Private Notebook VII

Helmut Wielandt

Sept 49 - Juni 52

Milman[1] Inhalt [MR 5 146]: Let E a complex Banachspace, A a linear transformation in E, S_A the spectrum of A an I the identity transformation. The author defines a point $\lambda_0 \in S_A$ to be „essentially of minimal multiplicity n“, if (1) for $x_m \in E$,
$\lim_m \parallel (A-\lambda_0 I)^{n+1} x_m \parallel = 0$ implies $\lim \parallel (A-\lambda_0 I)^n x_m \parallel = 0$; (2) there exists $x_m^0 \in E$ such that $\lim \parallel (A-\lambda_0 I)^n x_m^0 \parallel = 0$ and $\overline{\lim} \parallel (\ )^{n-1} x_m^0 \parallel \neq 0$. A point $\lambda_0 \in S_A$ is of „minimal multiplicity n“when (1) and (2) hold with the additional restriction that $\parallel x_m \parallel = 1$. Of several theorems concerning such points in S_A we quote two. If $\lambda_0 \in S_A$ is essentially of minimal multiplicity n and if λ_0 is a limit point of the complement of S_A, then $\parallel (A-\lambda I)^{-1} \parallel \cdot |\lambda_0 - \lambda|^n < K$, where $\lambda \,\bar{\varepsilon}\, S_A$ lies in a certain neighborhood of λ_0 and K is a constant. For the second theorem it is assumed that for every $\lambda \,\bar{\varepsilon}\, S_A$ there exists a rectifiable closed contour containing S_A and excluding λ . If $\lambda_0 \in S_A$, $\lambda_m \,\bar{\varepsilon}\, S_A$, $\lambda_m \to \lambda_0$ and $\lim \parallel (A-\lambda_m I)^{-1} \parallel \cdot |\lambda_0 - \lambda_m|^{n+1} = 0$, then λ_0 is of minimal multiplicity not greater then n. Proofs are not given. J.V.Wehausen.

Nikolsky, S.[2] Inhalt [MR 5;187]: Let E a complex normed vector space; let I be the identity transformation in E, B a transformation having an inverse, V a completly continuous transformation, and K a transformation such then $K(E)$ is finite dimensional. It is well known (and was first shown, indepently, by Schauder and Hildebrandt) that the nondeterminantal results of

Seite 2

the Fredholm integral equation theory can be formulated and proved for transformations in E of the form $T = I + V$. It is shown here that necessary and sufficient conditions for these theorems to hold are any of the following: (1) $T = B + V$, (2) $T = B + K$, (3) $\bar{T} = B^* + V^*$, $\bar{T} = B^* + K^*$ (B^*, V^* and K^* are defined in $\bar{E}$ but need not be adjoints of transformations in E).
The author considers next the analytic properties of the resolvent transformation $T_\lambda = I - \lambda T$. Let ϕ_T be the region in the complex plane of values λ for which $T_\lambda = B + V$ (or $B + K$), M_T the set of λ's belonging to a component of ϕ_T containing a value in the resolvent set, and G_T the resolvent set (those λ's for which T_λ^1 exists). These sets are all open and not empty. It is shown that points of $M_T - G_T$ are isolated and that, for λ in a neigborhood of $\lambda_0 \in M_T - G_T$,

$T_\lambda = \sum_1^2 C_k(\lambda - \lambda_0)^k$, where the C_k for $k < 0$ have finite dimensional ranges. It is also shown that M_T consists of just those λ's for while $T = U + V$, where $I - \lambda U$ has an inverse and $UV = 0$. Following Radon [Akad Wiss Wien SB. IIa 128, 1083 - 1121 (1919)] the Fredholm radius r_T is defined as the least upper bound of values r for which $T = U + V$, where
$I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \cdots$ converges for $\lambda < r$. It follows that r_T is the radius of the largest circle with center at $\lambda = 0$ contained im M_T. It is shown that $r_{T^n} = (r_T)^n$ from which it follows that (1) if T^n is completely continuous for some $n > 0$, then $r_T = \infty$; (2) if there exists V and $n > 0$ such that $\| T^n - V \| < 1$,

Seite 3

then $r_T > 1$. These are previous results of the author and Yosida, respectively. The methods of proof for the theorems concerning resolvents follow closely methods introduced by F. Riesz and Radon for special spaces; some of the theorems have already been stated by Hildebrandt [Bams 37, 196 - 201 (1931)] .
J.V. Wehausen (Columbia, Mo.)

Auszug aus Vortragsmanuskript Innsbruck 1949 von F.V.Atkinson, University College, Ibadan, Nigeria: Zur Spektraltheorie in Banachschen Räumen. Symmetr. Op. in inseparablen Räumen: Plessner u.a. Vollstetige Op. in lin. metr. Räumen: F.Riesz, Banach, Schauder, Hildebrandt, „Über das Spektrum eines beliebigen beschränkten Operators weiss man nach Radon, dass es wenigstens z.T. so beschaffen ist, wie das Spektrum eines vollstet. Operators.“- Man nenne „verallg. Fredholmsche“Operatoren nach folgenden Grössen:
$Tf = 0$ hat $a(T)$ lin. un. Lösgen, $a(T) < \infty$; $lT = 0$ hat $b(T)$ lin. un. Lösgen, $b(T) < \infty$. Dabei soll $Tf = g$ lösbar nach f sein, wenn aus $lT = 0$ folgt: $lg = 0$. Nach F. Noether ist bei Iglen nicht stets $a(T) = b(T)$: Die „Stufe“von T, definiert durch $L(T) = a(T) - b(T)$, hängt stetig von T ab und verhält sich wie ein Logarithmus beim Multiplizieren von Operatoren. Die verallg. Fredholmschen Operatoren sind dadurch gekennzeichnet, dass es ein W

Seite 4

gibt, so dass $TU = I - K_1$, $UT = I - K_2$ mit K_1, K_2 von endl. Rang. Im Raum aller Op bilden die von einer festen Stufe ein Gebiet; alle diese Gebiete bestehen aus der gleichen Anzahl getrennter Gebiete, und wenn eines konvex ist, so alle. Man teile die λ der komplexen Ebene danach ein, welche Stufe $(T - \lambda I)$ hat [dann noch feiner noch $a(T - \lambda I)$, $b(T - \lambda I)$]. Im Gebiet fester Stufe gibt es nur isolierte Punkte λ_0, wo $a(T - \lambda_0 I) > a(T - \lambda I)$ für eine punktierte Umgebung von λ_0, sonst ist $a = \text{const.}$ im Gebiet; diese λ_0 können verallgemeinerte EWe genannt werden. Die obige Quasi- Inverse $U = U(\lambda)$ hängt in einem solchen verallgem. Fredholmschen Gebiet regulär von λ ab nach der Formel: $U(\lambda) = U(\lambda_0)\{I - (\lambda - \lambda_0)\, U\,(\lambda_0)\}^{-1}$.

Gedanken über selbstadjungierte diskrete EWA (9.9.49)

1. Hoheisel-Methode veröffentlichen mit $(n, n) \geq 0$.
2. In einer topologiefreien EW Theorie muss die Bilinearformel die zentrale Stelle einnehmen; auch für die Definition der Selbstadjungiertheit: Wann ist $(\mathfrak{x}\, A_{\mathfrak{x}}) = \sum d_\nu\, |\xi|^{\nu\, q}$
3. Ist der Operator A hermitesch bezgl. eines indefiniten Skalarproduktes (x, y), ist aber $(x, Ax)' > 0$, so klappts wieder.
4. Sind alle *sa* Aufgaben bei DGlen bisher auf $\int uMv = \int vMu, \cdots$ abgestellt oder gibts auch vernünftige Aufgaben, bei denen man Zusatzglieder braucht ?
5. Kann man die Aufgabe $M_{2m}y = \lambda\, N_{2n}y$ auf eine Igl für $y^{(m)}$ zurückführen ? Dazu würde die **???** von $y^{(m)}$ passen.
6. Hat Kamkes Normalität etwas mit Hölders „normalen“EWen zu tun?

Fortsetzg. S.8 [1]

Seite 8

Gedanken über selbstadjungierte diskrete EW-Aufgaben(Fortsetzung S.4)

1. Eigenlösungen zu $\lambda = \infty$ für Dglen sind besser bei Systemen 1. Ordnung zu definieren.
2. Sind bei einer Dgl nie beide Matrizen gleichzeitig 0, so gibts keine kompl EWe.
3. Das allgemeinste *sa* System 1. Ordnung von Dglen aufstellen.
4. Die Metrik, in bezug auf welche eine „reelle“EWA möglicherweise *sa* ist, findet man, indem man λ als reell nachweist, etwa durch lin. Komb. von $\begin{cases} My = \lambda N y \\ R_\mu y = \lambda S_\mu y \end{cases}$
5. „Parsevalgl.“nennen Kamke III 269 Churchill u.a. die Vollständigkeitsrelation in der „kleinen“Metrik.
6. Beispiele *sa* EWA mit allgemeineren Randbedingungen ausarbeiten .
7. Zu zwei geg. abstr. quadrat. Formen M, N den Iterationsop. A durch $M(Au, v) = N(u, v)$.
8. Gilt Bilinearformel oder Vollstaudigkeitsrelation im $\mathcal{R}$, so auch in $\mathcal{R}^* \supseteq \mathcal{R}$, wenn $\mathcal{R}$ dicht in $\mathcal{R}$. In $\mathcal{R}^*$ genügt dann wohl $(u,\, u) \geq 0$.

[1] Pages 5 - 7 are crossed out. See collected works page 8

9. Kann man in **???** als Topologie einführen: $u \to 0$ heißt $\{(u,u)_M \to 0$ und $(u,u)_N \to 0\}$?

10. Hinreichende Bedgg. für Diskretheit von A in topologischem Raum aufstellen.

11. Folgen die Ergebnisse von Kamke IV durch Grenzübergang aus Kamke III?

12. Iglen, die bezüglich irgendeiner Metrik *sa* sind, durchführen.

13. Entwicklungssätze siehe bei A. Kneser Iglen, 117-121.

14. Randbedingungen, die von λ abhängen: Reid AmJ 54 (1932), 769 - 790. Tamarkin MZ 27

15. Dgl $My = \lambda Ny$ auf die primitive Art auf System zurückführen.

16. Asymptotisch *sa* diskrete EW-Aufgaben untersuchen: $y = \mathfrak{K}_1\, y + \lambda\, \mathfrak{K}_2\, y$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_2{}^*$; $p\, y^{(m)} + \cdots = q\, y^{(n)} + \cdots \qquad p,\, q > 0$.

    Quasi Ergodensatz mit Pferchkugel im „hyperbol.“Raum der cH, $H > 0$ beweisen ?

Seite 9

Unterredung mit Hamburger IX 49:

1. Aaronszajn hat neuartige Einschliessungssätze für reelle symm. Matrizen. Wohl Proc USA 1948

2. Über Momentenprobleme neuere, aber nicht wichtige Arbeiten von Verblunsthy 1947 - 1949).

3. Über Momentenprobleme, auch endliches, wichtig Nevanlinna 1923; auch Stone, Perron, Coury Hermite.

4. Für zwei Matrizen gibt es genau dann ein Polynom f mit $B = f(A)$, wenn B vertauschbar mit jedem F, für den $F^{\sim} = F$ mit $F\,A = A\,F$.

5. H. nennt 2 lin. Mannigfaltigkeiten mit „positiven Winkel“„detalliert“. Dazu Kober, Compos. Meth. 1938: Zwar abgeschl. fremde $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sind nicht stets detail .

6. Für Selbstadj von $\mathfrak{L}_m f = \lambda S_n f$ (!) ist **???** ; dass $\mathfrak{L}_m \mathfrak{S}_n^*$ Sturm-Lionville ist.

7. Bücher Banach, MWedderburn (Matrices, Colloq. Publ.) wieder gedruckt.

Das Verfahren von HASchwarz zum Existenzbeweis eines EWs von Δu + λu = 0: Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Acta Soc.scient Fennicac 15, 315 - 316 (**???**) Werke 1, 223 - 269 (1890). Die Schwarzsche Ungl. rechts liefert $\frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} < \frac{w_{2n+2}}{w_{2n+1}}$, links $< \frac{w_{2n+3}}{w_{2n+2}}$, wobei

$$W_n = \iint p\, w_k\, w_{n-k}\, dx\, dy = \iint \Big\{ \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_n}{y} \Big\}\, dx\, dy \qquad (S.251)$$

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = c_n \leq g, \text{ wenn } w_0 = 1, w_1 \leq g; \;\; c_n \nearrow c \qquad (S.252)$$

$$\sum W_n(x) t^n \;\; gl.kgt. \;\; |t| < 1 \qquad (S.253)$$

$$\prod \frac{c_n}{c} \;\; kgt, \frac{1}{c^n} * w_n(x) \Rightarrow \text{EL} \qquad (S.255/6)$$

$$\frac{1}{c} = \min \iint grad^2 n \;\; / \iint p\, n^2 \qquad (S.257)$$

Seite 10

Abschätzung von Barankin, V [89] und Bams 54 728 - 735 (1948): Eig.Beweis:
Stets ist $|\lambda| \leq \max \sqrt{z_\nu s_\nu} = m$ mit $z_\nu = \sum_1^2 |a_{\nu\mu}|, s_\nu = \sum_1^2 |a_{\mu\nu}|$.

Es genügt, dies für $A > 0$ zu beweisen. Mit $Z = \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix}$, $\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ist $A\,\mathfrak{n} = Z\,\mathfrak{n}$, $A'\,\mathfrak{n} = K\,\mathfrak{n}$, $K^{-1}A'Z^{-1}\,A\,\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$,
also hat $K^{-1}A'Z^{-1}\,A$ die Maximalwurzel 1,

$\underbrace{K^{-\frac{1}{2}} A^1 Z^{-\frac{1}{2}}}_{M_1} \cdot \underbrace{Z^{-\frac{1}{2}} A\, K^{-\frac{1}{2}}}_{M}$ $\quad | \, | \quad 1$

$M = Z^{-\frac{1}{2}} A\, K^{-\frac{1}{2}}$ $\quad | \, | \quad \leq 1$ — Frage: Ist sogar

$(K\,Z)^{-\frac{1}{2}}\; A =$ $\quad | \, | \quad \leq 1$

und wegen $(K\,Z)^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{m}$: — $\boxed{A} \leq \max\limits_\nu \sqrt{z_\nu\, s_\nu}$?

$\frac{1}{m}\; A$ $\quad | \, | \quad \leq 1$

A $\quad | \, | \quad \leq m$

Bei diesem Beweis dürfte sich das Gleichheitszeichen in der Abschätzung besser diskutieren lassen als bei dem elementareren von Barankin.
Frage:

> Gibt es eine Metrik im Spaltenraum, zu der als „Betrag von A“gerade obigen m gehört?

NB: Falsch ist die Vermutung: Jeder $|\lambda| \leq \max_\nu \ \min(z_v, s_v)$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$.

Frage:

Gibt es zu jedem λ ein a_{kk}, so dass $|\lambda - a_{kk}| \leq \sqrt{z'_k\, s'_k}$;
$z'_k = \sum_1^2{}' \ |a_{kv}|$ usw. **???** .
ja: VIII 60

[2] Seite 11

N.B. Arbeit bei MZ eingereicht 2.11.49 <u>Nichtnegative Matrizen</u> Ende wohl Sept. 49, nach Köln (20.9)

Ist A unzerlegbar, $\geq$ und ist die Maximalwurzel r die einzige vom Maximalen Betrag, so ist für genügend grosses $p \quad A^p > 0$.
Frobenius zeigt 1912. Ist A unzerl., $a_{11} > 0$, so ist in A^{n-1} die erste Zeile u. Spalte positiv, also ist $A^{2n-2} > 0$. Daher ist, wenn A unzerlegbar und r die einz. Wurzel vom max. Betrag (d.h. A „primitiv“), da ferner nach $\overbrace{(r\epsilon - A)} >$ 0 auch $A\ \overbrace{(r\epsilon - A)} > 0$ und Linearverbdg von $A, \cdots, A^n$ ist, folgert Frob., dass spätestens für $m = n\ a_{11}^m > 0$ ist. Es fasst nicht beides zusammen; man würde so bekommen: Ist A primitiv, so $A^{n(2n-2)} > 0$.
Satz: Der genaue Exponent ist $n^2 - 2n + 2 = p$: Ist A primitiv, so $A^p > 0$.
Bew: (1) Gibt es zu jedem $\alpha = 1, \cdots, n$ ein l aus $1 \leq l \leq n-1$ mit $a_{\alpha\alpha}^{(l)} > 0$, so hat $A^{l(n-1)}$ die α-te Spalte positiv, also auch $A^{(n-1)^2}$, also auch A^p.
(2) Zu einem α, etwa α=1, sei $a_{11} = a_{11}^{(2)} = \cdots + a_{11}^{(n-1)} = 0$. Dann ist $a_{11}^n \neq 0$ (z.B. nach Cayley), d.h. es gibt n Faktoren $a_{1\varrho}\, a_{\varrho\sigma}\, a_{\sigma\tau} \cdots a_{\omega\, 1} \neq 0$, aber nicht weniger. Aus dem letzten Grund sind die n Indizies $1, \varrho, \sigma, \tau, \cdots \omega$ alle verschieden, also bei passender Anordnung genau $= 1, 2, \cdots, n$: $A_m =$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$
hieraus folgt, wenn eine Potenz A^q eine positive Spalte hat, dass unter $A^q, A^{q+1}, \cdots, A^{q+(n-1)} > 0$ die α-te Spalte einmal > 0 ist, also sit <u>jede</u> Spalte von $A^{q+(n-1)} > 0$. Nun zwei Fälle:
(a) einmal ist $Sp\, A^\lambda \neq 0$ für ein λ aus $1 \leq \lambda \leq n-2$. Dann einmal $a_{\alpha\alpha}^{(\lambda)} > 0$, also $A^{\lambda(n-1)}$ hat positive α-te Spalte, also $A^{\lambda(n-1)+(n-1)} > 0$, $A^{(\lambda+1)(n-1)} > 0$, $A^{(n-1)^2} > 0$, $A^n > 0$.
(b) $Sp\, A = Sp\, A^2 = \cdots = Sp\, A^{(n-2)} = 0$. Dann Cayley, da $c_1 = \cdots = c_{n-2} = 0$. $A^n = aE + bA$; hierin a, $b > 0$, da sonst imprimitiv.(EW)

[2] Seite 8 ist oben durchgestrichen.

Dann $A^{n(n-2)+2} \sim A^2(E+A)^{n-2} \sim A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1} + A^n \sim E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} > 0$.

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A^n = E + A$ und daher $A^{p-1} \not> 0$, da $A^{p-1} = A(E+A)^{n+2} \sim A + A^2 + \cdots + A^{n-1} \quad a_{11}^{(n-1)} = 0$ hat.

Seite 12

A.E. Ross: On the teaching ofdeterminants. Amer. Math $\cdot$ Monthly 56 (March, 1949), 218 - 219. Vortragsbericht vom Spring meeting Indiana Section of the Mathematical Association of America at Purdue Univ., Lafayette, Indiana, 8.Mai 1948: (A.E.Ross, University of Notre Dame, Lousiana).

It was the purpose of the speaker to derive the usual properties of determinants from a set of arsumptions connected as directly as possible with the solutions of systems of equations.

(I) $\alpha_j * x_j = \beta$.

He showed that if a function $V(A) = V(\alpha, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ has the properties

(1) $\mathrm{V}(\alpha_1 \cdots c\alpha_k \cdots \alpha_n) = cV(\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_n)$

(2) $\mathrm{V}(\alpha_1 \cdots \alpha_k + \sum_{j \neq k} c_j \alpha_j \cdots \alpha_n) = V(\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_n)$

(3) $V(I) = V(e_n \cdots e_n) = 1$

Seite 13

then $V(\alpha_1 \cdots \alpha_n)x_k = V(\alpha_1 \cdots \alpha_k\, x_k \cdots \alpha_n) = \mathrm{V}(\alpha_1 \cdots \sum \alpha_j\, x_j \cdots \alpha_n)$
$= V(\alpha_1 \cdots \beta \cdots \alpha_n) = V_k$.

Thus if $V(A) \neq 0$, then system (I) has solutions x_j and $x_j = \frac{V_k}{V}$. (Cramer's rule). Following Artin, he proved the „product formula“and specializing one of the factors, showed that $V(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ is the desired multilinear from with the correct rule of signs for the individual terms. The existence of V with the Properties (1), (2), and (3) is proved by induction. In teaching, one may employ areas of parallelograms and volumes of parallelepipeds (which do have properties (1), (2), (3))), to gether with (II) to derive an equivalent of Cramer's rule without the use of determinants in the usual elementary sense, and thus pave the way for the general geometric therory. Geschrieben 29.3.50

R. M. Robinson, Am. Math $\cdot$ Monthly 56 (1949), 251. Wenn man aus n lin. Gl. mit n Unbekannten durch Bildung linearer Kombinationen der Gleichungen folgern kann, dass $x_1 = c_1, \cdots, x_n = c_n$, so ist dies tatsächlich eine Lösung. Denn die Determinante ist dann $\neq 0$.

Seite 14

Positive Matrizen

Ist jede Hauptunterdeterminante (jeder Ord.) von $A = (a_{ik})$ positiv, und ist $a_{ik} < 0$ für $i \neq k$, so ist $A^{-1} > 0$.

Satz von Mosak, J. L.: General equilibrium theory in International trade. Cowles Commission Monograph number 7.
(Bloomington 1944, S.49 - 51). Beweis durch Induktion von H. E. Goheen, Amer. Math. Monthly 56, 328 - 329 (1949). Bei Stieltjes 1886 für pos. def. symmetr. A.

<u>Eigene Verallgemeinerung</u> Sind alle Abschnittsdeterminanten von A positiv und alle $a_{ik} < 0$ für $i \neq k$, so ist $A^{-1} > 0$.
Beweis: Es gibt (Induktion)(genau) eine **???** matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ d_4 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ \dots & & & 1 \end{pmatrix}$.

mit $d_{k\lambda} > 0$ für $k > \lambda$, derart dass $DA = \begin{pmatrix} + & - & - & .. & - \\ 0 & + & - & .. & - \\ 0 & 0 & + & .. & - \\ . & . & . & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & + \end{pmatrix}$

$= B \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot D > 0$.
NB: Es sind dann von selbst alle Hauptunterdet. > 0.
Frage: Identisch mit Potron 1937 ? Ostrowski 1937 ?

<u>Asymptotisch gleiche symmetrische Kerne</u>

Zwei symmetrische Kerne, die sich nur durch Addition eines Kerns mit kleineren EWDichte unterscheiden, haben nach Weyl asymptotisch dieselben EWs. Das Ergebnis von Hammerstein (MA 93, 113 - 129 (1924)) lässt vermuten, dass sie auch asymptotisch die gleichen Eigenlösungen haben. **???**

[3] **Seite 17**

Aufgabe:

> Hängt die Frage nach den maximalen Modulen mit nur reellen EWen mit dem Satz von Wiegmann über Gruppen aus nur normalen Matrizen zusammen ? - Maximale Module aus normalen Matrizen suchen !
> NB: Aus $D \in \mathfrak{M}$, folgt $iD \in \mathfrak{M}$ folgt $D^n = 0, (A^{-1}D)^n = 0$; speziell bei $RgD = 1$ nach $D \overbrace{A} D \equiv 0$, $D(\overbrace{XE - A})D \equiv 0$, $D A^\nu D = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$; Vor: Dim $\mathfrak{M} = n^2, \mathfrak{M}$ nur reelle EWe.

[4] **Seite 18**

Frage:

> Gilt der Satz von Mercer schon unter der Voraussetzung, dass die

[3] Pages 15 - 16 ist durchgestrichen. Seite 17 ist oben durchgestrichen.
[4] S.18 ist oben durchgestrichen.

negativen Eigenwerte weniger dicht liegen als die positiven ? (Statt „nur endich viele negative Ewe").

Seite 19

2.12.49 Zum Cauchyschen Integralsatz Weg: $x = x(t)$, $y = y(t)$ stetig diffbar in $< t_0, t_1 >$
Integral: Def. mit Riemannscher Summe; umformbar in Integral über t. Unabhängigkeit vom Weg, wenn f regulär und $\mathfrak{G}$ =Rechteck.
Umlaufszahl eines Wegs $z \in \varphi(t)$ **???** $0 \in \delta : \delta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_1^2 \frac{dz}{z}$; ist ganz rat., weil für $\varphi(t) = \frac{z(t_0)}{2\pi i} \int\limits_1^2 \frac{d\,z(\tau)}{z(\tau)\cdot a}$ gilt: $e^{\varphi} = z(t)$, da $(\frac{z(t)}{e^{\varphi(t)}})' = 0$.
Umlaufzahl hängt stetig von a und δ ab. Strahlregel. Aussengebiet.
??? Caushy für „Gitterwege"**???** mit quadrat. Netz durch Induktion nach „Gewicht"$= \sum |$Umlauf δ um Masche$|$, mit Abbau der rechten oberen Masche (mit maximaler Koordinatensumme): leite um **???** zu **???**, und **???** zu **???**.
Der Satz ist dabei so zu formulieren:$\int\limits_1^2 f(t)\,dz = 0$, wenn f reg. in $\mathfrak{G}$, δ in $\mathfrak{G}$, $\delta \times b = 0$ wenn $b \notin \mathfrak{G}$.
Schluss: Approximation eines bel. Wegs δ durch Gitterweg, wobei nur endl. viele Abänderungen so klein gewählt werden, dass jede in einen ganz in $\mathfrak{G}$ erzeugten Rechteck stattfindet.
Dieser „Abbau Satz"für Gitterwege beweist dann auch sofort den Monodromieatz. Die Umlaufzahl für Gitterwege könnte elementar mit Strahlregel definiert werden.
Zu jedem stetigen Weg gibt es einen Gitterweg, punktweise zugeordnet, so dass zugeordnete Punkte Abstand $< 2\epsilon$ haben (ϵ = Maschenweite). **???** P_0 vor P_1 vor ... aus δ so **???**, dass $\overline{P_v P_{\nu+1}} < \frac{\epsilon}{2}$; zu jedem P_ν einen Gitterpunkt Q_ν mit $\overline{P_v\,Q_v} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, dann $\overline{Q_v\,Q_{\nu+1}} < \epsilon(\sqrt{2} + \frac{1}{2}) < 2\epsilon$. Dann gehören sie derselben Masche an. Verbinde $\int\limits_1^2$ oder $\Gamma_{Q_\nu}^{Q_{\nu+1}}$.

[5] **Seite 20**

Aufgabe:

Meine Def. der „Vollstetigkeit"auf topologische Begriffe zurückführen.

Aufgabe:

[5]S.20 ist unten durchgestrichen.

Schur Theorie der Potenzreihenumkehrung (1947) auf Koeff. auf einem Schiefring ausdehnen.

[6] **Seite 22**

<u>**Aufgabe:**</u>

Bestimmung aller Gruppen von n-reihigen Matrizen (maximale Dimension), bei denen alle Eigenwerte den Betrag 1 haben.

Inf. Transf. = $i\,G_{n_i - n_p}$, $(n,\,n)$ > Matrizengruppe mit **???** Spur hat dim $\leq n^2$ wenn **???**

Inhalt Kohn [21]: Results of DH Weinstein are used to prove the following theorems.

Let E_n be the nth energy level of a Schrödinger equation Hψ = Eψ. If a lower bound L_{n+1} is known for the $(n+1)$th energy level and φ is any normalized trial-function satisfying $\overline{H} = \int \varphi^*\, H\varphi$ dq $\leq L_{n+1}$, then $E_n \geq \overline{H} - (\overline{H^2} - \overline{H}^2)\ /\ (L_{n+1}$ - $\overline{H})$.
Analogonsly, if U_{n-1} is an upperbound for E_{n-1}, then $E_n \leq \overline{H} + (\overline{H^2} - \overline{H}^2)/(\overline{H} - U_{n-1})$, provided $\overline{H} \geq U_{n-1}$.

Inhalt[22] Bowker:

A function φ(A) of the elements of a real matrix A is called a norm if (1) $\varphi(cA) = |c|\varphi(A)$; (2) $\varphi(A+B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$, if $A+B$ is defined; (3) $\varphi(AB) \leq \varphi(A)\varphi(B)$, if $A\,B$ is defined; $\varphi(E) = 1$.
It is shown that $R(A) = \max\limits_i \sum\limits_1^2 |a_{ij}|$ is a norm, that no „best posssible“norm exists and that $\sum\limits_1^2 |a_{ij}|$ is the worst possible norm. The practical usefulness of these and some other norms is discussed briefly.

Seite 23

<u>Über die Menge der nicht fortsetzbaren Potenzreihen Lit:</u> hatte Huppert die folgende Literatur verarbeitet:
Bieberbach II; Polya Acta math 41 (1918). Hausdorff Math Z.4 Mandelbrojt Ann école normal 40 (1923); Steinhaus Math Z.31, Boerner Sitzber Bayer Ak wiss 1938

Schiefe eines n - Beins:
Aufgabe: Zu gegeben $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_n$ im $\mathfrak{R}_n$ den Verzerrungswinkel der unitärsten

[6] S.21 ist durchgestrichen. S.22 ist oben durchgestrichen.

Matrix bestimmen, die $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_n$ orthogonalisiert.

Zur hyperbolischen Geometrie innerhalb der Riemannschen Zahlenkugel: Klein, Nichteukl. Geom. (Springer); zum Pascalschen Satz, Nachr. Gött Ges Wiss. (Löbell)

Den Satz von Frobenius über Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$ der Klasse $n-1$ kann man elementar vielleicht so beweisen: Man zeigt, dass man von regulären Darstellung von g **???** g_1-mal G abspalten kann. (Die restliche Darstellung des Grades g_1 ist dann die reguläre von g_1). Dazu würde genügen, im Gruppenring von $g \quad g_1$ Grössen $\eta_1, \cdots, \eta_{g_1}$ anzugeben, so dass

1. $\eta_v G = \eta_v$ genau für G $\in G_1$
2. die **???** $\eta_v + \xi_v$ sämtlichen G Bildern unter lin.unabh.; dabei $\xi_\gamma G = \xi_\gamma$

[7] [8] **Seite 24**

Vergleichssätze über Hermitesche Operatoren müssen so formuliert werden, dass die Definitionsbereiche verschieden sein können, nur einen Durchschnitt von endl. Defekt in der Summe haben müssen.
Frage:

> Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, wenn $\mathfrak{G}$ das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen ist ? Stimmt für $\mathfrak{G}$ = Produkt <u>zweier zykl.</u> Gr.

Seite 26

$\mathfrak{G}$ sei eine primitive Permentationsgruppe; γ, I seien gleich lange ($< n$) Ziffernsysteme. Dann gibt es $G \in \mathfrak{G}$, das 1 in γ, aber 2 nicht in I hinein überführt.
Es gibt genau zweifach transitive Permentationsgruppen, die transitive Untergruppen kleineren Grades enthalten: Die Normalisatoren der regulären Gruppen vom Typ $(p, p, \cdots, p)_{,p>2}$. Frage: noch andere ? Ist jede 3fach transitive Gruppe mit einer transitiven Untergruppe kleineren Grades 4fach transitiv ?
Dass aus „Normalisator $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}$ für $\mathfrak{G} \neq E$ “folgt: „$\mathfrak{G}$ nilpotent“, hat laut K.A.Hirsch schon Frobenius bewiesen.
Seite 27

<u>Eine Ungleichung von Polya (laut Horn[38] in [34] benutzt): 3.1.51</u>

Ist $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_N$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_n \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_n \quad (n-1, \cdots, N)$, und $\mathfrak{F}$ monoton wachsend und konvex, so ist $\mathfrak{F}(c_1) + \cdots + \mathfrak{F}(c_n) \leq \mathfrak{F}(d_1) + \cdots + \mathfrak{F}(d_n)$. Bew.: Da nur die endl. vielen Fktswerte $\mathfrak{F}(c_v), \mathfrak{F}(d_v)$ eintreten genügt es, die Ungl. für stückweise lineare Fkt. zu beweisen, und hier wieder für

$$f_a(x) = \begin{cases} x - a & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \tag{1}$$

[7] S.24 gestrichen ausser der obere Teil.
[8] S.25 gestrichen bis Ende.

und hier wieder für

$$\mathfrak{F}(x) = x^+ = \begin{cases} x & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \tag{2}$$

Beweis für $\mathfrak{F}(x) = x^+$: Sei $p \leq n$, $c_p \geq 0$, aber

$$\begin{cases} \text{oder } p+1 > n \\ c_{p+1} < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dann $c_1^+ + \cdots + c_n^+ = c_1 + \cdots + c_p \leq d_1 + \cdots + d_p \leq d_1^+ + \cdots + d_p^+ \leq d_1^+ + \cdots + d_n^+$.

<u>Über kürzeste Einschliessungs-Intervalle bei 2 Iterat.-Schritten.</u> Sei $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ reell symmetrisch. Dann gibt es genau 2 (rel.) kürzeste abgeschl. Einschliessungs-Intervalle; ihre Mitten sind $\pm\ \frac{1}{4}\sqrt{15}$, ihre Länge ist übereinstimmend $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.
(NB: Die beiden „Galerkin"- oder „Rayleigh"-Grössen sind $\pm\ 1$, scheinen als mit der Frage des kürzesten Einschliessintervalls nichts zu tun zu haben. <u>Frage: Womit sonst ?</u>) Bemerkenswerterweise ergeben sich dieselben Intervalle, wenn man aus der einparametrigen Schar von Weinstein-Intervallen, die zu Ausgangsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört, die kürzesten aussucht. Vielleicht liegt dies an $m_{11} = m_{22}$? Für beliebiges M $= \overline{M}$ kann es <u>nicht</u> so sein, z.B. $M = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline & 0 & \end{array}\right)$

Seite 28

21.1.51 Der zu $-y''qy = +\lambda\, q\, y$, $R \begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha' y_0' + \alpha_1 y_1 + \alpha_1^1 y_1^1 = 0 \\ \beta_0 \ \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \end{cases}$
$Rg \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2$ <u>reell</u> !
gehörige Integrationsoperator $\mathfrak{K}$ ist genau dann hermitesch bezgl
$(y, z) = \int y\, z$, wenn

$$\begin{vmatrix} \alpha_0\, \alpha_0' \\ \beta_0\, \beta_0' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\, \alpha_1' \\ \beta_1\, \beta_1' \end{vmatrix} \qquad (S)$$

($\mathfrak{R}$ = Raum <u>aller</u> stetigen Fktionen, ohne Randbedg. !)
Denn die allgemeinste Lösung von $\mathfrak{R}$ ist, falls S erfüllt ist, $\{y_0 \quad y_0' \quad y_1 \quad y_1'\} =$

$\{\gamma_0', -\gamma_0, -\gamma_1', \gamma_1\}$ mit $\{\gamma_\nu\} = c_1\{\alpha_\nu\} + c_2\{\beta_\nu\}$. für diese speziellen $\gamma_\nu = \{\alpha_\nu\}$, $\{\beta_{???}\}$ ist aber die Bedgg. der Selbststadjkeit
$(T)\quad [y'z - z'y]_0' = 0$ erfüllt ($y = \alpha$, $z = \beta$ genügt)
Umgekehrt, wenn die allg. Lösg von $\mathfrak{R}$ der Gl. T genügt, ist die allg. Lösg $\{\alpha_v\}, \{\beta_v\}$ von $\mathfrak{R}$ gegeben $\{-z_1', \cdots\}$, dann gilt S als Umschreibg. von T.
Hieraus folgt, dass je zwei *sa* EW Aufgaben obiger Art mit gleichen q zu Intop führen, die sich nur um Op des Ranges 2 unterscheiden, damit stimmt auch die
Seite 29

31.1.51 $\quad\mathfrak{G}_1$ bei primitiven Permugruppen:
Ein transitiver Konstituent I von $\mathfrak{G}_1$ heisse „weit"bezüglich einer Ähnlichkeitsklasse $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{R}$, die 1 und eine bestimmte Ziffer von I festlassen, auch noch mindestens eine weitere Ziffer von I gemeinsam **???**.
Satz: Ist $\mathfrak{G}$ primitiv, und ist der zu I konjugierte Konstituent I^* von $\mathfrak{G}_1$ weit bezüglich der Elemente der Ord p, so ist $p \mid \frac{(\mathfrak{G}_1)}{(I)}$. Ist sogar I^* weit bezügl. $\mathfrak{G}_1$, so ist $(\mathfrak{G}_1) = (I)$. (Ist erfüllt, z.B. wenn I regulär.)
Folge: Ist $(\mathfrak{G}_1) = p^\alpha$, so $(\mathfrak{G}_1) = (I)$.

Über Permutationsgruppen des Grades p.
Hat ein p-Sylownormalisator G die Ord $p(p-1)$ und ist $\mathfrak{G}_{12} \neq E$, so ist $\mathfrak{G}$ transitiv.
Bew: G_1 ist <u>Vollzyklus in $\mathfrak{G}_1$.</u> Wäre $\mathfrak{G}_1$ <u>imprimitiv</u> so gäbe es eine eigentl. Untergruppe $\overline{G_1}$ von G_1 mit $\overline{G_1}\,\mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{G}_{12}\,\overline{G_1}$. Da $\overline{G_1} \triangle G_1$ und G_1 transitiv in $2,\cdots,i$ ist $\overline{G_{1\,\nu}} = \mathfrak{G}_{1\,\nu}\,\overline{G_1}$
Daher insbesondere ($\nu = p$) nach Transformation mit P:
$\overline{G_2} = P^{-1}\,\overline{G_1}\,P$ <u>vertauschbar</u> mit $\mathfrak{G}_{21} = \mathfrak{G}_{12}$. Also ist $\mathfrak{G}_{12}$ vertauschbar mit $\{\overline{G_1}, \overline{G_v}\} =$ **???** $\cdot\overline{G_1}$, d.h. $\overline{G_1}\,\mathfrak{G}_{12}$ ist **???**; das Produkt ist <u>nur einfach</u> transitiv, $\mathfrak{G}_{12} = E$.
Seite 30

$\zeta\, f(x) = \sum\limits_1^2 \frac{1}{n} f(x^n) \qquad \zeta^{-1} f = \sum \frac{\mu^{(n)}}{n} f(x^n) \qquad \zeta$ **???** $f =$ **???** $\cdot\,\zeta^{-1}\, f = f$.
$\zeta\, x = -\log(1-x) \qquad \zeta\,(x - x^2) = \log(1+x) \qquad \zeta^{-1}\log(1+x) = x - x^2$
$\zeta^{-1}[-\log(1 - x + x^2)] = x - x^2 - x^3 + x^6$
$-\log(1 - x + x^2) = \frac{(x-x^2)}{1} + \frac{(x-x^2)}{2}^2 + \frac{(x-x^2)}{3}^3 + \cdots$ gut kgt $0 \leq x \leq 1$.
$x - x^2 - x^3 + x^6 = \zeta^{-1}(x - x^2) + \frac{1}{2}\zeta^{-1}(x-x^2)^2 + \frac{1}{3}\zeta^{-1}(x-x^2)^3 + \cdots$
$\zeta^{-1}(x - x^2)^k = \zeta^{-1}\sum\limits_1^2 \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^{k+\kappa}(-1)^\kappa$

Aus $\varphi(x) \in \mathfrak{L}_2$, $\int\limits_1^2 \varphi(x)\,\log(1 - x^n + x^{2n})\,dx = 0$ folgt $\int\limits_1^2 \varphi^2(x)\,dx = 0$

Bew: Dann **???** $\varphi \underline{\|}\, lg(1 - x + x^2)$, $\varphi \underline{\|}\, x - x^2 - x^3 + x^6$, $\phi = \int\limits_1^2 \varphi\ :\ 0 =$

$\phi(x) - \phi(x^2) - \phi(x^3) + \phi(x^4)$
Seite 31

Zur Erweiterung des Maximum - Prinzips der Funktionentheorie.

(1)

> $f(z)$ sei regulär auf der abgeschlossenen, unbeschränkten Menge $\mathfrak{A}$, dort $|f(z)| \leq \alpha$; auf dem Rand $\mathcal{R}$ von $\mathfrak{A}$ sei $|f(z)| \leq \rho$. Dann ist auf $\mathfrak{A} \quad |f(z)| \leq \rho$.
> Bew: O.b.d.A sei $|z| \leq 1 \notin \mathfrak{A}$. Dann nimmt $\frac{|f(z)|}{|z|^\varepsilon} \quad \varepsilon > 0$ auf $\mathfrak{A}$ ein Maximum an; das wird dann, da $\frac{f(z)}{z^\alpha}$ dort eind. & reg., auch auf $\mathcal{R}$ aufgenommen ist $\leq \rho$; $|f(x)| \leq |z|^\varepsilon \cdot \rho \quad \varepsilon \to 0$. Unter Vor. wie bei (1) gilt ferner:

(2)

> Sei $G_\mathfrak{A}$ die Menge der Häufungspkte von Folgen $f(z_n)$, wenn $z_n \to \infty$ in $\mathfrak{G}$; analog $G_\mathcal{R}$. Dann ist Rand $G_\mathfrak{A} \subset G_\mathcal{R}$, $G_\mathfrak{A}$ und $G_\mathcal{R}$ sind abgeschlossen:
> Bew: nach (1) entält jeder Kreis $|w| \leq \rho$, der $G_\mathcal{R}$ entält auch $G_\mathfrak{A}$; also ($w - w_0$ betrachten): Jeder Kreis $|w - w_0| \leq \rho$, der $G_\mathcal{R}$ enthält, enthält $G_\mathfrak{A}$ mit: jeder Äussere $|w - w_0| \geq P$, dessen Mittelpkt von f nicht auf $\mathfrak{A}$ angenommen wird (samt einer Umgebg von ω_0, mit $G_\mathcal{R}$ enthält, enthält $G_\mathfrak{A}$. Hieraus folgt die Beh., da man $\mathcal{R}$ so gross wählen kann, dass der Wertevorrat $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}'}$ von $G_{\mathfrak{A}'}$ um weniger als ε entfernt ist, mit $a' = (|Z| \geq R) \cap \mathfrak{A}$.

(3)

> Hieraus folgt Satz von Lindelöf (Bsk II, S.21) u.a. und lässt sich stark verallgemeinern.

Seite 32

20.3.51 $\qquad$ = Minimalgrad
Zur Klasse primitiver Permutationsgruppen:
a)

> $\mathfrak{G}$ sei eine primitive Permutationsgruppe der Klasse c, G eine intransitive UGr von $\mathfrak{G}$, die mit jeder ihren Konjugierten zusammen eine transitive Gr. erzeugt. Dann besitzt G entweder höchstens c Transitivitätssysteme, oder G ist invariant gegenüber dem transitiven Normalteiler δ von $\mathfrak{G}$, der von allen Elementen des Grades c erzeugt wird.

b)

Eine c-Gruppe sei eine intransitive UGr (von $\mathfrak{G}$), die sich aus Gl. des Grades c erzeugen lässt. Der maximale Grad transitiver Konstituenten aller c-Gr. sei m. δ sei eine c-Gr. mit einem trans. Konst. I des Grades m. Dann permutiert jede c-Obergr. δ^* von δ die Ziffern von I nur unter sich, also gibt es genau eine maximale c-Obergr $\overline{\delta}$ von δ: Das Erzeugnis zweier c-Obergr von δ ist wieder eine.

Allgemeiner:

c)

ϕ sei eine Menge von Ugr der Permugr. $\mathfrak{G}$, so dass mit G_1, $G_2 \in \phi$ und bei <u>intransitivem</u> $G = \{G_1,\ G_2\}$ auch $G \in \phi$. Ist dann m der maximale Grad der trans. Konstituenten aller $G_\nu \in \phi$ und hat speziell ein Konstituent I G_1 den Grad m, so liegt G_1 in genau einem maximalen $\overline{G_1} \in \phi$.

d)

Ist wieder $\mathfrak{G}$ primitiv, und besitzt die c-Gruppe δ einen Konstituenten I des in b) definierten Grades m, Denn δ liegt so lässt δ höchstens eine Ziffer fest.

Seite 33

nur in einer max. c-Gruppe $\overline{\delta}$. Wäre $\overline{\delta} < \delta_i < \overline{\delta}$ $\quad (i = 1, 2)$ so ist, so wäre $\overline{\delta}$ invariant gegenüber dem Normalisator $\mathfrak{G}i$ von δ_i, also gegen $\mathfrak{G}$, entgegen der Transitivität von $\overline{\delta}$.

e)

Ist $\mathfrak{G}$ primitiv, C $\in \mathfrak{G}$, $C^n = E$, Gr $C = qp$, $q < p$ und ist δ_1 das Erzeugnis der Konjugierten zu C, welche in $\mathfrak{G}_1$ liegen, und ist I ein transitiver Konstituent maximalen Grades m_1 von δ_1, und ist schliesslich C_1^* ein zu **???** ähnliches Element in $\mathfrak{G}_1$, das in I nicht den Konstituenten E hat, so hat C_1 in keinem transitiven Konstituenten von $\mathfrak{G}_1$ (ausser (1)) den Konstituenten E.

Denn die Norm $\mathfrak{N}$ von C_1 unter $\mathfrak{G}_1$ hat in dem I enthaltenden Konstituenten G von $\mathfrak{G}_1$ lauter Konstituenten δ_ν des Grades m_1 da I keinen intransitiven Normalteiler mit einer durch p teilbaren Ordnung enthalten kann ($q < p$!); liesse $\mathfrak{N}$ noch $\mathfrak{x}$ fest, so würde wegen Maximalität von m_1 jeder dieser $\mathfrak{K}_\nu$ in sich übergeführt bei δ_λ, also würde G von δ_2 und $\mathfrak{G}$, in sich übergeführt (als Zifferngesamtheit), also auch von $\{\mathfrak{G}_1, \delta_2\} = \mathfrak{G}$.
Insbesondere hat $\mathfrak{G}_1$ (ausser (1)) höchstens q trans. Konstituenten.

f)

δ_1 besitzt einen tr Konst d. Gr. m (von a). δ_1 sei eine UGr von $\mathfrak{G}_1$, die nur isomorphe Köpfe hat, **???** maximalen Kompos. Gr. von $\mathfrak{G}_1$, deren Ord durch p teilbar ist; δ_1, Δ $\mathfrak{G}_1$. Dann haben δ_1, $\mathfrak{K}_1$ die gleichen Transsysteme und in jedem

Seite 34

Transs.von $\mathfrak{K}_1$ hat C_1, etwas $\neq E$, wenn C_1 in dem Konst. d. Grades m von $\delta \neq E$ ist. Auf die einzelnen Konstituenten von $\{\mathfrak{K}_1, \delta_1\}$ kann man dann Induktionsvorauss über Grad einer prim Gr, die C enthält, anwenden.

g)

Eine primitive Gr. $\mathfrak{G}$ sei eine kleinste auf $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 V \cdots \times \mathfrak{A}_\mathfrak{r} = \mathfrak{A}$ abgebildete Gruppe, $\mathfrak{A}_\rho$ einfach, nicht abelsch. Dann ist $r \leq 2$ und $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_\lambda$. Bew: $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{A}' = \max U$Gr von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}'$ entält keinen Normalteiler von $\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{G}_1$ das volle Orginal von $\mathfrak{A}'$ ist und keinen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthält. $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}!\mathfrak{A}_2 x + \mathfrak{A}_\gamma = \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ enthält alle Komponenten aus $\mathfrak{A}_1$ **???** aus $\mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r$, aber $\mathfrak{A}'$ enthält kein
$U\, A_1 \times E \times \cdots \times E$ mit $A_1 \neq E$. Also liefert $\mathfrak{A}'$ eine homomorphe Abb von $\mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r$ auf $\mathfrak{A}_1$. Wegen Nichtabelschheit ist der auf $E \in \mathfrak{A}$, abgel. max normal oder von $\mathfrak{A}'$ etwa gleich $\mathfrak{A}_3 \times \cdots \times \mathfrak{A}_\mathfrak{r}$, $\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{A}_2$, und da $\mathfrak{A}'$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{A}$ enthält, $r \leq 2$.

h)

Erzeugen zwei Elemente P_i mit $P_i^p = E$, $p =$ Primzahl und Gr $P_i \sim p^2$ eine p-Gruppe, so haben sie die Gestalt $P_1 = Q_1^{\alpha_1}\, Q_2^{\alpha_2} \cdots Q_r^{\alpha_r}$, $Q_\rho = p$-Zyklen, und $P_2 = Q_1^{\beta_1} \ldots Q_r^{\beta_r}$ $(\alpha_\rho,\, \beta_\rho \geq 0)$.

Seite 35

<u>$QuasikommutativeMatrizen$</u> 20.3.51.

Neuer Beweis des Satzes von H.S.A. Potter (On the latent roots of quasi-commutative matrices, Amer Math Monthly 57, 321 - 322 (1950)).
Ist $AB = \omega BA$, ω eine primitive q-te Einheitswurzel, so ist (*) $(A+B)^q = A^q + B^q$.

Bew: Klar ist $(A+B)^q = A^q + B^q + \sum\limits_1^2 c_k\, A^k\, B^{q-k}$, wobei die skalare c_k nicht von der speziellen Wahl von A, B (abgesehen $*$) abhängen. Wählt man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{q-1} \end{pmatrix} (Grad = q),$$

so wird $(A+B)^q = \delta E$ eine Diagonalmatrix; denn mit $T = BA^{-1}$ wird $T^{-1}AT = \omega A$, $T^{-1}BT = \omega B$, also $T^{-1}(A+B)T = \omega(A+B)$, also hat $A+B$ EWe $\rho, \rho\omega, \cdots, \rho\omega^{q-1}$, da nicht alle Null sind wegen Spur, und $(A+B)^q$ hat nur ρ^q, ist ferner wie $(A+B)$ selbst auf Diagonalform transformierbar, also $(A+B)^q = \rho^q E$. Hieraus folgt $c_1 = \cdots = c_{q-1} = 0$, da andernfalls ein geeignetes Nicht-Diagonalelement von $(A+B) \neq$ wäre.
Aufgabe: <u>Alle</u> Identitäten für A, B aufstellen. Ist jedes Paar A, B mit $(A+B)^q = A^q + B^q$ zerfällbar in $S^{???} AS = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}$, $S^{???} BS = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}$ mit

$$A_\rho B_\rho = \omega_\rho B_\rho A_\rho, \qquad \omega_\rho^q = \sigma \quad ?$$

Bestimmung aller irreduziblen Paare quasikomm. Matrizen ?
??? über quasikomm Matrizen ?
Seite 36

Zur Einbettung von Gruppen (Higman-Neumann-Neumann Zbl 34, 301), dass je zwei isomorphe Ugruppen von $\mathfrak{G}$ konjugiert sind in einer passenden Obergr. $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, folgt unmittelbar durch reguläre Darstellg von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ ist dann die Gruppe der Permutationen aller Elemente v. $\mathfrak{G}$.

Übungsaufgabe über Binomialkoeffizienten:
Nach einer Mitteilung von Studienrat a.D.Edmund Knoll in Pfaffenhofen a.d. Ilm, Ingolstädter Str.32 gilt
$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots \approx \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots \approx \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \cdots .$
Wie lautet die genaue Beziehung ?
Antwort: $\sum_1^2 \binom{n}{3k-\lambda} = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) + d_{n\lambda} * (-1)^n$

mit $d_{n\lambda} = 1$, wenn $3|n-\lambda$; $d_{n\lambda} = 0$, wenn $3 \nmid n-\lambda$; $\lambda = 0, 1, 2$.
Bew mit $\sum\limits_1^2 \cdots = \frac{1}{3}\,(2^n + \rho^\alpha(1+\rho)^n + \overline{\rho}^\alpha(1+\overline{\rho})^n) \qquad \rho^2+\rho+1 = 0$, α passend als **???** .

Linksseitige Distributivität nennt Bourbaki $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.
(Algèbre I, Structures)

[9] **Seite 39**

(I) Allgemeines über „Komponentenzerlegungen “:

Ist $\mathfrak{G}_k \vee \mathfrak{G}_\mathfrak{i}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2 \cdots \mathfrak{G}_\mathfrak{m}$, $G \vee \mathfrak{G}_\mathfrak{i} = \mathfrak{G}$,
so hängt die „Komponente“$G_i = \mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1 \cdots \mathfrak{G}_{\mathfrak{i}-1}\,\mathfrak{G}_{i+1} \cdots \mathfrak{G}_m \cap \mathfrak{G}_\mathfrak{i}$ $(7a)$ nicht von der Reihenfolge der Fakt. $\mathfrak{G}_\mathfrak{i}$ ab; sie enthält alle H_i, die bei Zerleggen $H = H_1 \cdots H_m$ $(H$ **???** $\in \mathfrak{G}_\mathfrak{i})$ auftreten $(H \in \mathfrak{G})$.

Satz: Ist über dies $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{F} \vee G$, so ist $\mathfrak{F}_i \vee G_k$, & alles sind Gruppen und es ist $(\mathfrak{F}G)_i = \mathfrak{F}G_i$ und $\mathfrak{F}_i \vee \mathfrak{A}_k$.
Bew: „Gruppen“wegen (7a).
Bew für $\mathfrak{F}_1 \vee G_2 : \mathfrak{F}_1 G_2 = \mathfrak{G}, G_2\mathfrak{G}_3 \cdots \mathfrak{G}_m \cap \mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_2 \cdots \mathfrak{G}_m \cap \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$
dann $\alpha)$ $F_1\mathfrak{A}_2 \cdots \mathrm{G}_m = \mathrm{G}_1'\mathrm{G}_2' \to \mathrm{G}_1^{-1}F_1 \in \mathfrak{G}_2 \cdots \mathfrak{G}_m \cap \mathfrak{G}_1$, also $\in \mathfrak{F}_1$
$\to \mathrm{G}_1' \in \mathfrak{F}_1$, $\mathrm{G}_1 \in \mathfrak{F}_1$
ebenso $\beta)$ $\mathrm{G}_v \in G_2$ (da es auf die Reihenfolge nicht ankommt).
aber $\mathrm{G}_1\ \mathrm{G}_2 < \mathfrak{F}_1 G_2$: Obiger $\cap < \mathfrak{F}, G_2$. Umkehg trivial
Bew für $\mathfrak{F}_i \vee \mathfrak{A}_k$: wähle $G = \mathfrak{A}_k$
Bew für $(\mathfrak{F}G)_i = \mathfrak{F}_i G_i$: $i = 1$
Setze $\mathfrak{G}_2 \cdots \mathfrak{G}_m = \mathfrak{G}_2^*$, so $(\mathfrak{F}_1 G)_1 = \mathfrak{F}G\mathfrak{A}_2^* \cap \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_2^* G \mathfrak{G}_2^* \cap \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{F}_1 G_1 \mathfrak{G}_2^* \cap \mathfrak{A}_1 > \mathfrak{F}_1 G_1$
Seite 40

Andererseits gilt für jedes El. aus $(\mathfrak{F}G)_1$ nach obigem:

$$C = F_1 H_1\ \mathcal{G}_2^* = \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2^* \in \mathfrak{G}_1, \in G_1$$
$$\mathcal{G}_1 \in \mathfrak{F}_1\, G_1, \quad C \in \mathfrak{F}_1 G_1.$$

Aufgabe: Invarianzgruppen von Normen in linearen Räumen unendlicher Dimension bestimmen

Aufgabe: Trennungssatz für verträgliche Spektren bei vorgegebener Schiefe σ: E ist unmöglich, zwei verträgliche Spektren voneinander durch einen Kreisring der Breite $\beta = \beta(\sigma)$ zu trennen; $\beta(\sigma) =$?

[9]Seite 37 und 38 sind durchgestrichen.
Seite 39 ist oben durchgestrichen.

β muss invar. sein gegen gebroch. lin. Transf. der λ-Ebene.

11.6.51

Zu d. Ungleichungen von Aaronszajn (Hamburger - Grimshaw S.77)

(a)

Ist $M = \begin{pmatrix} A & C \\ \overline{C}' & B \end{pmatrix} \geq 0$ hermitesch $\lceil C \rceil^2 \leq \lceil A \rceil \lceil B \rceil$.

denn sei $\overline{\tilde{\mu}}'$ ($\mathfrak{w} = \sqrt{C}$, $|\overline{\mu}| = |\mathfrak{w}| = 1$; $\mathfrak{x} = \begin{bmatrix} s\,\overline{\mu} \\ t\,\mathfrak{w} \end{bmatrix}$, $\overline{\mathfrak{x}}'\,\mu\,\mathfrak{x} \geq 0$ in s, t,

$\begin{pmatrix} \overline{\tilde{\mu}}'\,A\,\overline{\mu} & \lceil C \rceil \\ \lceil C \rceil & \overline{\mathfrak{w}}' B\,\mathfrak{w} \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \lceil C \rceil^2 \leq \overline{\tilde{\mu}}'\,A\,\check{\mu} \cdot \overline{\mathfrak{w}}' B\,\mathfrak{w} \leq \lceil A \rceil \lceil B \rceil$.

(b)

Ist $M = \begin{pmatrix} A & C \\ \overline{C}^1 & B \end{pmatrix} \geq 0$, $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ die EWe usw, so

$\mu_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$ (Aaronszajn)

Bew: Sei $|n| = 1, \overline{m}^1 M m = \mu_1$, $m = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \sigma \end{pmatrix}$. $\mu_1 = \overline{\mathfrak{w}}' A\,\mathfrak{w} + \overline{\sigma}' B\,\sigma + \overline{\mathfrak{w}}'\,C\,\sigma + \overline{\sigma}'\,\overline{C}'\,\mathfrak{w} \leq \lceil A \rceil |\mathfrak{w}|^2 + \lceil B \rceil |\sigma|^2 + 2\lceil C \rceil |\mathfrak{w}\,\sigma|$

aber $|\mathfrak{w}|^2 + |\sigma|^2 = 1$, also $\mu_1 \leq \begin{vmatrix} \lceil A \rceil & \lceil C \rceil \\ \lceil C \rceil & \lceil B \rceil \end{vmatrix} \leq \alpha + \beta$.

Seite 41

f Freiheitsgrade im Hermitischen Fall $\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_2, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda_n, \cdots$ sind genau dann unverträglich mit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = X$, dh mit $\overline{X}'\,X = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ \overline{M}_1' & M_z \end{pmatrix}$, wenn es A_ν hermitisch gibt mit

$$Sp(A_0M_0 + A_1M_1 + A_2M_2) = 0, \quad A_0 + A_1\lambda_\gamma + A_z\lambda_\nu^2) \gg 0 \quad \text{f. alle } \nu$$

Anregung Gruppentheorie:

Reichels Behandlung der metabelschen Gruppen $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\eta$ führt auf Arithmetik im Durchschnitt zweier Maximalordnungen von K_n, K nichtarithm. perfekt (K_n =Matrizenring). Allgemeine Behandlung solcher Ringe ?

Meine gruppentheoret. Behandlung führt bei Verallgemeinerung vielleicht auf „Invarianten“, die Automorphismengruppen gewisser übersichtlicher Bestandteile von $\mathfrak{A}$ sind.

Seite 42

Bürkners Buchentwurf enthält u.a.: (Sei $I(u) = (\mathfrak{K}\, u, \overline{u}))$
1. Einschls.: Sei $(u, \overline{u}) = 1$. Dann enthält jede der reellen x-Mengen $x - I(u) \geq 0$, $x - I(u) \leq 0$ mindestens einen reziproken Eigenwert. Gilt $(\mathfrak{K} - I(u))\; u \neq 0$, so existieren zwei rez. EWe K', K'' mit $K' < I(u) < K''$.

2. Einschlsatz: Sei $\tilde{I}(\xi) = (\overline{\xi}, \mathfrak{M}\, \mathfrak{G}\xi)/(\overline{\xi}, \mathfrak{G}^2\xi)$ $\quad \mathfrak{M} = p(\mathfrak{K})$,
$\mathfrak{G} = g(\mathfrak{K})$
Jede der Mengen $p(x)\, g^{-1}(x) \geq \overline{I}(\xi)$ und$\cdots \leq \ldots$ enthält mind. einen reziproken EW von $\mathfrak{K}$. Dabei darf $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt werden.
3. Einschlsatz: $= 2$; aber umformuliert auf das folgende $F = F \geq 0$, $F \leq 0$. Mit $P(x\, y) = p(x)\, g(x)\, g^2(y) - g^2(x)\, g(y)\, p(y)$ bilde $F(x) = (\overline{\xi}, P(x, \mathfrak{K})\, \xi) = \sum f_i x^i$.
Dann sind die Mengen d. 2. ES.: $F(x) \geq 0$, $F(x) \leq 0$.
Def: Ein $F(x) = \sum f_i\, x^i$ mit $\sum f_K\, a_K = 0 \quad (a_K = (\overline{\xi}, \mathfrak{K}^K \xi)$ Einschliessungs.-polyn.
$F(x) \geq 0$ falls x geht nur, wenn ξ E lös zu den Nullst. von F. Damit: Sei $\psi(\mathfrak{K})\, \xi = \rho \;\; Gr\psi = \min = m$. Dann sind $x^k\, \psi(x)$ Einschlpolynome.

$$\phi_n(x) = \begin{vmatrix} 1\, x & \ldots & x^n \\ a_v\, a_1 & \ldots & a_n \\ a_{n-1}\, a_n & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix} = A_n\, x^n + \cdots$$

haben $A_n \neq 0$ für $n \leq m$, $\phi_n \equiv 0$ für $n >$ **???** ,
ϕ_n sind Einschlpolyn., ebenso $x^k \phi_{???}\,(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$, ebenso $x^m\, \phi_m$.
ϕ_n hat lauter reelle einfache Nullst. $(n \leq m)$.
4. Einschlsatz: Hat ϕ_n Nullst. $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, so gibt es reziproke EWe $\sigma_1 < x_1 < \cdots < \sigma_n < \sigma_m$ für $n < m$. Def: ϕ_n = starke Einschliessungspolynome; $m = Grad\, \xi$. Für $m = \infty$ gilt das alles $(n = 1, 2, \cdots)$.
Es existiert stets ein Teilsystem von endlich vielen rez EWen, so dass jede der durch ein Einschl.pol. $F(x)$ definierten Mengen $F(x) \geq 0$, $F(x) \leq 0$
Seite 43

mindestens einen Wert des Teilsystems enthält.
Sind $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ beliebige reele Zahlen mit der Eigenschaft, dass jede Menge $F(x) \geq 0$ mit 7 als EP mindestens einen Wert σ_k enthält. Dann haben die Gl. $\sum p_i\, \sigma_i^k = \mathfrak{A}_k \quad k = 0, 1, \cdots, n$ eine Lösg $p_i \geq 0$.
Bew mit Trennungssatz konvexer Körper.
Das Spektrum der reziproken EWe von $\mathfrak{K}$ enthält ein endliches Teilsystem $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ derart, dass $\sum_1^2 p_i\, \sigma_i^k = \mathfrak{A}_k \quad (k = 0, \cdots, n) \quad p_i \geq 0$ lösb. Speziell dreigliedrige Einschlpolynome: $F = f_k\, x^k + f_{k+1}\, x^{k+1} + f_{k+2}\, x^{k+2}$ diskutiert.
Ist k gerade oder $\mathfrak{K}$ definiert, so $\exists$ EWλ mit λ zwischen $P\,\&\, Q$, $Q = \frac{a_k - P\, a_{k+1}}{a_{k+1} - P\, a_{k+2}}$.
Inhaltsangabe „Die Einschliessg von EWen Norm der Matr“; Math Ann, Archiv
Seite 44

Aufgaben:

(1) Was bedeutet es für $\left\{ \begin{array}{ll} \text{eine Matrix} & A \\ \text{einen Vektor} & \mathfrak{x} \end{array} \right.$, wenn der zugehörige Momentenpkt (unter A) <u>auf dem Rand</u> des dreidim. Momentenvorrats liegt?
$\mathfrak{x}$ ist EV einer Linearverbdg $(a+ib)\overline{A}' + c\overline{A}'A \quad (a,b,c \text{ reell} \neq 0,0,0)$

(2) Die normalen Matrizen A sind dadurch charakterisiert, dass jeder Eigenvektor von A einer von A^* ist (Bew mit unitärer Transf auf Dreieck). Lässt sich hieraus eine Definition der Schiefe von A gewinnen ?

(3) Die nilpotenten Matrizen A sind dadurch charakterisiert, dass sie zu beliebig kleinen Matrizen ähnlich sind: $|T^{-1}\,A\,T| < \varepsilon$.
Gibt das bei Übertragung auf Banachräume die A mit $\sqrt[n]{(A^n)} \to 0$?
(Und dass sie zu einem $c\,A \quad (|c| \neq 1)$ ähnlich sind.)

(4) Gegeben $2\,n$ Zahlen $\alpha_\nu,\ \beta_\nu(\nu = 1,\ldots,n)$. Welches sind die Spektren der Matrizen $M = A + B$, wenn A alle normalen Matrizen mit Spektrum $\alpha_1, \sim, \alpha_n$ durchläuft, & B alle $beta_\nu$?

(5) Kann man die Translations - Schiefe τ von A so definieren, dass $\tau \geq \max\limits_{\mathfrak{x}} \rho$, wo ρ der Abstand des Spurkreises einer Stützebene $\mathfrak{x}$ des Momentenvorrats von A zum Spektrum von A bedeutet ?

Seite 45

Geometrische Bedeutung des Weinsteinradius δ im $\mathcal{R}_n$:

$$Ist\,M = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x} & \mathfrak{x}^*\,y \\ y^*\,\mathfrak{x} & y^*\,y \end{pmatrix}, \mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x} = 1, \text{so ist}$$

$$\delta^2 = det\,M,\ \delta = \min_{\psi}\ \text{Flächeninhalt}\ (\mathfrak{x},\, e^{i\,\psi} y)$$

und $\gamma = \lfloor \text{M} \rfloor$ das Courantsche Unabh. Mass von $\mathfrak{x}$, y; $\gamma = 0$ ist äq. zu $\delta = 0$, aber sonst besteht zwischen beiden nur die Ungleichung

$$\mu \leq \delta^4 \quad , \quad \text{welche aus} \lceil M \rceil. \geq 1 \text{ folgt } (m_{11} = 1!).$$

Der Diagnalteil von $A = (a_{ik})$ sei die Spalte $diag\, A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$.

Dann ist für Diagonalmatrizen D

$$diag\, T^{-1}\, D\, T = M\, diag\, D$$
$$\text{mit} \quad m_{ik} = t_{ik}^{(-1)}\, t_{ik}$$
$$\text{Es ist} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung $H_1\, H_2$ ist stets reell, wenn $H_i^* = H_i$.
Denn $\overline{Sp\,(H_1\, H_2)^m} = Sp\,(H_1\, H_2)^{*m} = Sp\,(H_2\, H_1)^m = Sp\,(H_1\, H_2)^m$
Seite 46

Liegen im $\mathcal{R}_{2n^2}$
a)

5 normale Matrizen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{R}$

oder b)

3 normale Matrizen auf einem Kreis $\mathfrak{K}$ aus einer komplexen Geraden,
so besteht $\mathfrak{K}$ nur aus normalen Matrizen. **???** Geraden.

Bew: a) Im $\mathcal{R}_{2n}$ ist die Menge $\mathcal{N}$ der normalen Mat. Durchschnitt von Hyperflächen zweiter Ordnung.
b) Normalität von $A + tB$ erfordert für t Gleichungen der Form $\alpha t\bar{t} + 2Re\,\beta t + \gamma = 0$, das sind aber Kreise und Geraden.

Für eine normale Matrix $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{N}_3 & \mathcal{N}_4 \end{pmatrix}$ ist
$Sp\mathcal{N}_2^*\mathcal{N}_2 = Sp\mathcal{N}_3^*\, \mathcal{N}_3 \quad , d.h. \quad \|\mathcal{N}_2\|^2 = \|\mathcal{N}_3\|^2.$

Durchläuft die stets normale Matrix $\mathcal{N}(t)$ $(0 \le t \le 1)$ einen Weg der Länge l, und deutet man die Eigenwerte $\nu_i(t)$, zu stetigen Funktionen zusammengefasst, als Koordinaten eines Pkts $S(t)$, welcher dann einen Weg der Länge m durchlaufen möge, so ist

$$l \ge m.$$

Dies gilt für
Seite 47

je zwei Längendefinitionen $\|d\mathcal{N}\|$ und $|||dS|||$, für welche

$$|||diag\, U^*\, A\, U||| \leq \|A\|$$

A beliebig gilt, wenn nur $U^*U = E$,
Beweis: Transformiere mit $U = U(t)$ auf Diagonalform $D(t)$:
$N\,U = U\,D$
$\dot{N}\,U + N\,\dot{U} = \dot{U}\,D + U\,\dot{D}$
$\dot{D} = U^*\,\dot{N}\,U + D\,U^*\,\dot{U} - U^*\,\dot{U}\,D$
$\dot{D}$ =Diagonalteil von $U^*\,\dot{N}\,U$; $|||UD||| \leq \|\dot{N}\|$.

Zur Technik der Minimaxrechnungen.
Seien $f_1(x_1, -, x_n), \ldots, f_k(x_1, -, x_n)$ (alle reell) definiert in einer Umgeb. von $\mathfrak{x} = 0$, $f_v = \max\limits_K f_K(\mathfrak{x})$. Sei $f(\mathfrak{x}) \geq f(0)$ f alle $\mathfrak{x}$. Dann gibt es Konstanten $c_i \geq 0, \sum c_i = 1$, derart dass
(1) für die Funktion $\varphi(\mathfrak{x}) = \sum c_i f_i(\mathfrak{x}) \quad \left.\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_\nu}\right|_0 = 0$ ist
(2) $c_i = 0$ für $f_i(0) \neq f(0)$. D.h. eine gewisse Linearverbindung mit pos. Koeff. der das max liefernden f_i ist stationär in $\mathfrak{x} = 0$.
Voraussetzg ist, dass f_i nach u_v diffbar ist in $\mathfrak{x} = 0$ total.
Bew: Seien $y_1, \ldots, y_k$ die k Gradientenvektoren von $f_1, \ldots, f_k$ in R_n. OBdA sei $f_i(0) = f(0)$ f. alle i und $y_i \neq 0$ f alle **???** .
Gäbe es keinen solchen Satz $c = c_1, \cdots, c_k$ mit $\sum c_i y_i = 0$, so liegen die y_i in einem offenen Halbraum, es gäbe P mit $P\,y_i < 0$ f. alle i. In der Richtung φ würden dann alle f_i fallen, also auch $f(q) < f(0)$ sein.
Seite 48

Sei $\mathfrak{M}$ ein Modul aus hermiteschen Matrizen, welches keine definite [semidefinite $\neq 0$] Matrix enthält. Sei $\mathfrak{M}_\perp$ der Modul der hermiteschen Matrizen L mit $Sp\, LM = 0$ f. alle $M \in \mathfrak{M}$. Dann enthält $\mathfrak{M}_\perp$ eine semidefinite $\neq$ (definite) Matrix.
Bew: $\mathfrak{M}_\perp$ enthalte keine semidefinite Matrix $\neq 0$. Dann ist $L = 0$ die einzige herm. Matrix mit $Sp\, L\, M \geq 0$, $Sp\, L(-M) \geq 0$, $Sp\, L\, Q \geq 0$ für alle $M \in \mathfrak{M}, Q \geq 0$. Daher ist die Herm. Hülle von $\mathfrak{M}$ und Q
Alles: $M + Q = -E$ lösbar
$-M = E + Q \gg 0 \quad , \quad -M \in \mathfrak{M}$
Allgemeinere Vermutung: <u>stets</u> gibt es $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}_\perp$
so dass $A \geq 0$, $B \geq 0$, $A + B > 0$.

Zur Vermutung von Wittmeyer:
Ändert man die Norm der Matrix $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ durch Addition der Matrix

$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ab in $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $M^2 = 0$, also $\mu_1 = \mu_2 = 0$; $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 4$. $\lceil D \rceil \leq \|D\| = \sqrt{12}$; $\lceil D \rceil = 3,236$
Also $\{\sum \|\mu_i - \nu_i\|^2\}^{\frac{1}{2}} > \|D\|^{???}$ und $\max \|\mu_i - \nu_i\| > \lceil D \rceil$.

Jacobi's Formel für hermitesche Formen zeigt:
Jede nichtsinguläre Matrix ist $A = DU$, wo $U^*U = I$ und D Dreieck mit $d_{ii} > 0$.
Seite 49

<u>Aufgabe</u>
(1) Was folgt aus der Kenntnis des 2-dim. Wertevorrats über den Momentenvorrat ? Z.B. Aus $\|\mathfrak{x}^* A \mathfrak{x}\| \leq 1$ für alle $\|\mathfrak{x}\| = 1$ folgt f. $A = G + i\,H$: $\mathfrak{x}^*\,G\,\mathfrak{x} \leq 1$,
$\lceil G \rceil \leq 1, \lceil H \rceil \leq 1, \lceil A \rceil \leq 2, \lceil A\mathfrak{x} \rceil \leq 2$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}^* A \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x}^* A^* \mathfrak{x} & |A\mathfrak{x}|^2 \end{vmatrix} \leq 3$

(2) Welche Spektren sind verträglich mit einem gegebenen Momentenpkt, wenn man weiss a) A hermitesch b) $A \geq B$ mit einer Matrix B mit <u>bekannten</u> EWen (dh man weiss $\alpha_\nu \geq \beta_\nu$) ?

(3) Sind die Randbedingungen der Periodizität durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnet, etwa dass sie grössere Eigenwerte gibt als jede Sturmsche ? Dazu müsste man wohl periodische Koeff. voraussetzen.

(4) Gibt es eine nilpotente Matrix A und eine Zahl $t \neq 0$ mit $\lceil \text{A - t} \rceil < \lceil \text{A} \rceil$?
(jedenfalls nicht f. $n = 2$)
ja: S.51
Seite 50

Zur Poincaréschen Deutung des Momentenvorrats.
Der Momentenmatrix $M = \begin{pmatrix} 1 & m_1 \\ \overline{m_1} & m_\nu \end{pmatrix}$ entspricht der Punkt $\{m_1, \sqrt{det\,M}\}$
$= \{\sqrt{m_2 - |m_1|^2}\}$.

Satz: Ist $|\mathfrak{x}| = 1$, $P_0 = P(\mathfrak{x}, y)$ der zu $\mathfrak{x}\,y$ gehörige Momentenpunkt im Poincaréraum P und durchläuft ϑ alle Vektoren der Länge d, so ist die Gesamtheit der $P(\mathfrak{x},\, y \neq \vartheta)$ genau der Durchschnitt von P mit der euklidischen Kugel um P_0 mit Red. d.

Beweis: Sei OBdA $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $P = (\mathfrak{x},\ y + \vartheta) = \{y_1 + d_1;\ |\overline{y} + \overline{\vartheta}|\}$ mit

$\overline{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und ist d_1 als komplexe Zahl mit $|d_1| \leq d$ festgelegt, so ist $|\overline{\vartheta}|^2 = d^2 - |d_1|^2$ fest, und $|\overline{y} + \overline{\vartheta}|$ nimmt bei variablen $\overline{\vartheta}$ dieser Länge genau alle Werte w an mit $|\overline{y}| + |\overline{\vartheta}| \geq w \geq \max(|\overline{y}| - |\overline{\vartheta}|, 0)$.

Folge:
Die zum selben Vektor $\mathfrak{x}$ gehörigen Punkte im Poincaré-Mom.-raum für A und $A + D$ haben höchstens den Abstand $\lceil D \rceil$; und bei gegebenem Punktepaar P_1, P_2 von dem der eine Pkt P_1 zu A gehört, kann man ein D mit $\lceil D \rceil = \overline{P_1 P_2}$ finden, so dass P_2 zu $(A + D)$ gehört. Bew: Wähle D so dass $D_{\mathfrak{x}} =$ obigem ϑ wird.

Bemerkg: In der Poincaré-Deutung ist (für $|\mathfrak{x}| = 1$) $|y| = |A\,\mathfrak{x}| = \overline{OP}_{(\mathfrak{x},y)}$ also ist $\lceil A \rceil$ der Radius der kleinsten Kugel um 0, welche den ganzen Momentenvorrat enthält.

Seite 51

Zum Haupt-Einschliessungssatz von Collatz (2. Aufl. S. 167):
Die Bedingg der Einfachheit von λ_1 ist unnötig; λ_2 kann dann den kleinsten EW $\neq \lambda_1$ bedeuten. - Das Weinstein-Intervall leitet er unter sehr engen Vorauss. ab (S. 188).

Der Trennungssatz für normale Matrizen kann umgekehrt werden: Wenn ein Spektrum von keinem verträglichen Spektrum durch einen Kreis getrennt werden kann, ist es selbst verträglich.

Beispiel einer nilpotenten Matrix A, für welche 0 nicht die im Sinn von $\sqcap$ nächste normale Matrix ist: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

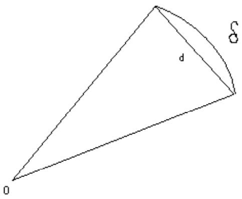
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{. Hier ist } A^*A = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lceil A \rceil^2 = 4$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x$ EV von A^*A zu 4, und zwar einziger. Also berührt der Momentenvorrat von A (im Poincaréraum) die Kugel um 0 mit $r = 2$ <u>nur in einem Punkt</u>. Dieser liegt nicht über 0, da $x^*Ax = 2 \neq 0$. Folglich kann man den Momentenvorrat ganz ins Innere der Kugel verschieben, d.h. für

passendes $t > 0$ ist $\lceil A - tI \rceil < 2 = \lceil A \rceil$.
Seite 52

Bei <u>selbstadjungierten Differntialgleichungen</u> müssen die <u>Galerkinwerte</u> deshalb eine ausgezeichnete Rolle spielen, weil sie die Familie von ∞ darstellen, und ∞ als einziger Häufgspkt des Spektrums ausgezeichnet ist.

Zur Vermutung von Wittmeyer über normale Matrizen A, B:
Sie ist richtig für A, B hermitesch (nach Minimax) aber auch für A, B <u>unitär</u>:
Sei $A = B\,D$, $\lceil D - E \rceil = d$, $\quad \delta = 2\,arc\,\sin\frac{d}{2}$



Dann sind alle $|\delta_i| \leq \delta$, daher lassen sichh die α_i und β_i so paaren, dass $|arg\,\frac{\alpha_i}{\beta_i}| \leq \delta$, d.h. aber $|\alpha_i - \beta_i| \leq d$.

Kato [103] gibt laut Temple [104] für hermitesche Operatoren H mit $|x| = 1$, $\mu = (x, M\,x)$, $p = (H - \mu)\,x$, $r^2 = |p|^2$:

$$\lambda_K - \frac{\epsilon^2}{\mu - \lambda_{K-1}} \leq \eta \leq \lambda_K + \frac{\epsilon^2}{\lambda_{K+1} - \mu}$$

wenn $\lambda_{K-1} < \mu < \lambda_{K+1}$.
Er schätzt $\delta = 1 - c_K^2$, wenn $x^2 = \sum_1^2 c_i\,x_i$, x_i orthonormale EV.
$\delta\,(\lambda_K - \lambda_{K-1})(\lambda_{K+1} - \lambda_K) \leq \epsilon^2 + (\eta - \lambda_K)(\eta + \lambda_K - \lambda_{K-1} - \lambda_{K+1})$.
Seite 53

Aaronszajn [105] beweist laut Fréchert [104]:
Soit $F = P + Q$ une décomposition de l'ensemble singulier F d'une fonction uniforme $f(z)$ en deux sous-ensembles, disjoints ou non, P et Q absolument quelquonques. Alors il est possible de décomposer $f(z)$ dans le somme de deux fonctions uniformes $p(z) + q(z)$ ayant exactement les ensembles de $\overline{P}$, $\overline{Q}$ pour ensembles singuliers.

Lidskič [102] beweist laut Math. Rev:

Sei A, B reell symmetrisch, EWe $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$. Sei M die Menge der möglichen Spektren $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$ von $A+B$. Sei K_a die konvexe Hülle der $n!$ Pkte $\alpha_i + \beta_{i'}$ (i' Permutation von i). Dann $M \subset K_a$, und wenn die α_i, β_i gewisse Ungleichungen erfüllen, dann $M = K_a \cap K_b$.

Aufgabe: Eine normale Matrix mit gegebener char. Gleichg konstruieren. Darauf Sätze über AB anwenden. $\rightarrow$ Grace ?
Seite 54

Cutlis-Matrices and Determinants (Cambridge 1988) hat metrische Eigenschaften linearer Transformationen?

Nach Markgraf, Diss Giessen 1892) ist eine primitive Permutationsgruppe, die einen Zyklus kleineren Grades ($m < n$) enthält, $(n-m+1)$-fach transitiv. Kann man das mit Schuss Methode beweisen ?

Wie hängen die Untesuchungen von Knorhe mit der Darstellungstheorie zusammen ? Welche irred. Darstellgen von $\mathfrak{G}$ treten in der Permungr. $X \rightarrow A^{-1} X\, A$ auf ?

Aufgabe:

> Darstellungstheorie direkter Unterprodukte $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ Untersuchung der unverfeinerbaren Untergruppenketten einer Sylowgruppe: $\gamma \supset \mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{R}_\mathfrak{n} = E$, die durch Durchschnittbildung (mit einer beliebigen Anzahl) anderer Sylowgruppen ausgeschnitten werden können.

Frage: Ist jede Untergruppe $G \subset \mathfrak{G}$ die Fixgruppe einer Automorphismengruppe einer passenden Obergruppe von $\mathfrak{G}$?
Seite 55

1. Beweis des Satzes (wohl von D. Schmidt): 11.3.52
Ist jede echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ nilpotent, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar.
Bew: OBdA sei $\mathfrak{G}$ einfach. Sei ϑ ein maximaler Durchschnitt von 2 verschiedenen p-Sylowgruppen, wenns die gibt, und $\mathfrak{N}$ sein Normalisator. Ist $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{N}$ 2 versch. p-Sylowgruppen, ist also nicht nilpotent; also $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, $\vartheta =$ **???**, d.h. je zwei Sylowgr. sind Grund. Sei $E \neq P \in \mathfrak{p}$, $P' = G^{-1} \nabla G \in \mathfrak{p}$. Dann $G^{-1}\, P\, G \in G^{-1}\, \mathfrak{p}\, G \cap Y$, $P = G^{-1}\, \mathfrak{p}\, G$, P' ähnlich P innerhalb des

Normalisators von p, also innerhalb $\mathfrak{p}$. Nun Verlagerung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{G}$ nichtb einfach, Widerspruch. also gibts nur eine Sylowgruppe, und $\mathfrak{G} = p$.

[10] [11] **Seite 65**

21.3.52 Über Ähnlichkeitsklassen in p-Gruppen
Sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{C}_A$ die ÄhnlKlasse von A in $\mathfrak{G}$. Sei $(\mathfrak{K})$ die Ordnung eines Komplexes $\mathfrak{K}$, d.h. die Anzahl der <u>verschiedenen</u> $K \in \mathfrak{K}$.
(1) Ist $(\mathfrak{C}_A) \leq (\mathfrak{C}_\mathfrak{B})$ so ist $(\mathfrak{C}_{AB}) \leq (\mathfrak{C}_A)(\mathfrak{C}_B)$
(2) Genau dann ist $(\mathfrak{C}_A \mathfrak{C}_B) = (\mathfrak{C}_B)$, wenn

$\mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_{A^{-1}} \subset \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_B =$ Gesamtheit der $G \in \mathfrak{G}\,\mathbf{???}\; G\,\mathfrak{C}_B = \mathfrak{C}_B =$„Multiplikator von $\mathfrak{C}_B$“.
Bew: a) $\mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_{A^{-1}} \subset \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_B \to A^{-1}\,A^G\,\mathfrak{C}_B = \mathfrak{C}_B,\; A^G\,\mathfrak{C}_B = A\mathfrak{C}_B$
$\to \mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_B = (\mathfrak{C}_A) * A\,\mathfrak{C}_B = (\mathfrak{C}_A)\,\mathfrak{C}_{AB}$
b) $(\mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_B) = (\mathfrak{C}_B) \to \mathfrak{C}_{AB} = A^G\,\mathfrak{C}_B$ (alle G)$A^{\mathbf{???}} \in \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_B$

(3) Ist $(\mathfrak{C}_{AB}) = (\mathfrak{C}_B)$, so ist $(\mathfrak{C}_{A^\alpha}\,\mathfrak{C}_{B^\beta}) = (\mathfrak{C}_{B^\beta}) = (\mathfrak{C}_B)$

für alle α, β zu p teilfremd.

Bew: a) $\alpha = 1$: $\quad \mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_A^{-1} \subset \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_B = \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_{A^\beta}\,n\,\mathbf{???}$
b) $\alpha \neq 1$: $\quad \mathfrak{C}_{\overline{A}^\alpha}\,\mathfrak{C}_{A^{-\alpha}} \subset \mathfrak{C}_{B^\beta}$ da Mpl rational

$\subset \mathfrak{C}_{B^{\alpha\gamma}} = \mathfrak{C}_{B^\beta}$ alle $(\gamma, p) = 1$

(4) $\operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_{B^\beta} = \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_B$ da $\mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_B \subset \mathfrak{C}_B \to \mathfrak{C}_{A^\beta}\,\mathfrak{C}_{B^\beta} \subset \mathfrak{C}_{B^\beta}$

also $A^\beta \in \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_{B^\beta}$, $A \in \operatorname{Mpl}\mathfrak{C}_{B^\beta}$

Seite 66

Über Klassen in p-Gruppen
(1)

Ist $(\mathfrak{C}_A) = p$, $(\mathfrak{C}_{AB}) = p\,(\mathfrak{C}_B)$, so $\mathfrak{C}_{A^\alpha B^\beta} = p\,(\mathfrak{C}_{B^\beta})$
für $(a, p) = 1$, $(\beta, p) = 1$.
Bew: Da $\mathfrak{G}$ simultan transitiv auf $\mathfrak{C}_A$ und $\mathfrak{C}_B$, sind alle $A^{\alpha\,G}\,B^{\beta\,H}$ $(G, H \in \mathfrak{G})$ ähnlich (α, β fest).
Wäre $(\mathfrak{C}_{A^\alpha B^\beta}) \neq p\,(\mathfrak{C}_{B^\beta})$, so $\mathfrak{C}_{A^\alpha}\,\mathfrak{C}_{B^\beta} = p\,\mathfrak{C}_{A^\alpha B^\beta}$
$(\mathfrak{C}_{A^\alpha}\,\mathfrak{C}_{B^\beta}) = (\mathfrak{C}_{B^\beta})$
nach 65_ε: $(\mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_B) = (\mathfrak{C}_B)$ entgegen vor, da $(\mathfrak{C}_{AB}) \geq (\mathfrak{C}_A)\,(\mathfrak{C}_B)$

(2)

Ist $C = A\,B$, so ist $\quad (\mathfrak{C}_C) \geq \frac{(\mathfrak{C}_A)}{(\mathfrak{C}_B)}$, denn $B = A^{-\alpha}C \quad (\mathfrak{C}_B) \leq (\mathfrak{C}_{A^{-1}})\,(\mathfrak{C}_C) = (\mathfrak{C}_A)\,(\mathfrak{C}_C)$.

[10] S.56 gestrichen bis Ende.
[11] S.57 bis 64 existieren nicht.

(3)

Genau dann besitzt $\mathfrak{C}_A$ einen Multiplikator $\neq E$ wenn $\mathfrak{N}_1\,(A) \neq \mathfrak{N}_0\,(A)$ im Sinn von Knake, oder wenn mod Ztr. $\mathfrak{G}$ sich die Klasse von A verkürzt.

(4)

Eine Klasse ohne Multiplikator wird von **???** zentralisiert.

Seite 67

NB:

$\alpha\,A\,+\,\beta\,B\,+\,j\,A\,B\,+\delta\,E$ hat dieselben Eigenwerte wie $\alpha\,A\,+\,\beta\,B\,+\,j\,B\,A\,+\delta\,E$. Denn $(\rho\,A+\sigma\,E)\,(\tau\,B+\omega\,E)$ Faktor**???**.

Frage:

Welche Matrizen M haben bei geg A, B die Eigenschaft, dass $M + A\,B$ dieselben Eigenwerte hat wie $M + B\,A$?

Seite 68

Über Klassen in p - Gruppen.
(1)

Ist die maximale Klassenord. p^r, r =1, 2, so hat jede Klasse der Ord p^r einen Multiplikator $\neq E$
Bew (mit **???**). d.h. $\Gamma(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}}) = \Gamma(\mathfrak{G})$ - 1 wenn $r(\mathfrak{G}) \leq 2$.

(2)

Ist die max Klassenord p^r, r =1, 2, so erzeugen die Klassen der Ord p^r ganz $(\mathfrak{G})$.

Bew: r = 1: klar, da $(Z\,\mathfrak{C}_1) = (\mathfrak{C}_1) \quad Z \leftarrow Zentr.$
$r = 2$; ist $(^{\mathfrak{C}}A) = p$, $\mathfrak{C}_A \in \{\text{lange Klassen}\} = \mathfrak{C}$
so ist $(^{\mathfrak{C}}\,A\,B) = p$ für jedes B mit $(\mathfrak{C}_B) = p^{2'}$.
daher gibt es c mit $(\mathfrak{C}_C) = p$ & $(\mathfrak{C}_A\,\mathfrak{C}_C) = p^2 = (\mathfrak{C}_{A\,C})$
$A\,C$, $A^2\,C \in \mathfrak{N} \rightsquigarrow A \in \mathfrak{N}$.

(3)

Bei $r(\mathfrak{G}) = 1$ liegt $\phi(\mathfrak{G}) \subset \mathrm{Ztr}\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_1$
$r = 2 \rightsquigarrow \phi\,\phi\,(y) \subset \mathfrak{Z}_1$ wegen γ_{p^2} : $\phi\,\phi\,\gamma_{p^2} = \mathfrak{Z}_1$
allgemein $\phi^r\,\mathfrak{G} \subset \mathfrak{Z}_1$ wegen $\phi^r\,\gamma_{p^r} = E$
(γ_{p^r} hat Normalteiler $\mathfrak{N} = p \times p\,\ldots$ mit $\gamma_{p^r}/\mathfrak{N} \simeq \gamma_{p^{r-1}}$).

(4)

Ist $\mathfrak{Z}_1$ zyklisch $\neq \mathfrak{G}$, so gibts in $\mathfrak{G}$ eine Klasse $(\mathfrak{C}_y) = p$ nämlich $Y \in \mathfrak{Z}_2$, $Y^n \in \mathfrak{Z}_1$.

Seite 69

(1)

Die Sylowgr γ_p der symm Gr des Grades p ($Ord < p^{p+1}$) hat genau 2 char. Untergr. vom Index p *
und genau eine vom Index p^d $(1 < \alpha \leq p)$.
* Eine ist maximal abelsch, die andere maximal von Exponenten p.

Über Klassen von p-Gruppen.
(2) Ist $p^r = \max\limits_G \; Ord\, \mathfrak{C}_G$, so erzeugen die Klassen der ord p^r einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$, der alle Klassen der Ordnungen 1 und p enthält.

Bew: 1 klar; p: Sei $(\mathfrak{C}_A) = p$. Ist $({}^{\mathfrak{C}}A\,B) = p^r$ für ein B mit $(\mathfrak{C}_B) = p^r$, so $A \in \mathfrak{N}$. Sei aber kein solches B da, dann $(\mathfrak{C}_{A\,B}) = p^{r-1}$, alle B**???** $\mathfrak{C}_{???} = p^r$
$A\,B = C \quad B = A^{-1}\,C \quad (\mathfrak{C}_{A^{-1}\,C}) = p \quad \mathfrak{C}_C = p^r \quad A^{-1}\,C \in \mathfrak{N}$
nach 66_1 ist $(\mathfrak{C}_{A^{-2}\,C}) = p\,\mathfrak{C}_C = p^r \quad A = (A^{-1}\,C)\,(A^{-2}\,C)^{-1} \in \mathfrak{N}$

(3)

Falls es zutrifft, dass die längste Klassen die ganze Gr. stets erzeugen, dann folgt aus $\max\limits_{A\in\mathfrak{G}} (\mathfrak{C}_A) = p^r$, daß die Klasse von $\mathfrak{G}$ $\leq r+1$ ist. Bew durch Induktion $\frac{\mathfrak{G}}{Z_1}$

Frage: Gibt es nur endlich viele direkt unzerlegbare p-gruppen mit $\Gamma \leq \Gamma_0$ gegeben?

Seite 70

28.3.52 Verallgemeinerung der bekannten Schlussweise über maximale Sylowdurchschnitte:
??? Vor:

In irgendeiner Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Permutationsgruppe seien zwei Symbole $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gegeben, von denen $\mathfrak{A}_1$ bei $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{A}_2$ bei $\mathfrak{G}_2$ fest ist ($\mathfrak{G}_i = p$-Gruppe) und $\mathfrak{A}_1$ gehe bei einem $G \in \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}_2$ über: $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1^G$

Beh:

Es gibt $H \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1^H$ und $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1^H$, wobei $\mathfrak{p}_i$ eine geeignete $\mathfrak{G}_i$ enthaltende Sylowgruppe ist.

Bew:

> $\mathfrak{A}_2$ ist fest bei $\mathfrak{G}_2$ und bei $\mathfrak{G}_1^G$; ist aber $\mathfrak{F}_L$ die Fixgruppe von $\mathfrak{A}_2$, so $\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_1^G \subset \mathfrak{F}_2$. Es sei $F \in \mathfrak{F}_2$ so, daß $\mathfrak{G}^* = \{\mathfrak{G}_1^{G_F}, \mathfrak{G}_2\}$ eine p-Gruppe ist. $\mathfrak{p}^*$ sei Sylowgr von $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{G}^*$. Mit $GF = H$ ist $\mathfrak{A}_1^H = \mathfrak{A}_1^{GF} = \mathfrak{A}_2^F = \mathfrak{A}_2$, und mit $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}^{*\,H^{-1}}$ ist $\mathfrak{p}^H = \mathfrak{p}_2$ mit $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{G}^{*^{H^{-1}}} \supset \mathfrak{G}_1$.

(2)

> Sind zwei Symbole einer transitiven Permutationsdarstellg von $\mathfrak{G}$ invariant bei je einer sylowartigen p-Untergr von $\mathfrak{G}$ (dh solchen, die eine einzige Sylowobergruppe $\mathfrak{p}_i$ besitzen, so sind sie auch konjugiert bei einem El. von $\mathfrak{G}_1$ dass $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{p}_2$ überführt

Aufgabe: Minimale Sylowartige Untergr. untersuchen
Seite 71

Über p-Sylowgruppen, die gleich ihrem Normalisator sind. Ist ϑ ein Maximaldurchschnitt zweier solcher Sylowgr., und $\mathfrak{N}$ sein Normalisator, so besitzt $\mathfrak{N}/\vartheta$ einen Normalteiler $\mathfrak{K}\vartheta/\vartheta$ von p-freier Ordnung und p. Index. $\mathfrak{K}\vartheta/\vartheta$ erleidet unter $\mathfrak{N}\vartheta/\vartheta/\vartheta$ eine reguläre Automorphgruppe. Daher ist, wenn p ungerade, $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}\vartheta$ zyklisch $\oplus$ Enthält $\mathfrak{N}$ ein nicht im ϑ gelegenes Element p von p-Ordnung, das jede Ähnlichkeitsklasse von $vartheta$ fest lässt (z.B. ein Element aus dem Zentrum einer Sylowgr von $\mathfrak{N}$), so wird ϑ von $\mathfrak{K}$ zentralisiert. (Denn die $[P, K]$ lassen jede Klasse von **???** fest, und **???** ganz $\mathfrak{K}\vartheta/\vartheta$; wähle für $\mathfrak{K}$ eine Kleinste auf $\mathfrak{K}\vartheta/\vartheta$ abgebildete Untergruppe aus dem Zentrals. von ϑ.) Unter der Ur $\oplus$ sind also je zwei Sylowgr. über ϑ unter dem Zentralisator von ϑ konjugiert. **???**: Bei der **???** von $\mathfrak{G}$ nach meiner Sylowobergr von ϑ sind alle Digonalfaktoren von ϑ als ganzem) von ϑ gleich.

Aufgabe:

> Strukturen der auflösbaren Gruppen $\mathfrak{G}$ bestimmen, die eine Sylowgr. ohne Normalisator haben.

Frage:

> Sind diejenigen endlichen Gruppen schon bstimmt, bei denen in jeder lückenlosen Untergr.Kette lauter Primzahlindizes auftreten? **???**

Seite 72

Zur Untersuchung des Abelschen Stetigkeitssatzes.

Ein Kompositionskalkül: Ist $f = \sum_1^2 a_n\,x^n$, $g = \sum_1^2 h_n\,x^n$, so setze

$f * g = \sum_1^2 a_n\,g(x^n)$. Dann gilt

$$f*g\,|_{x^k} = f^* * g(x^k)$$
$$f*g = g*f$$
$$f*(g*h) = (f*g)*h$$

Frage: $*$ Durch Grenzübergang
auf welche reelen Fktionen
$f,\ g$ ausdehnbar ?

Setze $\underline{f} = x\,f'$, $\overline{f} = \int\limits_1^2 f(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}$. Dann ist

$\overline{f*g} = \overline{f} * \overline{g} = \underline{f*g} = \underline{f} * \underline{g}$ $\quad \underline{\overline{f}} = f$

$$\log x \cdot (f^*\, g) = (\log x\, f) * \overline{g}$$

Setze $m = \sum\limits_1^2 \mu(u)\, x^n$. Dann ist

$m * \frac{x}{1-x} = x \qquad \frac{x}{1+x} * \frac{x}{1+x} = \sum\limits_1^2 \tau(n)\, x^n$

$\sum\limits_1^2 \mu(n)\, \frac{x^n}{1-x^n} = x \qquad \sum\limits_1^2 \mu(n)\, \frac{x^n}{1+x^n} = x - 2x^2$

$\sum\limits_1^2 \frac{\mu(n)}{n}\,[-\log(1-x^n)] = x$

Ist das Funktionssystem
$\frac{n^n}{(1+n^n)}$ abgeschlossen ?

$\sum\limits_1^2 \frac{\mu(n)}{n}\,\log(1+x^n) = x - x^2$

$\sum\limits_1^2 \frac{\mu(n)}{n}\,[-\log(1-x^n+x^{2n})] = x - x^2 - x^3 + x^6$

nach Szász Math Am. 104(1931)
lässt sich je das stetige $f(x)$ mit $f(0)=0$
in $<0\,1>$ durch $(1+t_\nu x)^3 - 1 \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3, .)$
stetig gl. approx. wenn sich die t_ν

Seite 73

in der von -1 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene nicht häufen und $s \neq 0$, 1, 2, 3,$\cdots$; ebendann ist jede in $<0,1>$ stetige Funktion durch Produkte c $\pi\,(1+t_K)^{s_\nu}$.

Weitere Literatur: Pitt $\sim$ 1938 PLUS oder JLMS$\cdot$ Rob Schmidt

$\sum\limits_1^2 \frac{\mu(n)}{n}\, x^n$ ist beschränkt in (0, 1) $\rightarrow \sum\limits_1^2 \frac{\mu(n)}{n}$ beschränkt

Ist $\varphi(x) \geq 0$, φ stetig, $\varphi(1, = 0$, so ist gleichmässig in (0, 1)

$\varphi(x) \sum\limits_1^2 -\frac{1}{n}\,\log(1+x^n+x^{2n}) << A \sum\limits_1^2 \frac{1}{n}\,(\ \ )_{\varphi(x)} = A\varphi(x)\log(1+x)$

Bemerkung: Zwischen Faltungssatz von Grace und normalen Matrizen muss enger Zusammenhang bestehen. Vgl Bieberbach-Bauer

Seite 74

23.5.52 Zum Einschliessungssatz bei hermiteschen EWA mit 2 Iterationsschritten:

a)

Sind λ_1, λ_2, λ_3 ein mit $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ vertr. Spektrum, so sind λ_1, λ_2 mit $a\,\mathfrak{x}_0 + b\,\mathfrak{x}_1$, $a\,\mathfrak{x}_1 + b\,\mathfrak{x}_2$ für passenden $a, b \neq 0, 0$ verträglich.

Bew: $\lambda_3 = \mu$, $\lambda_{\substack{2\\1}} = v$ **???** $\cdot$ $f(v) =$

$$\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & u \\ m_2 & m_3 & m_4 & u^2 \\ 1 & v & v^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[: h] kürzer Brokate 29.12 **???** [: h]

Mit $M_0 = n^2\,m_0 - 2n\,m_1 + m_2 = M_0(n)$
$M_1 = n^2\,m_1 - 2n\,m_2 + m_3$ ·
$M_2 = n^2\,m_2 - 2n\,m_3 + m_4$ ·

folgt $< f(v) >= 0$ bezgl $M_0\,M_1\,M_2$
also die beiden Wu λ_1, λ_2 von $f = 0$ sind vertrgl m. $M_0\,M_1\,M_2$ dies sind aber die Momente zu $\mathfrak{X}_0 = n\,\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{X}_1 = n\,\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$.

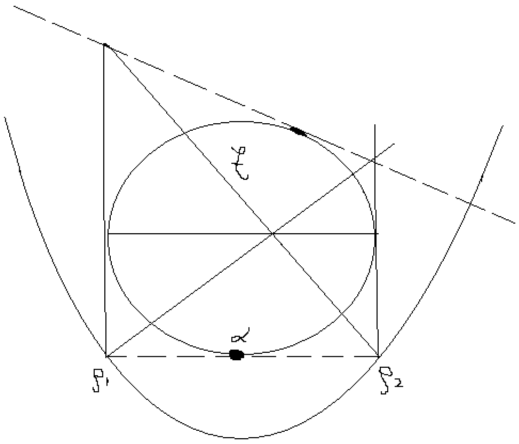
b)

Sind $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ mit $m_0 \cdots m_K$ verträgl, und ist $\mathfrak{f}$ die Ellipsenlinie, die die Momentenpkte der in $m_0 \cdots m_K$ enthaltenen 1-Freiheitsgradrechnungen darstellt, so ist $\mathfrak{f}$ dem Dreieck $\triangle$: $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ unbeschrieben.
Bew: $\mathfrak{f}$ liegt im Innern von $\triangle$, da λ_1, λ_2, λ_3 mit jedem Pkt von $\mathfrak{f}$ verträglich; und $\lambda_i\,\lambda_j$ enthält nach a) einen Punkt von $\mathfrak{f}$.

c)

Kennt man die beiden Rittwerte $\rho_1\,\rho_2$, so kennt man

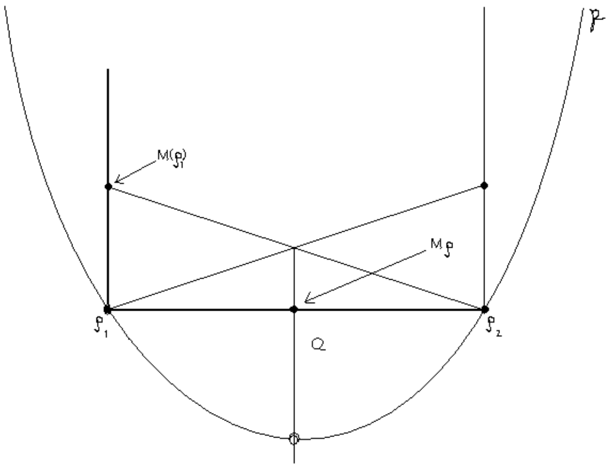
Seite 75



von f 2 Pkte mit Tangente,und noch eine Tangente, Parabel. Nach **???** kann man weitere Tangenten zeichnen: $- - -$
So erhält man aus $\rho_1,\ \rho_2$ (genauer aus den zugehörigen Punkten von $\mathfrak{f}$,

$$d.i \quad \{\rho,\ \frac{M_2(\rho\, j)}{M_0(\rho\, j)}\} = \{\frac{M_1(\rho\, j)}{M_0(\rho\, j)}\},\ \ \frac{M_2(\rho\, j)}{M_0(\rho\, j)}\}$$

für $s =$ **???** alle minimalen Einschliessungsintervalle $< n,\, v >$.
NB: Der Berührungspkt $Q = M(\rho)$ hat **???** ist der Momentenpkt zu $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$!



Mit $M(\rho)$, $M(\rho_1)$ kennt man $\mathfrak{f}$!
c') Jedes minimale Einschl<u>intervall</u> bezgl $\mathfrak{x}_0$ $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{x}_2$ ist auch schon Einschl.int. bezglich einer passenden darin **???** 1-Freiheitsgr.-Aufgabe.

d)

nun bei <u>Matrizen</u> eine ober Schranke für den kleinsten EW zu bekommen, genügt es, eine obere Schranke für den <u>grössten</u> EW zu schätzen und dann das ∞ enthaltende minimale Einschl-Intervall zu nehmen.

e)

Zu IV 20.4: Die Lösung von $\triangle(u, v) = 0$ ist

$$v = \frac{1}{2\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & 1 \\ m_1 & m_2 & u \\ m_2 & m_3 & u^2 \end{vmatrix}} \cdot \{\pm \sqrt{\begin{vmatrix} m_0 & m_2 & 1 \\ m_1 & m_3 & u \\ m_2 & m_4 & u^2 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & 1 \\ m_2 & m_3 & u \\ m_3 & m_4 & u^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & 1 \\ m_1 & m_2 & u \\ m_2 & m_3 & u^2 \end{vmatrix}}\}$$

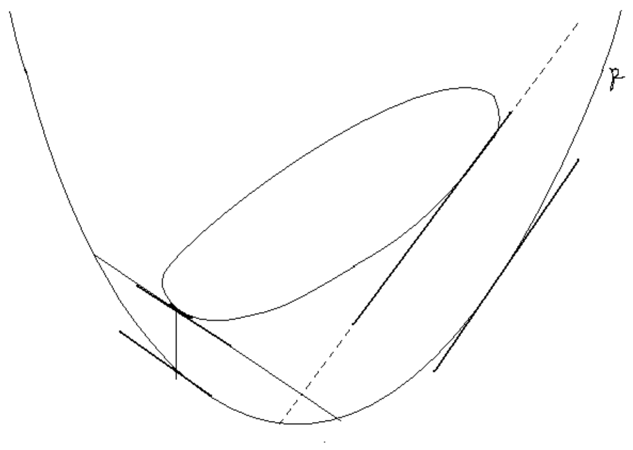
f)

Translation der λ-Geraden gibt eine **???** Abbildg von $\mathfrak{P}$ und der $\mathfrak{p}$-Ebene aus sich.

Seite 76

g)

Bei $s = 2$ gibt es unter den minimalen Einschl.-Intervallen 2 relativ kürzeste. Ihre Mittelpkte sind (auf der Parabel) dadurch gekennzeichnet, daß die Parabeltangente $\|$ zur Ellipsentangente mit denselben Berührpkt-Abzisse sind:

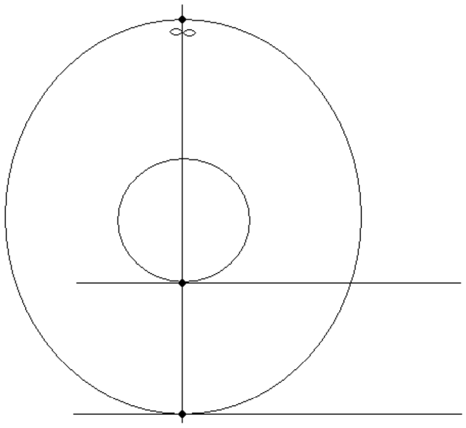


h)

Wahrscheinlich hat ρ_1 (die kleinere **???** -wurzel) allein keine Bestapproximetionseigenschaft, sondern nur das Paar ρ_1, ρ_2 innerhalb der Paare λ_1, λ_2. Eine ausgezeichnete Rolle hat ρ_1 immer wenn ∞ ausgezeichnet ist so bei Diffoperatoren

i)

Der „Kreisfall“, den die Parabel **???** und die Momentenellipse $\mathfrak{x}$ sich simultan auf konzentrische Kreise abbilden lassen, dürfte nur dann eintreten, wenn die beiden relativ kürzesten Einschl.-Intervalle zusammenfallen.



Hier gibt es den symmet. Fall, ein weiteres min Einschl.intervall würde ein spiegelbildliches drittes zur Folge haben.

Frage:

Was bedeutet der „Kreisfall“, für $\mathfrak{q}_0$ $\mathfrak{q}_1$ $\mathfrak{q}_2$? Das Büschel $\lambda\,\mathfrak{f}_2 + \mu\,P$ muss dazu eine Doppelgerade enthalten.

Seite 77

j)

bei s Iterationsschritten sind je so von den Zahlen eines mit $\mathfrak{q}_0$,$\sim$, $\mathfrak{q}_1$ verträglichen $(s+1)$ - Spektrum verträglich mit einen gewissen darin enthaltenen $(s-1)$-Schrittaufgabe. Bew. für die s Rittwerte aus der Determinantr.

k)

Bei s Iterationsschritten sind je 2 von den Zahlen eines verträgl. $(s+1)$-Spektrums verträglich mit einer gewissen darin enthaltenen 1-Schritt-Aufgabe. Bew Indukt, (j)

l)

Zeichnet man bei einer s- Schrittaufgabe die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ der Momentenpunkte, die zu den darin enthaltenen 1-Schrittaufgaben gehören, so berührt jede **???** Parabel unbeschriebenen $(s{+}1)$-**???** das zu einem vertr. Spektrum gehört, den Rand von $\mathfrak{M}$.

m)

Sogar bei einer allgemeinen f-Freiheitsgrad-Aufgabe sit die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ der darin enthaltenen Momentenpunkte gleich dem Vorrat des Formentripels $\{\mathfrak{X}^*\,\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}^*\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}^*\,\mathfrak{A}^*\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{X})$. Nimmt man die Parabelebene als Gausche Ebene, so ist $\mathfrak{M}$ der Wertevorrat von $q\,\mathfrak{X}^*\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}\,q,\ q\,\mathfrak{X}^*\,\mathfrak{A}^*\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}\,q$, mit $\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}^*\,\mathfrak{X}\,q\ =\ \mathfrak{f}$. Beim Iterationsverfahren mit $s\ =\ 2$ ist also $\mathfrak{M}$ eine Ellipse mit den Brennpkten $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$, die die Lösungen von $det\left(\ i\begin{pmatrix} m_2 & m_3 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}\right) = 0$

sind z.B für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \\ 0 & q \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ sind die Brennpkte:

$$det\left(\ \begin{pmatrix} i & 1+pi \\ pi & p+i(1+p^2+q^2) \end{pmatrix} - x\cdot E\ \right) = 0.$$

Seite 78

n)

Bei $s = 1$ Iterationsschritt kann man auf den Fall des Momentenpkts $(0\,1)$ kommen. Bei $s = 2$ vermutlich auf den Fall einer Momenten-Ellipse mit Mittelpkt $(0, 1)$ und koordinatenparallelen Achsen. Diesen Fall tabellieren ?

o)

Gibt es zu zwei Kegelschnitten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ ein Dreieck, das $\mathfrak{C}_1$ ein- und $\mathfrak{C}_2$ umbeschrieben ist, so **???** jeder gemeinsame Sehnen-Tangentenzug nach 3-Schritten. Bew: Ein Dreieck wird in proj. **???** gegeben durch Spalten d. Matrix X, $det\,X \neq 0$. Genau dann gibt es zu zwei Dreiecken X, Y einen gemeinsamen unbeschriebenen Kegelschnitt, wenn der Modul ϑ der Diagonalmatrizen die Eigenschaft hat, dim $(X\vartheta X' + Y\vartheta Y') \leq 5$, dh.
$X\vartheta X' \cap Y\vartheta Y' \neq 0$
dh **???** $\quad XD_1X' = YD_2Y' \quad (D_1 \neq 0)$
Sind um X, Y mit 6 verschiedenen Ecken $\mathfrak{C}_1$ einbeschrieben, so gibts D_i mit **???** ; daher Rang $D_1 > A$, da sonst Rang $D_1 > 1$, eine Spalte X proport einer Spalte Y.
??? $\rightarrow \oplus$: $\hat{X}'\,\hat{D}_1\,\hat{X}\ =\ \hat{Y}'\,\hat{D}_{???}\,\hat{Y}'$; $\hat{D}_1 \neq 0$ mit $\hat{A}$ = adjungiert zu A dies besagt, da die 6 Dreieckseiten Tangenten einer **???** sind, hier also von $\mathfrak{C}_2$, da dies durch 5 Tangenten schon bestimmt ist.

Seite 79

p)

Zur f-Freiheitsgraderechnung im hermiteschen Fall.
geg. sei X, $X^*X = E$, $Y = A\,X \quad (A = A^*)$.

$$M = \begin{pmatrix} E & X^*Y \\ Y^*X & Y^*Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix}$$

Dann ist das Spektrum $\overbrace{\infty, \cdots, \infty}^{f-mal}$, $\overbrace{\rho_1, \cdots, \rho_f}^{EWe\ \ von\ \ M_1}$ verträglich mit M.

Bew: O.B.d.A. sei $M_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_f \end{pmatrix}$. Es ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & \rho_1 & & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & & & 0 \\ \rho_1 & & & & \rho_1^2 & & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & & & \rho_f \\ 0 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \rho_f & & & \rho_f^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \textbf{???}$$

mit $P = M_2 - M_1^2$.
Nun ist aber $P \geq 0$, denn

[: h]$Anderer Beweis:$
$A = \begin{pmatrix} M_1 & \cdot \\ D & \cdot \end{pmatrix}$ Spektrum M_1 [: h]
ist verträgl. mit $\rho_1 \dots \rho_f$, also
$E\,M_1$

$$P = Y^*Y \geq Y^*X\,X^*\,Y \quad \text{wegen} \quad X\,X^* \neq U\,U^* = E = M_1^* M_1. \quad [(X\,U) = \text{unitär}].$$

Genauer als oben behauptet ist also

NB: Wahrscheinlich ist $\infty \dots \infty$ <u>nur</u> mit $\rho_1 \dots \rho_f$ verträglich
$\overbrace{\infty \dots \infty}^{r\ \ mal}$ $\rho_1 \cdots \rho_f$ vertr., wo $r = Rg(M_2 - M_1^2)$.
d.h.: $f + r = Rg(X\,Y)$.
Analoges wird gelten für die f Lösgen ν_r von $\triangle(n, \nu_r) = 0$: $u, \dots, u, \nu \dots \nu_f$ verträglich q)

Folge: Ist $\triangle(u,\,\nu) = 0$, $[u,\,\nu]$ das Intervall $u \leq x \leq \nu$, und enthält $[u,\,\nu]$ außer $u,\,\nu$ keine Wurzel von $\triangle(u,\,\nu) = 0$,
so ist $[u,\,\nu]$ ein minimales Einschliessungintervall. Dann 1) ist es ein Einschl. Intervall, und
2) ist es nicht zu verkürzen, da $u, \ldots,\ u,\ \nu_0,\ \nu_2, \cdots, \nu_f$ ein verträgliches Spektrum

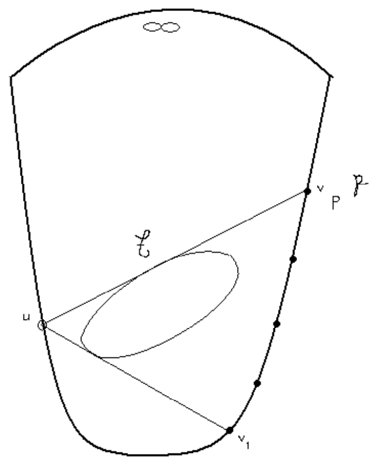
$[:h]Frage:$

$$Verallgemeinerung\ \ auf\ \ normales\ \ A\ \ ?$$
$$bzgl:\ \ \rho\, A = \begin{pmatrix} M_1 & \cdot \\ R & \cdot \end{pmatrix}\ \ normal,\ \ so\ \ braucht\ \ es\ \ kein$$
$$normales \begin{pmatrix} M_1 & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} zu\ \ geben.[:h]$$

Seite 80

(q)

bedeutet, dass man die minimalen Einschl.-Intervalle schon aus den in $X\,Y$ **???** 1-Freiheits-Rechngen bekommt. Bei $f = 2$ bilden deren Momentenpkte wie (bei $f = 1$, $s = 2$) eine Ellipse $\mathfrak{f}$ innerhalb der Parabel, und die minimalen Einschl.-Intervalle $\|$ bekommt man durch Tangenten an $\mathfrak{f}$:



(r)

Ist die Momentenmatrix M vertr. mit einem Spektrum $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$; und ist Momentenmatrix K vertr. mit einem Spektrum $\mu_1 \cdots \mu_l$, so ist $M + K$ vertrgl. mit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n,\ \mu_1 \cdots \mu_l$

(s)

Ist $M = \begin{pmatrix} E & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{pmatrix} \geq 0$, so $M_2 \geq M_1^* M_1$; ist ausserdem $M = (X\,Y)^*(X\,Y)$ mit $Y = A\,X$, $\underline{A \text{ normal}}$, so ist ausserdem $M_2 \geq M_1^* M_1$
Denn wenn $A = \begin{pmatrix} M_1 & F \\ D & \cdot\cdot \end{pmatrix}$ normal, ist $\mathfrak{M}_2 = M_1^* M_1 + D^* D = M_1 M_1^* + F F^*$

(t)

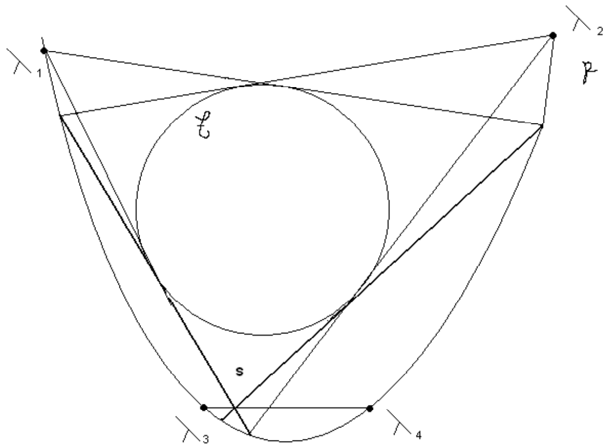
Welche Spektren können bei <u>normalen</u> Matrizen der Gestalt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot \\ 1 & 0 & \cdot\cdot \end{pmatrix}$ auftreten ? Es ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit

Seite 81

$|\alpha|^2 + |\rho|^2 = 1$, $|\delta|^2 + |\alpha|^2$, $\alpha\,\overline{\gamma} + \rho\overline{\delta} = 0$ (also 4 Parameter (reelle) sind frei) [: h]*nur 3 Reele Par. im Spektr.*[: h]

31.5.52
(u)

Fall $f = 1$, 2 Iterationsschritte. [: h]*Kreyszig ?*[: h]
Konstruktion der möglichen Viererspektren zu gegebenem λ_1, λ_2:
Jede Gerade durch den Schnittpunkt S der zu λ_1, λ_2 gehörigen **???** „Gegentangenten"an die Ellipse $\mathfrak{f}$ schneidet aus der Parabel $\mathfrak{p}$ ein brauchbares λ_3, λ_4 aus, d.h. mit $[\Pi_1^4(x - \textbf{???})] = 0$



Beweis: bei festem λ_1, λ_2 (nicht aus einer Familie) ist $\lambda_3 \to \lambda_4$ eine Involution ohne reelle Fixpunkte, wird also durch Spiegelung von $\mathfrak{p}$ an einem inneren Punkte S dargestellt.
da die Familienreste $\lambda_1' \, \lambda_1''$, $\lambda_2' \, \lambda_2''$ mit $\underline{\lambda_1}$, λ_2 verträglich liegt S auf $\lambda_1' \, \lambda_1''$ und auf $\lambda_2' \, \lambda_2''$.
NB: Ist die Abbildg: beliebig Gerade y der Ebene $\to$ Schitt S Gegentangenten von $(g \times \mathfrak{p})_1$ und $(g \times \mathfrak{p})_2$ eine Korrelation **???** Sie führt $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{f}$ über.

Seite 82

(u)

Zur f-Freiheitsgraderechnung im Hermiteschen Fall:
geg. $(X\,Y)^*\,(X\,Y) = M = \big(\ \textbf{???}\ \big)$

Satz: Genau dann sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vertr. M, wenn für jede „Polynom-Matrix" $F(x) = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^2 \quad (A_i = A_i^*)$ mit $[\mathfrak{F}] = Sp\ \ A_0\,M_0 + A_1\,M_1 + A_2\,M_2 \geq 0$
auch für mindestens ein λ_ν gilt: $\mathfrak{F}(\lambda_\nu) \underline{\gg} 0$

Äquivalent ist: wenn für jedes „definite"$F(x)\,\{$dh. $F(\lambda_\gamma) \underline{\gg} 0$ für alle $\nu_2 1_1, \cdots, n\}$ auch $[\mathfrak{F}] \geq 0$ ist.

29.12.52:

Es genügt, dies für diejenigen $F(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2$ zu fordern, für die $\sum_1^2 A_i M_i = \sum_1^2 M_i\,A_i$ ist; denn $\delta_\nu\,Sp\,\sum_1^2 A_i\,U^* M_i\,U$ ist U^* ist **???** $\to \sum_1^2 A_i M_i = \sum_1^2 M_i\,A_i$. „$F(\lambda)$ angepasst an $M_0\,M_1\,M_2$"

Seite 83

Ansatz zu einer Integraldarstellung positiver Funktionen:

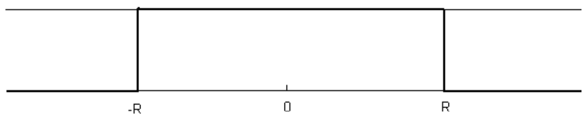
Sei $\varphi(z)$ reg. in $Im\, z > 0$ und $|z| > R$, $\lambda = \lim\limits_{1} \quad \varphi(t + i\, h) \quad$ exist, $Im\, \lambda = 0$;

$\uparrow Im$?

$|\varphi(z)| < \frac{1}{|z|}$.

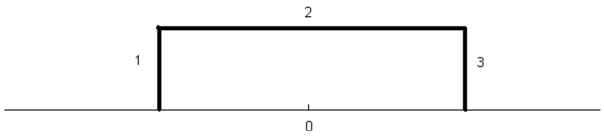
1. Dann beweise erst Integraldarstellung von $\varphi(z)$ in $Im(z) > 0$. Poisson durch Integral über $v = Im\, \varphi$, erstrecke über $z = t + i\ \ h_{\downarrow \text{fest}} \rightarrow; \infty < t < \infty$

2. Dann verschiebe Weg



$\leftarrow$ geht nicht da $v(x)$ Achtung nicht analytisch

3. Wegen $Im\, \lambda = 0$ für $|z| > R$ genügt



??? mit $\to 0$; **???** partielle Integration, um $\Psi \int \psi = 0$ zu bekommen. V hängt monoton von x ab, daher

$$\lim_{1} \int V \cdot K(z,\zeta)\, d\zeta = \int \lim V \cdot K(z,\zeta)\, d\zeta$$

(3)

Das durch part. Integration in Stieltjes. Integral umformen (oder direkt zeigen, dass $\Psi(x) \equiv 0$, wegen Existenz von $\lim_{1} Im\, \varphi(x + ih)$; damit ist $\varphi \equiv 0$.
Also Ziel (**???** Existenzbeweis <u>eines </u>**???**):
Satz: Ist $\varphi(z)$ reg in $Im\, z = 0 \quad |z| > r$, $Im\, z = 0$, $Im\, \varphi(z) \geq 0$ in $Im\, z > 0$ exist $\lim_{1} Im\, \varphi(x + hi) = \lambda(x)$, **???** ist $|\varphi(z)| < \frac{1}{|z|}$, so ist $\varphi(z) \equiv 0$.
NB Stieltjes Integral vermeidbar: gewöhnl. Int. mit $V(x)$ monoton.

NB: <u>Ohne die</u> Vor, dass $\lim_{1}\ Im\, \varphi(x + ih) = \lambda(x)$ existiert, kriegt man die Darstellung so, in Nr.(4) ist $V(x + i\frac{1}{n})$ eine monotone Fkt, **???** beschränkt; wähle Teilfolge Kgl auf <u>rationalen</u> Punkten. ergänze Grenzfkt
$A(x)$ von rechts stetig: Dann $\lim \int V(x, \frac{1}{n})\, K(z,\zeta)\, dx = \int A(x)\, K(x,\, \zeta)\, dx$, da zur Berechnung eines Integrals bei <u>monotonen</u> A die rationalen **???**-Werte genügen. **???** der folgende Auswahlsatz: **???**

Seite 84

Benötigt wird der folgende einfache Auswahlsatz: Beweis siehe 85
Ist $p_n(x) \nearrow$ in $[a, b]$, $|p_n(x)| \geq M$, so gibt es eine monotone Flg $P(x)$, $|P(x)| \leq M$, und eine Teilfolge $p_{n'}(x)$ derart, dass für jedes stetige $\mathfrak{G}(x)$ in

$[a,\, b]$ gilt: $\lim\limits_{n'\to\infty} \int \mathfrak{G}\, dp_n = \int g\, dP.$

Die Poissonformel für Darstelg von $f(z') = u + iv$ aus v lautet, wenn f reg in $|z| \leq 1$:
Für $|z| < 1$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 v(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + Re\, f(0).$$

Bew genügt für $f(0) = 0$ zu führen, Fourierentwicklung
Hieraus folgt für $\underline{\varphi(z)\ \ reg\ \ in\ \ Im\, z > 0,\ \ |z| > Ri}$

in $Im\, z > 0$ ist $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 v(x)\, \frac{1+xz}{1+x^2} \frac{2}{x-z}\, dx + Re\, \varphi(i)$

$[In\ \ Im\, z > h > 0$ ist $\quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 v(x + ih)\, \frac{1+x(z-ih)}{1+x^2} \frac{1}{x-(z+ih)}\, dx + Re\, \varphi(i + ih)]$

$Im\, z > h$: bequemer für $h \to 0$, $\quad \varphi(z+ih) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 v(x+ih)\, \frac{1+xz}{1+x^2} \frac{dx}{x-z} + Re\, \varphi(i + ih)]$

beachte: Aus φ reg in ∞ folgt $|\varphi'| < \frac{c}{|z|^2}$

$$|\varphi(x + i\, h) - \varphi(x)| \leq \frac{C}{|x|^2} \cdot h$$

also $\varphi(z) = \lim\limits_1 \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 v(x + ih)\, \frac{1+xz}{1+x^2} \frac{dx}{x-z} + Re\, \varphi(i)$
$\to= \int \frac{1+xz}{1+x^2} \frac{1}{x-z}\ dV(x + ih)$
Das part. integr., dann $R \leftarrow \infty$ **???** oder **???**

$\varphi(t) = \frac{1}{4\,\pi} \int\limits_1^2 \frac{1+xz}{1+x^2} \frac{dV(x)}{x-z}$ $\qquad$ mit $V(x) = \lim\limits_1\ Im \int \varphi\, dz$ **???**
$V \nearrow$ wenn x $\nearrow$.

Seite 85

$\varphi(z) = \lim\limits_1 \frac{1}{\pi} \left\{ \int\limits_1^2 v(x + ih)\, \frac{x dx}{x-z} - \int\limits_1^2 v(x + ih)\, \frac{x\, dx}{1+x^2} \right\}$

Es ist also $\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^2 \frac{v(x)}{x-z}\, dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_1^2 v(x)\, \frac{x}{1+x^2} dx + Re\, \varphi(i)$

daher $\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^2 \frac{v(x)}{x-z}\, dx + r \quad r$-reelle Konstante

Vor sind: $\varphi\ \ - reg\ \ in\ \ Im\, z \geq 0,\ |z| > R,\ \varphi(\infty) = 0.$
NB: Steltjes Integral für Verlesg EW in I wohl umgehbar durch par. Integr.

oder $f(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^2 v(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \overline{f}(0)$ $\quad$ etwa aus Cauchy durch **???**

besser: Hieraus direkt der allgemeine Satz v ???, ??? monoton in φ. (Dann muss man Stieltjes. Integral transformieren auf reelle Gerade.) Das hat den Vorzug, dann auch für unbeschrkte kontin Spektr zu gelten

Beweis des Auswahlsatzes: Setzt man $S_n = \frac{1}{n}\sum_1^2 f(\frac{v}{n})\, g(\frac{v}{n})$, so ist mit G_ν

???

$\rightarrow$ besser am Stieltjes-Integral $\int g\, df$!

bei $f \nearrow$, $0 \le g \le G$, $0 \le f \le F$ stets

$S_n - \int_1^2 f\, g\, dx \le S_n - s_n \le \frac{1}{n}\sum_1^2 (f(\frac{v}{n})\, G_v - f\frac{(v-1)}{n}\, g_v) =$

$\frac{1}{n}\sum_1^2 \left\{ \quad f(\frac{v}{n})\, [\underbrace{G_v - g_v}_{\sigma_v}] + [f(\frac{v}{n}) - f(\frac{v-1}{n})]\, g_v \quad \right\}$

$\le \max \sigma_v \cdot F + \frac{1}{n} FG \rightarrow 0$, wenn g stetig.

Wähle Teilfolge ??? Kgl auf rat Zahlen und approximiere $\int p_n\, g$ durch Cauchysumme; geht gleichem bzgl. aller p_n

Literaturverzeichnis:

[1] Milman D:

Sur une classification des points du spectres d'un spérateur linéaire.
C.R. (Dokl) Ak SSCR (2) 33, 279-281
Inhalt: S.1 (1941) MR 5 147

[2] Nikolsky, S:

Linear equations is normed linear spaces. Bull Ak URSS (Invest.) 7, 147-166 (1943) [MF 9882]
Inhalt: S.1 5,187

[3] Fischer, Ernst:

Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten.
Monh. Math Plugs. 16 (1905), 234-249 hat Minimax für ???!

[4] Ky Fan & Norman Haaser:

On the eigenvalues of symmetric ???.
Amer. Math Monthly 56 (1949), 219-220 (Auszug).

[5] R.S. Burnington:

On the nature of applied mathematics.
Am. Math. Monthly 56 (1949), 221-242. Mit 62 Litangaben

[6] H.Bergström:

Über abelsche Erweiterungen mit zerfallenden ???
Math. ???, Berlin 1, 350-356 (1948) Zbltt 31.9

[7] Livšic, M.???:

Zur Theorie isometrischer Operatoren mit gleichen ??? .
??? Zbltt 31, 167 (1947)

[8] ??? , Cahit:

Sur la definition des déterminants. ??? Istanbul
Fac. ??? la Pos. de la première
Piérre des ??? 9-20 (1948). Zbltt 31, 197

[9] Tollmien, W.:

Über das Restglied der Mittelwertformeln für angenäherte ???
??? 29 (1949), 193-198

[10] Specht, W.:

Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen
MZ 52 (1949), 310-321.

[11] Aronszajn, N:

Raylcigh Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I: Operators in Hilbert space. Proc USA 34, 474-480 (1948) Zbltt 31, 406 ???

[12] Delange, Hubert:

The converse of abel's theroem on power series.
Ann math. Princeton, (II) 50, 94-104) (1949) Zbltt 32, 60

[13] Frame, J.S.:

Group decomposition by double ??? matrices.
Bams 54, 740-755 (1948) Zbl. 32,105

[14] Wiegmann, N.A:

Some analogs of the generalized principal axis theorem. Bams 54, 905-908 Zbl 32, 103

[14] Good, R.A.:

On the theory of clusters.
Tams 63, 482
515 (1948) (Beiderseits ??? Stämme !) Zbl 32, 106

[15] J.M. Hammersly:

The numerical reduction of nonsingular matrix ??? 1948/9

[16] G.F.D. Duff:

Factorisation ladders and eigenfunctions.
Canadian J.M. 1, 379-396 (1949)

[18] E.Stiefel, H.Ziegler:

Natürliche Eigenwertsprobleme. I
ZaMP1, 111-137 (1950)

[19] **???** :

Non-associative arithmetics
(zu Stämmen **???** [43] Proc RSoc Edinburgh A62, 442-453 (1948)
Zbltt 33, 11

[20] Tchounikhin, S.A.:

Sur les p-propriètès des groupes.
(Doklody) CR **???** URSS (N.S.) 55, 477-480 (1947)
sort "p-Auflösbarkeit", MR 9 (1948), 6

[21] Kohn, W.A.:

A note on Weinstein's variational method.
Phys. Rev. (2) 71. 902-904 (1947) MR 9, 38 Inhalt: S.22

[22] Bowker, A.H.:

On the norm of a matrix. Annals math statistics
18, 285-288 (1947) MR 9, 75 Inhalt: S.22

Einige Arbeiten über Strukturen endlicher Gruppen: Szép Comm. Helv. 20, 223-224.
(1947). **???** ib 225-264. Szele ib 265-267-269. Vincent ib 117-171
-Zassenhaus Comm Helv 21, **???**-141 (1948) Raumgruppen. lin Gr. ohne Fixpkte
Szekeres Ann Math (2) 49, 43-52 (1948) MR 9, 492 Diendonné Groupes classifiques MR 9 494
Kolshin, Ann Math (2) 49, 1-42 **???** M H M-P 34; Abh **???** 4 (1926);

[23] Richards, Paul I.:

A special clats of of functions with positive real part is a half-plane.
Duke Math. J. 14, 777-786
(1947). MR 9, 181 (höchstens Pole auf **???** reell auf $y = 0$.)

[24] Schmmieden, C.:

Die konforme Abbildung von Tragflügelprofilen mit Krümmungssingularitäten. Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung; 1106-1110 MR 9 216

[25] Wittich H.:

Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorm-**???** .
Jahrbuch 1941 der Deutsch. **???** . MR 9, 253

[26] TURING, A.M.:

The extensions of a group   Composotive 5, 357-367

[27] Hansdorff:

???   Math.Z.9 98-99

[28] D.Manning:

??? BAMS

[29] Calkin:

???   Duke 5-7
???

[30] Schreier, O.:

Über die Erweiterung von Gruppen .II.

[32] Ziegler:

Natürliche Eigenwertprobleme. ZaMP 1950

[33] Darboux:

Th*é*orie des surfaces II
über selbstadj. Diff.-Ausdrücke.

[34] Polya, G.:

Remark on **???** note: Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proc nat **???** USA 36, 49-51 (1950)

[35] Weyl, H.:

Inqualities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, PUSA 35, 408-411 (1949)

[37] Chang, S.H.:

On the distribution of the characteristic values of linear integral equations. TAMS 67, 351-368 (1949)

[38] Horn, Alfred:

On the singular values of a product of completely continuous operators. PUSA 36, 374-375 (1950)

[39] Cipolla, M.:

Sulla teoria dei gruppi di ordine finito Atti Accad   Napoli∼1911-16

[40] Braconnier, Jean:

Spectres d'espaces et de Groupes topologiques:
Portugaliea Math. 7_2 (1948) **???**

[41] Weyl, Hermann:

Inequalities between the two kinds of eigenvalues of al linear transformation. PUSA 35, 408-411
Zbl 32, 384 (1949)

[42] Gol'berg, P.A.:

Sylow-Basen von Π-zerlegbaren Gruppen.
Dokl.Ak. Nank. SSSR, n.S.$\underline{6}$, 615+618 (1949)
Zbl 32, 388 "Hall-Gruppen" für Π-auflösbare Gruppen.
???

[43] Etherington, **???** .M.H.:

Non attociative arithmetics.
Proc. R. Svc Edinburgh A 62 , 442-453 (1948)
Zbl. 33, 11 Verwandt mit "Stämmen", unwichtig

[44] Chalilov, Z.I.:

Lineare singuläre Gleichungen **???** normietren Ringen. **???** SSSR **???** 13, 163-176
(1949) Zbltt 33, 123 zu vollstetigen Op.
???

[45] Tannt, D.R.:

On A-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc.
45, 24-42 (1949) Zbltt 33, 149

[46] Freundlich, Marianne:

Competely continuous elements of a normal ring. Duke 16, 273-283 (1949)

[47] Godement, Roger:

Th*é*orèmes **???** th*é*oric spectrale. Ann ni Ecole norm sup. (III) 64, 119-138. (1947) 33, 376

[48] Winter, Aurel:

The sum formula of Euler-Maclaurin and the inversions of Fourier and Möbius.
Am. J. Math. 69, 685-708 (1947). Z 34, 41
???

[49] Hua, Loo-Keny:

Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than **???**
Ann-math. II 50, 8-31 (1949). Z. 34, 157 **???**

[50] **???** , Richard:

Applications of induced characters.
Amer J. Math. 69, 709-716 (1947). Z 34, 161

[51] Kaplansky, Irving:

Topological rings. Amer J. Math 69, 153-183
(1947) Z 34, 166 Zusammenfassender Bericht

[52] Gol'fand, Jn.A.:

Über einen Isomorphismus zwischen Gruppenerweiterungen. Dokolady SSSR n.S.60, 1123-1125 (1948) Z 34, 302

[53] Todd, J.:

The condition of a certain matrix. Proc Cambride
Phil. Soc. 46, 116-118 (1950). Zbl 34, 376

[54] Vincent, Georges:

Les groupes lin*é*aires finis **???** points fixes. Commentarii m. Helv. 20, 117-171 (1947). Zbl. 34, 381

[55] Re'dei, L.:

Das "schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativer Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen...
Commentarii 20, 225-262 (1947) Zbl 35,15

[56] Re'dei, Fary, Sz*é*le:

verschiedene Arbeiten zum Satz von Hajos
Zbl 35, 16

[57] Smiley, M.F.:

Application of a radical of Brown and Mckoy to non-association rings. Amer **???** Math 72, 93-100 (1950) Zbl 35, 18

[58] Landsberg, P.T.:

Notes on operators $F = \sum_{1}^{2} F_k(x)\,(d/dx)^k$
Math. Gazette, 33, 113-115 (1949) Zbl 35, 199
???

[59] Grinblijum, M.M.:

Die Spektralfunktion im Banachschen Raume. Doklady 70, 941-944 (1950). Z.35, 201

[60] Škoinik, A.G.:

Lineare Ungleichungen Doklady
n. S.70, 189-192 (1950) Zbl 35, 290

[61] Stiefel, E. & Ziegler, H.:

Natürliche Eigenwertprobleme
I. **???** Math. Plugs. 1, 111,138 (1950) Z. 35, **???**

[62] Atkinson, F.V.:

Symmetric linear operators an a Banach space. Mh Math 53 278-297 (1950). Z 35, **???**

[63] MacDuffee, C.C.:

Some applications of matrices in the theory of equations. Amer math Monthly 57,
154-161 (1950) Zbl 36, 14

[64] Kaplansky, I. :

Elementary divisors and modules.
Trans. Amer. math. Soc. 66, 464-491(1949), Z.36, 19

[65] Szep, J.:

Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen. Commentarii
22, 31-33 (1949). Zbl 36, 153

[66] Zassenhaus, H.:

An equation for the degrees of the absolutely irreducible representation of a group of finite order. Canadian J.Math. 2, 166-167 (1950)
Zbl 36, 295

[67] Bliss, G.A.:

Lectures on the **???** of variations. 1947
Zbl. 36, 344

[68] Fage, M.G.:

Idempotente Operatoren und ihre Ausrichtung.
Doklady n.S. 73, 895-897 (1950) Zbl 36, 357
(Schiefe !)

[69] Stein **???** :

On the solution of linear simultaneous equations by iteration.
(Iteration) J.London math Soc. 23, 111-118 (1948). Z 36, 365

[70] Lee, H.C.:

Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. Proc Irish Ac A 52,
253-260 (1949) Zbl 36, 248

[71] Rutherford, D.E.:

??? analysts, Edinburgh 1948

[72] Über Produkte vertauschbarer Gruppen:

L. Re'dei:
Gelle 188, 201-227 (1950)
Acta Math 84, 129-153 (1950) **???**
I.Sze'p:
??? math. Helv. 22, 31-33 (1949)
Acta.**???** Math., 12 A (1950) 57-61(englisch)
G.Zappa:
Atti 2. Congr. Un. met. **???** 1942, 119-125
G.Casadio:
??? mat. univ. Roma [5] 2 (1941), 348-360

[73] Germansky, Barush:

A new set of natural numbers.
??? Lematematiko 3, 65-67 (Hebraisch, Engl Auszug).

[74] Schmidt, Arnold:

Wie dürfen wir mit dem Unendlichen umgehen ? (Die Grundlage des mathemat. **???**). Math-Plugs. Semesterber.1. 200-212 (1950)

[75] Iohvidov, I.S.:

On the spectra of Hermitian and unitary operators in a space with indefinite metric
Doklady (N.S.) 71, 225-228 (1950) MR 12

[76] Sylow-Festschrift 1933 Oslo:

Sylows Arbeiten über spezielle **???**
insb. **???** usw. Grade p^2 Acta Math 11

[77] Kirchberger

bewies Existenz der Trennebene konvexer Polyeder
Math Ann 57 (1903), . . . 528-530.

[78] R.G. Stanton:

The Mathieu goupes. Canad J.M. 3 (1951) 164-174

[79] Lense:

Vom Wesen der Mathematik (Buch)

[80] Weyl:

Math Analyse des Raumproblems S.23-43 lesen

[81] Hua, L.-K:

Geometries of matrices III Trans AMS 61 (1947), 228-255

Determinanten: Biberbach Anal Geom. $4^{\text{Anfl.}}$ 1950

[82] Bertram, G.:

Zur Fehlerabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei Eigenwertaufgaben **???**

[83] Lee, H.C.:

Eigenvalues and **???** forms of matrices with quaternion coefficients.
Proc. Roy. Irish.AC.Seet.A 52, 253-260
(1949) MR 12, 153

[84] Čunihin, S.A.:

On Sylow properties of finite groups. Dokl Ak nante SSSR (2) $\underline{7}$3, 29-32
(1950) MR 12, 156
(Über Existenz von a, b mit (a) = **???** b auflösbar jedes $\mathfrak{A}'$ mit **???** ähnlich zu $\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{b}') = (\mathfrak{b})$ ähnlich zu $\mathfrak{b}$.

[85] Hall, Marshall, jv:

A topology for free groups and related groups. [MR 12, 158]
Ann. of. Math. (2) 52, 127-139 1950

[86] Wittich, Hans:

Konvergenzbetrachtung zum Abbildungsverfahren von Theodorsen-Garrick.
Math Ann 122, 6-13 (1950). MR 12, 170

[87] Krasnoselskij, M.A.:

Convergence of Galerkins method for non-linear equations. MR 12, 186
Sehr allgemein, abstrakt

[88] Nagao, Hirosi:

On the theory of representation of finite groups. Osaka math **???**
3, 11-20 (1951)

[89] Azumaya, Gorô:
∗ für Stämme

New foundation of the theory of simple rings. Proc Japs Acad. 22
Nr. 11
S.325-332 = Coll papers Nagoya **???**

[90] Nakayama, Tadasi:

Galois theory for general rings with minimum condition (1949) Zbl.
38,**???**

[91] Rutherford, D.E.:

Substitutional analysis. (1948) Zbl 38, 16

[92] Suzuki, Michio:

On the lattice of subgroups of finite groups. TAMS 70, 345-371
(1951)

[93] Jung, HWE:

Matrizen und Determinanten 2 verb Aufl. 1952, 138 S. kt 4 DM
(Springer & Lange Inf. Heft 1, 1957)

[94] Kneser, H.:

Die komplexen Zahlen und ihre Verallgemeinerungen. Math.-
Phy.Sem **???**
I Heft 3-4 S.256-267 (1957)

[95] Pringsheim, H.:

Über Wert und angeblichen Unwert der Mathe **???** . Jew D M V 13,
(1904), 357.

[96] Burgat, Paul:

Condition nécessaire pour qu'un problème aux limites **???** self-
adjoint. **???** .-R. Ac. **???** .
Paris, 231, 321-323 (1950). Dgen-ter Ord mit Rand bedgg.

[97] Šilov. G E.:

An attempt to present the theory of determinants without the theory
of substitutions. Uspehi Matem. Nank, N.S.5, no. 5 (39), 177-150
(1950) (Russisch).

[98] Sears, D.B. & Titchmarsh, E.C.:

Some eigenfunction formulae. Quart J Math (Oxf. **???**) (2) 1,
165-175 (1950) MR $12_{41}261$ (Bersichtiggen zum Buch Tischmarsh)

[99] Chorubino:

M.R. 12_4, 235

[100] R.Nevanlinna:

Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem.
Annales Academical **???** Fennicac
(A) 18 (5) 1922. 52 pp.

[101] I.A. Shohat, I.D. Tamarkin.

The problem of moments (Mathemetical surveys # 1). 1943.

[102] Lidski$\check{\imath}$, V.B.:

On the sum and product of matrices.
Dokl Akad Nank SSSR (2) 75, 769-772 MR 12, 581

[103] Tosio Kato:

On the upper and lower bounds for eigenvalues. J. Plugs math **???** Japan
4, 334-339 (1949)

[104] G.Temple:

Mathematical methods in the solution of aeroballistic problems.
Navord Report 1843; Aeroball. Res. Rep. 30
U.S. Naval **???** laboratory, White
Oak, Md.

[105]

Aaronszajn: Acta mathem. 1935
Fréchet: Acta mathem. 1930
Fréchet: Congrĕs international Oslo 1936, tomc I

[106] N.H. Mc Coy:

On the characteristic roots of matric **???** . BAMS 1936, 592-600

[107] A. Ostrowski:

Determinanten: Comm. m. Helvetii 10, 1937
Bull Sci math LXI, 1937

[108] F.V.Atkinson,

Symmetric linear operations on a Banach space. **???** 53 (1950)

[109] W.Magnus:

Über einige beschränkte Matrizen.
Archiv d.M. Bd 2 405-412

[110] Ascoli, Guido:

Sulle matrici permutabili con la propria derivata. Univ Politac Torino
??? mat 9, 245-250 (1950) Zbltt **???**

[111] Über lineare Ungleichungen:

(1) Contributions to the theory of games , **???** H.W. Kuhn and A.W. Turker, Princeton univ Press 1950
(2) Stianke Math Ann 76, 340-342
(3) Dines, L.L.: PUSA 33 (1947), 329-331
(3) Farkas, I.: **???** Gelle 124 (1901), 1-27

[112] Papy, Georges

L'alg$\breve{e}$bre exterieure et la theorie des diviseurs *élé*mentaires (1950)
Zbltt $\underline{40}$, 148

[113] H. Weyl:

The elementary theory of convex **???** .
Contrib. to the theory of **???** , 3-18 Ann of Math **???**
Nr. 24. 1950. Math Preview 10, 352
= Comm. math. Helvetici $\underline{7}$, 290-306 (1935)

[114] H I. Zimmermann:

On normalizable transformation in Hilbert space. Acta math 86, 85-88 **???**

[115] M.R. **???** :

Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calcules of variations. Pac. J.M.1, 525-582 (1951)

[116] J.L. Brenner:

Matrices of quaternions. Pacif. J.M. 1, 325-336 (1951)

[117] B. Gyries, O. Varga:

Anwendung von p-Vektoren auf der dervierte Matrizen **???** Math. Debrecen 1 ? 137-145 (1951)
(= wohl geometrisches über p-te Determ.-transformation)

[118] M. Cipolla:

fulla teoria dei gruppi di ordine finitiv tecad Reale Napoli $\sim$ 1911-16