$ **???**

**Seite 29**

Aufgabe: Die Randwertaufgabe des schwingenden Balkens mit endl. Laplace-Transformation behandeln, allgemeiner Ansatz $L(F) = \int_a^b K(s\,t)\,F(t)\,dt$. Anwendung auf Flügel mit konstanten Baugrössen + Einzelmasse.
Vermutung: Ist $y^n(t) + a_1(t)\,y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)\,y(t) = 0$ und sind für alle $t$ alle $n$ charakt. Wurzeln links von der reellen Zahl **???** gelegen, als **???** $\Re n\,\rho_\nu(t) < \alpha - \xi$, so **???**

$$y(t) \cdot e^{-\alpha\,t} \to 0 \qquad t \to \infty$$

Dh. ein System mit veränderlichen Baugrössen wäre stabil, wenn es zu jeder Zeit "stabile" Bauugrössen hat. Falsch: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} -1 & e^{3t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

## ??? Verfahren. [10]

Zur Berechnung der Eigenwurzeln eines Schwingungskreises **???**, bei dem jede Verbindung eine Unbekannte (1 **???** Gr.) und jeder Kasten eine homogene lineare mit konst. Koeff. Dgl. zwischen den beiden einmündenden Unbekannten **???**, wird eine "Umformung der Frequenzgleichg" **???** als "Produnkt der Einzelfrequenzgänge = 1". Daher ist der "Einzelfrequenzgang" eine rationale Fkt. von $\lambda$, nämlich das Amplitudenverhältnis "austretende : eintretende Amplitude einer **???** $e^{\lambda\,t}$." Dh. denkt man sich das System

**Seite 30**

aufgeschnitten, so daßdie eine Unbekannte, etwa $x$, in zwei gespalten wird, $x_1$, $x_2$, und setzt man $x_1 = e^{\lambda\,t}$ ein und löst nach $x_2$ auf, so wird $\frac{x_2}{x_1} = F(\lambda) =$ rat. Fkt. von $\lambda$, und $F(\lambda) = 1$ ist äq. der Frequenzvgl., dh. $F(\lambda) =$ **???**.
Weiss man nun, dass z.B. ein den rechten Halbebene keine Polstelle von $F(\lambda)$ liegt, so ist die Anzahl der Nullstellen von $F(\lambda) - 1$ in der rechten Halbebene = - Anzahl der **???** des Pkt. 1 durch das Bild der Achse $\lambda = i\,\omega$, $-\infty \leq \omega \to +\omega$.
Der Frequenzgang kann nur bei den von $\mathcal{N}$ betrachteten Systemen 1) elektrisch gemessen werden, und 2) kann man bei Anschluss gewisser verbotener Bauteile (Kästen) von vornherein sagen, daß kein Pol von $F$ rechts liegt, nämlich wenn jeder Kasten eine Dgl. vom Typ

$$a_m Y_A^{(m)} + \cdots + a_0 Y_A = b_k Y_e^{(k)} + \cdots + b_0 Y_e$$

darstellt, wobei alle Nullstellen von $a_m\lambda^m + \cdots + a_0 = 0$ links der **???** Achse liegen. Der Frequenzgang dieses Kastens ist nämlich $\frac{b_k\lambda^k + \cdots + b_0}{a_m\lambda^m + \cdots + a_0}$.

Wären dagegen z.B. alle Nullstellen der Zähler $b_k\lambda^k + \cdots + b_0$**???** links, so würde man das alte Kriterium auf den reziproken Frequenzgang $\frac{1}{F}$

**Seite 31**

Der mathematische Kern ist die folgende
Allgemeiner Prinzip: Kennt man eine Funktion, die genau dieselben Nullstellen wie die Frequenzgleichung hat, auf der ganzen Achse $\lambda = i\,\omega$, und kennt man ausser dem die Verteilung der Pkte auf die beiden Halbebenen:
$(n-p) =$ Anz. der Umlaufungen von $F(i\,\omega)$ um 0 bei $-\infty \to \omega \to +\infty$. Auf Grund **???** des besonderen Baus des schwingenden Systems kann man also, wie $\mathcal{N}$ zeigt, mitunter eine Umformung der Frequenzgl. angeben, die den Einfluss der einzelnen Baugrössen hervortreten lässt: dies ist der Anteil des Physikers an einem solchen Kriterium.
Die "Aufschneidung" bedeutet folgendes im allgemeinen Fall: Gegegeben $n$ homogene lineare Gleichungen mit $n$-Unbekannten $x_1,\ x_2 \cdots x_n$ und einem Parameter $\lambda$, die nur für gewisse $\lambda_k$ lösbar sind. Man spaltet etwa $x_1$ aufin $x_1'$,$x_1''$ und ersetzt in den Gleichungen $x_1$ nach Belieben zum Teil durch $x_1'$, z.T. durch $x_1''$. Man fasst $x_1$ als gegeben auf und löst die $n$ Gl. nach $x_1^\eta, x_2, \cdots, x_n$ auf. **???** ist $x_2'' = F(\lambda)\cdot x_1'$, und $F(\lambda) = 1$ ist eine Umformung von $\Delta\,(\lambda) = 0$, dh. $F(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{A(\lambda)}$.
Dasselbe ausführlicher bei Cremer [11].

**Seite 32**

## Gebrochene Iteration bei $(\kappa^2 + \kappa\,A + B)\,Y = 0$:

Geg. zwei (!) Ausgangsspalten $Y_n$, $z_n$, und Näherung $k \approx \kappa$. Es sei $Y_n \approx R$, $z_n \approx \kappa\,e$. Iterationsvoschrift:
Löse $\begin{cases} (k^2 + k\,A + B)\,Y_{n+1} = (k\,E + A)\,Y_n +_n \\ \qquad\qquad z_{n+1} = k\,Y_{n+1} - Y_n \end{cases}$
Dann geht $k - (Y_n\ :\ Y_{n+1}) \to \kappa$, $Y_n \to e$

Man kann übrigens einen Operator der Zeilenzahl $n$, der in bezug auf $\kappa$ den Grad s.t. hat, in einem mit der Zeilenzahl n.t. vom $\kappa$ **???** Grad $s$ verwandeln, indem man $y = \begin{pmatrix} \eta_t \\ \kappa^t\eta \\ \kappa^{2t}\eta \\ \vdots \end{pmatrix}$ einführt. Z.B. ist
$(\kappa^4 + A_1K^3 + A_2\kappa^2 + A_3\,\kappa + A_4)\,\eta = 0$ äqu. zu

$$\{\kappa^2 + \kappa\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix}\}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$$

## Selbstadj. Aufgaben der Gestalt $A\,\mathfrak{q} = \lambda\, B\,\mathfrak{q}$

$(A = \overline{A}', \, B = \overline{B}')$ Fortsetzg: S.121,
für welche **???** $\underline{\overline{\mathfrak{q}}' A\,\mathfrak{q} = \overline{\mathfrak{q}}' B\,\mathfrak{q} = 0 \text{ folgt: } \mathfrak{q} = 0}$, sind im Falle endlichen Matrizen (allgemein ?) gewöhnlichen Aufgaben **???** äquivalent: Es gibt reelle $p,\, q \neq 0,\, 0$ so daß $p\,A + q\,B$ <u>pos. definit</u>.
Bew: Der Wertevorrat von $\overline{\mathfrak{q}}'(A + i\,B)\,\mathfrak{q}$ für $\overline{\mathfrak{q}}'\mathfrak{q}$ für $\overline{\mathfrak{q}}'\,\mathfrak{q} = 1$ ist abgeschl. **???** nach Hausdorff konvex; enthält **???** nicht so gibt es eine Gerade durch 0 **???**

**Seite 33**

## Satz und Beweis von Stellmacher

$A$ sei reelle $n$ x $n$-Matrix
Ist $A + A^1$ pos. definit, so besitzt

$$\det\{F\rho + A\} = \det \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \rho + A \right\} = 0 \text{ kein Paar}$$

konjugiert komplexer Wurzeln mit pos. Realteil.
Bew.: Betrachte Dgl. $F\dot{Y} = A\,Y$; $\rho_{1,\,2} = \alpha \pm i\,\beta$ sei ein Paar von EWen mit $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Lösungsspalte, reell, von der

$$\textbf{???}\, Y = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\alpha\, t} \sin(\beta\, t + \varphi_1) \\ \vdots \\ c_n\, e^{\alpha\, t} \sin(\beta\, t + \varphi_n) \end{pmatrix}. \text{ Bild}$$

$(Y'F\,Y)^\bullet = Y'F\,\dot{Y} + \dot{Y}'F\,Y = Y'A\,Y + Y'A'Y$
**???** ist dies $\quad$ für alle $t > 0$
Also ist für $t_2 > t_1 \qquad Y'F\,Y\,(t_2) > Y'F\,Y\,(t_1)$. (33.1)
Wähle $t_2 = t_1 + \frac{2\,\pi}{|\beta|}$, da ist
$Y(t_2) = Y(t_1) \cdot$ **???**, also
$Y'F\,Y(t_2) =$ **???** $\cdot\, Y'F\,Y(t_1) \qquad$ (33.2)
Aus $\alpha > 0$ und (33.1,2) folgt
$Y'F\,Y < 0$ für alle $t_1$. Aber man kann $t_1$ so wählen, daßsin $(\beta\,t_1 + \varphi_n) = 0$, dann müsste $\sum\limits_1^{n-1} c_\nu^2\, e^{2\alpha\, t_1} \cdot \sin^2(\beta\, t_1 + \varphi_n) < 0$ sein, geht nicht.
**???** mit, daß der Satz auf $(A\rho^2 + B\,\rho + c)\,\eta = 0$ **???**

**Seite 34**

24.1.45

## Verallgemeinerung und ein neuer Beweis des Satzes von ??? Satz (34.1):

Ist $\mathfrak{X}$ hermitesch det $\mathfrak{X} \neq 0$ und $A + A^*$ positiv, definit, so ist die Verteilung der Nullstellen von

$$\det(\mathfrak{X} \cdot \rho + A) = 0$$

dieselbe wie die von $\det(\mathfrak{X}\,\rho + \mathfrak{E}) = 0$ auf die Halbeb. $Rn\,\rho$ ??? 0.

Bew: Führt man $A$ durch $A(t) = (1-t)\,A + t$ ??? stetig in $\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ über, so überschreitet nie ein EW die imaginäre Achse: Sonst wäre $0 = \mathfrak{q}^*(\mathfrak{X}\,i\,r + A(t))\,\mathfrak{q}$, $Rn:\ 0 = \mathfrak{q}^*(A + A^*)\,\mathfrak{q}$.
vgl. ??? Duffee S.65 ! Satz von Klein scheint verwandt KLein auf Dglen übertragen !
Andere Fassung:
(Satz 34.2) Ist $\mathfrak{X}$ (det $\mathfrak{X}$ beliebig) hermitesch und $(\mathfrak{X}\,A) + (\mathfrak{X}\,A)^*$ positiv definit, so ist die Verteilung der EWe von $A$ dieselbe wie die von $\mathfrak{X}$ auf die beiden Halbebenen $Rn$ ??? 0. EWe mit der imaginären Achse kommen nicht vor.
Bew. wie oben: $A(t) = A \to \mathfrak{X}$.

Ein anderer Beweis kann durch Linearisierung $P = \mathfrak{E} + \varepsilon\,A$ des folgenden Hilfssatzes (34.3) gewonnen werden:
(34.3) Ist $\mathfrak{X}$ hermitesch und $P$ beliebig mit $P^k \to 0$ $(k \to \infty)$, und ist $\mathfrak{X} - P^*\mathfrak{X}\,P$ positiv definit, so ist $\mathfrak{X}$ pos. def.
Bew.: Es ist $H - P^* H\,P \gg 0$; $P^* H\,P - P^{*^2} H\,P^2 \gg 0$; $\cdots$
??? $\quad H - P^{*^k} H\,P^k \gg 0 \qquad k \to \infty$: $H \geqq 0$. Also $P^{*^k} H\,P^k \geqq 0$;

**Seite 35**

## Verallgemeinerung auf $A\,\rho^2 + B\,\rho + C$

Da aus $(-A\,r^2 + B\,r + C)\,Y = 0$ folgt (mit $A = A_1 + i\,A_2$ usw., $A_i = A_i^*$)

$$(35.1)\ \begin{cases} -r^2 \cdot Y^* A_1 Y - r\,Y^* B_2 Y + Y^* C_1 Y = 0 \\ -r^2 \cdot Y^* A_2 Y - r\,Y^* B_1 Y + Y^* C_2 Y = 0 \end{cases}$$

folgt aus jeder Voraussetzung über $A$, $B$, $C$, welche die Lösbarkeit von (35.1) mit reellen $r$ ??? verhindert, daß keine rein imaginäre Wurzel vorhanden ist; innerhalb dieser Voraussetzungen darf man daher $A\,B\,C$ beliebig abändern, ohne die Verteilung der Wurzeln zu ändern. Beispiel:
Ist $A_2 = C_2 = 0$ (dh. $A$ und $\mathfrak{q}$ hermitesch) und $B_1$ pos. definit und det $A\,C \neq 0$, so ist die Anzahl ??? der Wurzeln mit positivem Realteil gleich $n - \frac{\sigma_A + \sigma_C}{2}$ ??? dabei ist $n = Gr\,A$, $\sigma_A$ = signatur $A$ = Anzahl d. pos. - Anz. d. neg. EWe von $A$.
Bew: $B = \mathfrak{E}$ annehmen, $A$ ??? $C$ als $A^2 = C^2 = E$. Stabilität tritt also genau

bei $\sigma_A = \sigma_C = n$ ein, dh. bei $A \gg 0$ & $C \gg 0$.

Aufgabe: Verwandte Kriterien, welche eine Mindestzahl von Wurzeln in der rechten Halbebene behaupten und vielleicht nur eine Mindestsignatur voraussetzen statt Definitheit.

[1] anders gesagt: $n_r = \nu_A + \nu_C \qquad (\sigma_A = \pi_A - v_A) \qquad (n = \pi_A + v_A)$
8.3.45
**Seite 36**

## Weitere Verallgemeinerung des Satzes von Stellmacher (S. 34):

Man verstehe unter $\mathfrak{M}_A$ die Gesamtheit der Zahlen $\mathfrak{q}^* A\, \mathfrak{q}$ für $\mathfrak{q} \neq 0$. $\mathfrak{M}_A$ ist **???** ein Winkelraum, im Sonderfall hermitescher Matrizen 1 oder 2 Halbgeraden.
(36.1) Satz: Ist $H$ eine hermitesche Matrix mit $h_x$ positiven, $h_-$ negativen und $h_0$ verschwindenden EWen, und ist $\not\subset \mathfrak{M}_A$, so liegen genau $h_+$ EWe von $H\,A$ im Winkelraum $\mathfrak{M}_A$, genau $h_-$ in $-\mathfrak{M}_A$ und $h_0$ in 0.
Bew.: **???**
(36.2) Hilfssatz: Vor $0 \not\subset \mathfrak{M}_A$ Alle EWe von $A\,B$ liegen in **???** $\mathfrak{M}_A \cdot \mathfrak{M}_B$. Frage: Darf hierin $\mathfrak{M}$ auch den Wertevorrat $|\underline{\mathfrak{q}}| = 1$ bedeuten ?
Bew. des Hilfssatzes: braucht nur für det $A \neq 0$ geführt zu werden. Aus $(A\,B - \rho)\,\mathfrak{q} = 0$ folgt $(B - \rho\, A^{-1})\,\mathfrak{q} = 0$, also $\rho = \frac{\mathfrak{q}^* B\, \mathfrak{q}}{\underline{\mathfrak{q}^* A^{-1} \mathfrak{q}}_{\text{wenn das}\neq 0!}} \subset \mathfrak{M}_B \cdot \mathfrak{M}_{A^{-1}}^{-1}$.
Nun ist aber für konjugierte $A_1$, $A_n \qquad \mathfrak{M}_{A_1} = \mathfrak{M}_{A_2}$ Bew. muß für hermitesches $A$ extrageführt w.
(36.3) $\mathfrak{M}_{T^* A\, T} = \mathfrak{M}_A$, det $T \neq 0$.
Und $A^* = A^* \cdot A^{-1} \cdot A$ ist kongruent $A^{-1}$. Also $\mathfrak{M}_{A^{-1}} = \mathfrak{M}_{A^*} = \overline{\mathfrak{M}}_A$
(36.4) $= \mathfrak{M}_A^{-1} = \mathfrak{M}_{A^{-1}}$.
Bew. von (36.1): Führt man nach Wahl einer im $\mathfrak{M}_A$ gelegene Zahl $\alpha$ die Matrix $\alpha\, \mathfrak{E}$ durch $A(t) = a\, \mathfrak{E} \cdot (1-t) + t\, A \quad (0 \leq t \leq 1)$ stetig in $A$ über, so ist ständig $\mathfrak{M}_{A(t)} \subset \mathfrak{M}_A$ und daher jeder EW in $\pm \mathfrak{M}_A$ gelegen. Da auch keiner durch 0 und $infty$ auftreten kann, falls zunächst det $M \neq 0$ vorausgesetzt wird, bleibt die Verteilung **???**.

**Seite 37**

Falsch ist $\mathfrak{M}_{A\,B} \subset \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$. Sonst mußt aus $H_i$ pos. def. hermitesch folgen: $\Pi\, H_i$ auch pos. def. hermitesch.
Falsch ist die Vermutung: Liegen bei einer 3-reihigen Matrix $A$ alle Wu in der linken Halbebene, so hat $A_1$ **???** mindestens 2 **???** Wu. Gegenbeispiel:

$$A = B - \textbf{???}\ \mathfrak{C},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ \Delta_B = x^3 + 2x$$

## Newtonsches Verfahren bei halblinearen EW-Aufgaben:

z.B. $(A\,\kappa^2 + B\,\kappa + C)\,y = 0$ geg. $\kappa_0$, $y_0$. $\kappa = \kappa_0 + \delta\,\kappa$, $y = y_0 + \delta\,y$.
$(A\kappa_0^2 + B\,\kappa_0 + C)\,y_0 + (A\,\kappa_0^2 + B\,\kappa_0 + C)\,\delta\,y + (2\,A\,\kappa_0 + B)\,\delta\,\kappa = 0$
diese $n$ Gl. mit $n+1$ Unbekannten werden z.B. durch Normiergsvorschrift für $y$ eindeutig lösbar z.B. $\delta\,y_j = 0$ wenn $|y_{0\,j}| = max$. Bei selbstadj. ist wohl $y_0^* A\,\delta\,y = 0$ vorzuziehen, falls etwa $A \gg 0$. (Die Störungsrechnung ist ein Sonderfall des Newtonschen Verfahrens, bei dem angenommen wird, es ist eine Gl. bekannt, von welcher $\kappa_0$, $y_0$ die genaue Lösung ist.
Frage: Wird die Rechnung bei linearen Aufgaben <u>so</u> einfacher (mit $\delta\,y_0$ als Unbekannter), als wenn man wie bei der gebr. It. $y$ selbst als Unbekannte behält ?
Die Zahlen werden wohl kleiner.)
Man könnte eher auch die allg. Lösung des Gl.systems mit $n+1$ Unbekann-

**Seite 38**

ten in Abhängigkeit von einem Parameter $t$ aufschreiben und $t$ so bestimmen, daß die EW-Gl. in irgendeinem Sinn **???** gut erfüllt ist.

<u>Ein Rezeptur zur Lösung komplizierter physikal. Aufgaben:</u> 1) Einfachere Aufgaben völlig und exakt mathematisch lösen. 2) Die Grössen, von denen die Lösung wesentlich abhängt, physikalisch deuten. 3) Anagolieschluss auf kompl. Fall.

2.2.45

## Einschliessungssatz für beliebige Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten:

(Fortsetz. von II$_\eta$ 42) Vgl. [80] Abschnitt 1 [82], IV S.55
$\mathfrak{b}$ sei ein offener zusammenhängender beschränkter Bereich im $R_n$; in $\mathfrak{b}$ sei ein $y_1 = \varphi_1(\mathfrak{q}), \cdots, \varphi_n(\mathfrak{q}) = y_n$ reell definiert mit stetigen partiellen ersten Ableitungen. Die Determinante det $F$ der Funktionalmatrix $F = (\frac{\partial\,\varphi_i}{\partial\,x_k})$ sei $\neq$ in $\mathfrak{b}$. Man bezeichne mit $\alpha\,(A,\,B)$ für je zwei Punkte $A, B \subset \mathfrak{b}$ die untere Grenze der Integrale $\int\limits_A^B |d\,y| = \int\limits_A^B \sqrt{d\,\varphi' \cdot F\,|F \cdot d\,\mathfrak{q}}$, bei denen der Weg eine

**Seite 39**

in $\mathfrak{b}$ verläufende stetig diffbare Kurve von $A$ nach $B$ ist. Es sei $\phi(\mathfrak{q}_0) = y_0$. Man bezeichne für $\rho$ **???** 0 mit $\mathfrak{b}_\rho$ die Teilmenge der $P \subset \mathfrak{b}$ für welche

$$d\,\mathfrak{q}_0,\, P) \leqq \rho$$

ist.
Beh: Ist $\mathfrak{b}_r$ abgeschlossen für ein $r$, so ist $\Phi(\mathfrak{b}_r)$ genau die volle Kugel $|R - y_0| \leqq r$
[ Zusatz: Hieraus folgt: Ist für jeden Randpunkt $R$ von $\mathfrak{b}$ $\lim\limits_{P \to R} \inf d\,(\mathfrak{q}_0 R) > r$, so **???** $\Phi\,(\mathfrak{b})$ die Kugel $\mathfrak{K}_\rho : |R - y_0| \leqq r$ vollständig.]
Bew.: a) $d\,(A\,B) \leqq d\,(A\,C) + d\,(B\,C)$
b) $d(A\,B)$ hängt stetig von $A$ und $B$ ab; desgl. $d\,(\mathfrak{q}_0,\, R) = \lim\limits_{P \to R} \inf \ldots$
d) Trivial ist $\Phi(\mathfrak{b}_\rho) \subseteqq \mathfrak{K}_\rho$ für alle $\rho \geqq 0$.
c) Ist $\mathfrak{b}_r$ abgeschlossen und $\rho \leq r$, so auch $\mathfrak{b}_\rho$ abgeschlossen.
e) $\mathfrak{b}_r$ sei abgeschlossen, $|R - y_0| = r$. Betrachte die obere Grenze $\rho^*$ der $\rho$, für welche $R(\rho) = y_0 + \rho\,(R - y_0)$ ein Orginal in $\mathfrak{b}_\rho$ besitzt. Es ist $\rho^* \geqq 0$; Beh.: $\rho^* = r$
$R(\rho^*)$ selbst hat ein Orginal $p^*$ in $\mathfrak{b}_{\rho^*}$, denn entweder $\rho^* = 0$, dann

**Seite 40**

trivial; oder $\rho^* > 0$, dann gibt es $\rho_\nu \to \rho$, & $P_\nu \subset \mathfrak{b}_{\rho_\nu} \subseteqq \mathfrak{b}_\rho$, $\phi(P_\nu = Q\,(\rho_\nu)$; ist $P^*$ ein $H\,P$ der $P_\nu$, so ist $P^* \subset \mathfrak{b}_\rho$ und $\phi(P)^* = Q(p^*)$
Nun wird aber eine Umgebung von $P^*$ eindeutig auf eine Umgebung von $Q\,(\rho^*)$ abgebildet. Ist $\rho^* < r$, so nimm ein Stück von $\rho^* \leq \rho \leq r$, welches in diese Umgebung von $Q(p^*)$ fällt etwa bis $R(\rho_1)$; dessen Original ist eine stetig diffbare Kurve von $P^*$ bis zu einem Punkt $P_1$; es ist $d\,(P^*,\, P_1) = \rho_1 - \rho^*$, also $P_1 \subset \mathfrak{b}_{\rho_1}$. Widerspruch gegen $\rho_1 > \rho^*$.
Beweis des Zusatzes: Ist für jeden Randp ist $R\, \underline{\lim\inf} d\,(\mathfrak{q}_0\, P) > r$ für $P \to R$, so ist $\mathfrak{b}_r$ abgeschlossen; sonst gäbe es $P_\nu \to$ **???**, $P_\nu \subset \mathfrak{b}_r$, **???** $\not\subset \mathfrak{b}_r$; **???** ist Randpunkt wegen (b); $\lim\, d\,(P_\nu\, \rho) \leqq r$.
Ist umgekehrt $\mathfrak{b}_r$ abgeschlossen, so ist für alle Randpkte $\lim \cdots > r$. Denn sonst gäbe es $P_\nu \to R$, $d\,(P_0\, P_\nu) \to r' \leq r$, dann wäre $r' = r$; nimm zu $P_\nu$ einen Weg mit Bildlänge $r + \varepsilon_\nu$, $\varepsilon_\nu \to 0$, und von diesem Weg den Pkt $P'_\nu$, bis zu dem die Bildlänge genau $r$ ist diese $P'_\nu$ haben einen $H\,P\;R' \subset \mathfrak{b}_r$. Es ist $d\,(P_\nu P'_\nu) \to 0$. Hieraus folgt aber, da in einer Umgebg. von $R'$ $\Phi$ im kleinen **???** ist, daß$\overline{R' P_\nu} \to 0$, dh. $P_\nu \to R'$, also $R = R' \subset \mathfrak{b}_r$ gegen **???**
vgl. Golomb, Banach ?

**Seite 41**

Aufgabe: Übertragung des Einschliessungssatzes für beliebige Gleichungssysteme (S.38) auf den Fall, dass von mehreren Orginalpunkten die Bilder bekannt sind.
Frage: Hängt der Statz nicht mit quasikonformen Abbild. zusammen ?

Aufgabe: "Differenzierbarkeit" vermeiden durch Betrachtung von $\underset{\mathfrak{q}_\nu \to \mathfrak{q}}{fin} \frac{|y-y_\nu|}{|\mathfrak{q}-\mathfrak{q}_\nu|}$.

## Das Newtonsche Verfahren

Zur Lösung eines Gleichungssystems $y(\mathfrak{q}) = 0$ ist gleich dem Iterationsverfahren, angewandt auf die Gleichung

$$y = y - F^{-1}y; \quad F = \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{q}}.$$

Die Funktionalmatrix der rechten Seite hat als $k$-te Spalte

$$f_k = -\frac{\partial I^{-1}}{\partial x_k} \cdot y,$$

verschwindet also für $y = 0$. Vgl. Willers S.167, 176
Für gewöhnliche EWAufgaben ist

$$y = \begin{pmatrix} (A-\kappa)\,\mathfrak{q} \\ n'\mathfrak{q} - 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} A-\kappa & -\mathfrak{q} \\ n' & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe: Die im Hellinger-**???** genannte Lit. durchsehen, u.zwar: S. 1454/6 zur Possiv-Gl. (insb. 254)) und 1458 zum allg. selbstadj. Einschl.-Satz (insb. Riesz$^{261}$)
Zusammenhang mit Momentenproblem)

**Seite 42**

## Zur Possiv-Gleichung

Vielleicht vereinfacht sich die Sache, wenn man das Anlaufen einer kleinen instat. Störung betrachtet, statt zeitlich harmonisch. Die auftretenden analytischen Funktionen würden dann im Unendlichen regulär sein. - Die "funktionentheoretische Randwertmethode"lässt sich so beschreiben: Man betrachtet die physikalischen Grössen nur auf die Stromlinie, auf der die Kontur liegt, und setzt sie von da aus ins Komplexe fort. Der Vorteil ist, daßman anstatt einer analytischen Funktion von zwei reellen Veränderlichen eine solche von einer komplexen Veränderlichen bekommt.

## Ein funktionentheoretischer Trugschluss:

Sei $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{t-z}$ $\quad$ ($t$ reell, $z$ komplex)

noch besser versteckt: $\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{t^2-z^2}$; da bemerkt man nicht so schnell die Zerlegung der Ebene !

Zur Entwicklung von $f(x)$ in eine Potenzreihe stellt man die (richtige) Dgl. auf $f'(z) + 2\,z\,f(z) + 2\sqrt{\pi} = 0$. Deren allgemeine Lösung ist $f(z) = e^{-z^2} \cdot \{\mathfrak{C} - \int\limits_0^z e^{\rho^2} d\,\rho\} \cdot 2\sqrt{\pi}$

Da $f(z) = -f(-z)$, muß$\mathfrak{q} = 0$ sein. Daher

$f(z) = -e^{-z^2} \cdot$ **???** $d\rho \cdot 2\,\sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi} \cdot z + \cdots$

Andererseits ist offenbar für $Im\,z > 0 \qquad Im\,f(z) > 0$. Widerspruch

**???**

**Seite 43**

Falsche Vermutung: Addiert man zur Matrix $A$ eine positiv definite hermitische Matrix, so bewegen sich alle EWe von $A$ nach rechts.

Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\alpha_{1,2} = \pm 1 \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \varepsilon \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, gibt $x_2 < -1$.

Der Nachweis, das alle Wurzeln einer Gl.- in einem Winkelraum liegen, kann durch zweimalige Anwendung eines Halbebenen-Kriteriums geführt werden, bei reellen Gl. und Winkelraum symmetrisch zur reellen Achse sogar mit einmaligen. Dagegen gibt es keine Möglichkeit, mit Hilfe von Halbebenen Kriterien die Anzahl der Wurzeln in einem Winkelraum allgemein und sicher festzustellen (ohne direkt die Argumente der Wurzeln zu berechnen), weil nämlich zum Beispiel für alle Wurzelverteilungen, welche Spiegelung am Nullpunkt gestatten, die Verteilung auf je zwei komplementäre Halbebenen dieselbe ist, so dass z.B. bei

**???**

bezüglich jeder Geraden durch den Scheitel die gleiche Verteilung resultiert, so daß dies-beiden Fälle nicht mit Fälle nicht mit Hilfe von Halbebenen Kriterien unterschieden werden können.

**Seite 44**

Die sämtlichen Punkt-Transformation des $R_n$, welche in Verbindung mit geeigneten Transformationen von $\phi$ die Potential gleichg. $\sum\limits_l^n \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\,\phi = 0$ invariant lassen, wird man aus der Bemerkg. als konform erkennen, daß die einzige Singularität der Unendlichkeitsordnung $\frac{1}{r^{n-2}}$ eben diese Funktion hat, welche Kugelflächen als Niveauflächen besitzt. Bei nichtkonformen Abbildung müsste diese in Elliposide verzerrt werden.

Bei der Entscheidung der Frage, ob alle Wurzeln einer reellen oder komplexen

Gl. einen Realteil $< -p$ haben, kann man das etwa lästige Entwickeln der Gleichung nach $y = x+p$ vermeiden, wenn man für alle mal ein Kriterium dafür aufgestellt hat, daß alle Wurzeln einen Realteil $< -1$ haben. Man braucht dann nur $x = p\,y$ einzusetzen.

Durch lineare Transformation liefern die Halbeben-Kriterien Mittel zur Abzählung der Nullstellen in einem vorgegebenen Kreise.

**Seite 45**

21.2.45

## Stabilitätsproblem von Stellmacher:

Gegeben eine ("Übergangs")-Funktion $k(t)$ für $0 \leq t$ mit $k(0) = 0$, $k(t) \to 1$ für $t \to \infty$. Gesucht das Grösste positive $\lambda$, für welches $\lim z_\lambda(t) < \infty$, wobei $z_\lambda(t)$ die Lösung von $z_\lambda(t) = 1 + \lambda \int\limits_0^t k(t-T)\, z_\lambda(\tau)\, d\tau$ bedeutet ($\lambda =$ "Aufschaltgrösse").
Zusammenhang mit Volterres Biologie ? [57]
Vgl. dazu das Integral von **???** aus der Operatorenrechnung.

## Zum Kronerkerschen Produkt

WE Roth sagt: "Zehfuss-matrix"
Man ordne die Elemente einer Matrix $(a_{ik}) = A$ lexikographisch in einer Spalte $\gamma_A$ an:

$$(45.1) \qquad \gamma_A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unter $\kappa$ verstehe man diejenige $n^2$-reihige Matrix (Permutation), für welche
(45.2) $\gamma_{A'} = \kappa\, \gamma_A$ gilt

Dann gelten die Formeln (45.3) $\kappa\,(A \text{ x } B) = (B \text{ x } A)\,\kappa \qquad K^2 = E$, $K$ **???** $K' = K^*$
(45.4) $\qquad \gamma_{A\text{X}B} = (A \text{ x } B')\,\gamma_{\text{X}}$
(45.5) $\qquad Sp\,Y\,A\,\text{X} = \gamma_Y' \cdot \kappa\,(A \text{ x } E) \cdot \gamma_{\text{X}}$

**Seite 46**

## Signatur einer beliebigen Matrix $A(a_{ik})$

$(i,\, k = 1, \cdots, n)$
Def.: Die Eigenwerte $a_i$ von $A$ mögen $a_+$ Realteile $> 0$, $a_-$ Realteile $< 0$ und $a_0$ Realteile $= 0$ aufweisen, so dass $a_+ + a_- + a_0 = n$.
Setze (46.1) $sg\, A = a_+ - a_-$
Für Hermitesche Matrizen ist das der üblichen Definition glechwertig. Bestimmung von $sg\, A$ in Anschluss an II, S.15-17:
Setze (46.2) $M = (\mathfrak{E} \text{ x } A) \cdot \kappa$, $\kappa$ wie in (45.2), und
(46.3) $N = M + \overline{M}'$ (hermitesch). Dann ist
(46.4) $sg\, A = sg\, N$
Beispiel $n = 3$: (bezeichne kurz $\overline{a}_n = \overline{n}$ usw.)

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & \cdot \\ 21 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & \cdot \\ 31 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & \cdot \\ & & & & & & \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 12 & 0 & \cdot \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 22 & 0 & \cdot \\ 0 & 31 & 0 & 0 & 32 & 0 & \cdot \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 12 & \cdot \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 22 & \cdot \\ 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 32 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc}
11+\overline{11} & \overline{21} & \overline{31} & 12 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\
21 & 0 & 0 & 22+\overline{11} & \overline{21} & \overline{31} & 23 & 0 & 0 \\
31 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 33+\overline{11} & \overline{21} & \overline{31} \\
 & & & & & & & & \\
\overline{12} & 11+\overline{22} & \overline{32} & 0 & 12 & 0 & 0 & 13 & 0 \\
0 & 21 & 0 & \overline{12} & 22+\overline{22} & \overline{32} & 0 & 23 & 0 \\
0 & 31 & 0 & 0 & 32 & 0 & \overline{12} & 33+\overline{22} & \overline{32} \\
 & & & & & & & & \\
\overline{13} & \overline{23} & 11+\overline{33} & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 13 \\
0 & 0 & 21 & \overline{13} & \overline{23} & 22+\overline{33} & 0 & 0 & 23 \\
 & \textbf{???} & & & \textbf{???} & & & \textbf{???} &
\end{array}\right)$$

**Seite 47**

Zwei Beweise von (46.4): a) $\underline{\gamma_X^* N \gamma_X = Rn\, Sp\, A\, X\, \overline{X}}$ = **???** $(A\, X\, \overline{X} + \overline{A}\, \overline{A}\, X)$.
Es ist für beliebiges $T$ mit $X = T^{-1} Y\, \overline{T}$
$Sp\, T^{-1} A\, T\, X\, \overline{X} = Sp\, T^{-1} A\, Y \cdot \overline{Y}\, T = Sp\, A\, Y\, \overline{Y}$, also
$Re\, Sp T^{-1}$**???** $X\overline{X} \sim Re\ Sp\ A\, X\, \overline{X}$. Man kann also zur Bestimmung von $sg\, M$ $A$ in der Diagonalform annehmen. Dann wird

$Sp\, A\, X\, \overline{X} = Sp\, A\, (D\, \overline{D} + R\, \overline{R})$, wenn $D = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & & \\ 0 & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{pmatrix}$,

$R = X - D$
Hierin sind die Variablen getrennt. Es ist
$sg\ Rn\, Sp\, A\, R\, \overline{R} = 0$, da diese Form bei Ersetzung der $x_{ik}$ mit $i < k$ durch **???** $x_{ik}$ **???** das Vorzeichen wechselt. Also
$sg\ Rn\ Sp\ A\, X\, \overline{X} = sg\ Rn\ Sp\ A\, D\, \overline{D} = sg\, A$.
Genauer ist die Vorzeichenverteilung der Wurzeln von $M$:
(47.1) $m_+ = a_+ + \text{Anzahl}_{i<k}(\overline{\alpha}_i + \alpha_k \neq 0)$ $\quad m_0 = a_0 + 2 \cdot \text{Anzahl}_{i<k} \cdot (\overline{\alpha}_i + \alpha_k = 0)$.

b) Es ist **???** $= (\mathfrak{E}\ \text{x}\ A)\, K + K\, (\mathfrak{E}\ \text{x}\ A^*) = (\mathfrak{E}\ \text{x}\ A + A^*\ \text{x}\ \mathfrak{E})\, K$, also det $N = 0$ dund, wenn $\alpha_i + \overline{\alpha}_k = 0$. Man führe nun $A$ in $B =$ **???** über (wenn $a_0 = 0$), ohne dass zwei
zur imaginären Achse spiegelbildliche Wurzeln auftreten, dabei bleibt $sg\, N$ ungeändert. fehlt noch **???** von $sg\, N_B$.

**Seite 48**

Bestimmung von $sg\, \mathfrak{E} = n$ : Für $X = X' \neq 0$ wird $sg\ Rn\ Sp\ X\, \overline{X} > 0$, also $a_+ \geqq \frac{n\,(n+1)}{2}$; **???** $a_- \geqq \frac{n\,(n-1)}{2}$
**???** für $\overline{A} = G + H$ mit $G = G^* \gg 0$, $H = -H^*$: $Sp\, X^* G\, X > 0$.
Gibt schärfste **???**: $Det\, N = 0$
Aufgabe **???** $A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & \\ a_2 & & -1 \\ a_3 & & \end{pmatrix}$ herleiten.

## Zur Bestimmung von Signaturen hermitescher Matrizen dient

die Formel (frei nach Jacobi)

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ U^* & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & U \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - B^* A^{-1} B \end{pmatrix}$$

wenn det $A \neq 0$; (man setze $U = -A^{-1}B$).

## ??? und konforme Abbildung des $R_4$.

Schon die einfachste nichtlineare Funktion **???** $= \quad f(Q) \quad = \quad Q^2$, $Q = x_1 + i\,x_2 + j\,x_3 + k\,x_4$, liefert eine nichtkonforme Abbildung. Die Funktionalmatrix ist

$$\left(\frac{\partial\, x'_\alpha}{\partial\, x_\beta}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

**Seite 49**

Frage: Kann man die Flattergleichungen vielleicht selbsttransponiert machen, indem man neben der kritischen und potentiellen Energie der Verformung auch die vom Flügel an den Luftstrom abgegebene Energie heranzieht zur **???** des Funktionenraumes ?

Aufgabe: a) Zu den Hurwitz-Kriterien eine Abschätzung für den absolut kleinsten Realteil machen, als Minimalwurzel der Gl. für die $\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}$.

b) Bei Gleichungen, die von einem Parameter $t$ abhängen, die **???** Wahl dieses Paramters systematisch suchen; etwa nach Wurzeln fragen, deren Realteil inbezug auf $t$ stationär ist, sowie nach doppeltzählenden Realteil.

c) Nach dem Verfahren von S.50-52 die übliche Kette mit nur $n$ Gliedern determinantenmäßig darstellen, gäbe vielleicht $n$-reihige Det. statt $2n$ ?

wohl doch nicht, da die $P_i$ **???** dort zusammen zu Beiwerte haben.

Sturm Liouvilesche Theorie für $\frac{d}{dx}\,(k\,\frac{dV}{dx}) + (\lambda^2 g + l)\,V = 0$, nl stellt Hilb [79] 1912 als Aufgabe; es behandelt aber nur $g = 1$.

Auszug aus Schur [58]: a) Ist $\xi' < 0$, so ist $f(x)$ dund stabil, wenn $|f(\xi)| < |f^*(\xi)|$ und außerdem $f(x) = \frac{f^*(\xi)\,f(x) - f(\xi)\,f^*(x)}{x - \xi}$ stabil ist. Dabei $f^*(x) = \overline{f}(-x)$.

b) Ist $\xi' < 0$, so ist $f(x)$ dund stabil, wenn

$a_0 \neq 0$, $Rn\,(\frac{a_1}{a_0}) > 0$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}\{f(x) \cdot \varphi(\xi) - f^*(x) \cdot \psi(\xi)\}$ stabil.

Dabei $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$, $\varphi(\xi) = \overline{a}_0 x - \overline{a}_1 \xi\, x + \overline{a}_0 \xi$; $\psi(x) = a_0 x + a_1 \psi\, x + a_0 \xi$.

c) Hieraus **???**

**Seite 50**

5.3.45

## Determinanten-Darstellung Sturmscher Ketten.

(Vereinfacht gegenüber Wahlen [68]; aber wie steht es in [69] ?  1)
$A = A_n(x)$, $B = B_{n-1}(x)$ seien Polynome vom Grad $n$ bezw. **???** ; setze
(50.1)

$$\begin{aligned} &A_n = c_n \text{ x } B_{n-1} - A_{n-1} \\ &B_{n-1} = d_{n-1} A_{n-1} - B_{n-2} \\ &A_{n-1} = c_{n-1} \text{ x } B_{n-2} - A_{n-2} \qquad \text{usw.} \qquad \text{Frage: } A_{n-i} = ?\ B_{n-i} = ? \end{aligned}$$

Es gilt eine Darstellung (50.2) $\left\{ \begin{array}{c} A_{n-1} = P_{i-1} A + Q_{i-1} \cdot \text{ x } \cdot B \\ B_{n-1} = R_{i-1} A + S_{i-1} B \end{array} \right.$

$(P_{-1} = 1,\ Q_{-1} = 0,\ R_{-1} = 0)$
mit $Gr\, P_{i-1} \le i - 1$ usw. Aus (50.2) **???** $Gr\, A_{n-1} \le n - i$ ist $A_{n-1}$ bestimmt bis auf einen in den Koeff $a_\nu$ von $A = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots$, u. $b_\nu$ von $B_\nu = b_0 x_{n-1} + b_1\, x^{n-2} + \cdots$ rationaler Faktor. Dieser ist auf Grund von (50.1) leicht zu bestimmen:
(**???** gegen [68]): Es muß$A_{n-1}$**???** $= (-1)^i A(0)$ sein, dh.

$$P_{i-1}(0) = (-1)^i \qquad (i \ge 0)$$

Das gl. findet man $S_{i-1}(0) = (-1)^{i-1} \qquad (i \geqq 1)$ (Induktion mit 50.2)
Fasst man 50.2.1 als lineares Gl.-System für die unbekannten Beiwerte von $P_{i-1} = p_{i-1} x^{i-1} + \cdots + p_0$, $Q_{i-1} = q_{i-1} x^{i-1} + \cdots + q_0$ auf, und damit als Gl.-Syst. für $A_{n-i}$, so erhält man die Verträglichkeitsbedingung:

1) Verwandt mit Baltzer, Determinanten (1881) S.126 ?

**Seite 51**

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{unbek:} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc|c} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{2i-2} & a_{2i-3} & \cdots & a_{i-1} & b_{2i-2} & b_{2i-3} & \cdots & b_{i-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^i \\ x^{i-1}A & x^{i-2}A & \cdots & A & x^i B & x^{i-1}B & \cdots & x\,B & A_{n-1} \end{array} \right| = 0 \\ \begin{array}{cccccccc} p_{i-1} & p_{i-2} & & p_0 & q_{i-1} & q_{i-2} & & q_0 \quad -1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{???} \\ x^{n+i-1} \\ x^{n+i-2} \\ x^{n-i+1} \\ (50.3.1) \\ (50.2.1) \\ \\ \end{array}$$

oder **???**

$$A_{n-i} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2i-2} & \cdots & a_{i-1} & b_{2i-2} & \cdots & b_{i-1} \\ x^{i-1}A & & A & x^i B & \cdots & x\,B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2i-2} & \cdots & a_i & b_{2i-2} & \cdots & b_{i-1} \end{vmatrix}} = \frac{\text{Zähler}}{|2_{i-2}\cdots i;\ 2_{i-2}\cdots i-1|}$$

Ähnlich

$$B_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2i-3} & \cdots & a_{i-1} & b_{2i-3} & \cdots & b_{i-2} \\ x^{i-2}A & & A & x^{i-1}B & \cdots & B \end{vmatrix}}{|2_{i-3}\cdots i-1;\ 2\,i-3\cdots i-1|} \cdot (-1)^{i-1}$$

**Seite 52**

Die höchsten Glieder sind daher (nachgeprft am Zahlenbeispiel FB 1806/1 S. 8):

bei $A_{n-1}$ $\quad |2i-1\cdots i,\ 2i-1\cdots i| : |2i-2\cdots i;\ 2i-2\cdots i-1|$
bei $B_{n-1}$ $\quad (-1)^{i-1}|2i-2\cdots i,\ 2i-2\cdots i-1| : |2i-3\cdots i-1;\ 2i-3\cdots i-1|$

Die Vorzeichen der Imaginärteile der Wurzeln von $A - i\,B = 0$ sind also, wenn $A$, $B$ reell, gleich denen von $a_0 b_0$, $-a_0 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}$,

$+\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}$, **???** ; mit $a_\nu,\ b_{\nu-1} = 0\ (\nu > n)$

dh. Vorzeichen der $Wu^{11}$ von $A - i\,B = 0$ ist gleich dem von

$$a_0\,b_0,\ a_0 \cdot \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & \\ b_1 & a_1 & b_0 \\ b_2 & a_2 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & \\ b_1 & a_1 & b_0 \\ b_2 & a_2 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ b_1 & a_1 & b_0 & a_0 & \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & b_0 \\ b_3 & a_3 & b_2 & a_2 & b_1 \\ a_4 & a_4 & b_3 & a_3 & b_2 \end{vmatrix}, \cdots$$

## Bemerkungen zum Satz von Sturm:

a) Sind $A$, $B$ reelle Polynome in $x$ und ist $Gr\,A \geqq Gr\,B$, so ist

$$n_l - n_r = W_\infty - \textbf{???}$$

Dabei bedeutet $n_l$ die Anzahl der Nullstellen $A(x) + i\,B(x)$ links von der $X-$Achse (diese von $-\infty$ nach $+\infty$ durchlaufen) und $W_\infty$ die Wechselzahl in **???** Sturmschen Kette für $x = +\infty$.

**Seite 53**

Ist $Gr\,A < Gr\,B$, so kann der Satz falsch werden; z.B. $A = 1$, $B = x$.
Kette: 1 x $-1$; $W_\infty - W_{-\infty} = 0$, $n_l - n_r = 1$.
b) Aus dem Satz a) kann man den ursprünglichen Satz von Sturm zur Abspaltung der reellen Wurzeln wenigstens für den Intervall $< -\infty \;\; +\infty >$ herleiten: Für $A = f(x)$, $B = i\,t\,f'(x)$ ist für kleine $t$, wie Störungsrechnung zeigt, $n_l - n_r =$ Anzahl d. reellen Wu. von $f(x)$.

## Bemerkung für Schur [58]:

Sei $f(x) = r(x) + i \cdot a_0'' \cdot s(x)$; $r(x) = x^n + \cdots$, $s(x) = x^{n-1} + \cdots$, $a_0^n \neq 0$.
Hat $f$ keine reelle Nullstelle so hat für beliebiges reelles $\rho$ auch
$f_\rho(x) = (r(x) - \rho \cdot x \cdot s(x)) + i\,a_0'' s(x)$ keine reelle Nullstelle. Hieraus folgt leicht

$$(53.1) \begin{cases} sgr\,f_\rho(x) = s\,gr\,f(x) \qquad 0 \leq \rho < 1 \\ sgr\,f_1(x) = s\,gr\,f(x) + sgn\,a_0''; \; Gr\,f_1 = n-1 \end{cases}$$

Daher hat $f(x)$ dund allen Wu mit **???** $\alpha > 0$, wenn $f_1$ dies mit und ausserdem $a_0'' < 0$. Gibt Abzählg der Wu von $f$ in oberer Halbebene.
In (53.1) bedeutet $sgr\,f(x) = \sum\limits_{f(\alpha)=0} sgr\,\alpha''$.

**Seite 54**

## Verkettung für $(x^2 E + x\,A + B)\,\rho = 0$ und $(x^2 E + x\check{A} + \check{B})\,y = 0$:

Dund existiert ein gemeinsamer EW, wenn es zwei Matrizen **???** $\neq 0$, 0 gibt mit

$$\begin{cases} P\,\check{B} - B\,P = (Q\,\check{A} - A\,Q) \cdot \check{B} \\ Q\,\check{B} - B\,Q = -(P\,\check{A} - A\,P) + (Q\,\check{A} - A\,Q)\,\check{A} \end{cases}$$

Ist (54.1) lösbar, dann sogar mit $Rg\,(P\,Q) = 1$.

## Newtonsches Verfahren, Variante von Stellmacher (8.3.45) für kompl. Wu einer reellen Gl.

Ist ein quadratisches Polynom $Q(x) = x^2 + a\,x + b$ bekannt, welches die linke Seite der aufzulösende Gl. $F(x) = 0$ näherungsweise teilt, so dividiert man $F(x) = F_1(x) \cdot Q(x) + R(x)$, $R(x) = r_0 x + r_1$, **???**
und bestimmt Polynome $\delta\,F_1$ des Grades $n-3$ und **???** des Grades 1 so, daß in erster Näherung $F = (F_1 + \delta\,F_1) \cdot (Q + \delta\,Q)$, dh.

$$R = F_1 \cdot \delta\,Q + Q \cdot \delta\,F_1$$

ist; es kommt nur auf $\delta Q$ an; dieses findet man aus $F_1 \delta Q$ **???** $R$ (und $Q$) indem man $F_1 = F_2 Q + R_1$ setzt und das lineare Gl.-syst. mit 2 Unbekannten $\delta a$, $\delta b$: $R_1 \cdot \delta$ **???** $\equiv R$ **???** löst. Man bleibt also ganz im Reellen. St. bemerkt, daß ähnlich auch Teiler höheren Grades von $F$ verbessert werden können.

**Seite 55**

Ein Hauptproblem der Kreiseltheorie(8.3.45)
besteht nach Stellmacher darin: Geg. $A$, $C$ reell symm. $A$ pos definit.
1) Wann gibt es $B$ reell schiefsymmetrisch so, daß $\det(A\rho^2 + B\rho + C) = 0$ stabil ist ? **???** Wann kann es, bei vorgegebenem $B_0$, durch $B = t B_0$ mit $t \to \infty$ stabil gemacht werden ? Falls $A = E$ angenommen wird, ist nach St. der Fall $B = \begin{pmatrix} & + & & \\ - & & & \\ & & & + \\ & & - & \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & - & \\ & & & - \end{pmatrix}$ stabilisieren, der Fall $B$ wie oben, $C = \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & + & \\ & & & - \end{pmatrix}$ nicht. Vgl [78] S.481 **???** d.

Math IV **???**

Frage: Gibt es Aufgaben, die in bezug auf mehrere Matrizen selbstadjungiert sind, so daß man durch geeignete Wahl der Metrik die günstigsten optimalen Einschliessungssätze aussuchen kann ?

## Verfahren von ??? zur Gleichungsauflösung [80]

$f(x)$ sei stetig & reell; wähle $|C| < |\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}|_{\min}$ und setze: $x_{n+1} = x_n + c \cdot f(x_n)$.
Dann kgiert $x_n$ monoton gegen die zunächst bei $x_0$ gelegene Nullstelle $\begin{pmatrix} > x_0 \\ < x_0 \end{pmatrix}$, je nachdem $c \cdot f(x_0) \gtrless 0$ ist.

**Seite 56**

## Allg. selbstadj. Einschl.-Satz (Forts. von S.23); $k$ beliebige Ausgangspkte.

Sind $k+1$ EWe $\mu_1, \cdots, \mu_{k+1}$ realisierbar, so ist $\Delta(\mu_\alpha \mu_\beta) = 0$. Daher wird es i.a. gar keine $k+1$ realisierbaren EWe geben.

## Beispiel einer pos. definiten, aber nicht in Gesamtschritten iterationsfähigen Matrix:

Für $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sind die EWe 1, 1, 7 und für die Iterationsmatrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} : \qquad -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, +\underline{\frac{4}{3} > 1}$$

Die Reihe
$(1+F)^{-1} \cdot 1 - F + F^2 \cdots + \cdots$ kgiert also nicht.
(Dass die Iteration in Gesamtschritten auch bei positiv definiten $M$ nicht zu kgieren braucht, erwähnt ohne Beispiel v. Mises [80]. Sein Beweis aber, daß bei pos. definitem $M$ die Iteration in Einzelschritten stets konvergiert, ist mindestens lückenhaft: gezeigt wird nur die Kgenz von $\sum_1^\infty |\,\mathfrak{q}^{(\nu+1)} - \mathfrak{q}^{(\nu)}|^2$.)

Für $M = \begin{pmatrix} 1 & a_{???} & a_{13} \\ a_{12} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & 1 \end{pmatrix}$ konvergiert

**Seite 57**

die Iteration in Einzelschritten dund, wenn alle EWe von

(57.1) $\begin{pmatrix} a_{12}\,a_{21} & a_{13}\,a_{21} - a_{23} \\ a_{12}\,a_{31} - a_{12}\,a_{31}\,a_{32} & a_{13}\,a_{31} + a_{23}\,a_{32} - a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \end{pmatrix}$ absolut $< 1$

sind.

## Zur Residuenrechnung der Funktionentheorie in allgemeineren Räumen.

Ist $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$, $a_\nu$ in einem nicht notw. kommutativen (**???** oder topologischen) Ring, $f' = a_1 + 2a_2 z + \cdots$ **???**
$f' \cdot f^{-1} = b_{-1} \cdot \frac{1}{z} + b_0 + \cdots$, so ist

$$0 = a_0\, b_{-1}$$

(57.2) $$1 \cdot a_1 = a_0 b_0 + a_1 b_{-1}$$

$$2 \cdot a_2 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_{-1} \qquad \text{usw.}$$

Daraus folgt $a_1 \cdot (b_{-1}^2 - b_{-1}) = 0$.
Sind alle $a_\nu$ miteinander vertauschbar, so darf man auch die $a_{nu}$ mit den $b_\lambda$ vertauschbar. Ist $f = 1 - \lambda\,\mathfrak{K}$ (und ist $\lambda_\nu$ <u>einfacher</u> **???** von $\frac{\mathfrak{K}}{1-\lambda\,\mathfrak{K}}$), so ist bei $\frac{-\mathfrak{K}}{1-\lambda\,\mathfrak{K}} = \frac{R_\nu}{\lambda-\lambda_\nu} + \mathfrak{p}(\lambda - \lambda_\nu)$ stets

(57.3) $(1 - \lambda_\nu \mathfrak{K})\, R_\nu = 0 = R_\nu (1 - \lambda_\nu \mathfrak{K})$; $R_\mu R_\nu = \delta_{\mu\,\nu} \cdot R_\mu$.

**Seite 58**

Aus der Partialbruchentwicklung von $\frac{\mathfrak{K}}{1-\lambda\,\mathfrak{K}}$ könnte man Entwicklungssätze hinsichtlich jeder Metrik bekommen, bei der jeder idempotente Operator welcher einen beschränkten Betrag hat, durch Polynome in $\mathfrak{K}$ gleichmäßig approximiert werden kann.

## Hauptlösungen hoher Stufe bei Dglen

Die Aufgabe $y' = \lambda\, y$ mit der Nebenbedingung $y\, y = 0$ hat die Hauptlösungen der Stufe $\sigma$ $\quad y_\sigma = \textbf{???} \cdot e^x \qquad (\sigma = 1 \cdots s)$ zum Eigenwert $\lambda = 1$, wenn $y$ so gewählt ist, dass **???** $= 0$ **???**
Aufgabe: Ein Beisp. mit Dgl. $\lambda$- Ord., wo Randbedgg. nur $y_0 y_0' y_1 y_1'$ enthält.

## Beweis des Satzes von Grace:

Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei apolare Polynome des Grades $n$, so gibt es keinen Kreis, der die Nullstellen $\alpha_\nu$ von $f$ trennt man denen von $(\beta_\nu)$ von $g$:
(1) $f = [(x-a)^n]_a$**???**, $g = [(x-b)^n]_b$; Apolarität: $[\underline{(a-b)^n}]_{a,\,b} = 0$ ist invariant gegen gebr. lin. Trans. von $x$
*geometr. Bedeutg. auf Zahlenkugel* $\xi$ (2) Sind alle **???** verschieden, so transformiere $\alpha_n = \infty$. Die Apolarität zeigt dann: $G(x) = d_1 \cdot (x-d_1)^n + \cdots + d_{n-1}(x-d_{n-1})^n + d_n \cdot 1$, daher ist $g'(x)$ apolar zu $\Pi_1^{n-1}(x-d_\nu)$; jeder Kreis, der alle $\beta_\nu$ enthält, enthält auch (nach Gauß) alle Nullstellen $\beta'_{nu}$ von $g'$, also nach Induktion ein $\alpha_\nu$.
**???**

**Seite 59**

Fragen:

1. Zwei ganze Transzendente $f(z)$, $g(z)$ mögen teilerfremd heissen, wenn es zwei ganze Transzendente **???**, $G(z)$ gibt mit **???** $= 1$. Sind zwei Fkt. ohne gemeinsame Nullstelle teilerfremd ?

2. Lässt sich jeder ausserhalb das Einheitskreises reguläre Funktion zerlegen in die Summe von zweien, die in der linken und rechten Halbebene regulär sind ?

3. Kann man den Weinsteinschen Einschliessungssatz auf die Eigenfunktionen ausdehnen ? Wohl nur, wenn man Voraussetzungen über den nächsten Eigenwert beim gesuchten macht. V 80

4. Wie läßt sich der Einschl.-Satz von Temple auf normale Matrizen ausdehnen ? V 71

## $e$ ist keine quadratische Irrationalität

Denn aus $a\,e^2+b\,e+c=0$, **???** ganz folgt: $0=n!\,(a\,e+b+c\cdot e^{-1})$ =ganz $+\varepsilon$ mit $0<\varepsilon<1$ für genügend grosse $n$.

**Seite 60**

Einschliessungssatz für das Iterationsverfahren selbstadj. Eigenwertaufgaben. 1.5.45

(a) Vor.: Gegeben $2s+1$ "Momente" $m_0=1,\, m_1,\cdots,\, m_{2s}$, reell,

$$\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{s+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ m_s & m_{s+1} & \cdots & \textbf{???} \end{pmatrix} \text{ pos. def.}$$

a) Def.: "Spektrum" = endlich viele (nicht notw. verschiedene) reelle Zahlen $\mu_1,\cdots,\,\mu_n$.

Ein Spektrum heisst möglich", wenn es eine reelle symm. Matrix $A$ des Grades $n$ und eine reelle Spalte $\mathfrak{q}$ mit $n$ Komponenten gibt, so daß

1. $\mathfrak{q}'A^\sigma\mathfrak{q}=m_\sigma \qquad (\sigma=0,\,1,\cdots,\,2s)$
2. $A$ genau die Eigenwerte $\mu_1,\cdots,\,\mu_n$ besitzt.

Eine Punktmenge $\mathfrak{f}$ der $\mu$-Geraden heisst "Einschliessungsmenge", wenn sie mit jedem möglichen Spektrum mindestens einen Punkt gemein hat. Eine Einschliessungsmenge heisst "minimal", wenn kein echter Teil von ihr Einschliessungsmenge ist.- Für $f(x)=\sum\limits_0^{2s} c_\sigma x^\sigma$ setze $[f(x)]=\sum\limits_0^{2s} c_\sigma m_\sigma$.

Aufgabe: Wann ist ein vorgelegter Spektrum möglich ? Konstruktion aller (inbes. der minimalen) Einschliessungsmengen ?

b) Das Spektrum $\{\mu_1,\cdots,\,\mu_n\}$ ist dund möglich, wenn das Gl.-System $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mu_\nu^\sigma\cdot p_\nu=m_\sigma \quad (\sigma=0,\,1,\,\cdots,\,2s)$ eine Lösung $p_1\geqq 0,\cdots,\,p_n\geqq 0$ hat.

Bew.: $p_\nu=x_\nu^2$, wenn $A$ auf Hauptachsen transformiert ist, und $\mathfrak{q}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$

c) Ein allg. linearer Gleichungssystem $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\sigma\,\nu}p_\nu=m_\sigma \quad (\sigma=1\cdots r)$ hat dund eine nichtnegative Lösung $\mu_1,\cdots,\mu_n$, wenn

**???**

**Seite 61**

aus $\sum\limits_{\sigma=1}^{r} a_{\sigma\,\nu}\,q_\sigma\geqq 0$ stets folgt $\sum\limits_{\sigma=1}^{r} m_\sigma\,q_\sigma\geqq 0, \qquad (q_\sigma \text{ reell.})$

Bew.: "Nur dann" klar. **???**: Die Punktm $\{m_1, \cdots, m_r$ des $n$-dim. Raumes, die sich durch die $n$ Punkte $\mathfrak{u}_\gamma$ (Spalten von $a_{\sigma\,\nu}$) mit Hilfe nicht negativer Koeffizienten darstellen lassen, bilden eine abgeschlossene konvexe Punktmenge $\mathfrak{K}$. Wenn ein Punkt $m^* \not\subset \mathfrak{K}$ ist, so gibt es eine Hyperebene $G$, derart dass $\mathfrak{K}$ ganz in dem einen abgeschlossenen Halbraum von $G$ liegt, und $m^*$ im andern, offenen. Eine solche Hyperebene $G$ erhält man, wenn man $m^*$ mit einem nächstgelegenen Punkt $p \subset \mathfrak{K}$ geradlinig verbindet und darauf in $p$ die total senkrechte Hyperebene $G$ bestimmt. Hat $G$ die Gl. $\Sigma\, q_\sigma m_\sigma = 0$, bei passender Wahl des Vorzeichens $\Sigma\, m^*_\sigma q_\sigma < 0$ und für die auf $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkt $\mathfrak{u}_\nu$ $\Sigma\, a_{\sigma\,\nu} q_\sigma \geqq 0$.

d) Das Spektrum $\{\dot{\mu}_\nu\} = \{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ ist dund möglich, wenn für Polynome $f(x)$ (des Grades $\leqq 2s$) aus $''f(\mu_\nu) \geqq 0$ f. alle $\nu$ " folgt $[f(\dot{x})] \geqq 0$. Gleichwertig: $\{\mu_\nu\}$ ist dund möglich, wenn aus $[f(x)] = 0$

folgt: $\left\{\begin{array}{l}\text{es gibt ein } \mu_\alpha \text{ mit } f(\mu_\alpha) \geqq 0 \text{ und} \\ \text{es gibt ein } \mu_\beta \text{ mit } f(\mu_\beta) \leqq 0 \text{ und}\end{array}\right.$ Bew: $\{1\} = 1 \neq 0$.

Gleichwertig: $\{\mu_\nu\}$ ist dund <u>un</u>möglich, wenn es ein Nullpolynom $f(x)$ gibt, für welches $f(\mu_\nu) > 0$ f. alle $\nu$.

**Seite 62**

e) $\{\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1} = \mu_n\}$ ist dund möglich, wenn $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ möglich. Bew.: (b) oder (d)

f) Jedes Nullpolynom besitz mindestens eine Zeichenwechselstelle , ausser wenn es identisch verschwindet.
Bew.: Ist $f(x) \not\equiv 0$ und $f(x) \geqq 0$, so ist $f(x) =$ **???** $\Pi(x - a_\lambda)^2\, \Pi_\tau(x - b_\tau)\,(x - \overline{b}_\tau)$. Da jedes $f(x)$ definite quadratische Polynom Quadratsumme = linear ist, ist auch $f(x) = \Sigma g_\rho(x)^2$, $g_\rho$ reell. Wegen Definitheit von $(m_{\alpha+\beta})$ ist dann $[f(x)] > 0$; denn für $g(x) = \sum\limits_0^\xi c_\nu\, x^\nu \not\equiv 0$ ist $[g^2(x)] = \sum\limits_0^\xi \sum\limits_0^\xi m_{\alpha+\beta}\, c_\alpha\, c_\beta > 0$.

g) Jedes mögliche Spektrum $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ mit $n > 2s + 1$ enthält ein mögliches Spektrum von $n - 1$ Zahlen $\mu_1$; daher dann sogar eins von $2s + 1$ Zahlen $\mu_1$.
Bew.: Das Gl.-Syst. (b) hat eine zumindestens) einparametrige Schar von Lösungen. Eine Gerade, die einen Punkt mit dem abgeschl. positiven Quadranten des $\{p_1, \cdots, p_n\}$-Raumes gemein hat, hat aber auch einen Randpkt. gemein, dh. es gibt eine Lösung mit z.B. $p_n = 0$; dann $\{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}\}$ möglich.

h) Ein Spektrum von $n \leqq 2s + 1$ <u>verschiedener</u> Zahlen $\mu_n < \mu_{n-1} < \cdots < \mu_2 < \mu_1$ möglich, wenn (1) $[\frac{(-1)^{k-1}}{x-\mu_k} \cdot \Pi_1^n(x - \mu_d)] \geqq 0$ und für $n \leqq 2s$ (2) $[G(x) \cdot \Pi_1^n(x - \mu_d)] = 0$ f. alle $G(x)$ mit Grad $\leq 2s - n$
Bew.: (d); jedes $f(x)$ mit $f(\mu_d) \geqq 0$ f. alle $d$ ist Linearverbindung mit Koeff. $\geqq 0$

**Seite 63**

i) Ist $\mathfrak{f}$ eine abgeschlossene Einschliessungsmenge, so gibt es ein Nullpolynom $f(x)$ derart, dass die Menge $\mathfrak{f}\,(f \leqq 0)$ derjenigen $\mu$ für die $f(\mu) \leqq 0$ in $\mathfrak{f}$ enthalten ist; $\mathfrak{f}\,(f \leqq 0)$ ist eine Einschl.-menge
**???**
Bew.: Jedes zu $\mathfrak{f}$ fremde Spektrum ist unmöglich; wähle in der Komplementärmenge $\mathfrak{f}^*$ von $f$ eine abzählbare überall dichte Teilmenge $e_1^*, \cdots$
Dann gibt es eine Folge von Nullpolynomen $f_1,\, f_2, \cdots$ so daß $f_n$ **???** $> 0$ für $a \leqq n$ und daß die Quadratsumme der Koeff. von $f_n = 1$ ist. Eine Teilfolge der $f_n$ kgiert koeffizientenmäßig gegen ein Nullpolynom $f(x)$. Dies ist $\geqq 0$ für alle $e_d^*$, daher $f(x) \geqq 0$ auf $\mathfrak{f}^*$, d.h. $\mathfrak{f}(f \leqq 0) \subset f$. Rest: (d).

j) Jede Einschliessungsmenge enthält die Menge $\mathfrak{f}(f < 0)$ für ein passendes Nullpolynom $f$. Bew. wie (i).

k) $s = 1$. Ein Spektrum $\{\mu_1,\, \mu_2\}$ ist dund möglich, wenn $\Pi(x - \mu_i)]$. Dann gibt es ein Nullpol. $f$ mit $f(\mu_1) > 0$, $f(\mu_2) > 0$, so auch ein lineares: d.h. mit Rayleighzahl $\gamma$ wäre etwa $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > \gamma$. Aber $(x-\mu_1)\,(x-\mu_2) = (x+a)\cdot(x-\gamma)+(\gamma-\mu_1)\,(\gamma-\mu_2)$ zeigt $(\gamma-\mu_1)\,(\gamma-\mu_2) < 0$. Hieraus folgt: Jede Einschliessungsmenge enthält eine minimale, und diese sind
1) Die Intervalle $n \leqq \mu < 0$ und $n < \mu \leqq v$ mit $[(x-n)\,(x-v)] = 0$
2) deren Komplemente, 3) $\mu < \gamma$, $\mu > \gamma$.

**Seite 64**

Ein Spektrum $\mu_1 < \cdots < \mu_2\,(\leqq x \leqq)\,\mu_3 < \cdots < \mu_\nu$ ist dund möglich, wenn $[(x-\mu_1)\,(x-\mu_n)] \leqq 0$, $[(x-\mu_2)\,(x-\mu_3)] \geqq 0$. Ein Spektrum $\geqq$ ist unmöglich, dgl. $\leqq \gamma$. Bew. für das letzte: **???** $\overline{f}(x) > 0$ auf Spektr. und Nullpol. Dabei $f(x) = (x-d)\,(x-\mu_n-1)$. Es gibt genau eine minimale zweifache Einschliessungsmenge, nämlich die volle Gerade unter Ausschluß von $\gamma$. Drei feine gibt nicht. Ein Spektrum ist dann und nur dann möglich, wenn es mit jeder minimalen Einschliessungsmenge einen Punkt gemein hat. Anstatt das System <u>aller</u> m. **???** wird man aber hier auch jedes in ihm dichte Teilsystem nehmen können.

l) $s = 2$. Bilden $a < b < c$ eine Familie, so sind $a \leqq \mu < b$, $a < \mu \leqq b, \cdots$, $\begin{cases} \mu \le a \\ \mu > c \end{cases}$ minimale Einschliessungsmenge des gleichen $\{a < \mu < b;\ c\}$. Bew.: Enschliessungseigenschaft z.B. von $a \leqq \mu < b$ folgt durch Stetigkeitsbetrachtung f. benachbarte zu $\{a \leqq \mu \leqq b,\ \mu = c\}$; (siehe hierzu V 11) **???** folgt aus der Möglichkeit jeder Familie: Diese Mengen enthalten aus jeder Familie genau einen Vertreter, so daß höchstens ev. eine Galerkinzahl $\mu_1$ entbehrlich wäre: $a < \gamma_1 < b$; nach $g$ müsste $[(x-a)\,(x-\gamma_1)^2(x-b)] = 0$ sein, was zusammen mit

$[(x-a)\,(x-\gamma_1)\,(x-b)\,(x-c)] = 0$ ergibt $[(x-a)\,(x-\gamma_1)\,(x-b)] = 0$; $\gamma_1 = c$. Sind $\gamma_1 < \gamma_2$ die Galerkinzahlen, d.h. $[(x-\gamma_1)\,(x-\gamma_2)] = [x\,(x-\gamma_1)\,(x-\gamma_2)] = 0$, so sind $\mu < \gamma_1$; $\gamma_1 < \mu < \gamma_2$; $\gamma_2 < \mu$ minim. Einschl.-mengen;

**Seite 65**

Bew. für $\mu < \gamma_1$: Sei $\mu_1 \cdots \mu_n$ ein Spektrum $\geqq \gamma_1$, sei $m > \mu_{\max}$; sei **???** die Familie von $m$ . Dann ist $(x-k)\,(x-c)^2(x-m)$ ein Nullpolynom, das auf dem ganzen Spektrum $< 0$ ist (wenn $m$ noch so gewählt ist, dass alle $\mu_i \neq l$).
Bew. für $\gamma_1 < \mu < \gamma_2$: Da (durch Stetigkeit) $\gamma_1 \leqq \mu < \gamma_2$ und $\gamma_1 < \mu \leq \gamma_2$ E-mengen sind, müsste jedes mögliche und zu $\gamma_1 < \mu < \gamma_2$ fremde Spektrum die Punkte $\gamma_1\,\&\,\gamma_2$ enthalten; sei es etwa $\mu_1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \mu_4 \leq \mu_5$ möglich, dann wäre $[(x-\mu_1)\,(x-\gamma_1)$ **???** $(x-\mu_5)] \leqq 0$, daher $[x^2(x-\gamma_1)\,(x-\gamma_2)] \leqq 0$, $[(x-\gamma_1)^2(x-\gamma_2)^2] \leqq 0$, geht nicht.
Ist $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$ ein mögliches Spektrum, von dem nicht drei Zahlen eine Familie bilden, so sind die 8 Mengen, die aus **???** durch Hinzuführen <u>eines</u> $\mu_i$ entstehen, minimale Einschliessungsmengen. Dann nimmt man <u>alle</u> $\mu_\varepsilon$ zu, so stimmt (erhält man eine E-Mge), und durch geringe Verschiebung der $\mu_i$, bis der nur $[\Pi\,(x-\mu_i)] = 0$ bleiben muß, entstehen abgeschlossene Einschliessungsmengen, deren limes eine beliebige der 4 obigen Mengen. -Dass diese Mengen minimal sind, folgt aus (j): Es gäbe sonst ein Nullpolynom $\varphi$, dessen Negativmengen echter Teil von $\{\ \}$ ist; es wäre also $q(\mu_i) \geqq 0$, und etwa $\varphi(\mu_1) > 0$, dann gibt es kein Nullpolynom $\psi$, das auf $\mu_2, \mu_3, \mu_4 > 0$ ist, da sonst $\psi +$ const $\cdot\varphi > 0$ **???** $\mu_1 \cdots \mu_4$ trotz (d). Also wären $\mu_2 \cdots \mu_4$ möglich, dh. eine Familie. Die Diskussion der minimalen E-Mengen, die die Negativmenge $\mathfrak{f}$ **???** für ein Nullpolynom 3. Grades enthalten, wird recht **???** durch Fallunterscheidungen **???**

**Seite 66**

(m) <u>Uneigentliche Spektren</u> einführen, $\{\mu_1, \cdots, \mu_n, \infty\}$ heisst möglich,

$$\text{wenn}\begin{cases} p_1 + p_2 + \cdots + p_n + p_\infty = m_0 \\ \mu_1 p_1 + \mu_2\, p_2 + \cdots + \mu_n\, p_n + 0\, p_\infty = m_1 \\ \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \mu_1^{2s-1} p_1 + \mu_2^{2s-1} p_2 + \cdots + \mu_n^{2s-1} p_n + 0 \cdot p_\infty = m_{2s-1} \\ \mu_1^{2s} p_1 + \mu_2^{2s} p_2 + \cdots + \mu_n^{2s} p_n + 1 \cdot p_\infty = m_{2s} \end{cases}$$

eine Lösung vgl. dazu S.72 unten ! $p_1 \geqq 0, \cdots, p_n \geqq 0$, $p_\infty \geqq 0$ besitzt. Die Teilmenge $\mathfrak{f}$ der reellen Geraden (einschl. $\infty$) heisst uneigentliche Einschl.-menge, wenn sie von jedem möglichen (eigentl. od. uneigentl.) Spektrum Pkt. enth.
Schreibt man für ein Polynom $f(x) = a_0 + \cdots + a_{2s}x^{2s}$

$$f(\infty) = \begin{cases} \text{pos. für } a_{2s} > 0 \\ 0 \quad \text{für} \quad = 0 \\ \text{neg.} \qquad < 0 \end{cases}, \text{ so gelten (d) bis (j) für Uneigentliches.}$$

Daher erhält (h) die Form:
(h') $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k < \infty = \mu_{k+1}$ (1) mit $k = 2s$ sind dund möglich, wenn
$\begin{cases} [\Pi_1^k(x-\mu_k)\cdot x^{2s-k}] \geqq 0, \quad [\Pi_1^k(x-\mu_k)\, x^{\rho}] = 0 \qquad \text{für } \rho = 0, \cdots, 2s-k-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ??? \end{cases}$
Die frühen betrachteten (ëigentlichen") Einschl.-mengen sind diejenigen Teilmengen der endl. Geraden, welche mit $\infty$ zusammen eine **???** Einschliessungsmenge bilden. Die mininmalen eigentlichen entstehen aus denjenigen minimalen uneigentlichen, welche den Pkt $\infty$ enthalten durch Erlassen dieses Punktes **???**.

**Seite 67**

n) Setzt für Formen der Dimension $2s$ wie $\mathfrak{F} = \sum\limits_0^{2s} a_\nu\, x^2\, y^{2s-\nu}$, $[\mathfrak{F}] = \Sigma\, a_\nu\, m_\nu$, so gilt nach (d): Ein (bel.) Spektrum ist dund unmöglich, wenn es eine Nullform $[f] = 0$ gibt, **???** dem ganzen Spektrum positiv ist (diese Bedgg ist sinnvoll, da Dim $f$ gerade)
Oder: Spektrum ist möglich, wenn die "Momentenform" $[\begin{vmatrix} x & \xi \\ y & \eta \end{vmatrix}^{2s}]_{xy}$ sich mit Koeff **???** 0 aus der $\begin{vmatrix} \mu_{nu} & \xi \\ 1 & \eta \end{vmatrix}^{2s}, \begin{vmatrix} 0 & \xi \\ 1 & \eta \end{vmatrix}^{2s}$ zusammensetzen lässt.
o) <u>Minimalform.</u> Def.: Eine Nullform **???** heisst "Minimalform", wenn es keine Nullform $\mathfrak{G}$ gibt, deren Menge $\mathfrak{f}\,(\mathfrak{G} < 0)$ echter Teil der Menge $\mathfrak{f}\,(M < 0)$ ist. Nach (j) enthält jede Einschliessungsmenge $\mathfrak{f}$ die Negativmenge einer gewissen Minimalform
1) Die reellen Nullstellen jeder Minimalform $M$ bilden ein mögliches Spektrum.
Bew.: Sonst $[\mathfrak{F}] = 0$, $\mathfrak{F} > 0$ wo $M = 0$, setze $M_1 = M + \varepsilon\,\mathfrak{F}$, $\varepsilon > 0$ klein;
kennzeichne die Pkte der proj. Geraden $f$ durch $(x, y)$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Wähle uns jeden Nullpkt $\mathfrak{F}_\nu$ von $M$ ein Intervall $\mathfrak{F}_\nu$, in dem $\mathfrak{F} \geqq \rho > 0$; auf dem Restgebiet sei $|M| \geqq \delta$ und $|\mathfrak{F}| < \eta$; dann tuts $\varepsilon = \frac{\delta}{\eta}$: aus $M_1 \leqq 0$ folgt $M \ngeqq \delta$, also $M \leqq -\delta$ oder $(x\, y) \in \mathfrak{F}_\nu$ dort aber folgt $M \leq -\varepsilon\,\rho$; also $\overline{\mathfrak{f}}(M_1) \geqq$ **???**.
2) Ein $\overline{\text{M}}$inimalpolynom hat keine reelle Nullstelle, deren Ordnung $> 2$ wäre.

Denn aus $M = N \cdot \underset{1\quad\ 1}{(\beta\, x - d\, y)^2}$, $N\ \underset{1\quad 1}{(\alpha\quad \beta)} = 0$ folgt, dass für alle $(\alpha\, \beta) < \mathfrak{P}$
$\mathfrak{F} = N \cdot (\beta\, x - d\, y)^2$ auf dem Spektrum von $M$ **???** ist und daher $[\mathfrak{F}] = 0$; da nun jede reelle Form des Grades 2 Linearverbindung reeller Quadrate ist, folgt $[N \cdot L_1 \cdot L_2] = 0$ für jedes Paar von reellen

**Seite 68**

Linearformen; damit könnte man aber ein Negativ-Intervall von $M$ auslöschen.
- Der gleiche Schluss zeigt, daß $M$ keinen definiten Teiler, dh. keine komplexe Nullstelle besitzt.
3) In der Umgebung einer zweifachen Nullstelle ist ein Minimalform stets $> 0$.

Dann sei $M = N\,\mathfrak{L}_0\mathfrak{L}_1^2\mathfrak{L}_2$ **???** Linearform, $\mathfrak{L}_i(\varphi_i) = 0$
Wäre $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2$, & $N \leqq 0$ auf diesem Intervall, so wäre die Negativmenge von $M_1 = N\,\mathfrak{L}_0^2\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2$ kleiner als die von $M$, andererseits wäre $[M_1] = 0$, da $M_1 = 0$ überall, wo $M = 0$.
4) Ist $M$ Minimalform, $M(a) = 0$, so ist $\mathfrak{f} = \{M < 0; a\}$ eine min Einschliessungsmenge. (Minimalität folgt aus $j$; Einschliessung so: **???** einfach, $M = \mathfrak{L}_1 \cdot N$, $\mathfrak{L}_1(a) = 0$. Da $[\mathfrak{L}\,N] \not\equiv 0$ für alle Linearformen $\mathfrak{L}$, kann man

**Seite 69**

$\mathfrak{L}_1$ gering abändern so daß$[N\,\mathfrak{L}_1'] < 0$; für geeignetes kleines $\varepsilon > 0$ ist $[j] = [N\,\mathfrak{L}_1' + \varepsilon\,\mathfrak{L}_1^{2s}] = 0$; die Menge $\{\mathfrak{F}$ **???** $0\}$ ist Einschliessungsmenge; und die Grenzmenge für $\varepsilon \to 0$, dh. die Gesamtheit der $\mu_1$ für die unendlich oft $\mathfrak{F}_\varepsilon \leqq 0$, ist $\{M < 0; a\}$. Ist nun $a$ doppelt: $M = N \cdot \mathfrak{L}_1^2$, $[\mathfrak{L}_1]^{2s} = 1$, so gibt es $\mathfrak{L}_2$ mit $[N\,\mathfrak{L}_2^2] = 1$; $\mathfrak{F} = N \cdot (\mathfrak{L}_1^2 - \varepsilon^2\,\mathfrak{L}_2^2) + \varepsilon^2 \cdot \mathfrak{L}_1^{2s}$ wo $\mathfrak{F} \leq 0$ ist $M < 0$ oder $\mathfrak{L}_1^2 \pm \varepsilon^2\,\mathfrak{L}_2^2 \leqq 0$; Grenzmenge **???** $\{M < 0; a\}$. Da jede Einschl.-Menge $\mathfrak{f}$ die Neg.-Menge eines Minimalpolynoms $M$ und einen seiner Nullpkte (da diese realisierbar) enthält, gilt.

p) Jede minimale Einschliessungsmenge besteht aus $\{M < 0; a\}$ wobei $M$ ein bel. Minimalpolynom $M$ und $a$ eine beliebige seiner Nullstelle ist.
Zu jeder gebr. rat. Fkt. $\varphi(x)$ des Grades $s$ kennt man einen Momentenpkt $\varphi(A)$. Sind die Einschliessungsmengen die Orginale (dh. einen Pk als Wertevorrats) von $\varphi(\lambda) \subset$ **???**
q) Die voneinander verschiedenen Zahlen **???** bilden dund die Nullstellen eines Minimalpolynoms $A\,B^2$, wenn (1) zwischen je zwei $\beta_i$ eine <u>gerade</u> Anzahl von $\alpha_j$ liegt und (2) die Momente $[A\,B^2] = 0$ & $[\frac{\Pi\,(x-\alpha_i)\,\Pi\,(x-\beta_k)^2}{x-\alpha_j}] \ \substack{> \\ <}\ 0$, wenn $d_j$ $\substack{\text{rechts} \\ \text{links}}$ Ende eines Negativintervalls, und $[\frac{\Pi\,(x-\alpha_i)\,\Pi\,(x-\beta_k)^2}{(x-\beta_j)^2}] > 0$. Insbesondere sind $\alpha_1 \sim \alpha_{2s}$ dund Grenzen einer **???**-teiligen minimalen Einschliessungsmenge, wenn sie "gut realisierbar" Zusammenhang mit Friedrich's Definitheisbedingungen ?

**Seite 70**

sind: $\Pi_1^{2s}\,(x - \alpha_i) = 0$, $[\frac{Pi\,(x-\alpha_i)}{x-\alpha_j}] \ \substack{> \\ <}\ 0$ wenn $\alpha_S$ $\substack{\text{rechts} \\ \text{links}}$ Ende eines Neg.-Intervalls.
Die Positivmenge bildet dann mit einer Nullstelle ebenfalls eine min. Einschl.-Menge !

r) Bemerkg. über <u>normale</u> EW-Aufgaben: Geg: $\mathfrak{q}$, $A\,\mathfrak{q}, \cdots, A^S\,\mathfrak{q}$; bilde Momente $m_{\alpha_\beta} = [z^\alpha\,\overline{z}^\beta] = \mathfrak{q}^* A^{*\,\beta} A^\alpha \mathfrak{q}$; die Matrix $M = (m_{\alpha_\beta}) =$ **???** $\gg 0$.

Geg. ferner ein komplexes Spektrum $\mu_1, \cdots, \mu_n$; setze $m_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_i^S \end{pmatrix}$. Dund ist es möglich, wenn für jede hermitesche Matrix $\mathfrak{F}$, für welche Spur $\mathfrak{F}\, M = 0$ ist, die "Nullform" $m_i^* \mathfrak{F}\, m_i \geqq 0$ für mindestens ein $i$ ausfällt. Für $\underline{s = 1}$ besagt diese Bedingung, dass jeder (Kreisbündel mit Minimalkreis) Kreis, der aus einem gewissen festen Kreis Diametralpunkte ausschneidet, in jedem seiner (abgeschlossen) 2 Gebiete mindestens ein $\mu_i$ aufweisen muss. Projiziert man passend auf Riemannsche Kugel, so sind genau diejenigen Spektren möglich, die keiner offenen Halbkugel angehören.

s) Bemerkung über allg. selbstadj. Aufgabe: geg. $Y = A\,X$, $X = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_f)$. **???** man nicht auf die Vielfachheit der Eigenwerte, sondern nur auf ihre Lage, so gilt ein Kriterium wie (b): Es müssen dreigewisse gegebene quadratische Formen $Q_1\, Q_2\, Q_3$ aus solchen $P_i \geqq 0$ mit Hilfe von $c_{1i} = 1$, $c_{2i} = \mu_i$, $c_{3i} = \mu_i^2$ zusammensetzen lassen. Man muß so alle (einfachen) Einschliessungsmengen auch für den Fall bekommen, dass man Spektrum mit Vielfachheit vorgibt. Als Sonderfall muß also die obige Theorie $(a) - (a)$ da herauskommen.
NB: Einfache Bemerkungen über Momentenkörper : M.Dresher, Moment **???**

**Seite 71**

t) Zum Iterationsverfahren bei selbstadjungierten Aufgaben:
Aus der Bemerkung von S.27 unten dürfte etwa folgendes herauskommen: Man setze für zwei festausgewählte Familienpolynome $\mathfrak{F}$, $G$ (etwa normierte auf das Koeff.-schema $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $x^{s\,11}$, $x^s$) $Q = \frac{\mathfrak{F}}{G}$. Dund sind $\leqq 2s + 1$ Zahlen ein mögliches Spektrum, wenn **???** die Nullstellmenge von **???** $+ \frac{A}{B} = 0$ bilden, wobei $\frac{A}{B}$ eine reelle rationale Funktion vom Grade $\leqq s$ ist, welche die obere Halbebene (und dabei auch die untere) in sich abbildet. Vielleicht gilt allgemein, auch $n > 2s + 1$: Dund sind $\{\mu_1 \cdots \mu_n\}$ mögliches Spektrum, wenn sie die Singularitätenmenge einer Funktion $\frac{1}{???}$ bilden, wobei $\frac{R}{S}$ die abgeschl. obere sowie die untere Halbebene in sich abbildet. $\frac{F}{S}$ hat diese Eigenschaft, und die Summe zweier Funktionen hat sie wieder **???**. In dieser Form könnte das Ergebnis für kontinuierliche Spektren auch gelten, ferner für $s = \infty$: Kann* man bei $s \to \infty$ $F_s$, $G_s$ so wählen, daß $\frac{F_s}{G_s} \to \varphi(z)$ ? Nennt man eine anal. Fkt. positiv, wenn sie die obere Halbebene in sich hinein abbildet, so bilden diese einen $+Modul$. Daher Frage nach Zusammensetzg als Sum. aus "elementarer" Fktionen mit Koeff. $\geqq 0$ dürfte auf Stieltjes Interprete **???** führen, erstreckt über die Halbebene $Im\, s \leqq 0$. Die durch lineare Transf. aus den positiven hervorgehenden Funktionen, welche den Einheitskreis in sich abbilden, kann man in elemtare Faktoren zerlegen, bei rationalen Fktionen geht das eindeutig aus Nullstellen, da eine solche
* Vielleicht durch Festlegung einer gemeinsamen Nullstelle $F_s$ jdv. $G_s$.

**Seite 72**

Funktion, nachdem man ihr die Nullstellen $a_\nu$ mit Hilfe geeigneter lineare Funktionen wie $\frac{z-a_\nu}{1-a_\nu z}$ wegdividiert hat, konstant werden muß. Soll eine normale EW-Aufgabe mit dem Iteration $\mathfrak{q}_i = A^i \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}^*$ **???** $\mathfrak{q}_0$ ein Spektrum in der Halbebene $Im\, z \leqq 0$ zulassen, so muss notwendig $\mathfrak{q}_0^* \frac{1}{z \cdot A} \mathfrak{q}_0 = \sum\limits_0^\infty m_{0\,i}\, z^i$ eine positive Fktion sein; ist das hinreichend ? - **???** man die reellen positiven rationalen Funktionen voll überzieht **???** sie sind $\frac{A}{B} = \sum\limits_1^n \frac{p_\nu}{z-r_\nu} + r_{k+1}$ mit reellen $r_\nu$; $p_\nu \geqq 0$ - und diese mit den $A + i\,B$ zusammenhängen, deren Nullstellen alle auf einer Seite der reellen Geraden liegen, übersieht man auch diese Polynome; dies der Weg von Löwner zur Herleitung der Hurwitzkriterien in Frank. **???** .

Legt man sich nicht auf eine bestimmte Basis der Familienpolynome fest, so bestimmt ein mögliches Spektrum von $\leq 2s+1$ Punkten nur die lineare Schar $\alpha\, A + \beta\, B$ eindeutig; eine Invariante von dieser ist die schiefsymmetrische Matrix vom Range 2 der Determinanten $d_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}$, mit $A = \Sigma\, a_i x^{c-i}$, $B = \Sigma\, b_i x^{c-i}$ bei Bemerkg. von S.27 dürfte auch zeigen, dass es in der Nähe eines jeden möglichen Spektrums $\{\mu_1 \cdots \mu_n\}$ mögliche Spektren gibt, die $\mu_1$ <u>nicht</u> enthalten.[1)]

Durch gebr. lin. Transf. würde das zeigen: $\{\mu_1 \cdots \mu_n\, \infty\}$ ist dund möglich, wenn es eine Folge von möglichen eigentlichen Spektren $\{mu_1^{(i)}, \cdots, \mu_{n+1}^{(i)}\}$ gibt mit $\mu_\alpha^{(i)} \to \mu_\alpha$ bezw. $\infty$. 1) Das folgt schon daraus, daß die möglichen Spektren $\{\mu_1 \cdots \mu_n\}$ die EWe der Matrizen $n$-ten Grades $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}$ sind, mit variablem $D$:

Man kann $D$ so wählen, daß **???** <u>nicht</u> EW ist, und zwar beliebig nahe an gegebenen **???**

**Seite 73**

u) Bemerkung über allgemeine selbstadj. EW-Aufg. $Y = \underline{A}\, X$.

Aufgabe: Gegeben $\underline{A} = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & \cdot\cdot \end{pmatrix}$; EWe ? Man kann annehmen, daß die $r$ von 0 verschiedenen Zeilen von $B$ linear unabhängig sind; dann ist $\mathrm{Gr}\, A + r = f + r\ Rg\,(Y, X)$. "Familie" sei ein mögliches Spektrum aus $f + r$ Zahlen; dh. das Spektrum von $\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}$, mit $Rg\, B = Gr\, D$. Aus Stetigkeitsgründen wird man sich mit der Behandlung des "allgemeinen" Falles $r = f$, dh. $Rg\,(X\,Y) = 2f$, begnügen können, so daß jede Familie $2f$ Zahlen enthält. Vermutung: Jede Familie $\mathfrak{f}$ **???** die Gerade in zwei minimale abgeschl. Einschl-mengen ein, nämlich $\Pi_{\mu \in \mathfrak{f}}^{2f}\,(x - \mu) \geqq 0$ bezw. $\leqq 0$.

v) Zahlenbeispiel von Collatz: $-y'' = \lambda\, y,\ y(0) = y(1) + y(1) = 0$
$\mathfrak{F}_0 = 1$, $\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{4}(3x - 2x^2)$, $\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{48}\cdot(7x - 6x^3 + 2x^4)$ $\mathfrak{F}_3 = \frac{1}{1440}(50x - 35x^3 + 9x^5 - 2x^6)$, $\mathfrak{F}_4 = \frac{1}{241920}(2035x - 1400x^3 + 294x^5 - 36x^7 + 6x^8)$;
gibt Moment $m_k = \int\limits_0^1 \mathfrak{F}_k\, \mathfrak{F}_0\, dx = a_k$
$m_0 = 1$ $m_1 = 3/24$ $m_2 = 1/20$ $m_3 = 163/28\cdot 480$ $m_4 = 1069/315\cdot 1152$ $m_5 = 653/3168\cdot 288$ $m_6 = 108281/3003\cdot 207360$; die $\mu_i = \frac{a_i}{a_{i-1}}$ sind $\mu_1 = 4,8$ $\mu_2 = 4,1667$ $\mu_3 = 4,12270$ $\mu_4 = 4,116932$ $\mu_5 = 4,1160359$ $\mu_6 = 4,11588829$. Hieraus mit

$$\mu_{k+1} - \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\frac{l_2}{\mu_{k+1}} - 1} \leqq \lambda_1 \leqq \mu_{k+1} \qquad \text{ohne Angabe von } l_2 \quad l_2 \sim 20?$$

wird auf 5 geltende Stellen genau $\lambda_1 = 4,1159$ Exakt ist $Ag\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$.

**Seite 74**

Es ist $m_0 = 1$, $m_1 = 0,208\,33333$, $m_2 = 0,05$, $m_3 = 0,012\,1279\,7619$ $m_4 = 0,002\,9458\,77425$, $m_5 = 0,000\,7157\,0742$, $m_6 = 0,000\,1738\,8893$.

w) Ist $F(x)$ ein Familienpolynom und $Gr\, P(x) \leqq s$ ($s$ = Schrittzahl **???**) so ist $(\mathfrak{F}\cdot P)^* = \mathfrak{F}^*\cdot P$ (74.1)
Ferner ist für das spezielle Familienpolynom $\mathfrak{F} = G(x,u)$ und das Galerkin-Polynom $G(x)$

(74.2) $$\begin{vmatrix} \mathfrak{F}^* & G^* \\ \mathfrak{F} & G \end{vmatrix} = c_s\, G(u) \text{ mit } c_s = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_s \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ m_s & m_{s+1} & \cdots & m_{2s} \end{vmatrix} > 0$$

Bew.: $= \begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{F}(x)-\mathfrak{F}(t)}{x-t} & \frac{\mathfrak{G}(x)-\mathfrak{G}(t)}{x-t} \\ \mathfrak{F}(t) & G(t) \end{vmatrix}_x = \begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{F}(x)-\mathfrak{F}(t)}{x-t} & \frac{\mathfrak{G}(x)-\mathfrak{G}(t)}{x-t} \\ \mathfrak{F}(x) & G(x) \end{vmatrix}_x = [\frac{\mathfrak{F}(x)-\mathfrak{F}(t)}{x-t}\cdot G(x)]_x = G(u)\cdot[x^k G(x)]$ nach (21.4) $= G(u)\cdot[x^k G(x)]$ nach (21.4)
$= G(u)\cdot c_S$ nach (20.2)
Aufgabe: $s$-dimensionale Einschliessungsmengen für $\{\lambda_1, \cdots, \lambda\}$ ($s$ = Schnittzahl) !
(x) Die allgemeinste zu vorgegebenen Momenten $m_\sigma = \mathfrak{q}_0' M^\sigma\, \mathfrak{q}$ realisierbar charakteristische Funktion ist
(74.3) $\Phi(x) = D_m(x)\cdot\mathfrak{F}(x) - p\cdot G(x)\cdot D_{m-1}(x)$. Dabei ist $\mathfrak{F}$ ein beliebiges normiertes Familienpolynom des Grades $s+1$, $G$ das normierte Galerkinpol. des Grades $s$, $p \geqq 0$, $D_m(x)$ die charakt. Fkt. einen beliebigen $m$-reihigen ($m \geq 0$) reellen symm. Matrix, $D_{m-1}(x)$ die zu der $m-1$-reihigen Matrix, die aus $M$ durch Streichen der ersten Zeile u. Spalte entsteht, gehörige ch. Fkt.

**Seite 75**

Bew: Führt man **???** neues Orthogonalsystem ein, in dem die ersten $\sigma$ Einheitsvektoren demselben linearen Raum aufspannen wie $\mathfrak{q}_0, M\,\mathfrak{q}_0, \cdots, M^{\sigma-1}\varphi_0 \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, SH)$, so erhält $|x - M|$ die Gestalt

$$(75.1) \quad \Phi(x) = |x - M| = \text{???}$$

Setze die $s$-te Abschnittsdet. $= G(x)$, die $(s+1)$te $= \mathfrak{F}(x)$, $|x - S_m| = D_m(x)$, $b^2 = p$.
$a_1, \cdots, a_\rho, b_1, \sim, b_\rho$ sind durch die Momente $m_\sigma \quad (\sigma = 0, \cdots, 2s)$ eindeutig bestimmt.

(J) Welche normierten Fktionenpaare $D_m(x)$, $D_{m-1}(x)$ treten als charakt. **???** und $m-$ ertse Abschnittsdeterminante reeller symmetrischer Matrizen auf ?
U.A.: 1) $D_m$ und $D_{m-1}$ nur einfache reelle Wu; die von $D_{m-1}$ sollen die von $D_m$ trennen. Bew: Sei $D_m = (c_m x + d_m) \cdot D_{m-1} - D_{m-2}$
$D_{m-1} = (c_{m-1}x + d_{m-1}) \cdot D_{m-2} - D_{m-3}$
(75.2) $\cdots$
$D_1 = (c_1 x + d_1) \cdot D_0$
$D_0 = 1$

**Seite 76**

Da $D_m, \cdots, D_0$ Sturmsche Kette, wobei für $D_m = 0 \qquad D'_m \cdot D_{m-1} > 0$, ist wegen der Anzahl in der Wu von $D_m$ stets $c_\mu > 0$.
Schreibt man statt (75.2) $\quad c_m x + d_m)\, D_{m-1} - D_{m-2} = D_m$.
$-D_{m-1} + (c_{m-1}x + d_{m-1})\, D_{m-2} - D_{m-3} = 0$
$-D_1 + (c_1 x + d_1)\, D_0 = 0$

so sieht man: Ist $D_m(x) = 0$, so ist auch

$$\Delta_m(x) = \begin{vmatrix} c_m x + d_m & -1 & \\ -1 & c_{m-1}x + d_{m-1} & -1 \\ & -1 & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Daher ist, da $D_m$ normiert und durch seine Nullstellen eindeutig bestimmt,

$$D_m(x) = \begin{vmatrix} x + \frac{d_m}{c_m} & -\frac{1}{\sqrt{c_m}} & \\ -\frac{1}{\sqrt{c_m}} & x + \frac{d_{m-1}}{c_{m-1}} & -\frac{1}{\sqrt{c_m - 1}} \\ & -\frac{1}{\sqrt{c_{m-1}}} & \cdots \end{vmatrix}$$

**???** $D_{m-1}$ = Abschnittsdeterminante.
(z) NB: Die Aufgabe von Schur, eine gegebene Gl. $D_m(x) = 0$ mit nur reellen Wurzeln als Säkulargl. einer reellen symm. Matrix darzustellen, ist damit für den Fall einfacher Wurzeln gelöst; nimm etwa $D_{m-1} = \frac{1}{m}\, D'_m$. Der allgemeine Fall kann rational auf diesen zurückgeführt werden, indem man $D_m(x)$ in Faktoren mit einfachen Wurzeln zerlegt. Aufgabe: Allgemeinen Fall direkt; sicher kann man rational zwei reelle symm. Matrizen $A\,B$ angeben, so daß $D_m(x) = |A\,x - B|$ und $A$ pos def., wenn $D_m$ lauter reelle Wurzeln hat.
s.(84.1)

**Seite 77**

Vermutung von Rellich: Für zwei beschränkte Operatoren ist nie $A\,B - B\,A = 1$.
Beweis (14.5.45): Es wäre (Induktion) (1) $A\,B^{n+1} - B^{n+1}A = (n+1)\,B^n$, daher $(n+1)\cdot \boxed{B^n} \leqq 2\boxed{A}\boxed{B}\boxed{B^n}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$; $B^n = 0$ für $n+1 > 2\boxed{A}\boxed{B}$, daraus rückwärts mit Hilfe von (1) für $n = 0, 1, 2 \cdots$.

Satz von Herglotz: Definiert man im nichtkomm. Ring mit den Erzeugenden $A$, $B$ und der Relation $A\,B - B\,A = 1$ mit komplexen Koeffizienten Konverz durch KOnvergenz der Beiwerte der Normalform $\sum c_\alpha \beta A^\alpha B^\beta$, so gilt $e^{2\,i\,\pi \cdot A\,B} = 1$.
Bew. (14.5.45): $(A\,B)^n = \sum_n^0 c_{n\,\rho} A^\rho B^\rho$, da $A \to t\,A$, $B \to\to \frac{1}{t}\,B$ ungeändert läßt. Daher ist $e^{z\,A\,B} = \sum_\infty^0 \zeta_\rho(z) \cdot A^\rho B^\rho$. Nach der obigen Formel (1) gilt (mit $D = \frac{d}{d\,z}$) $\quad (D+\rho)\,\zeta_\rho = \zeta_{\rho-1}$, $\zeta_0 = 1$. Daher ist $D\,(D+1)\cdots(D+\rho)\cdot\zeta_\rho = 0$, $\cdots \zeta_\rho = \sum_\rho^0 a_\lambda e^{-\lambda\,z}$, $\zeta_\rho(z + 2\,\pi\,i) = \zeta_\rho(z)$, also $e^{z+2\,\pi\,i)\,A\,B} = e^{z\,A\,B}$; $z = 0$ setzen.
Folge: Operieren $A$, $B$ auf einen Raum $\phi$, und ist $\phi^*$ eine Teilmenge mit $A^*\phi^* \subset \phi^*$, $B^*\phi^* \subset \phi^*$, und ist $\zeta_0^* \in \phi^*$ mit $B^n \zeta_0^* = 0$ für ein $n$, so konvergiert im gewöhnlichen Sinn $\sum_\infty^0 \frac{(2\pi\,i\,A\,B)^\nu}{\gamma\,i}\,\zeta_0^* = \zeta_0^*$. Beispiel: $A = -x$, $B = \frac{d}{dx}$, $\zeta_0^* =$ Polynom.

**Seite 78**

Auflösung $(\mathfrak{K} + (\sum + \int\, sl1n\, a_\nu c\, \mathfrak{e}\, b_\nu(y)dy)\, f(y) = g(x)$ mit Nebenbedgg. $f \in \mathfrak{f}$:

---

Bekannt ist eindeutiger Operator $\mathfrak{K}^{-1}$ mit $\mathfrak{K}^{-1}\mathfrak{K}\,f = f$ für $f \in \mathfrak{f}\,\&\,\mathfrak{K}^{-1}\zeta \in \mathfrak{f}$.

$$\text{Dann ist} \begin{vmatrix} f - \mathfrak{K}^{-1}g & -\mathfrak{K}^{-1}a_1 & \cdots & -\mathfrak{K}^{-1}a_n \\ \int b_1\,\mathfrak{K}^{-1}g & 1 + \int b_1\,\mathfrak{K}^{-1}a_1 & \cdots & \int b_1\,\mathfrak{K}^{-1}a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int b_n\,\mathfrak{K}^{-1}g & \int b_n\,\mathfrak{K}^{-1}a_1 & \cdots & 1 + \int b_n\,\mathfrak{K}^{-1}a_n \end{vmatrix} = 0$$

Entwickle nach 1. Zeile

Differenzkerne endlichen Ranges $n$
haben die Gestalt $K\,(x-y)$ mit einer Funktion $K(z)$, welche einer beliebigen linearen homogenen Dgl. mit konstanten Koeff. von der Ord. $n$ genügt, aber keiner niedrigeren; und jede solche Funktion ist so ein Kern.
Vor. dabei: Entweder $K$ $n$-mal stetig diffbar, gegeben für $a \leq x$, $y \leq b$;
Oder $K$ stetig, gegeben für $-\infty < x$, $y < \infty$. Vermutlich genügt auch Stetigkeit für $a \leq x$, $y \leq b$.

Operatoren, die mit der Translation $x \to x + a$ vertauschbar sind, kann man $\breve{u} \cdot a$.
so erhalten $\mathfrak{y}\{f(x)\}$ sei ein beliebiges Funktional; setze $\mathfrak{A}\{f\} = \mathfrak{y}_t\{f(x + t)\}$. (Daher heisst $\mathfrak{y}_t$ : $\mathfrak{y}$ auf die Variable $t$ angewendet.) Es ist $\mathfrak{A}\{f(x + a)\} = \mathfrak{A}\{f(x)\}_x \Big|_{x+a}$.
Ist $\mathfrak{y}$ linear, so auch $\mathfrak{A}$.

**Seite 79**

Zur Lösung der Betz-Gleichung. $\frac{1}{\pi}$ **???** $f(y)\,\frac{dy}{x-y} = g(x)$. Für $g(x) \equiv b\,1$ ? gibt die Lösungsformel $f(y) \equiv$ **???**, aber diese ist nicht Lösung: $g$ verletzt die Söhngen-Bedinggen $\int\limits_0^\infty \frac{g(x)}{1+x}\,dx < \infty$, $il0\infty \frac{|g|^2}{1+x}\sqrt{x}\,dx < \infty$.

Aufgabe von Pasenal Jordan: Ein Verband ist ein Gl.-Syst. mit zwei unbeschränkt ausführbaren Verknüpfungen $a \cap b$, $a \cup b$ tauch ab, $a + b$ geschrieben), für welches gilt
(A) $\begin{cases} a \cap b = b \cap a, \ a \cup b = b \cup a \\ \quad a \cap a = a, \ a \cup a = a \end{cases}$ $a \cap\ (a \cup b) = a$, $a \cap (a \cup b) = a$ (z.B. alle Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$). Bei "modularen" oder Dedekindschen Verbänden gilt ausserdem (z.B. alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$)
(B) $(a\,c + b)\,c = a\,c + b\,c$ **???**; und bei "distributiven gilt sogar
(C) $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$. Frage: Gibt es eine durch übersichtliche Axiome zu kennzeichnende Zwischenklasse von Verbänden zwischen den allgemeinen und den Dedekindschen ? (Eine solche bilden z.B. die nachinvar. Untergruppen, doch ist deren (von Zassenhaus gefundene)verbands axiomatische Kennzeichnung zu kompliziert.)

**Seite 80**

$\boxed{\text{Zur Theorie des Cauchyschen Hauptwertes}}$ 25.5.45
(1) Ist $f(t)$ in jedem Int. $a \le t \le b$ mit $0 < a < b < \infty$ Riemannsch eigentl. integrierbar, und existieren die uneig. Integrale $\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{1+t}\,dt$ und $\int\limits_0^\infty \frac{|f(t)|}{(1+t)^2}\,dt$, und genügt $f(t)$ mit $\alpha > 0$,
so existieren die beiden Grenzwerte
**???** $f(t)\,\frac{dt}{t-x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty f(t)\,(\frac{1}{t-x-i\,\varepsilon} + \frac{1}{t-x+i\,\varepsilon})\,dt = \frac{1}{2} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\int\limits_0^\infty f(t)\,(\frac{dt}{t-x-i\,\varepsilon} + \int\limits_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{t-x+i\,\varepsilon})$
(2) $\int\limits_{x+\varepsilon}^{x-\varepsilon_{\hookrightarrow}} \frac{\log(x-xi)}{x-\xi}\,d\,\xi = -i\,\pi\,\log\varepsilon + \frac{\pi}{2}^2$; $\int\limits_{x-\varepsilon_{\hookrightarrow}}^{x+\varepsilon} \frac{d\,\xi}{x-\xi} = -i\,\pi$; bei $\curvearrowright$ ändert sich

nur ($x$ reell) $i \to -i$

(3) Für $\mathfrak{F}(z) = \int\limits_a^b \frac{\log(z-\xi)}{z-\xi}\, f(\xi)\, d\xi$ ist $\mathfrak{F}(x \pm o\, i) = \int\limits_a^b \frac{\log\, |x-\xi|}{x-\xi}\, d\,\xi$ für $x > b$,

$\mathfrak{F}(x \pm o\, i) = \int\limits_a^b \frac{\log(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi \pm \pi\, i \int\limits_a^b \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\,\xi$ für $x < a$,

sonst $\mathfrak{F}\,(x \pm o\, i) =$ **???** $\frac{\log(x-\xi)}{x-\xi}\, f(\xi)\, d\xi + \frac{\pi^2}{2}\, f(x) \pm \int\limits_x^b f'(\xi)\, \log\,(\xi - x)\, d\xi \pm$ $\pi\, i\, f(b)\, \log\,(b-x)$.

(4) Def.: Eine für $0 < x < \infty$ definierte Funktion $f(x)$ heisst eine $P$-Funktion ("Potenz"-) wenn sie sich einen Winkelraum $(arg\, z) < \varphi$ fortsetzen lässt und dort gleichmäßig mit einem $\varepsilon > 0$ $\quad f(z) = \left\{ \begin{array}{ll} 0\,(|z|^{\varepsilon-1}) & \text{für } z \to 0 \\ 0\,(|z|^{-\varepsilon}) & \text{für } z \to \infty \end{array} \right\}$ gilt: dh. $*$

Jede $P$-Fktion $f$ ist auch eine $L$-Funktion, und $\mathfrak{L}\, f$ konvergiert **???** für $\Re\, s > 0$.

(5) Satz: Mit $f$ ist auch $\mathfrak{L}\, f$ eine $P$-Funktion, allgemeiner auch **???** $\mathfrak{L}\, f$ mit $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$

**???**

**Seite 81**

(6) Satz: Für jede $P$-Funktion $f(x)$ existieren auch die beiden "Stieltjes Transformation"

$\gamma_+\, f = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_0^{\infty\, e^{i\varphi}} f(\xi)\, \frac{d\,\xi}{x-\xi} = \lim\limits_{\delta \to +0} \frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_0^{\infty} f(\xi)\, \frac{d\,\xi}{(x-o\, i)-\xi}$

$\gamma_-\, f = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_0^{(-\varphi)} f(\xi)\, \frac{d\,\xi}{x-\xi} = \lim\limits_{\delta \to +0} \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_0^{\infty} f(\xi)\, \frac{d\,\xi}{(x+o\, i)-\xi}$ und daher auch ihre Summe (Biot-Savert, -Betz-**???**)

$\mathfrak{B}\, f = (\gamma_+ + \gamma_-)\, f = \frac{1}{\pi\, i}$ **???** $f(\xi)\, \frac{d\xi}{x-\xi}$

Alle drei Funktionen sind wieder $P$-Funktionen; **???** es gibt ferner

$\gamma_* f - \gamma_{-f} = f$. $\gamma_-$ ist die analyt. Forts. von $\gamma_+$ **???**

(7) Satz: Ist $f(x)$ eine $P$-Funktion, so ist

$\mathfrak{L}\, \gamma_+\, f = -\gamma_- \mathfrak{L}\, f,\ \mathfrak{L}\, \gamma_-\, f = -\gamma_+ \mathfrak{L}\, f$

und daher $\qquad \mathfrak{L}\, \mathfrak{B}\, f = -\mathfrak{B}\, \mathfrak{L}\, f$.

Bew.: $\quad 2\,\pi\, i\, \mathfrak{L}\, \gamma_\pm\, f = \int\limits_0^\infty e^{-st} dt \int\limits_0^{(\varphi)} f(\xi)\, \frac{d\,\xi}{t-\xi} = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^{(\varphi)} e^{-st} f(t\,\eta)\, \frac{d\,\eta}{1-\eta} =$ $\int\limits_0^{(\varphi)} \frac{d\,\eta}{1-\eta} \int\limits_0^\infty e^{-st}\, f(t\,\eta)\, dt = \int\limits_0^{(\varphi)} d\eta \cdot \frac{1}{\eta\,(1-\eta)} \int\limits_{(\varphi)}^0 e^{-\frac{s}{\eta}\tau}\, f(\tau)\, d\,\tau = -\int\limits_0^{(-\varphi)} d\xi \cdot$ $\frac{1}{s-\xi} \int\limits_0^{(\varphi)} e^{-\xi\,\tau} f(\tau)\, d\tau = -\int\limits_0^{(-\varphi)} d\,\xi \cdot \frac{1}{s-\xi}\, \mathfrak{L}\, f = -2\pi\, i\, \gamma_\pm\, \mathfrak{L}\, f$.

(8) Für $-1 <$ **???** $< 0$ ist $\gamma_\pm\, x^\alpha = x^\alpha \cdot [1)\; \gamma_\pm\, x^\alpha$; $[1)\; \gamma_\pm\, x^\alpha = -[1)\, \gamma_\pm\, x^{-1-\alpha}$
$\mathfrak{B}\, x^\alpha = k\,(\alpha) \cdot x^\alpha$; $k(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\xi^\alpha - \xi^{-1-\alpha}}{1-\xi} \cdot d\xi = [1)\, \mathfrak{B}\, x^\alpha$
$[1)\;\; \gamma_{pm}(x^\alpha + x^{-1-\alpha}) = \pm 1$; $k(\alpha) + k(-1-\alpha) = 0$
Daher $k(-\frac{1}{2} = 0$: $\mathfrak{B}\, x^{\frac{1}{2}} = 0$.

**Seite 82**

(9) Mit $f(x)$ sind auch $f(a\,x)$ $(a > 0)$ und $f(x^p) \cdot x^{p-1}$ $(0 < p \leq 1)$ $P$-Funktionen, auch sogar $f(x^p) \cdot (\frac{x}{1+x})^{p-1}$ für $0 < p \leq 1$, ferner auch $h(x) \cdot f(x)$, wenn $h(z)$ in einem Winkelraum $|arg\, z| < \varphi$ und **???** $h(x)$ beschränkt. Ferner auch $\frac{1}{x} \cdot$ **???** und $(\log\, x)^\lambda \cdot f(x)$ ($\lambda$ beliebig).

(10) Die einzige $P$-Fktion $f(x)$ mit $\mathfrak{B}\, f = 0$ ist $f(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}$.
Bew.: $\gamma_+ f = -\gamma_-\, f$, also ist $\sqrt{z} \cdot \gamma_\pm\, f$ eindeutig. Ferner $|\;| < \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, daher = const.

(11) Ist $|\,arg\, a|$ so klein, daß$f(z)$ eine $P$-Fktion im Raum **???** $< |\,arg\, a| + \varepsilon$ ist, so gilt $[x)\, \gamma_\pm$ **???** $= [a\,x)\, \gamma_\pm\, f(t)$

(11) Für $P$-Funktionen gilt $\gamma_\pm^2 f(t) = -\frac{1}{4\,\pi^2} \int\limits_0^{(\varphi\, ???\, 0)} f(\xi)\, d\xi\, \frac{\pm 2\,\pi\, i + \log\, x - \log\, \xi}{x - \xi}$
$= (\pm 1 + \frac{1}{2\pi\, i} \cdot \log\, x) \cdot \gamma_\pm f(t) - \frac{1}{2\,\pi\, i} \cdot \gamma_\pm\, f(t)\, \log\, t.$
**???** $f(t) = \gamma_-\, \gamma_+\, f(t) = \frac{1}{4\,\pi\, i}\{\log\, x \cdot \mathfrak{B}\, f(t) - \mathfrak{B}\, f(t) - \mathfrak{B}(\log\, t \cdot f(t))\} = \frac{1}{2\,\pi\, i}\, \gamma_+ \cdot \log\, \frac{s}{t}$
$= \frac{1}{2\pi\, i}\{\log\, x \cdot \gamma_\pm\, f(t) - \gamma_\pm\,(\log\, t \cdot f)\} = \frac{1}{2\pi\, i}\, \gamma - \log\, \frac{s}{t}$
${}_x\mathfrak{B}_t^2\, f(t) = f(x) + \frac{1}{\pi\, i} \cdot \mathfrak{B}\{\log\, \frac{x}{t} \cdot f(t)\} = f(x) + \frac{1}{\pi\, i}\, \log + \mathfrak{B}\, f - \frac{1}{\pi\, i}\, \mathfrak{B}\,(f(t)\, \log\, t)$
dh.

$${}_x\mathfrak{B}_t^2 \equiv \mathfrak{f}^2 + \frac{1}{\pi\, i}\, {}_x\mathfrak{B}_t\, \log\, \frac{s}{t}. \qquad [:h]_s \mathfrak{L}_\rho\; {}_\rho\mathfrak{B}_t =_s 1_t + \frac{1}{\pi\, i}\, {}_s\mathfrak{B}_t\, \log\, \frac{s}{t}[:h]$$

Daher

$$\mathfrak{L}\, \mathfrak{B}\, \log\, \frac{s}{t} \equiv \mathfrak{B}\, \log\, \frac{s}{t}\, \mathfrak{L}$$

**Seite 83**

(12) $(\mathfrak{B} - k(\alpha))\, t^\alpha\, \log^n t = \sum\limits_{n-1}^{\nu=0} \begin{pmatrix} n \\ \nu \end{pmatrix} x^\alpha\, \log^\nu x \cdot \frac{1}{\pi\, i}$ **???** $\frac{\rho^\alpha\, \log^{n-\nu} \rho}{1-\rho}\, d\rho$
Daher $(\mathfrak{B} - k(\alpha))^{n+1} + t^\alpha \log^n t = 0$

(13) $\mathfrak{B} \cdot \{\mathfrak{B} - \frac{1}{\pi\, i} \cdot \mathfrak{f}\, \log\, \frac{s}{t}\} = \mathfrak{f}^2 =$ **???** [1)] Bew: (11)
Im Gegensatz zu den Betz-Formeln
${}_s\mathfrak{B}_t\; {}_t\mathfrak{B}_\rho \sqrt{\frac{\rho}{t}} = 1$, $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}\, \sqrt{\frac{\rho}{t}} \cdot \frac{1+t}{1+\rho} = 1$

gilt (13) für alle $P$-Funktionen (und liefert ersichtlich wieder eine $P$-Fktion)[1].
NB: (13) heisst ausführlich ${}_s\mathfrak{B}_\rho\,\{{}_\rho\mathfrak{B}_t \;-\frac{1}{\pi\, i}\cdot_\rho \mathfrak{f}_t \cdot \log\frac{s}{t}\} =$ **???**

(14) Bei der Operatorenschreibweise mit fortgelassenen Argumentbuchstaben muss man die Formeln homogen in denjenigen Fraktur-Operatoren schreiben, die den Namen der Variablen, auf die operiert werden soll, ändern. Konsequent müsste man etwa die "Integrationsvariablen" in der Reihenfolge ihrer Auslöschung durchnumerieren, also z.B. $(13)'$
$(13')$: $\mathfrak{B}\,\{\mathfrak{B} - \frac{1}{\pi\, i}\,\mathfrak{f}\,\log\frac{s_3}{s_1}\} = \mathfrak{f}^2$. Es ist $\mathfrak{f}\,\log\frac{s_3}{s_1} = \log\frac{s_3}{s_2}\,\mathfrak{f} = \log\frac{s_3}{s_2}\cdot$ **???**.
Ist die höchste Variablenummer um $k$ grösser als die Dimension den Fraktur-Operatoren, so enthält die Formel $k$ freie Veränderliche. Einen Faktor, der nicht von $s_1, \cdots, s_m$ abhängt darf man von rechts her bis vor den $(m+1)$-ten Frakturoperator durchschrieben.

[1] Dies ist keine Auflösungsformel, da die freie **???** in dem **???** Lösungsausdruck auftritt.

**Seite 84**

(1) Vermutung: $\det\left\{\begin{pmatrix} s_0 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & \cdots & s_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{n-1} & \cdots & s_{2n-2}\end{pmatrix} \mathrm{x} - \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ \vdots & & \vdots \\ s_n & \cdots & s_{2n-1}\end{pmatrix}\right\}$
hat die gleichen (84.1)

Nullstellen wie $f(x)$, wenn $Gr\,f(x) = n$, $s_\nu$ **???** $\nu$-te Potenzsumme der Wurzeln von $f(x)$ und $f(x)$ quadratfrei. BEWEIS: 85.2 s. auch **???**
Verallgemeinerung: $s_k = \sum_{n}^{\nu=1} p_\nu\, x_\nu^k$

(2) Aufgabe: Welche reellen (a) Diagonaltransformationen, (b) linearen Transformationen von $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ haben die Eigenschaft, die Anzahl der reellen Nullstellen von $a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n x^n$ nicht zu vermindern ? Vgl. dazu Pólya - Szegö, Aufgaben. Dabei zählt die Wurzel $\infty$ als reell; die **???** sind reelle Unbestimmte.- z.B. Gebr. lin. Transf. von $x$.

(3) Schuss Oberseminar: Themen 1932. 1. Fejér Interpolation, Math Ann $\sim$ 1932.
2. Titchmarsh, Kreisgitterproblem $(\frac{27}{82})$.
3. Bieberbarch: Bewegungsgruppen Math Ann 70, 72
Frobenius Berl. Ber. 1911
4. Colen, MZ 14 (?) Anzahl d. Wurzeln von $f(z)$ im Einheitskreis
Dazu Schur **???** MZ 24

(4) Aufgabe: **???** Abschnitt der Lösungsreihe nur reelle Wurzeln ? Dann hätte jeder Abschnitt der Exponentialreihe seine Nullstellen in der linken

Halbebene.

**Seite 85**

[142] G.Mignosi behauptet fälschlich: Dann und nur dann sind alle
(1) char Wu von $A$ in der rechten Halbebene, wenn $A+\overline{A}'$ pos. definit.

(2) Beweis zu (84.1) : Det $=$ $|A\,x\,-\,B|$, $A\;=\;T\,T'$, $B\;=$ $T\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}T'$ mit $T\;=\;\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ . & . & . & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1} & \end{pmatrix}$,
$f(x_\nu)=0$.

Reduktion singulärer Formenbüschel $\lambda\,A\;+\;B$ ($A, B$ Rechtecke gleichen Typs). Sei zunächst $Rg\,(\lambda\,A+B)\;=\;Rg\,A$. Gibt es Lösungen $\mathfrak{x}(\lambda)$ von $^{(1)}$ $(A\,\lambda{+}B)\,\mathfrak{x}=0$, so gibt es auch solche, die in Bezug auf $\lambda$ ganz rational sind. Sei $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_r$ ein vollständiges System über $K(\lambda)$ linear unabhängiger Lösungen von **???** , derart daß 1) alle $\mathfrak{x}(\lambda)$ ganz rat sind und dass 2) $\sum\limits_{r}^{\rho=1} Gr\,\mathfrak{x}_\rho = m = \min.$ Ist dann etwa $\mathfrak{x}_\rho(\lambda)=\mathfrak{x}_\rho^{(0)}+\lambda\,\mathfrak{x}_\rho+\cdots+\lambda^n\rho\cdot\mathfrak{x}_\rho^{(n\,\rho)}$, $\mathfrak{x}_\rho^{n\,\rho}\neq 0$, dh. $Gr\,\mathfrak{x}_\rho=n_\rho$, so sind alle $\mathfrak{x}_\rho^{(\sigma)}$ lin. unabh.. Denn sonst gäbe es, wenn eine Beziehung $\sum{}' c_\rho\mathfrak{x}_\rho=0$ mit konstanten $c_\rho\neq 0$ und mit max $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{x}_\rho=\mu$ besteht, Polynome $f_\rho(\lambda)$ mit $\mathrm{Gr}\,f_\rho(\lambda)\;\le\;\mu$ und nicht alle $f_\rho(\lambda)\;=\;0$, und so daß in (2) **???** $\sum{}'\; f_\rho(\lambda)\,\mathfrak{x}_\rho$ das Glied mit $\lambda^\mu$ fehlt. Sei $g\;=\;\underbrace{\sum\limits_{\mu-1}^{\nu=0}\lambda^\nu\,\mathfrak{z}_\nu}\;+\;\lambda^{\mu+1}\underbrace{\sum\limits_{\mu-1}^{\nu=0}\lambda^\nu\,\mathfrak{z}'\nu}$, so folgt aus $(A\,\lambda{+}B)=\mathfrak{y}=0$, daß dies und dies einzeln Lösungen von (1) sind.

**Seite 86**

Da deren Grade $\le\mu-1$, sind sie wegen Minimaleigenschaft von **???** darstellbar als Linearverbdgen der $\mathfrak{x}_\rho$ mit Gr **???** $\;\le\;\mu-1$ (mit in $\lambda$ rationalen Koeffizienten). Das widerspricht der Darstellg (2). Ähnlich zeigt man, daß die $\mathfrak{y}_\rho^{(\sigma)}\;=\;B\,\mathfrak{x}_\rho{}^{(\sigma)}$ mit $\sigma>0$ lin. un. sind. Führt man neue Koord $\mathfrak{x}$ ein, unter deren Einheitsvektoren die $\mathfrak{x}_\rho{}^{(\sigma)}$ vorkommen, und ebenso $\mathfrak{y}_\rho{}^{(\sigma)}$, so nehmen wegen $B\,\mathfrak{x}_\rho{}^{(0)}=0$; $\mathfrak{y}_\rho^{(1)}=B\,\mathfrak{x}_\rho{}^{(1)}=A\,\mathfrak{x}_\rho{}^{(0)}$, $\mathfrak{y}_\rho^{(2)}B\,\mathfrak{x}_\rho^{(2)}=A\,\mathfrak{x}_\rho^{(1)}$; $\cdots$, $A\,\mathfrak{x}_\rho^{(n\,\rho)}=0$ die lin. Transf. $A$ und $B$ die Gestalt an

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\diagdown} & 0 & 0 & \\ 0 & \boxed{\diagdown} & 0 & \mathrm{C} \\ 0 & 0 & \boxed{\diagdown} & \\ \hline & & & \\ & 0 & & A_1 \\ & & & \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\diagdown} & 0 & 0 & \\ 0 & \boxed{\diagdown} & 0 & \mathrm{D} \\ 0 & 0 & \boxed{\diagdown} & \\ \hline & & & \\ & 0 & & B_1 \\ & & & \end{array}\right)$$

wobei $\boxed{\diagdown}$ ein Kästchen der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ bedeutet, & $\boxed{\diagdown} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Davor können noch 0-Spalten stehen, nämlich so viele als es $\mathfrak{x}_\rho$ mit $n_\rho = 0$ gibt.
$(A_1\lambda + B_1)\,\mathfrak{x}^* = 0$ hat keine Lösung $\mathfrak{x}^*$ mehr, da eine solche zu einer von $\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_r$ unabh. Lösung von (1) ergänzt werden könnte, da der Zeilenrang der linken oberen Ecke von $A$ und $B$ der volle **???** . Aus $Rg\,(A\,\lambda + B) = Rg\,A$ folgt, daß auch $A_1$ vollem Spalten rang hat. Man kann daher durch Substraktion geeigneter

**Seite 87**

Multipla der Zeilen von $A_1$ jede Zeile von $C$ zum Verschwinden bringen auf Kosten der Zeile gleicher Nummer von $D$. Da ferner in jeder Zeile linken obere Ecke von $B$ eine 1 steht, in einer Spalte, die sonst nur Nullen und in $A$ höchstens eine 1 unterhalb von der von $B$ aufweist, kann man jede Zeile von $D$ durch Substraktion geeigneter Spalten der linken oberen Ecke von $B$ zu Null machen, auf Kosten höchstens der unmittelbar <u>darunter</u> stehenden Zeile von $A$. So kann man zuerst die erste Zeile von $C$, dann die erste **???** Zeile von $D$, dann die zweite Zeile von $C$, dann die zweite Zeile von $D$, dann die dritte von $C$ usw. Zum Verschwinden bringen. Das bedeutetet volle Reduzibilität: Es ist, wenn man $A$ durch $P\,A\,Q$, und $B$ durch $P\,B\,Q$ ersetzt mit nicht singulären $P$, $Q$.

$$A = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

Besteht zwischen den <u>Zeilen</u> von $A_1\lambda + B_1$ eine lineare Abhängigkeit über $K(\lambda)$, so ergibt sich wie oben eine Zerfällung in $\square$ un einen Bestandteil $A_2$, $B_2$, da weder lin. ab. Zeilen noch Spalten hat, also quadratisch und<u>nicht</u> singulär ist und auf **???** gebraucht werden kann. Insgesamt erhält man also folgende

**Seite 88**

reduzierten Bestandteile: Nullspalten **???** , Nullzeilen **???**
Die letzten können an der ursprünglich gegebenen Schar $A\,\lambda + B$ aus den Elemetarteilern abgelesen werden, da $\square$ und $\square$ nur Einsen als Determi-

nantenteiler Beitragen. Die Typen der Kronerker-Kästchen **???** sind aus den minimalen Gradzahlen $n_\rho$ zu bestimmen: Typ: $(n_\rho,\, n_\rho + 1)$. Die Typen von **???** aus den minimal-Gradzahlen der Lösgen des zu (1) transponierten Systems. Da diese, wie leicht zu sehen, von der speziellen Wahl der Lösungsbasis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ nicht abhängen ist die Normalform eindeutig.
Ist nicht $Rg\,(A\,\lambda\ +\ B)\ =\ Rg\,A$, so kann man zunächst $A^*$ mit $Rg\,A^* = Rg\,(A\,\lambda^* + B) = Rg\,(A\,\lambda + B)$ wählen und hat für $A^*$, $B$ obige Normalform; das gibt nach geeigneter Äquivalenz <u>auch für $A$ und $B$</u> wieder die obigen Typen **???** usw.; für die Weierstrafs Kästchen kann man die Normalform

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ & \alpha & \beta & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} \beta & \alpha & & \\ & \beta & \alpha & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$$

wählen, wobei **???** auf einen gemeinsamen Faktor $\neq$ **???** bestimmt sind (denn hier ist die einzige Elementarteiler $(\lambda - \frac{\beta}{\alpha})^n$.

**Seite 89**

<u>Formel von Bürmann Lagrange:</u> Die Auflösung von $y - x = z\,F(y)$ nach $y$ lautet
$y = x + z\,F(x) + \cdots + \frac{z^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}F(x)^n}{dx^{n-1}} + \cdots$; daher ist
$\frac{dy}{dx} = 1 + z\,\frac{d\,F(x)}{dx} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\,\frac{d^n F(x)}{dx^n} + \cdots$
Hiermit folgt [146]
$(1 - xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}) = \sum_{\infty}^{0}\, z^n \cdot \frac{d^n (x^2-1)}{dx^n} \cdot \frac{1}{n!2^n}$
Der Koeff von $z^n$ in $y$ ist $= \frac{1}{n}$. Koeff von $z^{n-1}$ in $F^n$, falls $F$ Potenzreihe.
Bew. funktionentheor., wenn $F$ reg., $F(x) \neq 0$, durch Cauchys Intergralformel.
$y$ als Variable einführen, einmal partiell integrieren.
<u>Aufgabe:</u> Wie weit stimmt die Struktur zweier endlicher Gruppen **???**, wenn sie dieselbe Charakterentafel haben ?
**Seite 90**

1. I . 33 (übertragen von 20.4.46) <u>Über den Absolutbetrag einer Matrix</u>
Ausgehend von $\mathrm{abs}_1\, A = \{\sum^{i\,k} |a_{ik}|^2\}^{\frac{1}{2}}$ kann man eine unendliche Folge von Absolutbeträgen erklären durch.

$$abs_1\, A = \{abs_\rho\, \overline{A}\, A'\}^{\frac{1}{2}}. \text{ Es gilt dann}$$

(a) $abs_\rho\, A\, B \leqq abs_\rho\, B,\ abs_\rho(A + B) \leqq abs_\rho A + abs_\rho B.$
(b) $abs_\rho\, U\, A\, \overline{V} = abs_\rho A$, wenn $U$, $V$ unitär.

(c) Ist $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_1 \end{pmatrix}$ mit $\omega_\nu \geqq 0$, $B = (b_{\alpha\,\beta})$ mit $b_{\alpha\,\alpha} \geqq 0$, so ist $abs_\rho(\Omega + B) \geqq abs_\rho\,\Omega$, und $=$ steht nur wenn $B = 0$.

(d) $abs_\rho(A\,\overline{B}) \geqq abs_\rho A$, und $=$ steht nur bei $B = 0$.

(e) $abs_\rho\,A = abs_\rho \overline{A} = abs_\rho A'$

(f) $abs_{\rho+1} A \leqq abs_\rho A$

(g) $\lim\limits_{\rho \to \alpha} abs_\rho\,A = \lceil A \rceil$ (in meiner jetzigen Schreibweise).

Definitionen für unendliche Matrizen $\lceil A \rceil$ durch $\lim \lceil A_n \rceil$, wobei $A_n$ der $n$-te Abschnitt von $A$ ist, so gilt:

(h) Existieren $\lceil A \rceil$ und $\lceil B \rceil$, so auch $A\,B$, und es ist $\lceil A + B \rceil \leqq \lceil A \rceil + \lceil B \rceil$,

$$\lceil A\,B \rceil \leq \lceil A \rceil \lceil B \rceil.$$

Existiert noch $\lceil C \rceil$, so ist auch $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$.

(i) Existiert $\overline{A}\,A'$ und $\lceil \overline{A}\,A' \rceil$, so auch $\lceil A \rceil$, und es ist $\lceil A \rceil^2 = \lceil \overline{A}\,A' \rceil$.

(j) $\lceil A \text{ x } B \rceil = \lceil A \rceil \cdot \lceil B \rceil$ für Kron akersche Produkte

(k) ist $b_{\alpha_\beta} \geqq |a_{\alpha_\beta}|$, so ist $\lceil B \rceil \geqq \lceil A \rceil$.

**Seite 91**

Ein Beweis der <u>Jacobischen Zerlegungsformel</u> für Bilinearformen.

$Rg\,A = r$ und sind die $D_\rho = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,\rho} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\rho 1} & \cdots & a_{\rho\,\rho} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (\rho = 1\mathbf{???}, \cdots, r)$,

so ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ b_{21} & 1 & & & \\ b_{31} & b_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 & & & & & & & \\ & D_2/D_1 & & & & & & \\ & & D_3/D_2 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & D_r/D_{r-1} & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ & 1 & c_{23} & \cdots \\ & & 1 & \\ & & & E \end{pmatrix}$$

mit

$$b_{\rho 1} = \tfrac{a_{\rho 1}}{a_{11}} \; c_{1\rho} = \tfrac{a_{1\rho}}{a_{11}}$$

$$b_{\rho 2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ c_{2\rho} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{2\rho} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$b_{\rho 3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & a_{\rho 3} \end{vmatrix}}{D_3}$$

Bew: Dass überhaupt $A = \textbf{???} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ & \delta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \delta_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \textbf{???}$, folgt durch Abbau von $A$ (**???** Substraktion passender Linearverbindungen der vorangehenden Zeilen bzw. Spalten) bis auf Diagonalmatrix. Dass die $\delta_\rho$ die angegebenen Werte haben, folgt daraus, daßdie Hauptunterdeterminanten bei Multipl. mit den Dreiecken ungeändert bleiben: $\delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_\rho = D_\rho$; $\delta_\rho = \frac{D_\rho}{D_{\rho-1}}$ $(\rho \geqq 2)$. Dass z.B. $T$ von selbst die angegebene Gestalt hat, folgt so: Die $\rho$-te Zeile von $A$ ist Linearverbindung der 1; 2, $\sim$, $\rho$-ten Zeile von $T$. Da die ersten **???** Zeilen von $A$ lin. un., sind auch umgekehrt die ersten $r$ Zeilen von $T$ Linearverbindungen der ersten $r$ Zeilen $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \cdots, \mathfrak{u}_r$ von $A$

**Seite 92**

und zwar ist die $\rho$-te Zeile $A_\rho$ von $T$-eindeutig bestimmt durch die Forderung: Ihre ersten $\rho - 1$ Zahlen sind 0, die $\rho$-te ist 1. Diese Linearverbindung von $\mathfrak{u}_1, \cdots, \mathfrak{u}_\rho$ aber wird offensichtlich (oder nach Cramer) gegeben durch

$$\frac{1}{D_\rho} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ \rho-1} & a_{1\ \nu} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\ \rho-1} & a_{2\ \nu} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{\rho 1} & \cdots & a_{\rho\ \rho-1} & a_{\rho\ \nu} \end{vmatrix} \right\}$$

Mit anderen Worten lautet die Jacobi-Formel:
Setzt man $f_K(y) = \sum^{\nu} \mathfrak{A}_{K\,\nu} Y_\nu$, $f'_\rho(x) = \sum^{K} K\,\rho\, x_K$, und

$$l_\rho(y) = \textbf{???} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ \rho-1} & f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\rho 1} & a_{\rho\,2} & \cdots & a_{\rho\ \rho-1} & f_\rho \end{vmatrix}, \qquad m_\rho(x) = \textbf{???} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,\rho} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\rho} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\rho-1} & \cdots & a_{\rho-1\,\rho} \\ f'_1 & \cdots & f'_\rho \end{vmatrix},$$

so ist $f(x,\, y) = \sum\limits_{\substack{K\,=\,1\,\cdots\,m \\ \lambda\,=\,1\,\cdots\,n}} a_{K\,\lambda}\, x_K\, y_1 =$ **???** $\cdot\, \frac{m_1(x)\; l_1(y)}{D_1} +$ **???**

Die <u>Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren</u>, angewandt auf $r$ lin. un. Vektoren $\mathfrak{v}_1\ \mathfrak{v}_2 \cdots \mathfrak{v}_r$, ist identisch mit der Jacobischen Zerlegung der quadratischen Form $(\sum\limits_{n}^{1} x_\rho\, \mathfrak{v}_\rho)^2$.

**Seite 93**

1. Kein Polynom $f(x)$ mit nicht lauter verschwindenden Koeff. verschwindet für alle $x$ in einem unendl. Körper: Sonst könnte man jedes Pol. mod $f(x)$ reduzieren, und es gäbe nur endlich viele lin. un. Polynome (bezgl. Einsetzung von Fragmenten aus dem Körper). Dagegen kann man beliebig viele angeben, die für $x_1 \cdots x_n$ den Wert 0, für $x_{n+1}$ den Wert 1 annehmen und daher lin. unabh. sind).

2.
1.6.46 <u>Über unendliche Reihen:</u>
$\sum\limits_1^\infty a_n$ ist sicher dann kgt (oder beschränkte Teilsummen), wenn es endlich viele fest Zahlen $p_0,\ \cdots,\ p_R$ mit $\sum\limits_0^k p_K \neq 0$ gibt , so dass die Reihe $\sum\limits_1^\infty A_n$ mit $A_n = p_0\, a_n + p_1 a_{n+1} \leftarrow +p_k a_{n+k}$ konvergiert und $a_n \to 0$ geht $(\sum^\infty 1\, A_n$ beschränkte Teilsummen hat).
Bew: $s_k = \sum^\infty a_\nu;\ s_n \cdot \sum\limits_0^k p_k$ bilde so:
Anwendg z.B. $\sum^\infty 0\, P_n(\xi)\, t^n$, mit $1 - 2t\,\xi + t^2$ multipl.
3. Das Prinzip der <u>Abelschen Summation</u> kann man so aussprechen:
$\sum\limits_1^r a_n$ kgt (oder beschränkt) ist und $\sum\limits_1^\infty |c_{\nu+1} c_\nu|$ kgt, dh $c_\nu$ ein Folge beschränkter Schwankung ist, dann ist auch $\sum\limits_1^\infty c_\nu\, a_\nu$ kgt falls $c_\nu$ monoton reell $\to =$ **???**

**Seite 94**

1. <u>Einige Reihen mit **???** Polynomen:</u>
a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))^2}{2n+1} = 1 - x^2$ gleichen kgt für $-1 \leq x \leq 1$.
Bew.: $\frac{d\,sn}{d\,x} = \lambda \cdot \sum\limits_{\nu=1}^n (P_{\nu+1} - P_{\nu-1}) \cdot P_\nu = -2x + 2\, P_{n+1}\, P_n$
und $\int\limits_{-1}^{+1} f\, P_n\, dx \to_n \quad 0$ gl. für alle $|f| \leqq 1$.
Hiermit folgt leicht, dass $\sum a_\nu\, P_\nu$ **???** kgt, wenn $a_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int f\, P_\nu$ mit

**???** Beweis stetiger Ableitg von $f$.

b) Für $\xi = \cos\vartheta \neq \pm 1$ ($\vartheta$ reell) konvergiert $\sum\limits_{\infty}^{0} P_n(\xi) \cdot e^{i\,n\,\varphi}$

**???** auf jedem abgeschlossenen Kreisbogen $e^{i\,p}$, der $e^{\pm\vartheta\, i}$ nicht enthält. Bew.:

$s_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{1-(e^{i\varphi} t)^{n+1}}{1-t\, e^{i\,\varphi}} d\omega$ mit $t = \xi + i\sqrt{1-\xi^2 \cdot \xi^2} \cdot \cos\omega$

und

$\int\limits_0^\pi t^n \cdot g(\omega)\, d\omega \to 0$ gleichm. für alle $\left\{ \begin{array}{c} |g(\omega)| < 1 \\ -1+\delta \leq \xi \leq 1-\delta \end{array} \right.$

c) Wenn $\sum\limits_0^\infty a_n \cos n\,\vartheta$ und $\sum\limits_0^\infty a_n \sin n\,\vartheta$ konvergieren (oder beschrkt. sind), dann hat $\sum\limits_0^\infty a_n\, P_n(\cos\vartheta)$ die gleiche Eigenschaft.

Bew: $s_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \sum\limits_0^n a_\nu$ **???** $\cdot\, d\varphi$, und $\sum$ kgiert nach Abel gleichmässig für alle $\varphi$; dabei $t = \xi + i\sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos\varphi$ (hier $0 < \varphi < \pi$; $\varphi = \begin{array}{c} 0 \\ \pi \end{array}$ trivial)

d) Nach b und c kgiert $\sum\limits_0^\pi P_n(x)\, P_n(y)$ gl. in jedem **???** von $-1 \leq \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \leq 1$, das kein Randpkt und Diagonalpkt $x = y$ enthält **???**

**Seite 95**

1. Zur Taylorschen Reihe (reell oder komplex)

Herleitung mit exaktem Restglied: $f(x) - f(0) = \int\limits_0^z f'(\zeta)\, d\zeta = -f'(\zeta) \cdot (\zeta - z) \Big|_0^z + \int\limits_0^z f''(\zeta)\,(z-\zeta)\, d\zeta = \cdots = -[f'(\zeta)\,(\zeta - z) + f'' \frac{(\zeta)\,(\zeta-z)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(\zeta)\,(\zeta-z)^n}{n!}]_0^z + \int\limits_0^z \frac{f^{(n+1)}_{(\zeta)}(z-\zeta)^n}{n!}\, d\zeta$

daher

$f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^n \frac{f^\nu(0)}{\nu\,!} z^\nu + \int\limits_0^z \frac{f^{(n+1)}(\zeta)\cdot(z-\zeta)^n}{n!}\, d\zeta$ [ Im Reellen auch bei Hahn-Tietze, Einf. in d. El. d. höh. Math: S. 276]

2. Zur Konvergenz von Potenzreihen auf dem Rande des Kgenzkreises:
$f(z)$ sei über den Einheitskreis nach aussen überall fortsetzbar ausser in endlich vielen Punkten $e^{i\,\varphi\,\nu}$ ($\nu = 1, \cdots,$ **???**; im Innern sei $f(x)$ regulär. Bei den $e^{i\,\varphi\,\nu}$ sei $f(z)$ noch in einem überstumpfen $\not\measuredangle$ mit Scheitel $e^{i\,\varphi_\nu}$ regulär, und $\int |f(\zeta)|\, |d\,\zeta|$ bleibe beschränkt bei Annäherung des Weges $\mathfrak{L}$ an die Schenkel dieses Winkels :

**Graph**

Dann kgiert die Taylorreihe $f(z) = \sum a_\nu z^\nu$ noch gleichmäßig auf jedem

abgeschlossenen Teilbogen des EK der kein $e^{i\,\varphi_\nu}$ enthält.
Vor. nicht korrekt! $f(z)$ reg in $\mathfrak{G}$ dieser kt:
**Graph**
**???**

Bew: $2\pi i\, f(z) = \int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \cdot \sum\limits_0^n (\frac{z}{\zeta})^\nu \, d\zeta + \int\limits_{\mathfrak{L}} f(\zeta) \cdot (\frac{z}{\zeta})^{n+1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} = I + II$
—II— $< \varepsilon$ auf den Einbuchten nach Vor. und vorher auf den Kreisbögen durch genügend **???** .

**Seite 96**

D.h.: Wenn auf dem Konvergenzkreis nur endlich viele "schwache" Singularitäten liegen, z.B. $f(z) = \mathrm{reg} \cdot \mathrm{t} \quad (\mathrm{z} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_{\mathrm{nu}}}$ mit $Re\,\alpha > -1$, dann konvergiert die Reihe in allen andern Randrkten. Z.B. $\sum\limits_0^\infty P_n(\zeta)\, e^{i\,n\,\varphi}$. Die ursprüngliche Vor hat wohl schon zur Folge $a_n = 0\,(1)$, dann kann man 96/3 anwenden!
1.<u>Ähnlich:</u> Ist $f(z)$ regulär in $\mathfrak{G}$ und in einem Pkt $z_0$ Null von positiver Ordnung, dh. $|f(z)| < |t - z_0|^\beta$ mit $\beta > 0$, und hat $f(z)$ sonst nur endlich viele sing. Stellen der Ordnung $\alpha > -1$, so konvergiert die Potenzreihe für $f(z)$ um den Mittelpkt des Kreises, auf dem die $z_\nu$ liegen, in einem Intervall um $z_0$ (einschlielich $z_0$) gleichmässig. Bew: $\mathfrak{L}$ deformieren in die Eckenkurve $\mathfrak{L}'$ der Abb.. $\int\limits_{\mathfrak{L}'} |\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}|\, |\frac{z}{zeta}|^n \, |d\zeta| \to 0$(gl. für $|z| = 1$); $|\zeta - z| \geq a.\ |\zeta - z_0|$

2. Satz: <u>$\sum a_\nu z^\nu$ habe auf dem Einheitskreis als Kgenzkreis nur endlich viele Singularitäten</u> und sei reg. in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ wie Fig 1; die Singularitäten seien <u>von beschränkter Unendlichkeitsordnung:</u> $|f(z)| < |z - z_\nu|^\alpha,\ \alpha > -\infty$.
<u>Wenn $a_\nu \to 0$, konvergiert $\sum a_\nu\, z^\nu$ auf jedem abgeschlossenen Regularitätsbogen des Kgenzkreises gleichmässig.</u>
Bew.: $a\,6/1$, $a\,3/2$ auf $\{\pi\,(z - z_\nu)\}^m \cdot f(z)$ mit $m > |a_\nu|$ anwenden.
<u>Ergänzung: Wenn $|a_\nu| = 0\,(\nu^p)$</u> mit $p \geq 0$, sind auch die Teilsummen $\sum\limits_0^n a_\nu\, \mathfrak{S}$ auf jedem Regularitätsbogen gleichmässig) $0\nu^p$.
**Seite 97**

1. Ist $f(z)$ **???** $\mathfrak{G}$ von Fig 1 (S.96), so ist in $f(z) = \sum a_\nu\, z^\nu$
$a_\nu = \bigcirc\,(\frac{1}{\gamma})$ Bew: $a_\nu =$ **???** $d\,\zeta$
2. Ist $f(z)$ stetig im abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}$ (Abb. 86/1), so ist

$$a_\nu = \circ \bigcirc\ (\frac{1}{\nu})$$

Bew: Durch Substraktion eines Polynoms $f(z_\nu) = 0$ machen.
Genaueres: S. Satz von Faton-Riesz, Landan, Neuere Ergebn.

<u>Abschätzung für Kugelfunktionen: $s = P_n(\zeta) + P_{n-1}(\zeta)$,</u> $\zeta = \cos\vartheta \quad (0 \leq$

$\vartheta \leq \pi$
(Kneser) $s = -\frac{1}{2\pi\, i}\, \{??? \, \frac{(t+1)\, dt}{t^{n+1}\, \sqrt{t-e^{i\,\nu}}\sqrt{t-e^{-i\,\nu}}} + ??? \, \ldots\}$

$|s| \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{(\rho+2\, \cos\, \vartheta/2)\, d\rho}{(1+\rho)^{n+1}\sqrt{\rho}\, \sqrt{\rho+1-2\cos\,\vartheta}}$
$a = \cos\, \vartheta/2 \quad 2\, a^2 - 1 = \cos\, \vartheta \quad 1 - \cos\, 2\vartheta = 8\, a^2(1-a^2)$

$0 \leq a \leq 1$. Das Folgende gilt für $0 \leq a^2 \leq 1-\delta,\ 0 < \delta < 1:$
(1) $0 \leq \rho \leq 1i \quad \frac{(\rho+2a)^2}{\rho+8\, a^2(1-a^2)} \leq \mathrm{Max}\, (5,\ \frac{1}{2\,\delta}) = \mathrm{M}_1$
(2) $1 \leq \rho \quad \frac{(\rho+2a)^2}{\rho\, (\rho+8a^2(1-a^2)} \leqq \mathrm{Max}\, (2,\ \frac{1}{\delta}) = \mathrm{M}_2$
Zusammen: $|s| \leqq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{2\,\sqrt{M_1} 1+(n+1)\, M^2}{+} \frac{2}{\pi} \int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{M_2}\, d\,\rho}{(1+\rho)^{n+1}} = \frac{2}{\pi}\, [\pi \sqrt{\frac{M_1}{n+1}} + \frac{1}{n}\, \sqrt{M_2}].$

**Seite 98**

Hadamards Lückensatz noch einfacher: (Knopp 1943)
Sei $n_{k+1} > (1+\vartheta)\, n_k,\ \vartheta > 0,\ \sum a_k\, x^{n_k} = f(x)$ kgt für $|x| < 1,\ f(x)$ reg. für $x = 1$.
Ist $|w| \leq 1,\ x = \frac{1}{2}, (w^p + w^{p+1})$, so ist $|x| \leqq 1$ und zwar $|x| = 1$ nur für $w = 1$, $x = 1$. Also ist $g(w) = f(x)$ regul. für $|w| \leqq 1,\ g(w) = \sum b_n\, w^n$ kgiert also für $w = 1 + \delta',\ \delta' > 0$. Wählt man $p > \frac{1}{v}$, so sind die Teilsummen von $\sum b_k\, w^k$ also kgt für $x = 1 + \delta$.

Aufgabe: In $\frac{1}{\sqrt{k\, ???\ 2\, t^2 z+1}} = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n(z)\, t^{2\,n-1}$ die Koeff bestimmen !
$\min\, |z \pm \sqrt{z^2-1}| < |t|^2 < \mathrm{Max}|\mathrm{z} \pm \sqrt{\mathrm{z}^2-1}|$

Scherzaufgabe: Aus $\pi \cdot \mathrm{ctg}\pi\, \mathrm{z} = \frac{1}{\mathrm{z}} + \sum\limits_1^\infty (\frac{1}{\mathrm{z}-\nu} + \frac{1}{\mathrm{z}+\nu})$ folgt für $z = x + i\, y,\ y \to \infty$
$\lim\limits_{y\to\infty} \pi \mathrm{ctg}\pi\, \mathrm{i}\, \mathrm{y} = 0$, da alle Glieder $\to 0$ (Gl. in $\nu$).

Aufgabe: Die Summe der reellen Wurzeln einer vorgelegten Intervall $a \leq x < b$ nach Art der Anzahl (Sturmsche Kette) berechnen ! Desgl. andere Funktionen der Wurzeln.

**Seite 99**

7.2.47 Positive Matrixfunktionen: Vgl [188]
1. Def. $M(x)$ **???** 0, wenn $M(x)$ eine quadratische, rational von der komplexen Veränd. $x$ abhängige Matrix ist, für welche 1) $Im\, \mathfrak{u}^* M\, (a+i\, b)\, \mathfrak{u} \geqq 0$, wenn $b \geqq 0$
2) $Im\, \mathfrak{u}^* M\, (a+i\, b)\, \mathfrak{u} = 0$, wenn $b = 0$.
2. Ist $M$ **???** 0 0, so ist für reelle $x$ $M(x)$ hermitesch.
3. Dund ist $M(x)$ **???** 0, wenn $M(x) = \sum \frac{P_\nu}{x_\nu - x} + P_\infty x + \mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{H}$ hermitesch, die $P_\nu$ und
$P_\infty \geqq 0$ [hermitesche Matrizen, pos. semidefinit oder definit] sind, mit reellen

$x_\nu$.
4. Ist $M(x)$ **???** 0, und $M(x)$ stetig in $\alpha \leq x \leq \beta$, so ist $M(\beta) - M(\alpha) \geqq 0$. (3)
5. Ist $M(x)$ **???** 0 und det $M(a + i\,b) = 0$, $b \neq 0$, so ist det $M(x) \equiv 0$ und $M$ unitär ähnlich $\begin{pmatrix} M_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $M_1(x)$ **???** 0.
6. Seien $A(x)$, $B$ zwei $A$ rational von $x$ abhängig **???** Matrizen, quadratisch, von den Graden $a$ und $b$. Def.: $A(B) = [\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \times B^\nu] \cdot [E \times \varphi(B)]^{-1}$
wobei $A(x) = \frac{\sum_0^n A_\nu x^\nu}{\varphi(x)}$ gesetzt ist mit det $\varphi(B) \neq 0$. $Gr\,A(B) = a \cdot b$.
Die Defin. ist eindeutig, nicht von der besonderen Bruchdarstellg von $A(x)$ abhängig.
7. Aus $F(x) = G(x) \pm H(x)$ folgt $F(B) = G(B) \pm H(B)$.
Ist $A(x) = E$ (Gr $= a$), so ist $A(B) = E$ (Gr $= a\,b$)
8. Hat $A(x)$ die $a$ Eigenwerte $\varphi_\alpha(x)$, sind $B$ die $b$ EWerte $b_1 \cdots b_b$, so hat $A(B)$ die ab EWerte $\varphi_\alpha(b_1), \cdots, \varphi_\alpha(b_b)$. Bew: $B$ in Dreiecksform
9. det $A(B) = \Pi_{b_\beta} = \mathrm{EWvonB\,det\;A(b_\beta)}$
10. Ist $F(x)$ **???** 0 und $G(x)$ **???** 0, so ist
$\begin{cases} F(G(x))\,\textbf{???}\;0. \quad \mathrm{z.B.} - \mathrm{G}^{-1}(\mathrm{x})\,\textbf{???}\;0. \\ \mathrm{und\,F(x) + G(x)}\,\textbf{???}\;0, \mathrm{fallsGr\,F = Gr\,G}. \end{cases}$

**Seite 100**

11. Ist $F(x)$ **???** 0, so steigen die Eigenwerte in jedem Stetigkeitsintervall monoton.(4)
12. Def.: Ist $F(x)$ **???** 0, so sei Ord $F(x) = \sum_{\text{Pole}}$ Rang **???** von $F(x) = Rg\,P_\nu + Rg\,P_\infty$.
13. Gr det $F(x) \leqq$ OrdF(x). Beispiel für **???**: $F(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \\ & x \end{pmatrix}$.
14. Def.: Ist $F(x) \geqq 0$, so heisst $x^* \begin{cases} \mathrm{einr-facherPol} \\ \mathrm{einer-facheNullstellevonF(x)} \end{cases}$, wenn beim Durchgang von $x$ durch $x^*$ genau $r$ Eigenwerte von $F(x)$ durch $\begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$ gehen.
15. Dund ist $x^*$ r-fache Nullstelle von $F(x)$, wobei det $F(x) \not\equiv 0$ sei, wenn $-F(x)^{-1}$ in $x^*$ einen Pvl der Ord $r$ hat, dh. Rang **???** in $x^* = r$.
16. Ist $F(x)$ **???** 0, so ist jeder EW von $f(x)$ eine für reelle $x$ reguläre (bis auf einfache Pole) in jedem Stetigkeitsintervall monoton im engerer Sinn wachsende Funktionen.
17. Ist $x^*$ für $F(x)$ **???** 0 ein r-facher und für $G(x)$ **???** 0 ein s-facher Pol, so ist $x^*$ für $F + G$ ein Pol mindestens von der Ordnung max($r$, $s$).
18. Die Ordnung von $x^*$ als Nullstelle von det $F(x)$ mit $F(x)$ **???** 0 ist = Ord $x^*$ als Nullstelle von $F(x)$ - Ord $x^*$ als Pol von $F(x)$.
19. Ord $F(x) = \sum$ Ord Nullstellen von $F(x)$, wenn $F(x)$ **???** 0.
20. Ist $H$ hermitesch, so ist $-C^*(x - H)^{-1}C$ **???** 0. (3)

21. Ist $F(x)$ **???** 0 und $\mathrm{Gr}\, F = f$ und hat $F(x)$ in $\alpha \leq x \leq \beta$ $m + f$ Pole (mit Vielfachheit gezählt), so ist $F(x)$ in $\alpha \leq x \leq \beta$ mindestens $m$ Nullstellen. (16)
22. Es gilt wohl: Ist $\sum\limits_{\alpha \leq x_\nu \leq \beta}$ max (Ord Nullst$_{x_\nu} F(x)$, Ord Nullst$_{x\nu} G(x)$) $=$ $f + m$, und det $F + \mathfrak{h} \not\equiv 0$, und $F$ **???** 0, $G$ **???** 0, so hat $F(x) + G(x)$ in $\alpha \leq x \leq \beta$ mindestens $m$ Nullstellen. Bew: aus $\det(A^{-1} + B^{-1}) = 0$ folgt $\det(A + B) = 0$

**Seite 101**

1. Aufgaben:

> 1) Definition von $A(B)$ für nur stetig $A(x)$
> 2) Folgt aus $F(x)$ **???** 0, $F(G(x))$ **???** 0 auch $G(x)$ **???** 0 ?
> 3) **???** für $G(F(x))$ **???** 0
> 4) Für $\Im\, x > 0$ mögen alle EWerte von $F(x)$ pos. **???** Imag.-teil haben. Ist dann $F(x)$ **???** 0 ?

2. Schreibt man einer Matrix $F(x)$ **???** 0 vor Ord $F(x) = 1$, $F(\infty) = F$, mit det $F \neq 0$, die Polstelle $\pi \neq \infty$, die Nullstelle $\nu \neq \infty$ und den Eigenraum $R$ zu $\pi$ (dh. das Residumm bis auf positiven skalaren Faktor), so ist diese Aufgabe dund lösbar (und dann eindeutig), wenn

$$\mathrm{signF} = \mathrm{sign}\overline{\mathrm{F}} + \mathrm{sgn}(\nu - \pi)$$

wobei $\overline{F}$ die durch Einschränkung von $F$ auf den zu $R$ total senkrechten Raum entstehende Matrix ist.
$\nu = \pi$ ist notw. u. hinr. $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Gr\,F} \geqq 2 \\ \mathrm{sign\,F} = \mathrm{sign}\,\overline{\mathrm{F}} \end{array} \right.$, doch ist jetzt der positive Faktor beim Residumm willkürlich.
3. Vermutung: Man kann einer pos. Matrixfunktion $F(x)$ **???** 0 der Ord $n$ vorschreiben $\left\{ \begin{array}{c} n \text{ einfache Pole samt Eigenräumen} \\ n \text{ einfache Nullstellen mit gewissen Lageeinschränkgen} \\ \mathrm{unddenspeziellenWertF(a)aneinerweiterenStellea} \end{array} \right.$
$\mathfrak{x}^*(L - \lambda)^{-1}\mathfrak{x}$ ist $\gg 0$ **???** Integraloperator [188]

**Seite 102**

<u>Mögliche Spektren und positive Funktionen</u> s. hier zu 99
1. Ein eigentliches Spektrum $\{\mu_\nu\}$ ist dund möglich, wenn es eine Matrix $F(x)$ **???** 0 gibt mit $F(x) = -\frac{M_0}{x} - \frac{M_1}{x^2} - \frac{M_2}{x^3} + \{\{\frac{1}{x^\nu}\}\}$, deren Pole alle unter den $\mu_\nu$ vorkommen (einschl. Vielfachheit).
2. Desgl. dund, wenn es ein $\mathfrak{h}(x)$ **???** 0 gibt mit $\mathfrak{h}(x) = x\, M_0 - M_1 - \frac{\Delta}{x} + \{\{\frac{1}{x^2}\}\}$, dessen Nullstellen alle unter den $\mu_\nu$ vorkommen, mit $\Delta = M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1$.
3. Ist Ord $C'(G - x\,E)^{-1}C < \mathrm{Gr\,G}$, so hat
$\begin{pmatrix} x\,E - G & & -C' \\ -C & \times & -P \end{pmatrix}$ einen von $P$ unabh. <u>festen</u> EW + EV.

4. $\begin{vmatrix} xE-G & -B' & 0 \\ -B & xE-H & -Q' \\ 0 & -Q & xE-R \end{vmatrix} = |xE - G|\,|xE - R| \cdot$
$|\underbrace{xE - B\,(xE-G)^{-1}B'}_{???\ 0\ \text{gegeben}}| + [\underbrace{-H - Q'(x\,E-R)^{-1}Q}_{???\,0\ \text{willkürlich, regul. in}\ \infty}]| = |x\,E - C\,(x\,M_0 - M_1)^{-1}C' + \mathrm{Pos}|$ mit $C'C = A$ (vgl 2)

5. Rationaler Beweis von **???** mit $\begin{vmatrix} x\,E-G & -B' & 0 \\ -B & x\,E-H & -Q' \\ 0 & -Q & x\,E-R \end{vmatrix} =$
$|x\,E-R| \cdot |P| \cdot |xE - G - P'B\,P|$ mit $P = x\,E - H - Q'\,(x\,E-R)^{-1}Q$

6. Notw. u. hinr. für Möglichkeit von $\{\mu_\nu\}$ ist jede der folgenden Bedingungen:
Es gibt $\frac{M_0}{x} + \frac{M_1}{a^4x^2} + \frac{M_2}{a^8x^3} + \cdots$ **???** 0
$-x\,M_2 - x^2M_1 - x^3M_0 + \cdots$ **???** 0
$\frac{1-cx}{x}\,[M_0 + 2\,c\,M_1 + c^2M_2] + (\frac{1-cx}{x}^2\,[M_1 + c\,M_2] + (\frac{1-cx}{x})^2M_2 + \cdots$ **???** 0.

**Seite 103**

Uneigentliche Spektren (normale EW-Aufgaben) ($f$ Freiheitsgrade)

1. Aufgabe: Gegeben $A_0$, $A_1$ mit Typ $A_\nu = (n, f)$ und $\mathrm{Rg}\,(\mu_0 A_1 = \mu_1 A_0) = f$ für alle $\mu'$, $\overline{\mu} \neq 0$, 0. Gesucht sind die **???** Polynome $\det(\underline{\mu}\,M' - \mu'\,\underline{M}) \not\equiv 0$ für diejenigen Paare vertauschbarer normaler Matrizen $M', \overline{\overline{M}})$ für welche gilt $M'\,\overline{A} - \overline{M}\,A' = 0$. Def: Ist $\det(\overline{\mu}\,M' - \mu'\,\overline{M}) = \Pi_{\nu=1}^{n}\,(\overline{\mu}\,\mu'_\nu - \mu'\,\overline{\mu}_\nu)$, so heisst $\{\mu_\nu\} = \{\mu'_\nu|\overline{\mu}_\nu\}$ ein "mögliches Spektrum" bei der "Vorgabe" $A'$, $\overline{A}$: In Zeichen $\{\mu_\nu\}\ m\,\mathrm{Sp}\,A$.

2. Zu $A$ und $U\,A\,P$ ($U^*U = E$, $\det P \neq 0$) gehören die gleichen möglichen **???**.
Bew: $B' = U\,A'P$, $\overline{B} = U\,\overline{A}\,P$ gilt mit $M' = U\,M\,U^*$, $\overline{M} = U\,\overline{M}\,U^*$
$N'\overline{B} = U\,M'\,\overline{A}\,P = U\,\overline{M}\,A'\,P = \overline{N}\,B'$ und $\det(\overline{\mu}\,M' - \mu'\,\overline{N}) = \det(\overline{\mu}\,M' - \mu'\,\overline{M})$.
Sei $\begin{pmatrix} B' \\ \overline{B} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A' \\ \overline{A} \end{pmatrix}$, d.h. mit $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\det T \neq 0$:

3. Zu $B' = \alpha\,A' + \beta\,\overline{A}$, $\overline{B} = \gamma\,A' + \delta\,\overline{A}$ gehören die Spektren $\begin{pmatrix} \nu'_\alpha \\ \overline{\nu}_\alpha \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \mu'_\alpha \\ \overline{\mu}_\alpha \end{pmatrix}$
Bew.: Aus $\begin{vmatrix} M' & A' \\ \overline{M} & \overline{A} \end{vmatrix} = 0$ folgt $\left| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & \overline{M} \\ \overline{M} & A' \end{pmatrix} \right| = 0$, also Mit $\begin{pmatrix} IV' \\ \overline{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' \\ \overline{M} \end{pmatrix}'$
$\begin{vmatrix} M' & A' \\ \overline{M} & \overline{A} \end{vmatrix} = 0$; setzt man $\begin{pmatrix} \nu' \\ \overline{\nu} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \mu' \\ \overline{\mu} \end{pmatrix}$, so wird $\det(\nu'\,\overline{N} - \overline{\nu}\,N') = (T)^n \cdot \Pi_\alpha \begin{vmatrix} \mu' & \mu'_\alpha \\ \overline{\mu} & \overline{\mu}_\alpha \end{vmatrix} = \Pi \begin{vmatrix} \nu' & \nu'_\alpha \\ \overline{\nu} & \overline{\nu}_\alpha \end{vmatrix}$; $\begin{pmatrix} \nu' \\ \overline{\nu} \end{pmatrix}$ sind aber frei veränderlich.
Kurz: Zu $B = T(A)$ gehören die Spektren $\nu = T(\mu)$, wenn $\mu$ zu $A$ gehört.

Hier ist überall $\left\{\begin{array}{l} \quad\;\; \mu' \text{ durch } \mu_1,\ \mu \text{ durch } \mu_0 \text{ zu ersetzen,} \\ A'\pi \quad A_1,\ \underline{A} \text{ durch } A_0 \text{ bis 5) hinzuersetzen} \end{array}\right.$
Besser: Alles waagerecht schreiben $|(\mu_0,\, \mu_1)$ usw.

**Seite 104**

4. Stimmmen für zwei Vorgaben $(A'\,\overline{\underline{A}})$, $(B'\,\underline{B})$ die "Momentenformen" $M_A = (\underline{\mu}\,A' - \mu'\,\underline{A})^*(\underline{A}\,A' - \underline{A}\,\mu') = (\underline{\mu}\,B' - \mu'\,\overline{\underline{B}})^*(\underline{\mu}\,B' - \mu'\,\underline{B})$ identisch in $\mu'$, $\underline{\mu}$ überein, so gehören zu ihnen die gleichen Spektren (wenn sie in $n$ übereinstimmen).
Bew:

$$\left.\begin{array}{ll} (\underline{\mu},\, \mu') = (1,\,0): & A^{-1*} = B'^*B' \\ (\underline{\mu},\, \mu') = (0,\,1): & \underline{A}^*\underline{A} = \underline{B}^*\underline{B} \\ (\qquad) = (1,\,1): & A'^*\underline{A} + \underline{A}^*A' = B'^*\underline{B} + \underline{B}^*B' \\ (\qquad) = (1,\,+i): & A'^*\underline{A} - \underline{A}^*A' = B'^*\underline{B} - \underline{B}^*B' \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} A'^*A' & A'^*\underline{A} \\ \underline{A}^*A' & \underline{A}^*\underline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \cdots(B)\cdots \\ \\ \end{pmatrix} \text{ also } (B'\,\underline{B}) = U\,(A'\,\underline{A});\ (2)$$

5. Sind zwei Vorgaben die Normenformen äq.: $M_B = P^*M_1P$, $\det P \neq 0$, so gehören zu $A$ und $B$ dieselben Spektren. (2)

6. Die EW Aufgabe ist gegeben durch Angabe bis auf $\mathfrak{x}$-Äquivalenz der <u>vollstdigen Normenform</u>
$\mathcal{N}\ (A|\mu,\, \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^*(\mu_1A_2 - \mu_2A_1)^* \cdot (\mu_1A_2 - \mu_2A_1)\,\mathfrak{x}$

mit $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix}$.

Die Normenform ist (pos.) bihermitisch und definit: Aus $\mathcal{N}(A|\,\mu,\, \mathfrak{x}) = 0$ folgt $(\mu_1,\, \mu_2) = (0,\,0)$

dh. aus $\mathcal{N}= 0$ folgt $\sum\limits_1^2 \mu_\nu^2 \cdot \sum\limits_1^f x_\rho^2 = 0.$ oder $x_1 = \cdots = x_f = 0.$

7. Ist $\mathfrak{P}\mathfrak{i}(\mu,\, \mathfrak{x})$ eine bihermitische Form (dh. lin. **???** in $\mu$, $\overline{\mu}$, $\mathfrak{x}$, $\overline{\mathfrak{x}}$ und stets reell), die pos. definit ist, so gibt es zu $\mathfrak{P}\mathfrak{i}$ als Normenform <u>nicht</u> stets ein mögliches Spektrum z.B. ist $(|\mu_1|^2 + |\mu_0|^2)\,(|x_1|^2 + |x_2|^2) + a\,\mu_1\,\overline{\mu_0}\,x_1\,\overline{x_2}$ pos. def. für $|a| + |b| < 2$,

**Seite 105**

1. Jede Normenform ist volldefinit in dem folgenden Sinne:
a) definit: Aus $|\mu|^2|\mathfrak{x}|^2 \neq 0$ folgt $\Pi > 0$.
b) Ist $\Pi = \mu_0\,\overline{\mu_0} \cdot M_0 + \mu_0\,\overline{\mu_1}\,M_1 + \overline{\mu_0}\,\mu_1\,M_1^* + \mu_1\,\overline{\mu_1}\,M_2$, mit hermitesch **???**,
so ist $\begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix}$ nichtnegativ hermitesch.
Bew: $= (A_0\,A_1)^*(A_0\,A_1)$.

2. An jeder volldefiniten hermitschen Form $\Pi$ gibt es als Normenform ein mögliches Spektrum. Bew: Sei $\phi = \mu_0\,\overline{\mu_0}\,M_0 + \mu_0\,\overline{\mu_1}\,M_1 + \mu_1\,\overline{\mu_0}\,M_1^* + \mu_1\,\overline{\mu_1}\,M_2$, so ist
$\begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix} = (A_0\,A_1)^*(A_0\,A_1)$ lösbar nach $A_0\,A_1$. $f$ z.B. für $f = n$.
Für Existenz eines selbstadj. Spektrums zu $M_0\,M_1\,M_2$ ist notw. & hinr. $M_1 = M_1^*$.

3. $\{\mu_\nu^{(\nu)}\}$ sei ein egentl. Spektrum $\{\neq\ \infty\}$. Dund ist $\{\mu^{(\nu)},\, \infty^r\}$ $m$ mögliche Spektr bei Sp$\,(M_0\,M_1\,M_2)$, wenn es eine Hermitesche Matr. $R \geqq 0$ vom Rg $\leq r$ gibt, so dass $\{\mu_\nu\}$ $m$ Sp$\,(M_0,\, M_1,\, M_2 - R)$.

4. $N$ & $h$ dafür, dass $\{\mu_\nu,\, \infty^r\}$ $m$ selbstadj. Sp$\,(M_0\,M_1\,M_2)$ ist, ist die Existenz einer Matrix $F(x) = x\,M_0 - M_1 - \frac{\Delta - R}{x} + \{\{\frac{1}{x^2}\}$ **???** 0, welche genau die $\mu^{(\nu)}$ als Nullstellen hat.

**Seite 106**

5. Sonderfall von 4: Diejenigen selbstadj. Spektren $\{\mu^{(\nu)}\}$, die zusammen mit $\infty^f$ $m$ Sp$\,(M_0\,M_1\,M_2)$ sind, sind die Nullstellen der
$F(x) = x\,M_0 - M_1 - \frac{D}{x} - \{\{\frac{1}{x^2}\}\}$ **???** **???** 0 mit $0 \leq D \leq \Delta = M_2 - M_1\,M_0^{-1}$ **???**

6. $N$ & $h$ dafür, dass $\{\mu^{(\nu)}\}$ als Normales Spektrum mit $(A_0\,A_1)$ verträglich ist, ist: Für jede Hermitesche Matrix $V = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 \\ V_1^* & V_2 \end{pmatrix}$ für welche
$|\mu_0|^2 V_0 + \overline{\mu_0}\mu\,V_1 + \overline{\mu_1}\,\mu_0\,V_1^* + |\mu_1|^2 V_2 \geqq 0$
ausfällt auf dem ganzen Spektrum $\{\mu^{(\nu)}\}$, ist Sp$\,V^*(A_0A_1)(A_0\,A_1) \geqq 0$.
Bew.: 7)
7. $N$ & $h$ dafür, dass ein Element $C$ eines Banachraums dem von einer vorgegebenen **???** $\mathfrak{B}$ erzeugten + Modul angehört, ist: jedes auf $\mathfrak{B}$ nichtnegative Funktional ist auch auf $C$ nichtnegativ. Vorsicht: vgl. 157
(Anwendung auf $\mathfrak{B}$ = Gesamtheit der $\begin{pmatrix} |\mu_0|^2 & \overline{\mu_0}\mu_1 \\ \overline{\mu_1}\,\mu_0 & |\mu_1|^2 \end{pmatrix} \times P$, $P \geqq 0$, $C = (A_0A_1)^*(A_0\,A_1)$.

8. Sei Rg$\,(\beta_0 A_1 - \beta_1 A_0) = f$. Dann sind die $f$ (von selbst von $(\beta_0,\, \beta_1)$ verschiedenen) Nullstellen von $\det\,[\mu_0\,A_1 - \mu_1\,A_0]^*[\mu_0\,A_1 - \mu_1\,A_0] = 0$
zusammen mit $f$-mal $(\beta_0,\, \beta_1)$ $m$ Sp$\,(A_0\,A_1)$ selbstadj. Fall.
Bew: Durch Transf. $\beta_0 = 0$ annehmen.
$f = 2$: **???** 103, 3 $*$ nur wo linke Matrix $= 0$ ist.

9. Ist ein eigentl. Spektrum (*not* $= \infty$) möglich, so nur bei $\det A_0 \neq 0$, und dann sogar bei $A_0 = E$ (Bei vorgegebener Ansatz $(A_0\,A_1)$.)

**Seite 107**

1. Für je drei Matrizen $M_0$, $M_1$, $M_2$ gilt
$M\,v\,M_0-(M+v)\,M_1+M_2=(u\,M_0-M_1)\,M_0^{-1}(v\,M_0-M_1)+(M_2-M_1\,M_0^{-1}M_1)$.
2. Ist $(A_0A_1)^*(A_0A_1) = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Rg} A_0$ voll, so ist $\Delta = M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1 \geqq 0$.
4 Beweis:

a) $U\,A_0\,P = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$ annehmen

b) $\Delta = A_1^*\,(\underbrace{E - A_0\,(A_0^*\,A_0)^{-1}\,A_0^*}_{\text{idempotent und hermitesch}}\;A_1$

c) $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -M_1^* M_0^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -M_1^* \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$

das liefert sogar eine allgemeine Aussage über $\operatorname{sign} A$

d) $\Delta = C^*C$ mit $C = A_1 - A_0\,M_0^1\,M_1$

3. $\mathcal{N}$ & $h$ dafür, dass zwei hermitesche Matrizen $A$, $B$ mit $\det(x\,A + y\,B) \not\equiv 0$ simultan auf Quadratsumme zu transformieren sind, ist die Realität und Linearität der primären Elementarteiler von $x\,A + y\,B$.
Bew: Sei $T^{-1}A^{-1}B\,T = D$ diagonal. Dann ist für $A_1 = T'A\,T$, $B_1 = T'B\,T$ $A_1^{-1}B_1 = D$ **???**, also $A_1$ vertauschbar mit $B_1$, also simultan transfbar.

4. Kennt man bei einer EWAufgabe $(\lambda\,A - B)\,\mathfrak{x} = 0$ $(A^* = A, B^* = B)$ nur ein $\mathfrak{x}$ samt $A\,\mathfrak{x}$ und $B\,\mathfrak{x}$, so folgt kein Einschliessungssatz: $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -u - v\,\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2 + v\,\lambda + u)$.
Auch die Bedgg., dass eine (unbekannte) Linearverbindung $\gg 0$ sein soll nützt nicht viel: Wähle oben $u = 0$, $v = -k^2$, dann sind $\pm k$ die EWe. Es gilt genau zwei Einschl. Intervalle **???**

**Seite 108**

Punkte Erinnerungen an den selbstadjung. Fall mit $f$ Freiheitsgraden:
1) Jedes maximale offene Ausschliessungsgebiet besteht aus höchstens $f$ Intervallen, und die Intervallendpkte bilden ein (bei Zählung der Vielfachheiten) m. Sp. $2f$ Zahlen. $x_{\text{s.u.}}$

2) Der Grösste offene Bereich, indem eine "Nullmatrix" $V_0 + V_1x + V_2x^2$ mit $\operatorname{Sp}\sum V_\nu\,M_\nu =$ **???** pos. semidefinit ist, ist ein Ausschliessungsbereich.

3) Ist $(\mu^{(\nu)})$ ein Möge Sp. $(A_0\,A_1)$, und zwar mit Diagonalmatrizen $M_0$,

$M_1$, und zwar bei $\mu\, E - \begin{pmatrix} G & C^* \\ C' & P \end{pmatrix}$, so sind die Zeilen von $A_0$ die $^*$ von den $f$-Abschnitten der EVektoren $\mathfrak{x}$ von $\begin{pmatrix} G & C^* \\ C & P \end{pmatrix}$: $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \textbf{???} \end{pmatrix}$
Sie genügen der (freilich nicht hermiteschen)
Gl. 2-Grades $\{E - C^{-1}(x\, E - P)\, {C^*}^{-1}(x\, E - G)\}\; \overline{u} = 0 \qquad (*)$
der **???** des Grades 3 $(x\, E - G)$, $\{\uparrow\}\, \overline{u} = 0$ wenn $C = C^* \qquad (+)$
und der hermiteschen Gl. d. Grades $f + 1$
$\{|\mu\, E - P| \cdot (\mu\, E - G) - C^* \overbrace{(\mu\, E - P)}\; C\}\, \overline{u} = 0 \qquad **$
$\mathrm{sign}\, \{^{\downarrow}\} = \mathrm{sign}\, |\mu\, \mathrm{E} - \mathrm{P}| \cdot [\mathrm{sign}\, (\;\textbf{???}\;) - \mathrm{sign}\, (\mathrm{x}\, \mathrm{E} - \mathrm{P})]$
4) Bei $f = 2$ ist ein Spektrum aus 4 Zahlen dund möglich, wenn die linke Seite von Gl. $(2x)$ mit einer konstanten Linksmultipl. hermitesch gemeint, in allen Nullstellen $\geqq 0$ ausfällt . Dh. für Variables $\mu$ soll sie die Signatur 2 0 2 0 haben, <u>aber nicht 2 0 $\cdot$ 2 0</u>. Rezept: Fortsetzung 109 (2) $*$ u. $**$ nicht **???** **???** Spektren semidefinite Nullmatrizen $V$ achten. Gibt etwas für Rg $\mathrm{R}_\nu$

**Seite 109**

1) Vorgegebene Momente $M_0\, M_1\, M_2\, M_3$ treten auf bei

$$\det \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \textbf{???} \\ M_1 & M_2 & x\, E \\ M_2 & M_3 & x^2 E \end{vmatrix} = 0.$$

2) Multipl. man 108 3$*$ von links mit $(x \cdot G)\,(C^{-1} P\, C) + A \quad (A = C^* C)$, so erhält man eine hermitesche kubische Gl. für $\overline{u}$ mit dem Leitglied $x^3 \cdot C^{-1} P\, {C^*}^{-1}$. Ist also $C^{-1} P\, {C^*}^{-1}$ von $A^{-1}$ und $E$ linear abhängig, so erhält man mit Hilfe von $3\,(+)$ und $**$ eine quadratische hermitesche Gl. für $\overline{u}$! Das gibt wohl eine 2-parametrige Schar von Einschliessungssätzen.

3) <u>Potential eines gleichmässig belegten Kreises</u> A. Innen: Die Kraft auf einen Massenpunkt ist 0, da $\frac{ds_1}{r_1} = \frac{ds_2}{r_2}$
**Graph**
B. Aussen: $\Phi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \log\left((r - a\, \cos\, \varphi)^2 + \sin^2 \varphi \cdot a^2\right) a\, d\varphi$
$= 2\,\pi\, a \log\, r + \int\limits_0^{2\,\pi} \frac{1}{2} \log\left((1 - \frac{a}{r}\, \cos\, \varphi)^2 + \frac{a^2}{r^2}\, \sin^2 \varphi\right) a\, d\, \varphi.$
$\int = \frac{1}{r} \int \log\, (1 - 2\, \frac{a}{r}\, \cos\, \varphi + \frac{a^2}{r^2}) a\, d\, \varphi = \frac{a}{2} \int\, \log\left((\frac{a}{r} - \cos\, \varphi)^2 + \sin^2 \varphi\right) d\varphi = 0$
nach $A$

<u>FRAGE:</u> Gibt es bei nicht selbtadjungierten Aufgaben eine adjungierte Metrik ?

**Seite 110**

1) $\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,dx = n!\sum\limits_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu^{n+1}} \qquad (n=1,\,2,\cdots)$

2) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\,x\,t}{e^x-1}\,dx = -\frac{1}{2t}+\frac{\pi}{2}$ **???** $\pi\,t$

3) Schurideus Weg: $\int\limits_0^\infty \frac{x^3+4\,\pi^2 x}{e^x-1}\,dx = \int\limits_0^{2\pi\,i}+\int\limits_{2\pi\,i}^\infty = \int\limits_0^{2\pi} \frac{y^3-4\,\pi 2y}{e^{i\,y}-1}\,dy + \int\limits_0^\infty \frac{(x+2\,\pi\,i)^3+4\pi^2\,(x+2\,\pi\,i)}{e^{x+2\,\pi\,i}-1}$

Da $\int\limits_0^\infty\cdots$ reell, ist es weiter $= \int\limits_0^{2\pi}\frac{y^3-4\pi^2 y}{1}\cdot \mathrm{Rn}\,\frac{1}{\mathrm{e^{i\,y}-1}}\,\mathrm{dy} + \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{x^3-12\pi^2x+4\,\pi^2}}{\mathrm{e^x-1}}\,\mathrm{dx}$

Nun ist Rn $\frac{1}{e^{i\,y}-1} = -\frac{1}{2}$ (Kreisverwandtschaft), daher

$\int\limits_0^\infty = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(y^3-4\pi^2 y)\,dy + \int\limits_0^\infty -12\pi^2\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1}$

Also $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{1}{24\,\pi^2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}(4\,\pi^2 y-y^3)\,dy = \frac{8\,\pi^4-4\pi^4}{24\,\pi^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Ähnlich $\int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1}$ z.B. aus $\int\limits_0^\infty \frac{x^3\,(x^2+4\,\pi^2)}{e^x-1}\,dx$ usw.

[C.Schmieden selbst hatte $\int\frac{x}{e^x-1}\,dx$ aus $\int\frac{x^3}{e^x-1}\,dx$ bezeichnet und den Pol bei $2\,\pi\,i$ durch Viertelkreis nach recht umgingen.]

**Seite 111**

Allgemeine algebraische Eigenwertaufgaben $\beta\,A-\alpha\,B)\,\mathfrak{x}=0$.

Aufgabe "regulär", wenn Matrizen $\square$

[ und die Determinante $\equiv 0$ ist
und für jeden Teilraum $R$eines Ranges $r\quad (1\le r$ **???** der Rang des

"Bildraums" $\mathfrak{S}\,R$ $(=(\alpha,\,\beta)$ Summe aller $(\beta\,A-\alpha\,B$ bis auf Proportionalität).

$b$ ist Hauptvektor $\leq$ 2· Stufe zu $S$, wenn $S\,b\subset\mathfrak{S}\,\mathfrak{u}$ mit $S\,\mathfrak{u}=0$.

$c$ ist Hauptvektor $\leqq$ 3· Stufe zu $S$, wenn $S\,i\subset\mathfrak{S}\,b$, $S\,b\subset\mathfrak{S}\,\mathfrak{u}$, $S\,\mathfrak{u}=0$

Die Eigenvektoren zu $S$ bilden einen lin. Raum $\mathfrak{e}_1$. Ist $R$ lin nu von $S$, so ist $\mathfrak{S}\,\mathfrak{e}_1=\mathfrak{R}\mathfrak{e}_1$.

Daher bilden die Hauptvekt. der Stufe $\le 2$ [ **???** $S\,b<\mathfrak{R}\mathfrak{e}_1$] einen lin. Raum $\mathfrak{e}_2$. Es ist $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_2=\mathfrak{R}\mathfrak{e}_2$ daher bilden die Hauptr. der Stufe $\le 3$[ mit $S\,c\subset\mathfrak{R}\mathfrak{e}_2$] einen lin Raum $\mathfrak{e}_3$. Aus $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_\nu=\mathfrak{R}\mathfrak{e}_\nu$ folgt, dass $\mathfrak{e}_\nu$ ein Eigenraum ist. Die Vereinigung ${}_\delta\sum_\nu \mathfrak{e}_\nu(S)$ heisst der Hauptraum $f(S)$. Dund ist $b_\nu\subset\mathfrak{e}_\nu(S)$, wenn $[R^{-1}S]^\nu b_\nu=0$, wobei $R$ irgendeine nichtreguläre Matrix <u>aus</u> $\mathfrak{S}$ ist. (Auf die Wahl von $R$ kommt es nicht an !)

Allgemeinste Formulierung (mehrparametriger) linearer "Eigen"aufgaben:

Gegeben sind **???** lineare Räume $R$; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und eine bilineare Funktion auf $R$, $\mathfrak{S}$ mit Werten aus $\mathfrak{T}$: $R\,S=T$.

$S$ heisst Eigenlösung zu $R$ (und umgekehrt), wenn $R\,S=T$, $R\neq 0$, $S\neq 0$.

[im obigen Fall ist $R$ die 2 parametrige Matrizengesamtheit $\beta\,A-\alpha\,B$; $\mathfrak{S}$ ist

der Raum der $\mathfrak{x}$).
vgl. 158

**Seite 112**

Metrikfreie Eigenwerttheorie und Funktionalanalysis
In einem linearen Raum $A$ seien beschränkte Folgen definiert. $a_n \equiv a$ sei beschrkt. Def: $\varphi$ heisst Funktional auf $A$, wenn für jedes $a \in A$ eine Zahl $\varphi\, a$ erklärt ist, so dass 1) $\varphi\,(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\, \varphi(a) + \beta\, \varphi(b)$ und
2) $\varphi\, a_n$ beschränkt, wenn $a_n$ beschränkt.
(1) Def. Folge $\varphi_n$ beschränkt, wenn $\varphi_n\, a_n$ beschrkt für jede beschr. Folge $a_n$
(Ist also eine Art gleichmässiger Beschränktheit). Damit gilt in vielen Fällen:
Die Tropologie in $A$ ist dieselbe, wenn man $A$ als Funktionalraum auf $\Phi$ betrachtet und durch nochmalige Anwendung von (1) topologisiert. Dazu ist notw. & hinr.: (2) aus der Beschrktheit von $\varphi_n\, a_n$ für jede beschrkte Folge $\varphi_n$ folgt die Beschr. von $a_n$ selbst.
Diese Bedgg. (2) dürfte im Hilbertraum und den Banachräumen erfüllt sein, allgemein gilt **???** dort sicher räumlich **???**, wenn es zu jedem Element $a$ mit **???** ein Funktional $\varphi$ mit $|\varphi| \leq 1$ und $|\varphi\, a| \geq \frac{1}{2}$ gibt. Gilt also (2), so kann man $A$ topologisch in den zu $\Phi$ adjungierten Raum $\Psi$ einbetten, dh. besser von vorn herein diesen betrachten. Es ist dann $\Phi$ **???** $\Psi$ adjungiert und umgekehrt $X = \Phi + \Psi$ dürfte selbstadjung. sein: Es gibt in jedem Funktional auf $X$ ein Element von $X$, das ihm eindeutig zugeordnet ist: $(\varphi_0,\, \Psi_0) \leftrightarrow (\psi_d\, \mathfrak{x}_0) = \chi_0$ mit $\chi_0(\mathfrak{x}\, \psi) = \mathfrak{x}_0\, \chi + \chi_0 \mathfrak{x}$ Bei endlicher Dimension von $A$ sind die zu normalen Operatoren $M$ ähnliches gekennzeichnet dadurch, dass aus "$(M\, \mu\, E)^2 a_n$" beschränkt folgt "$(\ )\, a_n$ beschr."

**Seite 113**

Vollstetigkeit eines Operators auf $A$ könnte erklärt werden durch gleichm.
s.115 Approximierbarkeit ? durch Operatoren endlichen Ranges.
Der obige "Paarraum" ("kanonische Raum"?) $X$ ist selbstadjungiert [ aber im Gegensatz zu $\mathfrak{h}$ **???** nicht definit selbstadjungiert, dh. es **???** $(\chi,\, \chi)$ **???** 0 sein ], d.h. es gibt eine topologische lineare Abbildung $T$ von $X$ auf seinen adjungierten Raum. Vollstetitgkeit eines Operators soll nur von Topologik abhängen, Selbstadjungiertheit nur von inneren Produkt (das auch indefinit sein darf)
**???**-Schon jede Art von $A$ in $\Phi$ hinein) ergibt eine Metrik in $A$.

Aufbau einer Theorie von $A\, X = \lambda\, B\, X$ $\quad$ $A,\, B$ hermitesch in bezug auf ein indefinites **???** vollstetig
1) Theorie vollstetiger in bezug auf eine definite Metrik hermitesch Op $\not\equiv$ (Hilbertraum)
2) Ist Metrik semidefinit, so sei $\mathfrak{N}$ der Raum mit $(N,\, N) = 0$, $\overline{X}$ sei der Differenzraum $X - \mathfrak{N}$. In $\overline{X}$ ist **???**, also EWtheorie nach 1)
Ist $K\, \overline{X} = \lambda\, \overline{X}$, so ist $K\, X = \lambda\, X + N$; entweder ist nun
(3) $K\, M = \lambda\, M + N$ lösbar mit $M \subset \mathfrak{N}$;

dann auch $KY = \lambda Y$ lösbar: $Y = X - M$ Oder (3) ist unlösbar, dann ist $KM = \lambda M$ lösbar. Also stets gibt es EW, wenn nicht$K\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{N}$
**???**
3) Ist $\lambda = 0$ kein EW, so ist $K = A^{-1}B$ vollst. mit hermitesch in bezug auf die semidefinite Metrik $(X, DY) = [X, Y]$.

**Seite 114**

4) **???** könnte die Theorie von Beiss [183] **???**: Der verlangt bei $\dot{X} = \lambda BX$, dass es eine <u>konstante</u> Matrix $T$ gibt mit $TB + B^*T = 0$, $|T| \neq 0$ mit $TB = H^2 \underline{\underline{\gg}} 0$ hermitesch. Dann gibt es aber auch konstante <u>hermitesche</u> Matrix $S$ mit $|S| \neq 0$, $(SB + B^*S = 0$ und) $S \cdot iB = H^2 \underline{\underline{\gg}} 0$ also ist dann $i\frac{d}{dx}$ und $iB$ hermitesch für $[X, Y] = (X, SY)$, und $iB \underline{\underline{\gg}} 0$ in dieser Metrik.
5) Auch Hölders Theorie sollte darin **???**:
$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \cdot \textbf{???} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ s.$\underline{\overline{\text{V}}}$ 86 wobei in [184] Kap I $A = A^* \underline{\underline{\gg}} 0$ vorausgesetzt wird in Kap II nur $c^* \underline{\underline{\geq}} 0$.
6) Einordnung [184] von Beissin Hölder: $\dot{X} = (A + \lambda B)X$ : $X = TY$ : $\dot{Y} = (A^* + \lambda B^*Y)$
$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B^*T^{-1} & 0 \\ 0 & BT \end{pmatrix} \right)$ **???**
**???** setzt voraus $BT = T^*B^* \underline{\underline{\geq}} 0$, $BT + TB^* = 0 \cdots B^*T^{-1} =$ **???**
Da bei Hölders Theorie die Urmetrik definit, ist durch sie auch Beiss'Problem in eins verwandelt, bei dem die Op. selbstadj. inbezug auf eine <u>definite</u> Metrik.

<u>Allgemeine Formulierung selbstadj. EW Probleme</u> von **???**:
<u>Geg.</u> zwei (hermitesch) quadratische Formeln $(y, y)$ & $[y, y] = -\mathfrak{Y}$, so dass **???** folgt: $y = 0$.
<u>Suche Stellen</u> mit
$\begin{vmatrix} \delta(\,) & \delta[\,] \\ (\,) & [\,] \end{vmatrix} = 0.$
Es gibt eine eindeutig bestimmte stärkste Topologie, in der **???** und **???** stetig sind: $y_n \to y$ heisst $(z + y_n, z + y_n) \to (z + y, z + y)$
Simulatane zufällig von ( ) und [ ] ?     für jedes $z$, ebenso [ ].
**???**

**Seite 115**

<u>Vollstetige Operatoren in $C$-Räumen:</u> Vgl. mit 120
<u>Def.</u> $C$-Raum = linearer Konvergenzraum, in dem 1) das Cauchsche Kgenzkriterium gilt und 2) aus $a_n \square$ $a_n \in C$-Raum), **???**
$\sum_{\nu_n=1}^{N_n} |\gamma_{\nu_n} n| <$const folgt $\sum_{\nu_n}^{N_n} \gamma_{\nu_n} a_n \square$.
Def: $a_n \square$, wenn aus **???** $\to 0$ folgt $\varepsilon_n a_n \to 0$.

Dann gilt: Aus $\sum |\gamma_n| < \infty$ und $a_n \square$ folgt die Kgenz von $\sum \gamma_n \, a_n$.
Z.B. der Funktionalraum jedes $B$-Raums (in welchem beschränkte "$a_n \square$" erklärt sind, mit "$a \square$") ist ein $C$-Raum. [Gibt es zu jeder Folge $a_n \not\to$ eine beschränkte Funktionalfolge **???** mit $a_n^* a_n \not\to 0$, so ist $A$ topologisch in $A^{**}$ eingebettet.)
Def: Operator $M$ auf $A$ ist eine Abh. von ganz $A$ in sich, linear, die aus $a_n \to 0$ stets $A \, a_n \to 0$ macht.
Def: $M_n$ heisst beschrkt: "$M_n \square$", wenn aus $a \square$ folgt $M_n \, a_k \square$
$M$ heisst vollstetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Operator $E$ endlichen Ranges gibt, für den $(\frac{M-E}{\varepsilon})^n \square$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.
Satz: Ist $M$ vollstetig, so hat $(1 - M) \, x = 0$ nur endl. viele lin un Lösgen **???** Ist jedes $x$, so hat $(1 - M) \, y = a$ f. jede. $a$ genau eine Lösg
Bew. mit Abspalten: $\varepsilon - \frac{1}{2}$, $(\frac{M-E}{\frac{1}{2}})^n \square$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ **???** $M = E + N$, **???** $\square\cdot$ für $N$ **???** Reihe.
Satz: Ist $M$ vollstetig, so häufen sich die Eigenwerte $\lambda$ mit **???** $x \neq 0$ nicht im Endlichen. Bew: Zu **???** $< r$ nur endl. viele, dann zerlege $M = E + N$ mit $(2r \, N)^n \square$; $\varepsilon \, \lambda^n N^n$ kgt für $|\lambda| <$ **???**.

**Seite 116**

Ist $M$ vollstetig und $(1 - M) \, x = 0$ nur $x = 0$, so gibt es einen lösenden Op. $M'$ mit
$(1 - M) \, (1 - M') = (1 - M') \, (1 - M) = 1$.
Aus der Beschrktheit, Stetigkeit folgt die Differenzierbarkeit der Resolvante zu $\lambda \, M$, und daraus wird funktionentheoretisch die Kgenz von $\sum\limits_0^\infty \lambda^n \, M^n$ im grössten EW-freien Kreis folgen.

[Die Forderung **???**: "Zu jeder Folge $a_n$ Nullen gibt es eine proportionale beschränkte, die keine Nullfolge ist." Wäre einschneidend; z.B. im Raum der Folgen $\{c_1 \, c_2 \, c_3\}$ wo Kgenz koordinatenweise definiert ist, stimmt die Ford. 3 nicht: Wähle

$$a_n = \{1^n, \, 2^n, \, 3^n \cdots\}.$$

Frage: Ist die Summe zweier vollstetiger Op. un. vollstetig ?]
Bei der Übertragung von Operatoren von $A$ auf $A^*$ bleibt Beschränktheit und Rang erhalten, daher auch Vollstetigkeit.

Kann von einem vollstetigen Operator $M$ einen $E$ endl. **???** so abspalten, dass der Rest $N = M - E$ völlig eigenwertfrei wird im Endl., so dass die Resolvente ganz in $\lambda$ ist für $1 - \lambda \, N$, so kann man eine ganze transzendente Determinante $\Delta \, (\lambda)$ von $n$ Reihen angeben, deren Nullstellen die EWe sind, sowie eine Art Fundamentalsystem **???** von $\lambda$ abhgig aus denen sich die **???** linear zusammensetzen.

**Seite 117**

Eine Schwierigkeit für die Funktionentheorie in allgemeinen $C$-Räumen scheint darin zu bestehen, dass aus der Stetigkeit nicht unmittelbar auf die Beschränktheit einer Funktion $a(z)$ zu schliessen ist. Gibt es aber genügend viele Funktionale, so gehts jedes Funktional $b^*a(z)$ stetig von $z$ ab, ist also beschrkt.
Die Schwierigkeit verschwindet durch Vor 3 über $C$-Räume:
$V_3$: Jede Folge $a_n \neq 0$ enthält eine Teilfolge, die 0 nicht als Häufungpunkt besitzt. Dh.: Nun jede Teilfolge eine Nullfolge enthält, ist sie eine Nullfolge
Def: $a_n \to 0$, wenn keine Teilfolge von $a_n$ beschränkt ist. Unter $V_3$ enthält jede unbeschränkte Folge eine Teilfolge $\to \infty$.
Da $a_n \to \infty$ Widerspruch gegen $a_n \to a$, ist **???** $V_4$ jede auf einer kompakten Menge stetig Funktion mit Werten aus dem $C$-Raum $A$ beschränkt.
Auch $V_3$ ist bei dem Funktionalraum jedes $B$-Raums von selbst. erfüllt (aber nicht die von S.116).

Frage: Bilden die stetigen Homomorphismen eines $B$-Raums in einen $C$-Raum selbst einen $C$-Raum ? Arbeite bequemer mit $B$-Räume:

**Seite 118**

Axiome für $B$-Räume (Beschränktheitsräume) Linearer Raum $A$, indem Teilmengen als beschränkt definiert sind, so daß
$B$ 2) Enthält jede Teilmenge von $A'$, die unendlich viele verschiedene Punkte enthält, eine ebensolche beschränkte Teilmenge, so ist $A'\,\square$.
Dh. jede unbeschrkte Menge enthält eine unendliche Folge verschiedener **???**, von denen keine Teilfolge beschrkt ist.
B 1) Ist $A'$ beschrkt so ist jede Gesundheit **???** Linearverbdgen von Elementen aus $A'$ mit einer Koeff.-absolutsumme $\leq$ auch beschrkt. ($C \geq 0$ beliebig)
Aus 1) folgt: Jede endl. Menge ist beschrkt., sind $A'$ und $A''\,\square$, so auch

**Seite 119**

NB: "$B_2$-Raum": Raum mit $B_1$ und $B_2$

In $B_1$-Räumen definiert sich die Konvergenz $a_n \to 0$ so: es gibt Zahlenfolge $\gamma_n \to \infty$ mit $\gamma_n\, a_n\,\square$.
**???** Die 2-Räume entstehen, wenn man bezüglich dieser Kgenz das Cauchykriterium fordert, und zwar bequem in der folgenden scharfen Form:
Gibt es zu der Folge $a_n$ eine Zahlenfolge $\gamma_n \to \infty$, so dass die Vereinigung der Mengen $\gamma_p \cdot \{a_p - a_p\}_{p>q}\,\square$ ist, so gibt es $a$ mit $\gamma_p\,(a_p - a)\;\square$.
Gilt $V$, so heisst $A$ abgeschlossen.
Satz: Die Homomorphismen eines $B_1$-Raums **???** in einen abgeschlossen $B_3$-Raum $\overline{A}$ sind ein abgeschlossener $B_3$-Raum.
Bew: Sei $K_p \cdot A \subset \overline{A}$ , $\overline{A}$ abgeschlossen.

Sei $\gamma_\mu \to \infty$, $\gamma_p \neq 0$ $\gamma_p\,(K_p - K_q)$ $\quad\square\quad (p-q)$
Sei $a_n\,\square$; $n\,\rho\,(*)\,\gamma_p\,(K_p - K_q)\,a_n \quad \square \quad (p<q,\,n)$
daher
$\gamma_p\,(K_p a_n - K_q\,a_n) \quad \square\;(p<q)$
und nach $\gamma_p\,(K_p a_n - K\,a_n) \quad \square\;(p)$ für ein $K\,a_n \in \overline{A}$. Da $K\,a_n$ Häufungspunkt von $K_p a_n$ $(p,\,n)$ und
$K_1\,a_n\,\square$ und $\gamma_1\,(K_1 - K_q)\,a_n\,\square$, also $K_q a_n\,\square$ ist nach $B_3$) auch $K\,a_n\,\square$, also $K$ Operator.
Nun zeigt **???**, dass, da $\gamma_p\,(K_p - K)\,a_n$ Häufgspkt
1) Es brauchen wohl überhaupt nur beschränkte Mengen definiert zu sein, so dass jedes $a$ einer solchen angehört.

**Seite 120**

von $\gamma_p\,(K_p - K_q)\,a_n$ ist, wegen $B_3$) auch $\gamma_p\,(K_p - K)\,a_n\,\square$ $(p,\,n)$.
In abgeschlossenen $B_2$-Räumen gilt die Funktionentheorie(dh $B_1$, $B_2$ vorausgesetzt)

**???**: In einem $B_3$-Raum $A$ sei $K$ ein vollstetiger Operator, welcher in bezug auf eine in ganz $A$ erklärte stetige semidefinite Metrik selbstadjungiert ist: $[K\,n,\,v] = [n,\,K\,v]$ Gibt es ein $u_1$, $u_2$ so dass $(K\,n_1,$ **???**$) \neq 0$, so besitzt $K$ mindestens einen Eigenwert.
Bew: Bernoulli: $\frac{1}{1-???}$ wäre sonst ganz **???**, also auch $\sum \lambda^{2n}[???]^2$, während die Koeffverhältnisse doch monoton wachsen.
Oder mit Einfangen. vgl III 13, 23, 24 $\cdots$

Kennzeichnung der zu einer hermiteschen Matrix ähnlichen Matrizen: (vgl III 13 !)
Dund ist $M$ hermitesch ähnlich, wenn eine Teilfolge von $e^{i\,n\,M}$ beschränkt ist.

Aufgabe: Folgt aus Beschränktheit von $e^{i\,(\alpha\,A+\beta\,B)}$ (für alle reellen $\alpha$, $\beta$), dass $A$ und $B$ simultan hermitesche Matrizen transformiert werden können.
Stimmt für zweireihige.
Entwicklungssatz für vollstet. selbstadj. $K$ sollte aus Partialbruchzerlegg von **???** folgen.
**vervollständigen**

**Seite 125**

Damit eine Dgl.-EW-Aufgabe im neuen Sinn (112) selbstadj. sei, wird notwendig sein, dass $A$ und $B$ selbstadj. Diffausdrücke sind; denn es gibt einen Rang endlichen Rangdefekts in $\infty$, indem die $2m$ Konstanten $= 0$ sind, aber zur Metrik **???** beitragen.
Aufgabe: Bedingungen für die Selbstadjungiertheit der Randbedggen ermitteln, und auf allgemeinere Randbedggen wie $\int\, y(x)\cdot c(x)\,dx$ **???** $y(1) = 0$.

Frage: Entwicklungssatz für symmetrisierbare Integralgleichungen ? vgl [209] **???** Oder polare ? 127 ? Ist der Kern $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}\,\mathfrak{P}$ mit **???** $= \mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \gg 0$ so ist $\mathfrak{K}$ selbstadj. inbezug auf die Metrik $[u,\,v] = \int\int u(x)\,P(x\,y)\,v(y)\,dy\,dx$, und jede Eigenfkt. $\frac{u_n(x)}{t_n}$ ist eine Fourierkoeff., nämlich von $L(x,\,y)$ bezgl $y$; damit folgt der Entwicklungssatz für **???** darstellbare Fktionen.
**???** beschränkt Gl. in $x$.

Frage: **???** dürfte die Fourier-Entwicklung noch für die $k$-te Ableitung $(k < n)$ in jedem Teilintervall gleichmässig konvergieren, indem die $1\cdot$, $2\cdot$, $\cdot$, $k\cdot$ Ableitung gleichmässig existieren.

**Seite 126**

1. Nach Kamke (U.Z. 46, 231) gilt offenbar für hermitesche Matrizen $A$, $B$: Ist für jede zu einem festen $\lambda$ gehörige Eigenlösung von $A\,\mathfrak{x} = \lambda\,B\,\mathfrak{x} \qquad \mathfrak{x}^*B\,\mathfrak{x} \neq 0$, so ist die Anzahl der zu $\lambda$ gehörigen lin. un. EVektoren gleich der Vielfachheit der Nullstelle von $\Delta\,(\lambda) = |A - \lambda\,B| = 0$.
1) $\lambda$ ist reell, also $A - \lambda\,B$ selbstadj.
Bew.: 2) Aus Hauptlösung: $2\,\{A\,Y - \lambda\,B\,Y\} = B\,X$, $A\,X - \lambda\,B\,X = 0$ folgt $(B\,X,\,X) = c\cdot(\{A - \lambda\,B\}\,Y,\,X) = c\,(Y,\,\{A - \lambda\,B\}\,X) = 0$.
Klar, da HL = Grenze zweier Elen zu $\lambda \neq \lambda'$ und **???** solche $(X,\,A\,X') = (X,\,B\,X') = 0$ machen.
2. Entwicklungssatz im Hilbert-Raum:
Ist $\mathfrak{K}$ vollstetig bezügl. einer definiten Metrik selbstadj., so konvergiert jede Fourierreihe (im Sinn der Metrik) und stellt ein Element dar, das sich vom gegebenem nur um eine Lösung von $\mathfrak{K}\,y = 0$ unterscheidet: $a = a_\infty + \sum\limits_{(\lambda_\nu)} a_\nu$ mit $\mathfrak{K}\,a_\infty = 0$. Bew: Schliesse den von den E-Funkt aufgespannten Raum ab. **???** total senkrechten hat **???** keine E Fu, also ist $\mathfrak{K}\,y \equiv 0$ dort.

3. Ist nur $\mathfrak{K}$ so beschaffen, dass aus $b_\nu \to 0$ (im Sinn der Metrik) folgt $\mathfrak{K}\,b_\nu \Rightarrow 0$ im Sinn einer anderen Topologie, so gilt für jedes quellenmässig dargestellte $a$ der Entwicklungssatz im Sinn der Topologie (Bew.: 2).
Ist z.B. $\mathfrak{K}$ ein Integraloperator mit reellen symmet. dreiecksweise stetig diffbaren Kern, so konvergiert für jede **???** darg. Funktion $a$ auch die gliedweise abgeleitete Fourierreihe gleichmässig $\Rightarrow a'$; denn ihre Ableitung $\frac{da}{dx}$ kann unter dem Int.zeichen **???**

**Seite 127**

Ist $\mathfrak{A}$ ein selbstadj. definiter Differentialausdruck der Ord $2n$, folgt dann aus Beschränktheit **???** $\int u(x)(\mathfrak{A}\,n(\xi))\,dx$ auch Beschränktheit von $\int u^{(n)}(x)2\,dx$ ? Beruht hier auf die Theorie von $\mathfrak{A}\,n = \lambda\,\mathfrak{b}\,n$ für indefinites $\mathfrak{b}$ ?

Entwicklungssatz für $y = \lambda\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{P}\,y$, wo beschrkte

hermitesche Operator für $(n, v) = \int u\,v\,dx$ ist $\mathfrak{P}$ ein positiv definiter Integraloperator mit stetigem Kern:
Nach Mercer folgt aus $(u, \mathfrak{P}\,n)\,\square$ auch $(\mathfrak{P}\,u, \mathfrak{P}\,n)\,\square$ und daher sogar $\mathfrak{P}u(x)$ gl. beschrkter $x$, daher folgt aus "$\mathfrak{G}$ beschränkt für $(n, v)$" auch "$\mathfrak{G}\,\mathfrak{P}$ beschrkt für $[n, v] = (n, \mathfrak{P}v)''$, daher **???** Fourierreihe in der Metrik $[u, n]$.
Falls $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft hat, gl. kgte Funktionenfolgen wieder in solche überzuführen, lässt sich jede quellenmässig durch $\mathfrak{G}\,\mathfrak{P}$ dargestellte Funktion in eine gleichm. kgte Reihe entwickeln. Genauer: Die Entwickl für $y = \mathfrak{G}\,\mathfrak{P}\,z$ entsteht, aus der gleichen **???**, die aus der Fourierreihe für $z$ kommt durch Anwendung von $\mathfrak{G}$. Dh: Die Fourierreihe für $z$ kgt in der Metrik $(z, \mathfrak{P}\,z)$, die durch Anwendg von $\mathfrak{P}$ hierauf entstehende Reihe kgt gleichmässig (Mercer).
Also Entwicklgssatz: Jede durch $\mathfrak{P}$ quellenmässig dargestellte Funktion entsteht durch Anwendg von $\mathfrak{G}$ auf eine gleiche kgte Reihe stetiger Funktionen, wenn $\mathfrak{P}$ ein pos. def. Integr. **???** $\mathfrak{G}$ bezgl. $(n\,v)$ besteht.

**Seite 128**

Entwicklungssatz für polare Iglen : Ist $\mathfrak{P}$ ein pos. def. Intop. mit stetigem Kern und $\mathfrak{G}$ jede gleichm. beschrkte Menge stetiger Funktionen in eine ebensolche über und ist $\int u \cdot \overline{\mathfrak{G}v} = \int \mathfrak{G}\,u\,\overline{v}$, so wird jede quellenmässig dargestellte Funktion durch ihre Fourierreihe dargestellt, und diese kgiert gleichmässig.

$y = \lambda\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{G}\,y$ im Hilbertraum:
Sei $\mathfrak{P}$ 0 vollstetig, $\mathfrak{G}$ beschrkt hermitesch.
Dann ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{q} \gg 0$, vollstetig (wegen Spektrum).
$y = \mathfrak{q}\,z$ genügt die Gl. $z = \lambda\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{Q}\,z = \lambda\,\mathfrak{K}\,z$. $\mathfrak{K}$ ist vollstetig.
Also wird jede $\mathfrak{G}$ durch seine Fourierreihe nach den EFunkt. $z_n$ dargestellt:
$z_n = \lambda_n\,\mathfrak{K}\,z_n \qquad (\lambda_n \neq 0)$ **???** Metrik kgt.

Nach Mercer ist jeder pos. def. stetie Kern der Intervierte (das Quadrat) eine brauchbar unstetigen pos. definiten Kerns.

**Seite 129**

Ist $R(x, y)$ positiv definiter Kern, so folgt aus $(u, pu) \leqq 1$ stets für $v(x) = \int P(x, y)\,u(y)\,dy$:
$|v(x)|^2 \leqq \mathrm{Max\,P(x, x)}$ [und $v(x)$ ist stetig.]
Bew: $v = \sum \frac{\lambda_\nu \psi}{\lambda_\nu} \qquad |v|^2 \leq \sum \frac{\psi_\nu^2}{\lambda_\nu}$

Aufgabe: einen EW fester Nummer von $K(x, y; Z)$ als analytische Funktion von $Z$ untersuchen, wenn $K(x, y, t)$ eine "positive" Matrixfunktion von $Z$ ist.

Frage: Konvergiert $\sum p_n(z)$ von selbst in weiteren Punkten, wenn es für $z_0$ kgt, falls die $p_z$ **???**
Aufgabe: Kann man bei $M_y =$ **???** umgeben:
Schon allein durch Definitheit ?

NB: Für Entwicklungssatz, Abgeschlossenheitsdef nun man $\mathfrak{z}_m$ so definieren, dass die $m$-te Abl: quadr. **???** ist.
vgl. Kamke III (def. EW) S 75

Ist $M$ ein pos. definiter Selbstadj. Diffausdruck für **???**, so ist
$\int u^2 dx \subseteq \frac{1}{K} \int u \cdot M(n)\, dn$,
wo $K$ der kleinste EW von $M\,\mathfrak{u} = \lambda\, n$, $U_\mu(u) = 0$, so ist
Kamke $189_{\mathrm{III}}$, 762 Bew mit Einfangen

**Seite 130**

Ebenso ist vielleicht $M\,y$ **???** zu bekommen
$\sum$ **???** $dx \leq \int y\, n\, y$ für **???**
Gilt sicher wenn ausserdem, alle Randwerte von **???**
Linearverbdg abziehen.-Mittelkonvergenz für $y,\, y', \cdots,\, y^{(n)}$ zieht
gl. Kgenz für $y,\, y', \cdots,\, y^{(n-1)}$ **???** Systeme betrachten !
Man kann Randbedingungen für $y^{(3)}$ selbst stellen, wenn von $y$ sonst nur Integrabilität voraus gesetzt wird: Definiere $y^3\,(0) = \lim\limits_{w \to 0} \frac{s_w^3}{3! w^3}$.

Auch bei mehreren Freiheitsgraden liegen die Grammelwerte stets zwischen den Raygleighwerten und den iterierten Rayleighwerten. Genauer: Ist $P$ Matrix, Typ $(n,\, u)$, **???** Type
$(n,\, f)$, so bilden bei festem $l$ die $l$-ten Wurzeln **???** von $\det(M\, C' P^k C - C' P^{k+1} C) = 0$ eine monoton wachsende Folge. Minimaxkennzeichnung. Es ist für jedes $\mathfrak{x}$**???** Typ $(f,\, 1)'$ $\mu_l = \min\limits_{(l)}$ $'$**???** $\frac{x' C' P^{k+1} C\, \mathfrak{x}}{\mathfrak{x}' C' P^k\, C\, \mathfrak{x}} \geqq \frac{\mathfrak{x}' C' P^K C\, \mathfrak{x}}{\mathfrak{x}' C' P^{K-1} C\, \mathfrak{x}} \geq \min\limits_{(l)} (k)$

Es ist wohl $\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_K^{(l)} = \lambda^{(l)} \text{ von } P, \text{ wenn alle EWe an } Cbeteil. \\ \qquad\qquad \textbf{???} = \lambda^{n-f+l} \text{ von } P \end{cases}$

**Seite 131**

Allgemein:
Sind $A,\, B,\, C$ quadratische Formen und $t^2 A + 2tB + C \geqq 0$ f. alle **???** so sind die EWe von $\det(A\,B - C) = C$ grösser als die von $\det\overline{(}\lambda\, A - B) = 0$. Denn $\mathfrak{x}' A \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}' C \mathfrak{x} \geqq (\mathfrak{x}' D \mathfrak{x})^2$

Sind die Integrationen gebrochener positiver Ordnung auch vollstetig ?
Aufgabe: Variationsrechnung $\delta \frac{[n\, n]}{<u,\, n>}$ so in abstrakten Räumen für zwei Metriken, die reell oder komplex sein dürfen. Beim Zusammenlegen eines Raums mit

seinem konjugierten die Durchschnitte identifizieren, damit der entstehende "kanonische" Raum nicht unnötig gross wird. -Numerische Abschätzg der Genauigkeit von Differenzeneigenwerten: Die Dgl-EF ist eine **???** $\Delta-$ EL. Nun Weinstein auf $\Delta$-Gl.
**???** Analogon zum Satz von <u>Stöhr</u>: Ist $y_1(x)$ **???**
EF **???** $y'' + q\,(x\,\lambda)\,y = 0$, $y_n(0) = y_n(1) = 0$; $y'(0) > 0$,
Zeichenwechsel der Folge $y_1(x), \cdots$, bis zum $n$-ten Glied $V_n(x) = n\,x + 0\,(1)$.
Z.B. bei $y'' + \lambda\,y = 0 \quad y_n = \sin\,n\,x \qquad V_n = [n\,x]$
Vermutung: Ist $u_n(x)$ ein Orthogonalsystem mit
**Seite 132**

$n!(0) > 0$, so ist $V_n(x)$ eine monotone Fktion von $x$. Sind die Sätze über die Anzahl der Nullstellen in einen vorgegebenen Teilintervall? Nein, die kommmen aus Stöhrs Zeilensatz.
Der Vorteil, wenn man nicht überall definierte Operatoren zulässt, besteht darin, dass sie sich den ihnen angemessenen Raum durch Abschliessung des urspr. Def.-raums selbst schaffen können.
<u>Hilbertschen Raum bezüglich schwacher Kgenz abschliessen</u>
hat dann jeder Operator nur noch Punktspektrum ?
Aufgabe: Eigenwerttheorie in "linearen Räumen mit Operatoren" und beliebigen Gruppen
Prüfers-Theorie auf nicht Sturmsche Randbedingungen erweitern Prüfers-Theorie auf Iglen erweitern **???**
Prüfers-Theorie auf Randwertaufgaben höhere Ordnung erweitern.

Die Def. der "<u>brauchbar unstetigen" Kerne</u> sollte wohl die Kerne $K(x,\,y) = K\,(y,\,x)$ umfassen, für die 1) $K\,(x,\,y) \in L_2(y)$, 2) $K^{(2)}(x,\,x) \leq C$ gl. beschrkt.
Es folgt dann aus $\int \varphi^2(x), dx \leq 1 \qquad |\int K(x,\,y)\,\varphi(y)\,dy| \leq C$ f. alle $x$.
also wird jede im drittel kgte Folge durch Anwendg von $K$ in eine gl. kgte verwandelt, da wird der Entwicklungssatz gelten.

**Seite 133**

15.5.47 <u>Verhältnis Rayleigh-Graumel:</u> Berechnung der ersten EWe bei pos. vollstetigen EW-Aufg.
Ist $D$ Diffop., $\gg 0$, **???** $= D^{-1}$ Intop $\gg 0$, so setze bei $D\,y = \lambda\,y$
(Rayl.) $\rho(n) = \frac{(n,\,D\,n)}{(n,\,???\;n)}$ und $\tau(n) = \frac{(n,\,???\;n)}{(n,\,???\;)}$ (Gramm).

Nützlich in Gr nur, wenn man $(n,\,g\,\mathfrak{K}\,g\,n) = (\mathfrak{L}\,n,\,\mathfrak{L}\,n)$ berechnen kann (halbe Iteration), sonst rechnet man mit der vollständig berechneten Iterierten genauer mit $\frac{(n\,\mathfrak{K}\,n)}{(\mathfrak{K}\,n,\,\mathfrak{K}\,n)}$ = Rayleigh von der **???** : $\rho\,(\mathfrak{K}\,n)$

Vermutung: Der <u>Satz II von Stöhr [190]</u> lässt sich so verallgemeinern:

Normiert man eine feste Komponente $y_j = 1$, so ist die Zahl der Zeichenwechsel in der Komponente $k$ (bei nach den Eigenwerten geordneten Eigenlösungen) $|k-j|$.
-Bew. des Oszillationswertes I: Sei $g_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ monoton wachsend, von $-\infty$ bis $\infty$ für $\lambda$ von $-\infty$ bis $+\infty$, stetig. Sei $\Delta^2 y_{i-1} + g_i(\lambda)\, y_i = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
"EWe" $= \lambda$ mit $y_{n+1}(\lambda) = 0$. Mit $g_i = q_i - 2$ ist.

$$\begin{pmatrix} g_{1_{\Delta_2}} & 1 & & & \\ 1 & g_2 & 1 & & \\ & 1 & g_3 & 1 & \\ & & & \cdots & 1 \\ & & & 1 & g_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

also $y_k = -y_{k+1}\, \Delta_{k-1} |\, \Delta_k$ nach bramer. $\qquad \Delta_a = 1.$
$y_k \cdot (-1)^{k-1} \Delta_{k-1}$.

**Seite 134**

Sei $v_i(\lambda)$ die Zahl der Zeichenwechsel in $1, y_2(\lambda), \cdots y_i(\lambda)$.
Dann ist $v_i(\lambda)$ =Zahl der pos unter $\frac{\Delta_K}{\Delta_{K-1}}$, wenn diese alle $= 0$ $k \leq i-1)$
also $v_i(\lambda) = \pi\,(M_{i-1})$ $\qquad M_i = i$-ten Abschnitt von $M$, $\pi =$ **???**
Insbesondere $v_n(\lambda) = \pi(M_{n-1})$, $w$ $v_n(\lambda_j) = \pi\,(M_k(\lambda\, j)) = j - 1$
wenn keine Nullen auftreten
$\Delta_i$ hat genau $i$ Nullstellen, da die $i$ EWe umsonsten von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen, zwischen je zwei Nullst von $\Delta_i$ liegt genau eine von $\Delta_{i-1}$, dann wenn $\pi\,(M_i)$ um 2 steigt, steigt $\pi\,(M_{i-1}) = \pi\,(M_i) - \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$ um mindestens 1;
also ungenau 1, da nicht mehr als $i-1$ Nullstellen bei $\Delta_{i-1}$ vorhanden.
Ebenso liegt zwischen je zwei Nullstellen von $\Delta_{i-1}$ genau eine von $\Delta_i$.
Bew von Stöhr II: Ist $A_\alpha$ der $\alpha$-te Abschnitt, so ist mit

$$\tau = \left(\begin{array}{c|ccc} & y_1 & & \\ E & \vdots & & 0 \\ & y_K & & \\ \hline & y_{K+1} & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

$$T' M\, T = \left(\begin{array}{c|c|ccc} A_\alpha & & & & \\ \hline & -y_{\alpha+1}\; y_{\alpha+2} & & y_{\alpha+1} & \\ \hline & & \mathfrak{G}_{\alpha+2} & 1 & \\ & y_{\alpha+1} & 1 & \mathfrak{G}_{\alpha+3} & 1 \\ & & & 1 & \textbf{???} \end{array}\right) =$$

**Graph**

Nun seien $\lambda_j^*$, $\lambda_{j+p}^*$ zwei Nullstellen von $\Delta_\alpha$ $\quad (0 \geq$ **???**$)$. Dann wächst

$\pi\,A_\alpha$ **???** von $\lambda_j^* - \varepsilon$ bis $\lambda_{g'+p}^*$; da $\pi(R)$ nicht fällt, kann $\pi$ **???** höchstens um 1 fallen, also steigt $\pi(M)$ mindestens **???** . Dh. zu einem abgeschl. Intervall, das $p+1$ Nullstellen eine $\Delta_\alpha$ enthält, liegt mindestens $p$ Nullstellen $\Delta_K$.
Sind daher im Schema der EVektoren keine Nullkomponenten, so macht sich jeder Zeichenwechsel von $\Delta_i(\lambda)$ an den EVektoren zu den EWerten $\lambda_k$ von $\Delta_n = 0$ bemerkbar. Tritt bei Dglen anstelle von $T$ eine Integraltransformation ?

**Seite 135**

$A\,B$ und $B\,A$ haben bis auf eine Potenz von $x$ dieselbe charakt. Gleichung
Bew.: Sei Typ $A$ = Typ $B$' $(m, n)$. Es ist

$$\begin{vmatrix} x\,E_m & x\,A \\ B & x\,E_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x\,E_m - A\,B & 0 \\ B & x\,E_n \end{vmatrix} = x^n \cdot |x\,E_m - A\,B|$$

und
$$\begin{vmatrix} x\,E_m & 0 \\ B & x\,E_n - B\,A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{vmatrix} = x^m \cdot |x\,E_n - B\,A|.$$

Anderer Beweis: $\square$ zu Quadration ergänzen durch Nullen. Ist dann det $A = 0$, ersetze $A$ durch **???** variabel; oder nimm alle **???** Variablen.
Satz von Temple für normale Matrizen
Ist $Y = L\,X$, $X = \{x_1 \cdots x_n\}$, $y = \{y_1 \cdots y_n\}$, $L\,L^* = L^* L$, so enthält jeder Kreisbereich (dh abgeschl. Inneres oder Äusseres eines Kreises oder einer Halbebene), der alle $y_\nu/x_\nu$ enthält, mindestens einen EW $\lambda_\nu$ von $L$.
Bew: Aus $\mathrm{Re} \sum \overline{(\gamma\,y_\nu + \delta\,x_\nu)}\,(\alpha\,y_\nu + \beta\,x_\nu) \geqq 0$ folgt
$\mathrm{Re} \sum (\xi_\nu)^2)\,\overline{(\gamma\,\lambda_\nu + \delta)}\,(\alpha\,\lambda_\nu + \beta) \geqq 0$, also für ein $\lambda_\nu$
$\mathrm{Re}\,\overline{(\gamma\,\lambda_\nu + \delta)}\,(\alpha\,\lambda_\nu + \beta) \geqq 0$
Nun ist aber sign $\mathrm{Re}\,\frac{\alpha\,z_\nu + \beta}{\gamma\,z + \delta}$ = sign $\mathrm{Re}\,\overline{(\gamma\,z\,???)}\,(\alpha\,z + \beta)$. Sind also alle $\mathrm{Re}\,\frac{\alpha\,y_\nu + \beta^{x_\nu}}{\gamma\,z + \delta} \geqq 0$, dh liegen alle $\frac{y_\nu}{x_\nu}$ in einem **???** $\mathfrak{K}$, so ist $\mathrm{Re} \sum \overline{(\;)}\,(\;) \geqq 0$, also für ein in $\mathrm{Re}\,\frac{\alpha\,\lambda_\nu + \beta}{\gamma\,\lambda_\nu + \delta} \geqq 0$: $\lambda_\nu \subset \mathfrak{K}$.

Aufgabe: Zusatz zum Satze von Temple auf normale Matrizen übertragen; $\overline{V}$ 71 für reelle symm. heisst es: Sind alle El. von $x$ pos., das gl. von einem EV $X_1$, so folgt aus $A\,X - n\,X$ pos. $A\,X -$ **???** $X$ neg $n < \lambda_1 < v$
Bew: $X_1'\,(A\,X - u\,X) > 0 \quad (\lambda_1 - n)\,(X\,???\,X) > 0 \qquad \lambda_1 - n > 0.$

**Seite 136**

Zur analyt. Theorie der beschrkten **???** Operatoren in vollständigen Räumen $\Phi'$.
Def: Spektrum von $L$ Gesamtheit der Punkte $\lambda$, zu den es ein $\varphi \in \Phi$, so dass $(L-\lambda)^{-1}\,\varphi$ von $\infty$ her bis an $\lambda_0$ her an fortgesetzt werden kann, aber nicht darüber hinaus Vermutungen: Zu jeder Spektrumsscheibe gibt **???** $(\varphi \neq 0)$ $\varphi < \phi$, für die $(L-\lambda)^{-1}$ ausserhalb der Scherbe überall regulär ist; **???** die Scherbe ist an $\varphi$ beteiligt. -Spektrum von $f(L) = f$ (Spektrum $L$)-$\varphi$ suchen, an dem nur ein Teil des Spektrums beteiligt ist vielleicht wenn **???** im Spektrum, und $\leqq 1$ durch Umordnen von $(L-\lambda)^{-1}$, einmal nach $\frac{1}{\lambda}$, einmal nach $(\lambda - L)$ entwickelt.- Man muss die Operatoren $L$ untersuchen, die keinen abgesschlos-

senen Teilraum invariant lassen. -Ist $V_n L = L\, V_n$, $(\boxed{V_n} = 1)$ so bilden die (s. auch S.159) $\varphi$ mit $V_n\, \varphi \to 0$ einen abgeschlossenen gegen $L$ invarianten Teilraum. -$V_n$ mit $V_n \varphi \to 0$ bekommt man, wenn man **???** dem von $L\, \varphi$, $L^2 \varphi$, $\sim$
aufgespannten Raum approximiert. -Ist $(\boxed{L} \sim 1$ so gibt in jeder Kugel von Radius $\rho$ einen Kugel vom Radius **???** in welcher durchweg $|L\, \varphi| >$ **???** ist. Ist $L_n$ Folge beschränkter Operatoren, so gibt es $\varphi$ mit $|\varphi| = 1$, so dass $|L_n\, \varphi| > \frac{\boxed{L_n}}{10^n}$ wie weit kann man 10 **???** ?
Die analyt. Fortsetzung von $(L-\lambda)^{-1}\varphi$ ist nie mehrdeutig; denn für $\lambda \sim \infty$ gibt es nur eine Lösung von $(L-\lambda)$**???** . -Wenn $L$ nicht ein-

**Seite 137**

mal einen <u>offenen</u> Teilraum $\neq 0$, $\phi$ festlässt, folgt aus $(\boxed{V_n} < \infty \quad V_n L = L\, V_n$ und $V_n \varphi \to 0$ auch $V_n\, \psi \to 0$ f. alle $\psi$, daher $(\boxed{V_n} \to 0$, und die Approximation von $\varphi$ durch ein Orthogonalsystem in **???** gibt Cayley-Hamiltonsche Gleichungen. -Lässt $L$ gar keinen Teilraum von $\phi$ fest, so hat $\varphi$ die Dimension 1: Denn der Raum der endlichen Linearverbdgen von $L\, \varphi$, $L^2\, \varphi$, muss **???** sein, also $\varphi = \sum_1^n c_\rho L^\rho \varphi$, $(L-\alpha)\, \psi = 0$. Wenn $\underline{0 \subset \mathrm{Sp\,L},\ (\boxed{\mathrm{Sp\,L}} = 1,\ \mathrm{Re\ Sp}\, L \geqq 0,}$ sind vielleicht die Folge $L^n$ und ein $\varphi$; das aus Annäherung an die Stelle $\lambda = 0$ gewonnen ist, geeignet, um einen abgeschlossenen invarianten Teilraum zu gewinnen. Vielleicht lässt sich so beweisen, dass ein Op. ohne **???** Teilraum nur einen Punkt als Spektrum hat. Wenigstens eine direkte Theorie der normalen Operatoren sollte so herauskommen, ohne Rückgriff auf Hermitesche -Gibt es für <u>solche</u> $L$ eine $\sqrt[2]{L}$ ?
22.5.47 Def.: <u>Normaler Ring</u> = Kommutativer Ring mit kompl. Zahlen als operat. vollständig bezgl. eines **???** $|a|$ mit $|a+b| \leqq |a| + |b|$ **???** vielleicht sollte man noch **???** , dass man **???** nicht mehr durch Quotientenbildung erweitern kann, ohne diese Eigenschaft aufzugeben. Hier gibt eine schöne Funktionentheorie: Der Beitrag eines El. ist genau gleich den grössten Betrag seines Spektrums (wie bei normalen Matrizen), nicht $\geqq$ wie ohne die Bedgg **???** .
Einen normalen Ring erhält man aus einem kommuktiven Banachring $\mathfrak{R}$ mit **???**

**Seite 138**

durch $|a| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d(a^n)}$ und Übergang zum Differenzenring $R - \mathfrak{R}$ mit $n \in \mathfrak{R}$, wenn $d(n) = 0$ (dh. $\frac{n}{\lambda - n}$ ganze Fktion von $\frac{1}{\lambda}$) ist $\mathfrak{R}$ abgeschl. ?
In einem normalen Ring gibt es zu jedem Element mit $|\mathrm{Spektr} - \mathrm{pos}| = \mathrm{pos.}$, $0 \in$ Spektr. eine Quadrat -und $n$-te Wurzel.-
Der Übergang von der Banachmetrik $d$ zu $|\ |$ liefert gerade die ursprüngliche normale Metrik wieder, wenn man diese durch Ähnlichkeitstransf. mit einer intakten Matrix **???** hatte:
Ist $f(z)$ ein Polynom, und hat $L$ das Spektrum $\{\lambda\}$ (definiert durch Nicht-

existenz von $(L-\lambda)^{-1}$) so hat $M = \underline{f(L) \text{ genau das Spektrum } \{f(\lambda)\}}$. Denn $f(L) - \mu$ **???** $\Pi\,(L - z_K)$, worin $z_K$ alle Lösungen von $f(z) = \mu$ durchläuft. -Also ist normalen Ringen $|f(L)| = \max\limits_{z \subset \mathrm{Sp}} L\,|f(z)|$ zunächst für Polyn. $f$.

Da stets $\mathrm{Sp}\,L^{-1} = \mathrm{Sp}\,\mathrm{L}^{-1}$, ist **???** normalen Ringen

$$|(\lambda - L)^{-1}| = \frac{1}{\textbf{???}\ (\lambda,\ Sp\,L)}$$

Das Spektrum ist stets abgeschlossen. Wird der normale Ring $R$ durch <u>lin</u> Element $L$ erzeugt und hat dieses das Spektrum $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{R}$ metrisch isomorph dem Ring **???** derjenigen Funktionen (mit komlpexen Werten) auf $\mathfrak{A}$, die aus den Polynomen $f(z)$ durch Abschliessung mit der Metrik $||f(z)|| = \max\limits_{z<\mathfrak{A}} |f(z)|$ entstehen.