Erstellungsdatum: 21.4.2004
Private Notebook VIII

Helmut Wielandt

Juni 52 - Sept.55

Für Schiefe von Matrizen Sonderabzug R.L. Causey 1964 12.6.52 Änderung des Gesamt-Spektrums hermitescher Matrizen.
Ist A, B hermitesch, $C = A - B$, sind die EWe $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$, $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_n$, $\gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_n$, so gilt
$\sum |\alpha_v - \beta_v| \leq \sum |\gamma_v| \quad ^{*)}$

Bew: Wenn $C \geq 0$, ist $\alpha_v \geq \beta_v$, $\sum(\alpha_v - \beta_v) = \sum \gamma_v$

Wenn C bel., zerlege $C = C_A - C_-$
[: h]0, 1, 2 Schnitzer genannt X 57[: h]
Bemerkg: Da dasselbe mit $|\ |^2$ statt $|\ |$ gilt, entsteht die
Frage: 1) Gilt dasselbe für $|\ |^p$? (Ostrowski ?)
2) Welche Funktionen $f(\lambda)$ haben die Eigenschaft, dass bei Def. von $|A|_f = \sum\limits_v f(\alpha_v)$ für hermitesche Matrizen stets $|A + B|_f \leq |A|_f + |B|_f$?
3) Welches sind die unitär invarianten Normen im Modul $\mathfrak{h}$ der Hermiteschen Matrizen ?
*4) Welche Spektren treten auf bei $A + B$, wenn A, B alle hermiteschen Matrizen mit 2 gegebenen Spektren durchläuft ? "Spektrum" = wachsend geordnete Folge. bilden "konvexen" Raum
Ein Russe schon untersucht ? M.R. Lidskij

* = gilt vermutlich nur wenn $AB = BA$.-Gibts etwas Ähnliches für normale Matrizen A, B, etwa mit $\mathrm{Sp}[C\,C^*]^{\frac{1}{2}}$ statt $\sum \gamma_v$?

Seite 2

14.6. Die Ungleichungen von Weyl lassen sich so schreiben: Sind A, B, C hermitesche Matrizen mit $A + B + C = 0$ und ordnet die EWe $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$ usw.; so gilt stets $\alpha_\rho + \beta_\sigma + \gamma_\tau \geq 0$, wenn $\rho + \sigma + \tau \leq n + 2$
[: h]Verallgemeinerung auf mehr Summanden ?[: h]

Frage: Sind die Ungleichungen von Weyl zusammen mit $Spur(A + B + C) = 0$ auch hinreichend dafür, daß es zu α_v, β_v, γ_v drei Matrizen mit diesen Spektren und $A+B+C=0$ gibt ? Für $n=2$: ja. Für n = 4 nein ! s. P. 4

Falsch ist die Vermutung $|A+B| \leq |A|+|B|$, falls man definiert $|A|^2 = \overline{A}' A$
vgl z. B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

Die Ungleichung von Weyl hat ein Analogon für Produkte, aus dem sie gefolgert werden kann: [: h] auch Ky Fan. P.n.a. 37 (1951)
dort Beweis mit min max [: h]
Ist $A \geq 0$, $B \geq 0$ mit EWen $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots$ so ist bei $C = A\,B$: $\gamma_\rho \leq \alpha_\sigma \beta_\tau \quad (\sigma+\tau=\rho+1)$.
[: h]Bew: $\gamma_k = \min\limits_{x \in R_k} (x,\, B^{\frac{1}{2}} A\, B^{\frac{1}{2}} x) \leq (B^{\frac{1}{2}} x,\, A\, B^{\frac{1}{2}} x)$, $\exists\, x,\ |x| = 1,\ \beta_1 \ldots \beta_i$ unbet.[: h]

Seite 3

Frage:

> Gilt ein Analogon zu den Ungl. von Weyl für Produkte unitärer Matrizen ?

NB:

> Die Analogie geht mindestens so weit, daß bei $\alpha_v = arg\ v$-ter EW von A, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots$, $C = A\,B \quad \gamma_\gamma \geq \alpha_\gamma + \beta_1$ ist.

doch: s.u.! | Aber es stimmt nicht, daß bei $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$ stets $\alpha_{v-1} \leq \gamma_\nu \leq \alpha_{\nu+1}$ ist. Gegenbeispiel:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e^{3i\varphi} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$; $\gamma_\gamma = e^{i\varphi},\ e^{i\varphi + \frac{2\pi}{3}}, \ldots$

Satz: Bei stetiger Zuordnung (B exponentiell laufend) ist $\Sigma\ |\gamma_\nu - \alpha_v| \leq \Sigma\ |\beta_v|$, wenn $C = A\,B$, alles unitär.
[: h]Achtung: Der Satz von Weyl u.a. Ky Fan über $\Sigma|\lambda_\nu|^P < \Sigma|\gamma_\nu|^P$ gibt auch Aussagen über die EWe von AB [: h]
Satz:

> Ist A unitär, $B = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ und läuft φ von 0 bis 2π, so läuft $\alpha_v(\varphi)$ monoton wachsend von α_v bis $\alpha_{v+1} \quad (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots)$
> Vor: $\alpha_v(\varphi) \neq$ const. f.alle ν
> Beweis:
>
> a) monoton [: h] denn allg für $B(t) =$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & e^{i\beta_v t} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$ ist $\dot{\alpha} = \Sigma\,\beta_\nu |x_\nu|^2$ wenn $A\,B\,\mathfrak{x} = e^{i\,\alpha}\mathfrak{x}$

[: h]
[: h] wie allgemein bei normalen Wegen → [: h] b) Gesamtweg aller Wn ist $= 2\pi$
c) nach einem Umlauf von φ sind die α_v insgesamt die alten; jedes bewegliche ist also mindestens bis α_{v+1} gelaufen.
[: h] Also ändert $\mathfrak{S}$ so sind max **???** [: h]

NB: jeder bewegliche EW läuft genau bis zum nächsten beweglichen.
Seite 4

14.6. Satz: Ist A unitär, und hat B p EWe mit $\beta_v \geq 0$, die zudem $= 0$, $0 \leq \beta_v < 2\pi$, und läßt man B exponentiell auf dem kürzesten Wege laufen, so wächst jedes α_v um weniger als p Plätze wenn kein α_v konstant ist als Fktion von φ. Bew:(3) (Ferner wächst jeder EW höchstens um max β_v).

Folge: hat A einen ν-fachen EW α und B weniger als ν von 1 verschiedene EWe, so ist α noch EW für $A\,B$. (Ist auch direkt durch Dimension der Eigenräume zu sehen.)

Frage: Anwendung dieser Sätze auf endl. Gruppen ? Burnsideprobl. ?

Zu S. 2: Die Ungleichungen von Weyl zusammen mit $\Sigma\,\gamma_\nu = \Sigma\,(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ reichen für $n = 3$ noch nicht aus, um alle Folgerungen über die EWe von $A + B = C$ zu ziehen, wenn man die EWe der hermiteschen Matrizen A, B kennt. Gegenbeispiel: s. S. 5
Seite 5

Gegenbeispiel gegen Hinreichen der Bedggen von Weyl:
Für

$$\begin{aligned} \alpha_v &= -2 \quad -1 \quad +1 \quad +2 \\ \beta_v &= -1 \quad\;\; 0 \quad\;\; 0 \quad\;\; 1 \\ \gamma_v &= -3 \quad -2 \quad\;\; 2 \quad\;\; 3 \end{aligned}$$

sind die Weylschen Bedingungen

$$\alpha_\rho + \beta_\sigma + \gamma_\tau \geq 0 \quad (\rho + \sigma + \tau = 6)$$
$$\alpha_\rho + \beta_\sigma + \gamma_\tau \leq 0 \quad (\rho + \sigma + \tau = 9)$$

alle erfüllt, dazu $\Sigma\,(\alpha_v + \beta_v + \gamma_v) = 0$, aber es gibt keine hermiteschen Matrizen A, B, C mit diesen EWen und $A + B + C = 0$. Denn aus $D\,(\textbf{???} - C) = A + B$ folgt $\delta_1 + \delta_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$ (betrachte max

Spur $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^*\,D(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ mit $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^*(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bei obigen Wertesätzen ist aber $\delta_1 + \delta_2 = 5 > \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 4$.

Ansatz z. Beweis der Vermutung von Wittmeyer:
Seien A, B normal, $\lceil\, A - B\,\rceil \leq d$; dann lassen sich die EWe so ordnen, daß $|\alpha_v - \beta_v| \leq d$ $(v = 1, \ldots, n)$
Zum Beweis genügt es zu zeigen: zu jeder Zahl p mit $1 \leq p \leq n$ gibt es, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ mit $\beta_p, \ldots, \beta_n$ aus den Spektren gewählt sind, ein $(\alpha_k - \beta_\gamma) \leq d$.
Seite 6

Sei OBdA $d = 1$; Ann: $|\alpha_\nu - \beta_\lambda| > 1$ stets
Beweis: Seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}_{n-p+1}$ die linearen Räume, die von den Eigenlösungen von A zu $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ bzw von den EL von B zu $\beta_p, \cdots, \beta_n$ aufgespannt werden. Da $\dim \mathfrak{X}_p + \dim \mathfrak{Y}_{n-p+1} = n + 1 > n$, gibt es $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}_p$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{Y}_{n-p+1}$ mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, $|\mathfrak{x}| = 1$.
Sei

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_p = \mathfrak{y}_p + \mathfrak{y}_{p+1} + \cdots + \mathfrak{y}_n \quad \mathfrak{x}_i \perp \mathfrak{x}_k,\ \mathfrak{y}_i \perp \mathfrak{y}_k.$
Setze $M = \Pi_1^P\,(A - \alpha_\Pi) = f(A)$ Dann

Forts. S.9

$p = 2.\ n = 3$: Hier $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2$, $|\alpha_i - \beta_k| > 1$ $(i,\, k = 1,\, 2)$
etwa $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1,\, \alpha_2 = 0, 1 \\ d = 1 \end{matrix} \right\}$: Für jedes komplexe ζ ist $\min\, |\beta_i - \zeta| \leq \{|\zeta|^2(1 - x^2) + |1 - \zeta|^2 x^2\}^{\frac{1}{2}} + 1$
Durch passende Wahl von ζ erhält man ein β_i nahe an den α, aber noch nicht ganz die Vermutung von W.

In ähnlicher Richtung wie Wittmeyer liegt der folgende
Satz: Seien A, B normal: $|\alpha_i| \leq \cdots \leq |\alpha_p| \leq r < R \leq |\beta_p| \leq \cdots \leq |\beta_n|$
Dann ist $\lceil\, A - B\,\rceil \geq k - r$

Seite 7

Bew: Wähle $|\mathfrak{z}| = 1$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_p = \mathfrak{y}_p + \cdots + \mathfrak{y}_n$
$|(B - A)\,\mathfrak{z}| \geqq |B\,\mathfrak{z}| - |A\,\mathfrak{z}| \geq R - r$.
[: h] richtig zu jedem Kreis $\mathfrak{K}_r$ [: h] Folge: Sind B, A normal, $\lceil\, B - A\,\rceil = d$, so gibt es zur je p EWen α_i von A mindestens p EWe βi von B derart, dass jeder Kreis $\mathfrak{K}_r$, der alle α_i enthält nach konzentrischer Vergrösserung um Radius d auch alle β_i enthält. Insbesondere ist $|\beta_i - \alpha_k|^2 \leq \max\limits_i\,(|\alpha_i| + d)^2 + d^2$, $(etwa)$

Graph

Rangsatz für normale Matrizen
Seien A, B normal, $Rg\,(A-B) \leq r$. Dann enthält im R_3 jeder abg. Halbraum $\mathfrak{H}$, der $r+k$ Ecken des $3-$dim Wertevorrats enthält (unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit!), mindestens k Ecken des WV von B. [: h] Genügt etwa B norm ? [: h]
Beweis: Ann, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+k} \in \mathfrak{H}$, $\beta_k, \cdots, \beta_n \notin \mathfrak{H}$. Dann gibt es im Durchschnitt der zugehör. Eigenräume $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$, der die Dim $d > r$ hat, ein $\mathfrak{z}$ mit $A\,\mathfrak{z} = B\,\mathfrak{z}$; da zugeh. Mompkt liegt $\in \mathfrak{H}$ & $\notin \mathfrak{H}$
[: h]Gilt Umkehrung ? [: h] Fortsetzung: S.62

Seite 8

z.B.: Sind U, V unitär, so enthält jeder Kreisbogen (abg.) des Einheitskreises, der $r+k$ EWe von U enthält, mindestens k von U, wegen $Rg(U-V) \leq r$. Insbesondere wenn $Rg(U-V) = 1$, so trennen sich die EWe (im schwachen Sinn) auf dem EK.

Der Rangsatz kann gleichwertig in der Gauss-Ebene ausgesprochen werden: Sind A, B normal, $Rg(A-B) \leq r$ so enthält jeder abg. Kreisbereich $\mathfrak{K}$, der $k+r$ EWe von A enthält auch mindestens k EWe von B.

Aufgabe: Verallgemeinerung von Rang- und Verschiebgssätzen auf quasinormale und beliebige Matizen.

Die Eigenschaft $Rg(A-B) = r$ ist invariant gegen simultane gebrochen lineare Transformationen von A, B: Dies ist ein invarianter Abstandsbegriff.

[: h] Frage: Kann man Auflösbarkeit von $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ nilpotent) beweisen mit Aufspaltg $\mathfrak{G}^*$? [: h]

Seite 9

Zur Vermutung von Wittmeyer
Ann.: Seien A,B normal $A-B = D$, $\lceil D \rceil = d$

$$X^*A = A\,X^*,\ B\,Y = Y\,B \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_p & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$$

mit $|\alpha_i - \beta_k| > d$
Dann ist $M = X^*D\,Y = A\,X^*Y - X^*Y\,B$
also $\lceil M \rceil = \lceil A\,Z - Z\,B \rceil \leq d$, $Z = X^*Y$
andererseits ist $Z = X^*Y$ ein Ausschnitt aus einer unitären Matrix mit $\lceil Z \rceil = 1$, da für $\mathfrak{z} = X\,i = Y\,\vartheta \neq 0 \quad Z\vartheta = i$

$$m_{ik} = (\alpha_i - \beta_k)\,Z_{ik} \qquad |i| = |\vartheta| = |\mathfrak{z}| = 1.$$

Frage: "Streut man in einen Abschnitt einer unitären Matrix, der den Betrag 1 hat, Faktoren $|\ \ | > 1$ ein, so wächst der Betrag des Abschnitts "; ist das richtig

? Dann folgt Wittmeyer

[: h] nein: sonst würde für $V = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \vdots \\ \cdots & \cdot \end{pmatrix}$

unitär folgen: $|\varepsilon_{ik}| = 1 \to \lceil W \rceil = \lceil (W_{ik}\, \varepsilon_{ik}) \rceil$ [: h]

<u>Fehlerabschätzung zum Graeffeschen Verfahren.</u>

Sind alle Wurzeln x_v reell, $|x_1| \geq |x_1| \geq \cdots \geq |x_n|$.

$s_m = \sum_1^n x_v^{2^m}$, so ist $s'_m \leq x_1^{2^m} \leq s_m$

mit

$$s'_m = s_m - \tfrac{1}{2}(s_{m-1}^2 - s_m) = x_1^{2m} - (x_1^{2^{m-1}} - x_2^{2^{m-1}})x_2^{2^{m-1}} - \ldots$$

$$-(x_1^{2^{m-1}} - x_n^{2^{m-1}})\, x_n^{2^{m-1}}) - \ldots$$

Seite 10

Die Winkelschiefe $\sigma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ eines n-Beins muss so definiert werden, dass

$$\sigma(c_1\mathfrak{x}_1, \ldots, c_n\mathfrak{x}_n) = \sigma(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n)$$
$$\sigma(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}) \geq \sigma(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n), \text{ und } = \leftrightarrow (\mathfrak{x}_{n+1}, \mathfrak{x}_v) = 0$$

Vielleicht lohnt es eine “Winkelschiefe“ auch noch für den Fall von quadratischen Elementarteilern einzuführen, für $P_y = \lambda\, Q\, y$, $Q \geq 0$.

Diffgl.-EW Theorie allgemein-hermitescher Fall, Systeme 1.Ordnung, Metrik mit Hermitescher Stieltjes Integralform $\int \bar{\mathfrak{y}}'\, dM\, \mathfrak{y}$ $\quad dM \geq 0$ hermitsche-Matrix

Theorie möglichst invariant gegen die Transformation der unabh. Variablen x formulieren, zwecks asymptotischer Abschätzung.

Zur Definition der normalen EWA:

Kann man aus dem Normalitätskriterium 25(32) eine Definition der Normalität gewinnen, die evident invariant gegen $(\alpha\, p + \beta)/(\gamma\, p + \delta)$ ist !

[: h] $p \vee q \to p \vee (\alpha\, q + \beta)/(\gamma\, q + \delta)$?[: h]

Seite 11

Vermutung: Zwei EWe α, β einer Matrix A lassen sich genau dann durch unitäre Ähnlichkeitstransf. trennen, wenn der Wertevorrat von A auf der Vereinigung (Summe) $\mathfrak{H}_\alpha \cup \mathfrak{H}_\beta$ gleich der Vereinigg der Wertevorräte ist ($\mathfrak{H}_\alpha =$ Hauptraum zu α).

Zur EW Theorie der zweireihigen Matrizen:

Im Poincare'schen Halbraum ist ${}_2\mathfrak{W}_A$ die Vereinigung aller Kreisbögen duch die EWe α, β, die mit der Gaussebene einen $\not\sphericalangle \;\geq \nu_A$ bilden (ν_A = Normalitätswinkel). Ist $\alpha + \beta = 0$, so ist der Abstand (maximale) r_A von ${}_2\mathfrak{W}_A$ zu dem Ortskreis

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \rightarrow r_A = \lceil A \rceil - |\alpha| = \frac{1}{2}\sqrt{|\beta-\alpha|^2 + 2|\gamma|^2 + 2\sqrt{|\gamma|^4 + |\gamma|^2|\alpha-\beta|^2}} - \frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

$$\rightarrow AA^* = \begin{pmatrix} \alpha\overline{\alpha} & \alpha\overline{\gamma} \\ \overline{\alpha}\gamma & \beta\overline{\beta} + \gamma\overline{\gamma} \end{pmatrix}, \; A^*A = \begin{pmatrix} \alpha\overline{\alpha} + \gamma\overline{\gamma} & \beta\overline{\gamma} \\ \overline{\beta}\gamma & \beta\overline{\beta} \end{pmatrix}$$

$$[A] = (AA^* - A^*A) = \begin{pmatrix} -\gamma\overline{\gamma} & (\alpha-\beta)\overline{\gamma} \\ \overline{|\alpha-\beta|}\gamma & \gamma\overline{\gamma} \end{pmatrix}$$

$\lceil [A] \rceil = \mathrm{EWe}\,[A] = \pm|\gamma|\sqrt{|\gamma|^2 + |\alpha-\beta|^2} = F_A \quad \vartheta^2_{[A]} = 2|\gamma|^2(|\gamma|^2 + |\alpha-\beta|^2)$

Geometrische Bedeutung von F_A:

$\frac{\pi}{4}\; F_A$ = Flächeninhalt von ${}_2\mathfrak{V}_A$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \rightarrow |\gamma| = \min_f \lceil A^* - f(A) \rceil$$

Seite 12

Zu ${}_3\mathfrak{W}_A$:

Dass ${}_3\mathfrak{W}_A$ konvex ist, stimmt für $n = 2$ noch nicht; dort **???** konvexe Fläche.

Frage: Ist der "Wertevorrat auf einem linearen Teilraum $\mathfrak{I}$" der Dimension ≥ 3 stets konvex ? Ist $r_{A_B} \leq \max(r_A, r_B)$?

Gestalt: ${}_3\mathfrak{W}_A$ ist nie eine schlanke hohe Säule: $A = G + i\,M \rightarrow \lceil A \rceil \leq \lceil G \rceil + \lceil H \rceil$; insbesondere ist die Höhe von ${}_3\mathfrak{W}_A$ im Poincare'raum $h \leq \frac{a+h}{2}$, wobei a, h die Breite von ${}_3\mathfrak{W}_A$ in irgendzwei zueinander senkrechten Richtungen bedeutet. Bew: Schiebe Mitte des Rechtecks nach 0.

Andererseits ist $h \geq \frac{a+h}{4}$. Denn schiebt man den höchsten Pkt von ${}_3\mathfrak{W}_A$ über 0, so wird ${}_3\mathfrak{W}_A$ dort von der Halbkugel nun 0 berührt, liegt aber wegen Kreiskonvexität ganz unterhalb der Halbkugel, dh. dann ist $\lceil A \rceil \leq h$ [NB: Also $h = \min_\lambda \lceil A - \lambda \rceil$.] folglich wenn $A = G + iH$: $\lceil G \rceil, \lceil H \rceil \leq h$,

$a, b \leq 2h$; $a + b \leq 4h$

Es ist also sogar schärfer

$$\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \leq h \leq \frac{a+b}{2}$$

${}_2\mathfrak{W}_A$ passt ganz in einen Kreis vom Radius h um λ_0 mit $\lceil A - \lambda_0 \rceil = \lceil \min \quad A - \lambda \rceil = h$ = Höhe ${}_3\mathfrak{W}_A$

Da Schnitt von ${}_3\mathfrak{W}_A$ mit einer Ebene, die der Gaussebene infinitesimal benachbart ist, zeigt Kreise; denn es ist invariant gegen Ähnlichkeitstransf., so weit im EW Berührg stattfindet; dh die

Seite 13

EWe sind Nabelpkte (oder Spitzen von Kreiskegeln) für ${}_3\mathfrak{W}_A$. Für $A = [n, n] =$ Matrix $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \ddots \end{pmatrix}$ ist ${}_3\mathfrak{W}_A$ rotationssymmetrisch und berührt (mindestens) von der Ordnung $n-1$ die Gaussebene im Meridianschnitt:

$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \to A\,\mathfrak{x} = t\,\mathfrak{x} - \begin{pmatrix} t^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>NB:</u> Geben diese $\mathfrak{x}$ gerade die Meridiank.

? Jeder Randpkt R von ${}_3\mathfrak{W}_A$ entsteht i.A. nur aus einem Vektor $\mathfrak{x}$ (bis auf const-$\mathfrak{x}$); denn schneidet die Normale auf ${}_3\mathfrak{W}_A$ in R die Gaussebene in λ_1, so muss $\mathfrak{x}$ EV von $(A-\lambda_1)^*(A-\lambda_1)$ sein zum $\left\{\begin{array}{l}\text{od kleinsten}\\ \text{grössten EW.}\end{array}\right.$

Hat ${}_3\mathfrak{W}_A$ eine "Kante", dh. gibt es in einem Pkt ($\neq$ EW) zwei berührende Ebenen, so ist der zugeh. Vektor $\mathfrak{x}$ EV zu $(A-\lambda)^*(A-\lambda)$ für eine ganze Strecke in der Gaussebene,
oBdA für $0 \le \lambda \le 1$: $\mathfrak{x}$ EV zu A^*A, A^*+A. Dann
$A^*A\,\mathfrak{x} = p\,\mathfrak{x}$, $(A^*+A)\,\mathfrak{x} = q\,\mathfrak{x}$. $\quad oBdA\ \ q = 0$
$({A^*}^2 - q\,A^* + p)\,\mathfrak{x} = 0$
a) $\mathfrak{x}$ EV A, A^*: geht nicht da $R \neq$ EW
b) $p \neq q^2/4$:

> $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$, wo $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ EV von A^* zu versch EW.
> $\mathfrak{x}$, $A^*\,\mathfrak{x} \in \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\} = \mathfrak{X}$; $A\,\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$.
> $\mathfrak{x}_i \in \{A^*\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\} = \{A\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}\}$; $\mathfrak{X} = \{A\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}\}$, also kann man

von A,A^* ein Zweierkästchen unitär abspalten, gibt mit Matrixvergleich: A dort normal auf $\mathfrak{X}$.
c) $p = q^2/4$: $\quad oBdA\ \ p = q = 0$

> $A^*A\mathfrak{x} = 0 \quad A\mathfrak{x} = 0 \quad R$ EW geht nicht.

Also nur b) möglich: Kante $\to$ zwei versch. EW sind (einfach) unitär abspaltbar, Kante = ihre Verbdgsgerade.
Seite 14

Die Vekt. $\mathfrak{x}$ welche Rdpkte von ${}_3\mathfrak{W}_A$ liefern, sind genau die EV zu den Grössten u. kleinsten EWen aller $(A-\lambda)^*\,(A-\lambda)$. Der zugehör. EW selbst ist das Quadrat der Normalenlänge auf ${}_3\mathfrak{W}_A$.

Eine analytische Theorie der Dreiecksmatrizen auch für $n = \infty$ ergibt sich so: Ist $A = (a_{k\,\lambda})$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & z & & & & \\ & & z^n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & z^{n-1} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$, so ist

$B = Z^{-1}\,A\,Z = B(z)$ eine analytische Funktion von z, und die Streifen-

matrizen $\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ a_{k,\,1} & & \ddots & & \\ & a_{k+1,\,2} & & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots \end{bmatrix}$, sind die Koeff ihrer Laurent-

(Potenzreihen)entwicklung. Ist $|z| = 1$, so z unitär, also $\lceil B \rceil = \lceil A \rceil$ konstant. Hieraus folgt z.B., daß es eine Konstante C gibt, so daß $\lceil M \rceil \leq C \cdot \lceil A \rceil$, wenn M aus endlich vielen Streifen von A, sonst 0 besteht. Ferner gilt für <u>Dreiecksmatrizen</u> A festen Grades n: $\lceil A \rceil \leq c_n \cdot \lceil A + A^* \rceil$ denn
$A = \frac{1}{2\pi\, i} \int (1 + z + \cdots + z^{n-1})\, B(z)\, dz$; $c_n = |z| = 1 \int |1 + \cdots + z^{n-1}|(dz)$
[: h] trivial ist $c_{pq} \leq c_p + c_q$ Frage: $c_n \leq C$?! [: h]
$c_n \simeq$ const. log n:
Ferner ist (unabhgig von n) $\lceil (\frac{a_{ik}}{1+|i-k|}) \rceil \leq \text{const} \lceil (a_{in}) \rceil$ für bel. Mat.
[: h] vgl Schur, Bildgbeschrkter Formen ?! [: h]
Fejérs Kern zeigt: Für beliebige Matrizen ist
$\lceil (a_{ik}\,(1 - \frac{|i-k|}{n})_+) \rceil \leq \lceil (a_{ik}) \rceil \cdot \mathit{const}$,
$x_+ = \begin{matrix} x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{matrix}$
const. unabh. von n
[: h] Maximumsprinzip Schwarzsches Lemma Drei**???** Satz [: h]

Seite 15

<u>Frage:</u>
Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nilpotente Matrix A mit $\lceil A \rceil = 1, \lceil A + A^* \rceil < \varepsilon$?
$\min\limits_{\lceil A \rceil = 1} \lceil A + A^* \rceil$ für $n = 3$ bestimmen !
Satz:

Ist für $|\mathfrak{x}| = 1$ stets $|\mathfrak{x}^*\, A\, \mathfrak{x}| \leq a$, so ist $\lceil A^p \rceil \leq 4p\, a^p$ $\quad (p = 1, 2, \ldots)$.
Bew: $A^p = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|z|=b} \frac{z^p}{z-A}\, dz$, $b = (1 + \frac{1}{p})\, a$
$\lceil (z - A)^{-1} \rceil \leq \frac{1}{b-a} = (\frac{a}{p})^{-1} \rightarrow \lceil A^p \rceil \leq \frac{1}{2\pi}\, b^p\, \frac{2\pi\, b\, p}{a}$
$(1 + \frac{1}{p})^{p+1} \leq 4$

Satz:

Ist $A \underline{\gg} 0$ hermitesche Matrix, A reell, und ist für $p > 0$

$E_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 \\ 0 & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$ stets $A + pE_{ik} \underline{\not\gg} 0$, so ist

$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ mit $A_i > 0$, $Rg\, A_i = 1$. Bew mit

Zerlegg $A = B^* B$, $B \,|\, U\, B$, U zweireihig unitär $(b_{ik}) = B$ durch $C = (|b_{ik}|)$ ersetzen darf die a_{ik} nicht vergrössern.

Ist $a_{ik} \geq 0$, so $\lceil A \rceil \leq \lceil A + A^* \rceil$

Frage: Um welchen Faktor kann der Betrag einer hermiteschen Matrix wachsen, wenn man von a_{ik} zu $|a_{ik}|$ übergeht ?
Frage: Für welche hermitesche Matrix $A = (a_{ik})$ mit $|a_{ik}| = 1$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ ist $\lceil A \rceil = \min$?

[: h] Antwort S.17 [: h]
daraus das Entsprechende für $A \underline{\gg} 0$

Seite 16
Aus $[A] = A\,A^* - A^*\,A$ scheinen sich keine für die Einschliessungstheorie geeigneten Schiefemasse ableiten zu lassen. Denn für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & \sqrt{2} & 0 & & & & & & & \\
 & & & & \sqrt{3} & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & 0 & & & & & \\
 & & & & & & \sqrt{k} & 0 & & & & \\
 & & & & & & & \sqrt{k-1} & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)$$

$$\text{ist } [A] = \left(\begin{array}{cc|cc|ccc|cc}
-1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
\hline
 & & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right) = C,$$

$$[B] = \left(\begin{array}{cc|cccc|cccc}
-1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)$$

also $[B]$ unitär ähnlich zu $[A]$, obwohl für $k \to \infty$ B wesentlich "schiefer" ist, da $\lceil A \rceil = 1$, $\lceil B \rceil = \sqrt{k}$, und der Wertevorrat ${}_3\mathfrak{W}_B \supset {}_3\mathfrak{W}_A$ als kleinen echten Teil enthält.

[: h] hieraus dürfte folgen: Zu jeder Menge $\{\lambda_i\}$ und jedem Momentenpkt M gibt es A mit Spektrum geometr. $\subseteq \{\lambda_i\}$ und vertr. mit M und $[A] = C$. Denn $\mathfrak{W}_B$ enthält $\mathfrak{W}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{k} & 0 \end{pmatrix}}$. Aber wenn man $\mathrm{Sp}\,[\mathrm{A}]^2$ oder $\mathrm{Rang}\,[\mathrm{A}]$ beschränkt ? [: h]

$\cap_{B \text{ ähnlich } A}\ {}_3\mathfrak{W}_B = {}_3\mathfrak{K}_A$ ist die konvexe Hülle des Spektrums von A

Ist D eine zu A ähnliche normale Matrix, so ist
$\lceil A-\lambda \rceil - \lceil D-\lambda \rceil \leq r_A \qquad (= \text{Abstd } \overline{\mathfrak{W}_A \, \mathfrak{K}_A})$

$\lfloor D-\lambda \rfloor - \lfloor A-\lambda \rfloor = r_A,$
und für ein λ steht in einer der bei den Ungl. =.
Seite 17

Für jedes n wächst der Betrag einer hermiteschen Matrix $A = (a_{ik})$ bei Übergang zu $A_+ = (|a_{ik}|)$ höchstens um den Faktor $\sqrt{n}$; die Schranke ist scharf für $n = 2^\rho$.

Bew: (a) $\vartheta^2 A_+ = \vartheta^2 A \qquad |\alpha_+|^2_{\max} \leq \sum |a|^2 \leq n \, |d|^2_{\max}$
b) setze $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} D & E \\ +E & 0 \end{pmatrix}$, $A_{\rho+1} = \begin{pmatrix} A_\rho & \mathfrak{F} \, A_\rho \\ A_\rho \, \mathfrak{F} & -\mathfrak{F} \, A_\rho \, I \end{pmatrix}$
dann ist $A_\rho^2 = n \, E \quad (n = 2^\rho)$, also $|\alpha_\rho|_{\max} = \sqrt{n}$; $|\alpha_{+\rho}|_{\max} = n$
b) kurzer: $A_\rho = A_1 \times A_{\rho-1}$

Ist A nilpotent, $Gr\ A = n$, so ist $\lceil A \rceil \leq 2^{\frac{\log n}{\log 2}} \cdot \lceil A + A^* \rceil$
Bew mit Ausschneiden der linken unteren Ecken, wenn der Teil von $A + A^*$ unterhalb der Diagonale = A ist.

Vergleich von $\lceil A \rceil$ mit $\lceil D \rceil$, wo $A = A^*$, D der Teil unter der Diagonale. Sei $\begin{cases} c_n & (n = 2, 3, \cdots) \\ c_n^+ & \end{cases}$ definiert als kleinste Zahl, für die

$\lceil D \rceil \leq c_n \, A$ für alle n-reihigen hermit. A
$\lceil D \rceil \leq c_n^+ A$ für alle n-reihigen hermit. $A \geqq 0$

Dann ist $c_n = 2 \, c_n^+$
Ist $c_n^+(A) \leq \gamma_n$ für alle A mit $A^2 = A$, so $c_n^+ \leq \gamma$ allgemein.

Seite 18

Aus der trivialen Relation $\lceil D \rceil \leq \vartheta_D$ kriegt man so, $c_8^+ \leq 1 \quad c_8 \leq 2$; $c_2 = 1$ ferner durch Berechnung von $\operatorname{Sp} A^4$: $c_3 \leq \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$
Allgemein ist ($c_{pq} \leq c_p + c_q$?!) $c_{2^n} \leq n$
Für $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ -b & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ ist, wenn $a^2 + d^2 = 1 \quad A^2 = E$, also $\lceil A \rceil = 1$,
jedoch ist $\lceil D \rceil^2 = \delta$ die grösste Wurzel von $\delta(\delta-1)^2 = a^4 \, d^2$; maximal wird

hierin δ für $a^2 = \frac{2}{3}$, $d^2 = \frac{1}{3}$: hier $\lceil D \rceil^2 = \frac{4}{3}$.
Also ist $c_4 \geq \sqrt{\frac{4}{3}}$.
[: h]Frage: Kann man etwa durch Bildung Kroneckerscher Produkte beweisen $c_{p\,q} = c_p + c_q$?[: h]

Frage: Für welche Faktorenfolgen: $\cdots p_{-k}, \cdots,\ p_0,\ p_1, \cdots$ gibt es eine Konstante c so dass für Matrizen jeden Grades

$$\lceil (a_{ik}\ \ p_{(i-k)}) \rceil \leq c \cdot \lceil (a_{ik}) \rceil \quad ?$$

Vermutlich ist $p_n = \frac{1}{1+|n|}$ zulässig. [: h] Schur ? [: h]
Seite 19

Frage: Gegeben sei ${}_3\mathfrak{W}_A,\ {}_3\mathfrak{W}_B,\ f(A,\, B)$. Kann man $\bigcup\limits_{U^*\,U^2=E} {}_3\mathfrak{W}_{f(A,\,U^{-1}B\,U)}$ bestimmen ?
z.B. ${}_3\mathfrak{W}_{A+B}$, ${}_3\mathfrak{W}_{A\,B}$ eingrenzen durch ${}_3\mathfrak{W}_A$, ${}_3\mathfrak{W}_B$.

Frage: Kann man Gegenbeispiele gegen die Vermutung

$$\lceil D \rceil \leq \mathfrak{x} \cdot \lceil A \rceil \qquad\qquad (A = \begin{pmatrix} & \cdots & \cdots \\ \ddots & & \\ & \ddots & \vdots \\ D & & \vdots \end{pmatrix}$$

gewinnen durch Betrachtung von $|f(z)|$, $|Re\, f(z)|$ für $f(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$, $|z| = 1$?

Frage: Was bedeutet ${}_3\mathfrak{W}_A \subset_3 \mathfrak{W}_B$ für die unitär unzerfällbaren Bestandteile von A und B ? Was ${}_3\mathfrak{W}_A \subset\ {}_3\mathfrak{W}_B +\ {}_3\mathfrak{W}_C$ (+ = konvexe Hülle der Vereinigung).
Wann ist ${}_3\mathfrak{W}_A(L) \subset\ {}_3\mathfrak{W}_B(L)$ für jeden linearen Teilraum L von R_n ? Ist ${}_3\mathfrak{W}_A(L)$ konvex ?

Seite 20

Der Modul eines Ringgebiets
ist definiert als $\log \frac{\rho_2}{\rho_1}$, wobei $\rho_1 < |z| < \rho_2$ der konforme Kreisring ist. Es gibt einen **???** satz von Teichmüller.
Ansehen:
1) Atkinson nannte von Arbeiten von Gohberg $k\,(x\,A + x\,B + C)\,\mathfrak{Y} = 0$
2) J v Neumann, Allgemeine Spektraltheorie Math. Nachr. 4, 258-281
3) Schur, Crelle 140, 1-28

Hat Herglotz den Satz über $\Delta u = 0$, $u \geq 0$, $u \to 0$ radial ?

Verallgemeinerung der Hauptidealsatzes: Terada-Tanneka Zbl 41, 172

Friedrichs: Criteria for discrete spectra Zbl 41, 210
Commune pure appl math $\underline{3}$ 439 - 449 (1950)

Nakaur, Modern spectral theory Zbl 41, 234
Kerim Eyin, Über Stieltjes Integral Congres I, 379
Rellich Störungstheorie 606-613, Congr. I
Hamburger Entwicklungssatz Congr I 454

Seite 21

Zur allg. Idealtheorie:
Es ist gleichgültig, ob man das Element r eines bel. Rings ganzabhängig von der Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$ dann nennt, wenn

$$(1) \qquad \alpha^k + p_1\alpha^{k-1} + p_2\alpha^{k-2} + \cdots + p_k = 0$$

$p_k =$ homogene Produktsumme des Grades k in den m_ν,
(2) oder wenn es eine Matrix A mit Elementen aus $\mathfrak{M} \cup 0$ gibt mit $det\,(a\,E - M) = 0$. Denn aus (1) folgt die Exist. so eines A vermöge $\alpha\,\mathfrak{x} = A\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} =$ alle Potenzprodukte der Dimension $k-1$ in den Variablen $m_1, \ldots, m_k$ (die in den p_ν auftreten) <u>und</u> in α. Ob es auch eine Matrix A gibt, in der <u>nur</u> Elemente aus $\mathfrak{M}$ auftreten, keine 0, weiss ich nicht.
Wende !

Ein Determinantensatz: Sind A, B, C, D quadratische Matrizen von den Graden a, b, c, d) und ist E_n die Einheitsmatrix des Grades n, so hat

$$\begin{pmatrix} A \times E_b \times E_C \times E_d & E_a \times B \times E_C \times E_D \\ E_a \times E_b \times C \times E_d & E_a \times E_b \times E_C \times D \end{pmatrix}$$

genau die EWe von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, wobei α die EWe von A durchläuft, usw. Entsprechend für k^2 statt 4 Matrizen.
Seite 22

Determinanten [: h]schon bei Prüfer ?[: h]

Ganz-Abhängigkeit. Sei $\mathfrak{R}$ belieb. komm Ring:
$\overline{\mathfrak{M}}$ sei die Menge der von $\mathfrak{M}$ ganzabhängigen Elem. von $\mathfrak{R}$
Ist $\mathfrak{M}$ Modul, multipl. abg., Ring, Ideal in $\mathfrak{R}$, so ist $\overline{\mathfrak{W}}$ desgleichen. Bew mit Def der Elem v. $\mathfrak{W}$ als Eigenwerte von Matrizen. Genauer gilt (bei Mengen-Multiplikation u. Addition)

$\overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}} \leq \overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \qquad \overline{\mathfrak{A}}\ \overline{\mathfrak{B}} \subseteq \overline{\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}}; \overline{\overline{\mathfrak{A}}} \equiv \overline{\mathfrak{A}}$
inbes. $\mathfrak{A}.\overline{\mathfrak{B}} \subseteq \overline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}$, ist $\Re$ ganz. abgeschlossen in $\mathfrak{R}$, so $\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}$.
[: h] s. Krull S.128 [: h]
Der Beweis beruht auf der Darstellung:
Ist $L\,N = N\,L$, so ist $|M \times E + E \times N| = \varphi \cdot |M| + \psi \cdot |N|$ mit φ, ψ Polynom
??? mit ganzen rat. Koeffiz.
Dies folgt aus

$$\cdot \qquad |-M \times E + E \times N| = \begin{vmatrix} -m_{11}L + N & -m_{12}L \\ -m_{21}L & N - m_{22}L \end{vmatrix} = |\sum \pm c_{11}\, c_{21} \cdot\cdot|$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \mu\,(N,\,L),\ \mu(X)\,\mathfrak{y} = |X\,E - M|\,\mathfrak{y}^*$$

also $\quad = |N^k + \cdots \pm E \cdot |M|\,| = |N\,L + E\,|M|\,| = |N| \cdot |L| + |M| \cdot \psi$
Hiermit schliesst man dann z.B. für $\overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}} \subseteq \overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$ so:
Ist $|\alpha\,E - A| = |\beta\,E - B| = 0$ so
$|\alpha\,\beta\,E - A \times B| = |E \times (\beta\,E - B)\,\alpha + (\alpha\,E - A) \times B| = 0\,\varphi + 0\,\psi$
${}^*\mu(x,\,y) = |x\,E - M\,y| = x^m + \cdots + c\,x\,y^{m-1} \pm |M| \cdot y^m = x(\dots) \pm |M|\,y^n$
$\mu(N,\,L) = |N \cdot F \pm |M| \cdot L^m| = |M| \cdot \psi + |N| \cdot \varphi$
Allgemeiner: $\qquad \underbrace{A \vee C,\ B \vee D}_{\text{Muss auch ohne gelten:} A\,x = D\,y = 0 \to (A \times B + C \times D)\,(x \times y) = 0}$
$\to |A \times B + C \times D| = |A|\,\varphi + |D|\,\psi \qquad ?$

Seite 23

<u>Zur Determinantentheorie</u> Ist $A = (a_{k\,\lambda}$ eine $k - l-$Matrix mit frei variablen Elementen und $f(A)$ ein Polynom in den $a_{k\,\lambda}$ mit Koeff aus einem Modul $\mathfrak{M}$ (über dem die $a_{k\,\lambda}$ noch freie Var. sind) derart dass für $A = \mathfrak{B}\,\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{B} = (k,\,k-1)$, $\mathfrak{L} = (k-1,\,l)$ (frei variabel alles) $f(A) \equiv 0$ ist, so ist $f = \sum |A_\rho| \cdot g_\rho(A)$, wobei $|A_\rho|$ die k-reihigen Unterdet von A durchläuft und g_ρ wieder Koeff aus $\mathfrak{M}$ hat.
Bew: a) $f(t\,\sigma_1\,\sigma_2 \cdots \sigma_l)$ zeigt, dass man nur f's zu betrachten braucht, die in jeder Spalte homogen sind
b) wenn f linear in jeder Spalte, Induktion nach Spaltenzahl: Schaffe a_{11} weg vermöge $a_{11}\,|A_1| \equiv \sum a_{i1}\,|A_i|\pm 1)$, und ϑ, wo $\vartheta = (|A_1|, \cdots, |A_p| \cdots)$ in $\mathfrak{R}([A])$.
Dann ist f^* von u_n unabh, daher $f^* = \sum\limits_2^k a_{k1}\,f_k$, und die f_k haben inbezug auf

$$= \begin{pmatrix} a_{12} \cdots a_l \\ \cdot \\ a_{k2} \cdots a_{kl} \end{pmatrix} \text{ dieselbe Eigenschaft.}$$

c) wenn der Maximalgrad von f bezüglich einer Spalte $= m$ ist, so ist der von $g(A\,B) = f(A + t\,B) - f(A) - f(t\,B)$
$< m$: Induktion. Daraus $f((1+t)\,A) \in \mathfrak{M}\,\vartheta$.
Ist $Gr\,f = \gamma$ insgesamt; so folgt $(1+t)^\gamma\,f(A) \in \mathfrak{M}\,\vartheta$
ist $d(\gamma) = \left(\binom{\gamma}{1}, \dots, \binom{\gamma}{\gamma^{-1}} \right)$, so $\qquad d(\gamma) \cdot f(A) \in \mathfrak{M}\,\vartheta$

für $\gamma = q\,p$, p Primpkt, ist $d(\gamma) = 1$. Für $\gamma < q_p$ nimm $a_{1\,k+1} \cdots a_{1\,N}\, f = f^*$
Seite 24

Ist $\mathfrak{G}$ der Modul der ganzen Zahlen, so erzeugen die k-reihigen Unterdet einer allgemeinen Matrix $(a_{k\,\lambda}) = A$ ein Primideal von $\mathfrak{G}\,[A] = \mathfrak{R}$.
Bew: 23.
Sind Elemente von $\mathfrak{M}$ lin ab bezgl $\mathfrak{R}$, so bezügl $\mathfrak{M}$. Daher ist der obige Satz äquivalent mit 23.

Über den g.g.T.:
Ist für $f = a_0x^n + \cdots + a_n$, $g = b_0x^k + \cdots + b_k$ der g.g.T. $(f,\, g) = d$ linear, so ist

$$n+k-2\left\{\begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & b_0 \\ a_n & & & & b_k & & \\ & a_n & \dots & & \vdots & b_k & \\ & & & & & \vdots & \ddots \\ fx^{k-2} & fx^{k-1} & \dots & f & gx^{n-1} & gx^{n-2} & g \end{vmatrix}\right. = \text{const} \cdot d$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k-1}$$

NB: Von der Resultante werden die 2 letzten Zeilen gestrichen, die drittletzte durch $fx^{k-2}\ldots$ ersetzt. Gestrichen wird ferner die letzte a-Spalte und die letzte b-Spalte.
Seite 25

Frage über Elementarteiler:
Folgt für die Determinanten ideale $\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{L}_3$ u. dergl. aus $A = B\,C$?

Aufgabe: Alle Normen im Raum der $(n,\, n)$-Matrizen suchen, für die bei normalen A, B $\quad \|A \cdot B\| \geq \|A - B\|$ gilt, wobei A, B die zugehör Diagonalmatrizen in geeigneter Anordnung.

[: h] Am 21.11.52 habe ich M.-G. K. gesagt, dass sie Theorie der "Breite" weitgehend auf den Fall übertragen werden kann, dass man eine nach Gr. $\mathfrak{G}$ durch Ähnl. trans mit einer Untergr. $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{G}$, oder sogar mit einer Automgr. $\mathfrak{A}$ von G, in Klassen einteilt."Diese Idee sei ihm noch nie gekommen."[: h]

Zur "Breite" $\beta(\mathfrak{G})$ für p Gruppen: $\beta\,\phi\,(\mathfrak{G}) \leq \beta(\mathfrak{G})$, sogar $\beta_{\phi\,(y)}(\mathfrak{G}) \leq \beta_y(\mathfrak{G})$. Denn $\phi(\mathfrak{G})$ kann mit dem Normalisator eines Elements nicht die Untergr. erzeugen.

Seite 26

Faktorisierbare Gruppen der Ordnung 2^n. Sei $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$, $(\mathfrak{G}) = 2^n$, $(\mathfrak{G}') = 8$, $\mathfrak{G}'$ nicht zyklisch. Sei $A^{2^a} = B^{2^h} = E$, $A^{2^{a-1}} = A_1 \in \mathfrak{G}'$, $A_1 \lhd \mathfrak{G}$, dh $A_1 \in \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{G})$. Behauptung: $\mathfrak{G}'$ Abelsch, $\mathfrak{G}' \,/\, \{A_1\}$ zyklisch, Typ $\mathfrak{G}' = (4,\, 2)$
Bew. (a) $\mathfrak{G}' \,/\, (\mathfrak{G},\, \mathfrak{G}')$ ist zyklisch, wird von $C = (A,\, B)$ erzeugt.
also gibt es in $\mathfrak{G}'$ genau eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ der Ord 4 mit $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$. <u>Ann:</u> $\mathfrak{G}' \,/\, A_1 \neq zykl.$
(b) $\mho_1(\mathfrak{G}) = \{A^2\}\{B^2\}$ ist abelsch über $\{A_1\}$ wegen $(\mathfrak{G}' \,/\, \{A_1\}) = 4$; daher enthält $\mathfrak{G}'$ alle Elemente von $\mathfrak{G}$ mit $X^2 \in \{A_1\}$, insbesondere $A^{2^{a-2}} = A_2 \in \mathfrak{G}'$, $(\{A_2\}) = 4$.
b$_1$): Ann $\mathfrak{G}'$ sei eine Diedergruppe. Dann $\{A_2\} \lhd \mathfrak{G}$, $(B^2,\, A_2) = E$, $A_2 \in \mathfrak{Z}(\mho_1\,\mathfrak{G})$, $A_2 \in \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{G}')$, Wid.
b$_2$): Ann $\mathfrak{G}'$ Quaternionengruppe $B_1 = B^{2^{b-1}} \in \mathfrak{G}'$, $B_1 = A_1$; $B_2 = B^{2^{b-2}} \in \mathfrak{G}'$ (wie bei A_2). $B_2 \notin \{A_2\}$, da sonst $A_2 \in \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{G}'), \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}')$. Weder $\{A_2\}$ noch $\{B_2\}$ ist $\lhd\,\mathfrak{G}$ (sonst etwa $(A_2,\, B^2) = E$, $A_2 \in \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{G}')$). Also ist $\{C\} = \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G})$, $\{C\} = \mathfrak{G}'$: Wid.
b$_3$): $\mathfrak{G}'$ abelsch. Dann Typ $\mathfrak{G} = (4,\, 2)$ nach b) Dann ist die Gr. der El. der Ord 2 von der Ord 4: also ist sie $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} = \mathrm{Typ}(2, 2)$

Seite 27

Also ist $\mathfrak{N}$ die einzige $\mathfrak{G}$ inv. Untergr der Ord 4 in $\mathfrak{G}$! $\{A_2\} \neq \mathfrak{N}$. $\{A_2\}$ bleibt bei A fest, also nicht bei B; folglich $B^{-1}\{A_2\}\,B = \{C\}$ (dies ist $\neq \{A_2\}$ weil sonst $\{A\} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ zyklisch, $\mathfrak{G}' \,/\, \{A_1\}$ zykl.) Also $C = A^{B-1} = (A^{2\,m})^B$, $A \in \{A\}^B$, $\{A\} \lhd \mathfrak{G}$, Wid.
Also die <u>Ann</u> ist widerlegt: $\mathfrak{G}' \,/\, \{A_1\}$ ist zyklisch, also $\mathfrak{G}'$ abelsch vom Typ (4, 2).
<u>NB:</u> $\mathfrak{G}'$ enthält 3 Elemente der Ord 2 aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, wegen $A_{1j}\,\mho_1(\mathfrak{G}')$.
<u>NB:</u> Lässt man die Vor $A^{2^{a-1}} \in \mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ weg, so bleibt: $\mathfrak{G}'$ abelsch vom Typ (4, 2), $(\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})) = 4$. Denn entweder $A^{2^{a-1}}$ oder $B^{2^{h-1}} \in \mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, sonst Induktion.

Frage: Ist jede faktorisierbare Gr der Ord 2^n zweistufig $(\mathfrak{G}^{||}\, E)$? Einige Teilresultate hat Huppert, Diss.

Der Satz von Huppert, wonach in $\mathfrak{G} = \{A_1\}\{A_2\}$, wenn $\{P_i\}$ die Ugr der Ort $p(=$ max Primteiler von $(\mathfrak{G}))$ in $\{A_i\}$ ist, entweder $\{P_1\} \lhd \mathfrak{G}$ oder $\{P_2\}$ $\lhd\, \mathfrak{G}$ ist, lässt sich leicht direkt durch Induktion nach Faktorgruppen beweisen mit Hilfe meiner Bemerkg in 31, S.6, Mitte. (Ohne Benutzg von Darstellungen oder irgendwelche Rechng: man achtet auf die Gruppen in R, die von gewissen $X \in \mathfrak{G}$ festgelassen werden und betrachtet gewisse $Y \vee X$.)
Seite 28

EW-Einschliessung im hermiteschen Fall, f Freiheitsgerade. Im Fall von f Freihgeraden folgt aus $A = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline D^* & P \end{array}\right)$ mit gegebenem C, D, D^*, Typ $C = (f,\, f)$ dass die f Ritzwerte ρ_k zusammen mit ∞^f verträglich sind. Hieraus folgt, dass das Intervall $(\infty,\, \rho_k]$, wenn $\rho_1 \le \rho_2 \le \cdots \le \rho_f$, ein minimales ist, das k EWe enthält. Daher: Sind $(u <)v_1 \le v_2 \le \cdots \le v_f$ die Wn von $|X^*(A-u)(A-v)\,X| = 0$, so ist $(u,\, v_k]$ ein Minimales k-faches Einschlintervall. Da $\overline{\infty\,\rho_1}$, Tangente an den Momentenvorrat von A gilt das stets auch für $\overline{u\,v_1}$, also erhält man die minimalen Einschliessintervalle durch die Tangenten an ${}_3\mathfrak{W}_A$. Im Fall $f = 2$ ist der eine Ellipse im Innern von $\overline{u\,v_1\,v_2}$, also zu klein für die Schliessungseigenschaft.

Bei der Verträglichkeitsbedgg genügt es, den Momenten voll angepasste "quadr. Polynome $F(\lambda)$ zu betrachten:
$F(\lambda) = A_0 + A_1\,\lambda + A_2\,\lambda^2$ mit $A_0\,M_0 + A_1\,M_1 + A_2\,M_2 = M_0\,A_0 + M_1\,A_1 + M_2\,A_2 = \mu_F \cdot E$
Satz: $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ vertr. $M_0\,M_1\,M_2 \longleftrightarrow$ Jedes voll angepasste $F(\lambda)$ mit $F(\lambda_1) \ge 0, \cdots, F(\lambda_n) \ge 0$ gibt $\mu_F \ge 0$. Bew: Von F zu

Seite 29

$T^*F\,T$ übergehen mit $Sp\,T^*T = 1$, $Sp\,\sum T^*\,A_iT\,M_i = \min$.
Im Fall $f = 1$, $s = 2$ gibt es zu gegebenem λ_1, λ_2 einen Momentenpkt $S_{12} = S$, so dass für jedes vertrgl. Sp. $\{\lambda_\nu\}$ stets $\{\lambda_3, \cdots, \lambda_n\}$ mit S verträglich ist $(\lambda_1 \le \lambda_2 < \ldots)$. Entsprechend bei $s = 3$: es gibt $S_{1\,2\,3\,4}$, vertr. $\lambda_5, \cdots, \lambda_n$.
Erster Bew: Ist

$$\begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & \cdots \quad \cdots & p_4 & = \\ 1 & \cdots & & 1 & = \\ \lambda_1 & & & \lambda_n & \\ \lambda_1^2 & & & \lambda_n^2 & \vdots \\ \lambda_1^3 & & & \lambda_n^3 & \vdots \\ \lambda_1^4 & & & \lambda_n^4 & \end{array}$$

lösbar, so ziehe von λ_1 mal jeder Zeile die folgende ab, dann mit Rest dasselbe bezgl λ_2: gibt $\tilde{q}_\nu = \frac{p_\nu}{(\lambda_i-\lambda_\nu)(\lambda_2-\lambda_\nu)} \ge 0$ als Lösung eines Gl Systems für $\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \lambda_3 & \cdots & \lambda_4 \\ \lambda_3^2 & & \lambda_4^2 \end{array}$ mit rechten Seiten, die nur von den alten und von λ_1, λ_2 abhängen.

Zweiter Beweis nur für $n = 2\,s$ gültig: Setze $\prod\limits_1^{2s-1} (A - \lambda_\nu) = B$. Es ist $B \ge 0$, $\mathfrak{x}^*\,B(A - \lambda_{2n-1})\,(A - \lambda_{2n})\,\mathfrak{x} = 0$ mit $\mathfrak{x}^*B\,\mathfrak{y} = (\mathfrak{x},\, \mathfrak{y})$ heisst dass $(\mathfrak{x}^*, (A - \lambda_{2n-1})\,(A - \lambda_{2n})\,\mathfrak{x}) = 0$, λ_{2n-1}, λ_{2n} vertr mit dem zu $\mathfrak{x}$, $A\,\mathfrak{x}$ in der neuen Metr. gehörigen Mompkt. S.

Seite 30

Im Fall $f = 2$. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ vertr. X, $A\,X$ kann man die Lösungen $P_\nu \geq 0$ von $\sum\limits_\nu \lambda_\nu^k\, P_\nu = M_k$ so wählen, dass $Rg\,P_2 + Rg\,P_4 \leq 2$.

Bew: $\sum\limits_\nu \lambda_\nu^k\, c_\nu = 0$ hat Lösg $+ - + -$. Bilde erst $P_\nu + c_\nu \cdot \delta \cdot E$ mit $\delta \nearrow$, bis P_2 (od P_4) sing, dann $P_\nu + c_\nu \cdot \delta \cdot P_2$, bis $P_2 = 0$ oder P_4 sing.
Frage: Kann man zugleich $Rg\,P_1 + Rg\,P_3 \leq 2$ erreichen ?

Aufgabe: Permungr mit reg abelschen Ugr $\mathfrak{G}$ untersuchen durch Ermittlung der Transsyst von $\mathfrak{Z}_1$, wo $\mathfrak{Z}$ der Zentralisator einer Ugr von $\mathfrak{G}$ ist.-
Wie ist es mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{A}$ zwei verschiedene Invar p^q, p^β hat und $p \nmid \mathfrak{B}$?
Wie mit Typ $\mathfrak{G} = \{p, p, q, q, q\}$?

Seite 31

Über trans. Permugr.
Ist $\mathfrak{G}$ transitiv, und gibt es in einem Transitivitätssystem, von $\mathfrak{G}_1$, etwa $\mathfrak{G}_1\,K_1, \ldots, \mathfrak{G}_1\,K_m$, Vertreter K_μ aus einer <u>intransitiven</u> Ugr $\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}$ imprimitiv. Dann $\mathfrak{G}_1(E^+\mathfrak{K})^\infty \neq \mathfrak{G}$ und Gruppe. (Verallg von Schur Kriterium: Hier wird keine reguläre Ugr vorausgesetzt.) $\|$ Beweis samt Ergänzung auf S. 99 / 100: Auch eine Nebenklasse nach $\mathfrak{K}$ genügt.
Folge: Ist $\mathfrak{G}$ primitiv, und besitzt eine Ugr $G < \mathfrak{G}$ ein Transitivitätssystem der Länge $n - k$ $\quad (n = \mathrm{Gr}\,\mathfrak{G})$, so besitzt $\mathfrak{G}_1$ höchstens $k+1$ Transsysteme (mit der 1). Bew: sonst liegt eins von diesen in dem Transs von G.

Modul der Transitivitätssysteme $\mathfrak{G}, \mathfrak{J}$ einer beliebigen Ugr $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ hat ganz $\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1$ als Linksmultiplikatoren !
$\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}$
Das geht über Schur hinaus, der nicht Vertauschbarkeit $\mathfrak{K}\,\mathfrak{G}_1$ gefordert. Man rechnet also in dem Ring mit der Basis $\mathfrak{G}_1\,R_1, \cdots, \mathfrak{G}_1\,R_n$. Besser multipl. man gleich mit $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ Transsvv. $\mathfrak{G}_1$; denn dann $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}$, daher ist die Anzahl der Symbole im Produkt der "Transs." $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}$ gleich dem Produkt der Anzahlen.

[: h] Fortsetzg. S.51 [: h]

Seite 32

Als Transs $\mathfrak{U}$ bezeichnet man vielleicht besser jedes Element $\gamma \in$ Gruppenring von $\mathfrak{G}$, für das $\mathfrak{G}_1\gamma = \mathfrak{G}_1\,\gamma\,U$ alle $U \in R$.
Dann gilt: Ist γ_1 Transs $\mathfrak{G}_1$, ω Transs $\mathfrak{U}$, so $\gamma_1\,\omega$ Transs $\mathfrak{U}$.
Damit gilt vielleicht: Hat ein eigentl Transs / primärer Komplex) ω von $\mathfrak{U}$ u Element, ist γ_1 eig Transs von $\mathfrak{G}_1$, so ist die Anzahl der Paare $K\,T$ mit $K \in \gamma_1$, $T \in \omega$, $K\,T \in \omega'$ (ω' geg. eig. Transs von f) durch u teilbar. Daraus würde folgen: Sind $\gamma_1\,\eta_1$ zwei eig. Transs von $\mathfrak{G}_1$ $((\gamma_1), (\eta_1)) = 1$, so ist $\gamma_1\,\eta_1 = c \cdot \delta_1$ mit δ_1 eig. Transs. von $\mathfrak{G}_1$. Das gäbe neuen Beweis dafür, daß das längste Transs von $\mathfrak{G}_1$ zu einer primitiven $\mathfrak{G}$ zu keinem anderen Trans teilerfremde Länge haben kann.

Aufgabe: Untersuchung der unauflösbaren Gruppen, von denen jede Untergruppe auflösbar ist.

Seite 33

Die Monodromiegruppe von $p(x) - y = 0$ (p Polynom) ist genau dann imprimitiv, wenn $p(x) = f(g(x))$ (f, g Polynom)
Bew: Ist Gruppe imprim., so genügt x_1 einer Gl. des Graden a über einem Zwikö: diese sei $G(x) = 0$; die Koeff c_ν von G als elementarsymm Fktionen gewisser $x_1, \ldots, x_n$ werden für $y \to \infty$ selbst unendl höchstens von der Ord $\frac{\nu}{n}$. Die Konjug zu $G(x)$ seien $\sum c_\nu^{(\beta)}\,x^\nu = G_\lambda(x)$. Dann sind die elsymm Fkt $d\rho$ von $c^{(1)}, \cdots, c_1^{(\beta)}$ ganz rat und bei $y = \infty$ von Ord $\leq \frac{\rho \cdot \nu}{n} \leq \frac{\rho}{a}$ für $\nu < a$ (denn $ab = n$) also konstant. Also mit Ord $\omega \leq \frac{1}{b}$ $G(x) = g(x) - \omega$, wo ω den Zwikö erzeugt. Genügt ω der Gl $f(\omega) = 0$ mit Koeff aus $Co\,(y)$, vom Grade b, so sind deren Koeff wegen der Wachstumsstärke wieder konstant. Es ist $f(g(x)) = 0$, also $f(g(x_\nu)) = p(x)$. Umkehrg klar: sind die Wu von $f(\omega) = 0$ $\omega_1, \cdots, \omega_b$, so bilden die x_v mit $g(x_v) = \omega_1$ eine Imprimzeile; oder: $g(x_1)$ erzeugt echten Teilkö von $Co\,(y,\, x_1)$, da $Gr = b$

Seite 34

10.1.53 Happy birthday theorem. [: h] $f = 1$ s. auch VI$_8$! [: h]
Der Stellungsvorrat eines beschrkten Hermiteschen Operators L mit den Schranken γ, δ liegt ganz unterhalb der Sehne der Parabel durch $(\gamma,\, \gamma^2)$, $(\delta,\, \delta^2)$.
Bew: $(x,\, (L-\gamma)\,y) = [x,\, y]$ setzen:
Schwarz: $[x,\, (L-\gamma)\,x]^2 \leq [x,\, x]\,[(L-\gamma)\,x,\, (L-\gamma)\,x]$

$$= (x, (L-\gamma)\,x) \cdot ((L-\gamma)\,x,\, (L-\gamma)^2\,x)$$

dh $\|(L-\gamma)\,x\|^4 \leqq (x,\, (L-\gamma)\,x) \cdot (\delta - \gamma) \cdot \|(L-\gamma)\,x\|^2$

$$\|(L-\gamma)\,x\|^2 \leq (x,\, (L-\gamma)\,x) \cdot (\delta - \gamma)$$

$||\gamma||^2\,||x||^2 + \|L\,x\|^2 - 2\,\gamma\,(x,\,L\,x) \leq (\delta-\gamma)\,(x,\,L-\gamma))\,x$
Mompkt : $\|x\| = 1_{\uparrow}$, $M = (\xi,\eta)$ $\quad \xi = (x, Lx)$ $\quad \eta = \|L\,X\|^2$ gibt
$\gamma^2 + \eta - 2\,\xi\,\gamma \leq (\delta-\gamma)\,(\xi-\gamma)$
$\eta \leq (\delta+\gamma)\,(\xi-\gamma) + \gamma^2$
[: h] d.h. $L^2 \leq (\gamma+\delta)\,(L-\gamma) + \gamma^2$ $\qquad (L-\gamma)\,(L-\delta) \leq 0$![: h]
das ist die genannte Gerade
NB: Durchsichtiger für $\gamma = 0$, $\delta = 1$. Läuft einfach hinaus auf $0 \leq L \leq \xi \to L^2 \leq L$
[: h] kurzer Beweis $L - L^2 = L^2(1-L) + (1-L)^2 L$ [: h]
Folge mittels gebr. lin Trans: Der Stellungsvorrat einer hermiteschen Paarung liegt in der konvexen Hülle des Schattens, den er bei Beleuchtung von einem beliebigen Parabelpkt aus auf die Parabel wirft.
<u>Daher: Stellungsvorrat γ = konvexe Hülle von $\gamma \cap \mathfrak{p}$.</u>

Seite 35

Darin steckt:

(1) $Sp\,L \neq \emptyset$
(2) $\lambda \notin Sp\,L \longleftrightarrow (L - \lambda\,I)^{-1}$ beschrkt. Dies schon aus Paarungstheorie klar

(3) und die Einschliessungstheorie für <u>einen</u> Schritt

(4) Störungsrechnung $\|L - L^*\| < \varepsilon \to$ Verschbg $< \varepsilon$ von γ_L.

Offene Fragen: (5) Jeder isolierte Punkt von $Sp\,L$ ist EW, wenn $\mathcal{R}$ Hilbertr. [: h] s. 36 [: h]
(6) Liefert die zu S. 34 analoge überlegung für den 2. Stellungsvorrat $\gamma_2(L)$ etwas ? Es besteht aus $\begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix}$, $M_i = X^*\,L^i\,X$.
Dabei Schwarzsche Ungl. in der Form $M_1\,M_0^{-1}\,M_1 \leq M_2$ verwendbar. Zweckmässig vielleicht Darstellg der hermiteschen Matrizen als Quotienten, Siegel

(7) Entsprechende Überlegung für nichtnormale L ?

Über mehrere Freiheitsgrade:
Dafür, daß $\{\lambda_\nu\}$ mit $(\mathfrak{x}_1,\,\mathfrak{y}_1)$ <u>und</u> $(\mathfrak{x}_2,\,\mathfrak{y}_2)$ verträglich $(\mathfrak{w})$ ist, ist notwendig
1) $\{\lambda_\nu\}\,\mathfrak{w}\,(\mathfrak{x}_1,\,\mathfrak{y}_1)$ 2)$\{\lambda_\nu\}\,\mathfrak{w}\,(\mathfrak{x}_2,\,\mathfrak{y}_2)$ 3)$\{\lambda_\nu\}^{(2)}\,\mathfrak{w}\,(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{y}_1)^{(2)}\,(\mathfrak{x}_2,\,\mathfrak{y}_2)^{(2)}$ und L^2 = 2-te Determinantentransformation von L, $\{\lambda_\nu\}^{(2)}$ ihr Spektr.
Frage: Ist das auch hinreichend ?

Frage: Wie ändert sich Schiefe einer Matrix bei Potenz- oder Determinantentransformation ?
Seite 36

Aus Happy Birthday theorem folgt: Ist L hermitesch $f(\lambda)$ eine gebr. rat. Fkt, die auf dem Spektrum Λ von L $|f(\lambda)| \leq C$ genügt, so $||f(L)|| \leq C$. Damit kann man $f(L)$ definieren für alle $f(\lambda)$, die sich als Grenzwert einer auf $\bigwedge$ gl kgten Folge rat Fktnen darstellen lassen. Insbesondere: Ist (35.5) 1 isolierter Pkt im Spektrum, $0 \in \Lambda \leq [0,\, 1]$, so kgt $L^n \Rightarrow F$ mit $F^2 = F$. Es ist $F \neq 0$, weil der Stellungsvorrat von F, wie der der L^n, stets die Strecke $\overline{P_0,\, P_1}$ enthält: Ferner ist $(L-1)\,F = \lim\,(L^{n+1} - L^n) = 0$. 1 EW.

Happy Birthday für normale L:
Wenn L normal, beschrkt, $|\mathfrak{x}^* L\,\mathfrak{x}| \leq 1 \leftarrow \|\mathfrak{x}\| = 1$
so ist $\|L\,\mathfrak{x}\| \leq 1$ für $||\mathfrak{x}|| \leq 1$. [: h] Verallgem.: S. 39 [: h]
Bew: L hat die Eig. $Re\,\mathfrak{x}^*(1 \pm L)\,\mathfrak{x} \geq 0$
Hieraus vererbt sich auf L^2:
Wegen $(1 - L^2) = \frac{1}{2}\{(1 + L^*)\,(1 - L)\,(1 + L) + (1 - L^*)\,(1 + L)\,(1 - L)\}$
$Re\,\mathfrak{x}^*(1 - L^2)\,\mathfrak{x}^* \geq 0$.
Nun hat nicht nur L die obige Eig; sondern auch jedes $\xi\,L$ wenn $|\xi| = 1$. Daher $Re\,\mathfrak{x}^*(1 - \xi\,L^2)\,\mathfrak{x}^* \geq 0 \leftarrow |\xi| = 1$: Also $|\mathfrak{x}^*\,L^2\,\mathfrak{x}| \leq 1$.
$|\mathfrak{x}^*\,L^n\,\mathfrak{x}| \leq 1 \leftarrow n = 2^\alpha$. Da L^n normal, folgt hieraus nur $L^n = G_n + i\,H_n$
$\|G_n^2\| \leq 1 \quad |H_n^2| \leq 1 \quad \|(L^*\,L)^n\| \leq 2 \rightarrow \underline{\|L^*L\|} \leq 1$. wegen Dehn, (Schwarz)

Seite 37

Zum Happy Birthday theorem: Glatte Fassung:
Ist γ der Abgeschlossene Stellungvorrat einer hermiteschen Paarung und sind $P_1,\, P_2,\, P_3$ drei Punkte auf der auch im ∞ abgeschloss. Parabel derart, dass die abgeschl. Geraden $\overline{P_0\,P_1}$ und $\overline{P_0\,P_2}$ zu γ fremd sind, so ist das abg Dreieck $P_0\,P_1\,P_2$ fremd zu γ.
Frage: Analogon bei normaler Paarung mit einem Kegel, dessen Grdkreis aus dem Paraboloid von einer Ebene ausgeschnitten wird ?
Liegt bei 2 Ausgangsvekt. $\mathfrak{x}_i$, L normal, der Stellungsvorrat γ' von L auf $\alpha\,\mathfrak{x}_1 \alpha\beta\mathfrak{x}_2$ ganz in jedem Kegel, dessen Spitze P auf Paraboloid $\mathfrak{P}$ liegt und dessen Grdkreis der Kreis des Schattens von γ' auf $\mathfrak{P}$ von P aus ist ?

Sind von der Ellipse $\mathfrak{E}$, die den Stellungsvorrat von L auf $\alpha\,\mathfrak{x}_1 + \beta\mathfrak{x}_2$ darstellt (L hermitesch) nur die beiden Punkte M_i zu $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1,\, 2)$ gegeben, so behält man so eine Eingrenzung für ganz $\mathfrak{E}$: $\mathfrak{E}$ liegt ganz auf der Seite von $\overline{P_1\,P_2}$, auf der $M_1,\, M_2$ liegen; (für bel. Rdpkt P).
Graph
$\overline{P_1\,P_2}$ umhüllt wohl die Aussenellipse zur ausge. Ell. $\overline{M_1\,M_2}$.

Seite 38

Der Stellungvorrat einer bel. Matrix auf einer von zwei lin. un. Vektoren aufgespannten Ebene $\mathfrak{E}$ ist eine Ellipsoidfläche (mit Ansartgen), die von ∞ den gleichen Schatten wirft, wie der volle Stellungsvorrat der Ritz-Matrix (und wie der Stellungsvorrat auf $\mathfrak{E}$ jedes Zwischenabschnitts); der Schatten ist also eine Ellipse mit den Ritzwerten als Brennpkten; diese sind die Projektion der Berührgspkte des Paraboloids mit dem Stellvorrat der Ritzmatrix.

Sei L ein beschränkter Operator.
In Räumen unendlicher Dimension gilt nicht mehr: Aus $\underline{|\ L\ |} > 0$ folgt Existenz von L^{-1}. Beispiel: $L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$; hier $\underline{|\ L\ |} = 1$, aber $\underline{|\ L^*\ |} = 0$;
Hier existiert ${L^*}^{-1}$ nicht, also auch nicht L^{-1}. In <u>jedem</u> Hilbertraum gilt aber: Aus $\underline{|\ L\ |}\ \ \underline{|\ L^*\ |} > 0$ folgt Existenz von L^{-1}. Denn wegen $\underline{|\ L\ |} > 0$ ist $L\,\mathcal{R}$ abgeschlossen, und wegen $L^*\,\mathfrak{x} \neq 0$ ist $L^*\,\mathcal{R} = \mathcal{R}$.
Anderer Bew S.39

Seite 39

NB: Dieser Bew. liefert mehr: Im Hilbertraum existiert L^{-1} genau dann, wenn $\underline{|\ L\ |} > 0$, $L^*\mathfrak{x} \neq 0$ für $\mathfrak{x} \neq 0$.
NB: Anderer Beweis für $\underline{|\ L\ |}\,\underline{|\ L^*\ |} > 0 \rightarrow L^{-1}$:
$\underline{|\ L\,L^*\ |} > 0$, und für hermitesche stimmts.
[: h] NB: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ hat $\mathfrak{W}^2_A = \{z|\ |z| = 1\} = \mathfrak{E}$
$B = \frac{A+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\,A} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}\,A$. Daher Entsprechendes zu (2)
falsch für $f(x) = \frac{x-\alpha}{1+\overline{\alpha}\,x}$ statt x^n.[: h]
Über 2-Wertevorrat von A^n
Sei ${}_2\mathfrak{W}_A = \lambda \longleftrightarrow \lambda = \mathfrak{x}^* A\mathfrak{x},\ |\mathfrak{x}| = 1$. Sei $\lambda \in \mathfrak{E} \longleftrightarrow |\lambda| \leq 1$.
(1) ${}_2\mathfrak{W}_A \subseteq \mathfrak{E} \rightarrow\ {}_2\mathfrak{W}_{A^2} \subseteq \mathfrak{E}$
Bew:

$$\begin{array}{llll} Re\,1 - A^2 = Re\,(1-A)\,(1+A) = \frac{1}{2}\,Re\{(1-A^*) + (1+A^*)\}\,(1-A) \\ (1+A) = \frac{1}{2}\ Re\,(1-A^*)\,(1+A)\,(1-A) + \frac{1}{2}\,Re\,(1+A^*)\,(1-A)\,(1+A) \\ = \qquad\qquad\qquad \geq 0 \qquad\qquad\qquad + \qquad\qquad\qquad \geq 0 \end{array}$$

Ebenso $Re\,(1 - \eta\,A^2) \geq 0$, wenn $|\eta| = 1$.
(2) ${}_2\mathfrak{W}_A \subseteq \mathfrak{E} \rightarrow\ {}_2\mathfrak{W}_{A^n} \subseteq \mathfrak{E} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$
Bew ebenso mit $1 = \frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{n \\ \xi = 1}} \frac{1-x^n}{1-\xi\,x}$
[: h] Zu Grunde liegt: $Re\,B \geq 0 \rightarrow Re\,B^{-1} \geq 0$; $Re\,B_i \geq 0 \rightarrow Re \sum B_i \geq 0$

Zusammenhang mit v. Neumann-Vereinfacher in Math. Nachr. ?[: h]
(3) Enthält $|\eta| = 1 \ \eta \in \ _2\mathfrak{W}_{A^n}$ und ist $_2\mathfrak{W}_A \subseteq \mathfrak{E}$, so ist:
a) für ein ε mit $\varepsilon^n = \eta \qquad \varepsilon \in$ Spektrum A, oder
b) für jedes ε mit $\varepsilon^n = \eta \qquad \varepsilon \in \ _2\mathfrak{W}_A$

Seite 40

(1) Über $_2\mathfrak{W}_{f(A)}$, $f(x)$ =Polynom.
Liegt $_2\mathfrak{W}_A \subseteq \mathfrak{R}$ = konvexes Polygon, und ist $0 \in \mathfrak{R}$, und bezeichnet α_ν die Fusspunkte der Lote von 0 auf die (verlgt.) Seiten von $\mathfrak{R}$, und ist $f(x) = \Pi(1 - \frac{X}{\alpha_\nu})$, so

$$Re\, f(A) \geq 0 \qquad \text{[: } h\text{]um genau[: } h\text{]}$$

Bew: *[durchgestrichen:* $1 = \sum c_\nu \frac{f(x)}{1-\frac{x}{d_\nu}}$ *?]* hat Lösungen $c_\nu > 0$. Dann wie S.39
$0 < -\sum(\zeta_\nu A - 1) = \frac{\sum (n-\nu)\, c_\nu A^\nu}{\sum c_\nu\, A^\nu}$, $\sum c_\nu\, x^\nu := \Pi_{\nu=1}^n 1 - \frac{x}{alpha_\nu}$).

(2) Über $_2\mathfrak{W}_{A^2}$.
Ist $_2\mathfrak{W}_{A^2} \subseteq \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}$ konvex, $\mathfrak{K} = -\mathfrak{K}$ (dh symmetr zu 0), und ist $\lambda \in \mathfrak{L} \longleftrightarrow \lambda = K^2$, $K \in \mathfrak{K}$, so ist $_2\mathfrak{W}^2_{A^2} \subseteq \mathfrak{L}$.
a) Bew braucht nur für $\mathfrak{K}_0$: $|Re\, K| \leq 1$ geführt zu werden; allgemein stelle man $\mathfrak{K}$ als Durchschnitt gedrehter $\mathfrak{K}_0$ dar.
b) Bew für $\mathfrak{K}_0$: $A = G + i\, H$, $G^2 \leq 1$.
??? $= \{(1 + i\, t)^2;\ -\infty < t < \infty\}$
Graph
Mit $\frac{1}{\alpha} = \beta = \beta' + i\, \beta''$ kann die Beh so ausgespr. werden: $Re\,(1 - \beta\, A^2) \geq 0$

Seite 41

Es ist $B = Re\,(1 - \beta\, A^2) = (1 - G^2) + G^2\,(1 - \beta') + (G\, H + H\, G)\, \beta'' + H^2 \beta'$
$\beta'\, B = \beta'(1 - G^2) + (\beta''\, G + \beta'\, H)^2$, also ≥ 0
[denn $Re\,(1 - \beta\,(1 + i\, t)^2) = (1 - \beta') + 2\, t\, \beta'' + t^2\, \beta' \geq 0$ für alle t, $= 0$ für ein t]
daher $\beta''^2 = \beta'\,(1 - \beta')$.
Frage: Gibts auch Beweise unter Benutzung von $_2\mathfrak{W}_A$, $\underline{\left|\ A - \varepsilon\, \infty\ \right|}$?

Falsch wäre die Vermutung $_2\mathfrak{W}_{A^2} \subseteq$ konv. Hülle $_2\mathfrak{W}_A \cdot_2 \mathfrak{W}_A$
Gegenbeispiel: $A = H + i\, H$ mit
$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
hier $Im\, A^2 = G\, H + H\, G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not\geq 0$, aber $_2\mathfrak{W}_A \cdot_2 \mathfrak{W}_A \subseteq$ obere Halbebene.

[: h] Frage: $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ monoton fallend ? [: h]

Gebrochene lin. Fktion von Paarungen
Der Teilraum von $\mathcal{R}$, der aus den Linearverbdgen der ersten und der zweiten Komponenten besteht, bleibt bei gebr. lin. Transf. der Paarung unverändert.

Ziel der Einschliessungstheorie für nicht normale Op sollte vielleicht nicht die Lokalisierung von Ewen sein, sondern von Stellen "hoher Gefahr" in der λ-Ebene: Gefahr etwa: $\lceil (A-\lambda)^{-1} \rceil$ oder ein physikalisch sinnvoller Ausdruck. [: h] Oder von Pkten des Stellungsvorrats nahe dem Rande [: h].

[1] Seite 43

Frage:

> Sind, wenn $A = G + i\,H$, die EWe von $G^2 + H^2$ zu Abschätzungen für die EWe von A zu verwenden ? Oder die von $(G^2 + H^2)^2 + [G,\, H]^2$ oder ähnlich ?

<u>Symmetrische unendliche</u> Matrizen mit komplexen Elementen haben, im Gegensatz zu endlichen, spektral ausgezeichnete Eigenschaften: z.B. $\lfloor M \rfloor = \lfloor M \rfloor$! Vielleicht beziehen die 'selbstadj.' Dglen mit komplexen Koeffizienten ihre Eigenschaften, Entwicklungssätze u. dergl., <u>daher</u> ? Vielleicht lohnt es, den Stellungsvorrat einer symmetrischen Matrix zu untersuchen; vielleicht auch $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$! Auch ist für $M = M'$: $\lfloor f(M) \rfloor = \lfloor f(M)^* \rfloor$, also muss die Sp.-Theorie gut gehen. Diese Eigenschaft kommt auch den normalen Matrizen zu.
Frage: Wem noch ?!

Seite 44

Die symmetrischen Matrizen S auf dem Hilbertschen Folgenraum sind abstrakt so zu fassen: es ist $S^* = \forall\, S \,\forall^{-1}$, wobei $\forall$ eine "antilineare" Operation ist. die die f längentreu auf sich abbildet: [: h] $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$. $\|\forall\, \mathfrak{x}\| = \|\mathfrak{x}\|$. $\forall\, a\, \mathfrak{x} = \overline{\alpha}\, \forall\, \mathfrak{x}$ [: h]

Aufgabe: Spektraltheorie komplexer symmetr. Matrizen. Hat der ${}_3\mathfrak{W}_A$ für nilpotente symmetrische A Besonderheiten ?

Aufgabe: Elementarteilertheorie vollstetiger Op. des Hilb. Raums (oder allgemein); oder Beschränkung auf vollstet symmetrische Operatoren.

Für Matrizen A <u>endlichen</u> Grades ist ${}_3\mathfrak{W}_A = {}_3\,\mathfrak{W}_{A'}$, [daher auch ${}_2\mathfrak{W}_A = {}_2\,\mathfrak{W}_{A'}$, was aber viel trivialer ist: $(\mathfrak{x}^*\, A\, \mathfrak{x})' = \mathfrak{y}^*\, A' \mathfrak{y}$].
Denn ${}_3\mathfrak{W}_A$ und ${}_3\mathfrak{W}_{A'}$ im Paraboloid haben dieselben nichtvertikalen Stützebenen, da im Halbraum dieselben Stützhalbkugeln, weil $\lceil A - \lambda \rceil$

[1] S.42 und S.43 nur die obere Hälfte gestrichen

$= \lceil\, A' - \lambda \,\rceil$ für jedes λ, ebenso $\lfloor\;\rfloor \lfloor\;\rfloor$.
$\lceil\, A \,\rceil = \lceil\, A' \,\rceil$ folgt aus $A^*\, A = \overline{A}'\, A = \overline{\overline{A}\, A'} = \overline{A'^*\, A}$

Seite 45

Die Betrachtung von $B = \begin{pmatrix} A & \\ & A' \end{pmatrix}$ statt A bringt bei <u>endlichen</u> Matrizen nichts Neues, da Wertevorrat ${}_3\mathfrak{W}$ ungeändert, aber bei <u>unendlicher</u> Dimension vereinfacht er sehr, da nun ${}_3\mathfrak{W}_B$ als Randpkte genau das Spektrum von A hat (= Punkte ohne beschrnkte zweis. Inverse). Man kann daher jeden Paraboloidpkt, der nicht $\in\ {}_3\mathfrak{W}_B$ ist, durch eine gebr. lin. Trans. φ nach ∞ werfen, $\varphi(B)$ ist beschränkter Operator; für jede rat Fkt $\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} = w(\lambda)$ mit $\psi \neq 0$ auf ${}_3\mathfrak{W}_B\ \cap\ \mathfrak{p}$ existiert $\omega(A)$.
$\begin{pmatrix} A & \\ & A' \end{pmatrix}$ ist unitär ähnlich zu $S = \begin{pmatrix} A + A' & i(A - A') \\ -i(A - A') & A + A' \end{pmatrix}$, wenn $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$
Eine symmetrische Paarung, deren $\overline{{}_3\mathfrak{W}}$ ∞ nicht enth. ist ein beschr. 0_p.

Was ergibt sich, wenn man den Satz $|{}_2\mathfrak{W}_A| \leq 1 \rightarrow |{}_2\mathfrak{W}_{A^n}| \leq 1$ als eine Aussage über ${}_3\mathfrak{W}_A$ in einem Kegel mit Spitze in ∞ formuliert, die Spitze aber durch eine ausartende Projekt. Trans nach (1, 1) verlegt unter Beibehaltung des "Grundkreises" $|\lambda|^2 = 1$?
Gilt $(A\,B = B\,A,\ |{}_2\mathfrak{W}_A| \leq 1,\ |{}_2\mathfrak{W}_B| \leq 1) \rightarrow |{}_2\mathfrak{W}_{AB}| \leq 1$?!
[: h] z.B. für $n = 2$, beide EWe verschieden ? [: h]

Seite 46

Zu Umkerg von Lambertreihen:
Mit $\varphi(x) = (x - x^2)$ hat auch $\psi(x) = \sum \frac{1}{n^2}\, \varphi(x^n)$ die Eigenschaft $|\sum \frac{1}{n}\ \psi(x^n)| < C \quad 0 < x < 1$.
Ferner dürfte $\psi'(1) = -\infty$ sein.

Aufgabe in der Gruppentheorie: Untersuche auf n absteigde.
a) Φ Ketten $\mathfrak{G}_1 \geq \mathfrak{G}_2 \geq \cdots \geq \mathfrak{G}_i \geq \ldots$ mit $\Phi\,(\mathfrak{G}_i) \leq \mathfrak{G}_{i+1}$
b) $Z\Phi$-Ketten : ausserdem $(\mathfrak{G},\, \mathfrak{G}_i) \leq \mathfrak{G}_{i+1}$

Fürs Determinantenbuch: Lehrbücher der Analyt Geom durchsehen.

Ist es vernünftig, einen Ring (oder sonst eine Struktur) "einfach" zu nennen, wenn sie homorphes Bild jedes homomorphen Bildes $\neq 0$ von sich selbst ist ?

Seite 47

Über gewisse Einteilungen der Elemente einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in Klassen von Primzahllänge p. 24.1.53

I. Seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{A} = E$, Indikator = norm. Kern von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}$ sei E. Die Gr $\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}$ sei als Permugr in den Symbolen von $\mathfrak{G}$ treu dargestellt, $\mathfrak{G}$ regulär, $\mathfrak{A}$ lasse E fest. Für $G \in \mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{A}_G$ die Gruppe $\leq \mathfrak{A}$, die G fest lässt, also $\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}$; und $G^{\mathfrak{A}}$ bezeichne das Transtitvitätssystem von $\mathfrak{A}$, das G enthält. Sei $G \in \mathfrak{G} \to (G^{\mathfrak{A}}) = 1$ oder p, $(\mathfrak{A}) = p^\alpha$ $(\alpha \geq 2)$. Dann gibt es $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{N}) = p$ mit $\mathfrak{N}\,G \vee \mathfrak{A}$ alle $G \in \mathfrak{G}$, (so dass * $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ mit den Transs. $\mathfrak{N}\,G$ erzeugt).

Bew: (a) $\quad \mathfrak{A}_G \neq \mathfrak{A}_H,\, (G^{\mathfrak{A}}) = (H^{\mathfrak{A}}) = p \to \begin{cases} G^{\mathfrak{A}} = G\,\mathfrak{N}_G \\ \mathfrak{A} \\ H = H\,\mathfrak{N}_H \text{ mit } \mathfrak{N}_H = \mathfrak{N}_G \leq G \end{cases}$

Bew: $\exists\ A \in \mathfrak{A}_G$: $\mathfrak{A}\,H\,A \neq \mathfrak{A}\,H$, $\mathfrak{A}\,G\,A = \mathfrak{A}\,G$, $G\,A = A'\,G$

$\exists\, A$: $G\,A = A'\,G$, $\mathfrak{A}\,Q\,A' \neq \mathfrak{A}\,Q$ mit $Q = H\,G^{-1}$

Diese A' sind eine Gruppe $A' \in \mathfrak{A}_1\,G\,\mathfrak{A}\,G^{-1}$ $\quad \mathfrak{A}'$

Also ist $\mathfrak{A}'$ transitiv auf der Klasse von Q, diese hat Ord p. Dann ist $\mathfrak{A}$ transitiv auf $Q^{\mathfrak{A}} \cdot G^{\mathfrak{A}}$, da man jedes El in $Q\,G$ überführen kann: $Q_1\,G_1 \to Q_2\,G \to Q\,G$.

D.h. $Q^{\mathfrak{A}}\,G^{\mathfrak{A}} = p\,(Q\,G)^{\mathfrak{A}} = p\,H^{\mathfrak{A}}$, $Q^{\mathfrak{A}}\,G_i = H^{\mathfrak{A}} \ \leftarrow\ G_i \in G^{\mathfrak{A}}$

$Q^{\mathfrak{A}} \cdot G_i = H^{\mathfrak{A}}$, $G_i \in G^{\mathfrak{A}}$

[: h] * *Also* $\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}\,G = \mathfrak{N}\,G\,\mathfrak{A} = G\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{A} = G\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} \to \mathfrak{A}\,\mathfrak{N} \trianglelefteq G \to \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{N}$

$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{N}$ ist Typ $(p, p, \cdots)$ da die Transgebiete Lge p.[: h]

Seite 48

$Q^{\mathfrak{A}}\,G_i\,G_j^{-1} = Q^{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{N}_{G^{-1}} = G^{\mathfrak{A}}\,(G^{-1})^{\mathfrak{A}}$ ist Gruppe der Ord p mit $(G^{-1})^{\mathfrak{A}} = G^{-1} \cdot \mathfrak{N}_{G^{-1}}$.

Also existieren ebenso $\mathfrak{N}_G$, $\mathfrak{N}_H$, haben Ord p.

$G^{\mathfrak{A}} = G\,\mathfrak{N}_G$, $H^{\mathfrak{A}} = H\,\mathfrak{N}_H$; Nun $Q\,G^{\mathfrak{A}} = H^{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{N}_G = \mathfrak{N}_H$.

(b) <u>Befreiung von der Vor</u> $\quad \mathfrak{A}_G \neq \mathfrak{A}_H$ von (a):

Teile die Klassen der Länge p nach $\mathfrak{A}_G$ ein

zu $\mathfrak{A}_1$ gehöre, zu $\mathfrak{A}_2 \neq \mathfrak{A}_1$ usw.

G_1, G_1',... $\qquad G_2$, G_2',...

Nach a) ist $\mathfrak{N}_{G_1} = \mathfrak{M}_{G_2}$ und $\mathfrak{N}_{G_1'} = \mathfrak{N}_{G_2} \to \mathfrak{N}_{G_1} = \mathfrak{N}_{G_1'}$.

Also $\mathfrak{N}_{G_1} = \mathfrak{N}$ für alle G in p-Klassen.

(c) Beh: $\overline{\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}}$

Bew: $\mathfrak{N}\,\overline{G = G^{\mathfrak{A}}}$, $\mathfrak{N}\,G^{-1} = (G^{-1})^{\mathfrak{A}} = (G^{\mathfrak{A}})^{-1} = G^{-1}\,\mathfrak{N} \qquad \mathfrak{N} \vee G''$

II. Zusätzlich zu I sei jetzt vorausgesetzt $\mathfrak{G} \trianglelefteq \mathfrak{G}\,\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ ebenso wie $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ elementweise fest bei Ähnlichkeitstransf. mit $\mathfrak{A}$.

[: h] $|[\mathfrak{G}, \mathfrak{A}]| = p$ [: h]

Bew: $\mathfrak{N}$ ebenso fest wegen $(\mathfrak{N}) = p$, $(\mathfrak{A}) = p^\alpha$, und $\mathfrak{N}$ inv gegen $\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{N} = G^G \cdot (G^{-1})^{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ fest wegen $G^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{N}\,G$.

Seite 49

III. Über I, II hinaus sei nun $\mathfrak{A}$ eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{B}$, auch $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{G}$, in der Darst. als Permgr mit den Symbolen aus $\mathfrak{G}$. Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ ein p-Sylowkomplement, $\overline{\mathfrak{G}}$ seine Fixgruppe in $\mathfrak{G}$. Dann gilt $(\overline{\mathfrak{A}}) \,|\, p-1$, $\overline{\mathfrak{A}}$ zyklisch
$\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\overline{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{A}$ zentralisiert $\mathfrak{N}$, aber kein El aus $\overline{\mathfrak{G}}$
Typ $\mathfrak{A} = (p_1, \cdots, p)$ $\mathfrak{B}$ auflösbar $E \neq \overline{A} \in \overline{\mathfrak{A}}$ zentralisiert $\overline{\mathfrak{G}}$, aber kein El aus $\mathfrak{N}$.
[Weitere starke Einschrken für den Zusammenbau von $\mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ ergeben sich aus dem Umstand, dass für $A \in \mathfrak{A}$ stets $Z \to Z^{A-1}$ in Homomorphismus des Zentralisators $\mathfrak{Z}$ (von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$) in $\mathfrak{N}$ ist]
Bew: Nach II sind $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ elementweise fest bei $\mathfrak{A}$, ebenso aber auch bei allen $\mathfrak{A}^B$, also auch bei deren Erzeugnis $\mathfrak{K}$. Hierdurch hat jedes K die Ordnung p, also $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{B}$, und weil nur Transs der Länge p von $\mathfrak{A}$ auftreten, ist $\mathfrak{A}$ von Typ $p, \cdots, p$. Die Darstellg von $\mathfrak{B}$ in den Klassen von $\mathfrak{G}$ zeigt, da $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{B}$, dass $\mathfrak{B}$ auflösbar; ist $\overline{\mathfrak{A}}_p$ Sylowkomplement, so deckt die Fixgruppe $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{G}$ ganz $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, denn in jeder Klasse von $\mathfrak{G}$ bleibt ein Element fest. Lässt ein El von $\overline{\mathfrak{A}}$ auch $\mathfrak{N}$ auch $\mathfrak{N}$ elementweise fest, so hat es Ord p, 1, also Ord 1, dh. kein $\overline{A} \neq E$ lässt $\mathfrak{N}$ elem w. fest: $\overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{N} = E$ wenn $\overline{\mathfrak{A}} \neq E$

Seite 50

Daher lässt kein $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{A}}$ mit $\overline{A} \neq E$ zwei Elemente aus $G^{\mathfrak{A}}$ fest, also $(\overline{\mathfrak{A}}) \,|\, (p-1)$, $\overline{\mathfrak{A}}$ zyklisch. Hieraus folgt, daß $\overline{A}$ in $\mathfrak{A}$ eine feste Potenzierg bedeutet: $\overline{A}^1 A \overline{A} = A^k$, $k = k(\overline{A})$.

Zur weiteren Untersuchung dieser Verhältnisse sollte man wissen, für welche p der Satz gilt, dass in jeder trans. Permngr des Grades p je zwei Untergruppen des Index p konjugiert sind. Immer gilt das nicht:

Gegenbeispiel 1: Sei $\mathfrak{G} = \{A, B, C\}$ mit $\begin{cases} A = (124)\,(056) \\ B = (12)\,(36) \\ C = (0123456) \end{cases}$

Dann sind die 7 Tripel
013 insgesamt bei $\mathfrak{G}$ invariant. Die Untergr $G = \{A, B\}$, vom
124 Index 7, die 124 fest lässt, lässt keine Ziffer
235 fest, ist also nicht konjuguert zu $\mathfrak{G}_1$. [: h] auch P.Hall
346 $\{A, B\} = 056 \cdot 053 = (03)\,(56)$
450 Ord $\{A, B\} = 6 \cdot 4 = 24$
561 Ord $\mathfrak{G} = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ [: h]
602

NB: $(\mathfrak{G}) = 660$ enthält $\mathfrak{A}_5$. In dieser wird durch die Einbettung S-Ring mit Basis zahlen 1, 1, 1, 1, 1 erzeugt

11, 11, 11, 11, 11

[: h] Das bezieht sich wohl auf S.51 oben. [: h]
Seite 51

Gegenbeispiel 2: $\mathfrak{G} = \{A,\, B,\, C\}$ mit $A = (14593)(2\,8\,X\,7\,6)(0)$
$B = (4\,5)(3\,9)(0\,7)(6\,X)$, $C = (0\,1\,2\,\ldots\,7\,8\,9\,X)$.
Hier sind die 11 Quintupel, die durch Anwendung von C^i auf 14593 entstehen invar bez $G = \{A,\, B\}$.

Dagegen gilt für $p = 2^{2^\alpha} + 1$: $\mathfrak{G}$ hat keine Ugr G des Index p außer $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_p$. Denn sei $\mathfrak{K}$ ein Transs von $\mathfrak{G}$ (mit den Potenzen eines p-Zyklus P als Symbolen), so ist $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{-1} = k' + l\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \{P\}$, weil $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{-1}$ im Transitivittsring von $\mathfrak{G}_1$, liegt. Also ist $\mathfrak{K}$ nicht singulär (weil $k' \neq 0$), daher haben $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}$ gleich viel Transsysteme, d.h. 2: $\mathfrak{H}$ hat $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{p} - \mathfrak{K} = \mathfrak{L}$.
[: h] Nun $P = 2^{2^\alpha} + 1$! [: h] $\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \frac{k\,l}{p-1}(\mathfrak{P} - E)$ gibt $p - 1\,|\,kl$; $(k,\, l) = 1$ da [: h] $k + l = p$ [: h]. $2|k \to p - 1\,|\,k$ $k = p - 1$, $l = 1$: $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1$.
NB: Da p beliebig hat ? ($\mathfrak{K}$) mit $p - 1$ volle Primärteilern von $p - 1$.
[: h] gemeinsam; [: h] so ergab Rechng: bei $p = 13$?, 17, 19? ist nur $l = 1$ möglich $2 + l$).

$13 = 4 + 9, \quad 19 = 10 + 9$

Allg. Zusammenhang zwischen <u>verschiedenen</u> Permut-Darstellungen derselben Gruppe $\mathfrak{G}$, etwa noch $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$: Ist $\mathfrak{K}_1$ ein Transs von $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$ bei Darst nach $\mathfrak{H}_1$, also $\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{U} \leq \mathfrak{H}_1\,\mathfrak{K}_1$, und $\mathfrak{I}$ ein Transs von $\mathfrak{G}_1$ bei Darst nach G_2, also $\mathfrak{H}_2\,\mathfrak{I}\,\mathfrak{H}_1 = G_2\,\mathfrak{I}$, so wird $\mathfrak{H}_2\,\mathfrak{I}\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{U}_1 \leq \mathfrak{H}_2\,\mathfrak{I}\,\mathfrak{K}_1$, also $\mathfrak{I}\,\mathfrak{K}_1$ besteht aus vollen Transs von $\mathfrak{U}$ bei Darstell nach $\mathfrak{H}_2$. Ist $\mathfrak{I}$ nicht singulär, so

Seite 52

wird die zweite Darst. der ersten im Bereich der Matrizen ähnlich, jede Ugr $\mathfrak{U}$ hat in <u>beiden</u> Darstellungen den gleichen Charakter, dh die gleiche Anzahl von Transitivitätssystemen. (Das kann also nur bei $(\mathfrak{H}_1) = (\mathfrak{H}_2)\,G$.
Fortsetzung S.166
[: h] Kurz: Trans $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$. Trans $\mathfrak{L}$ nach $\mathfrak{B}$ =
Trans $\mathfrak{L}$ nach $\mathfrak{A}$. NB: Das gilt in dieser Allgemeinheit wohl nicht ein gemeinsames Komplement zu $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$. Ist wohl vorauszusetzen wie einen Fall $n = p$, $h_1 = h_2 = \frac{p}{q}$ existiert.

26.1.53 Knoche gesagt: Klasse einer p-Gruppe $\mathfrak{G} \leq \beta + 1$, wenn $\beta \leq p$, $\beta =$ "Breite $\mathfrak{G}$", dh $p^\beta = \max\limits_A (\mathfrak{G} : \mathfrak{N}_A)$, $\mathfrak{N}_A$ $\mathrm{Nor}_G\, A$.
Bew: Sei $\underline{c = \beta + 2}$, dann sind für jedes $A \in \mathfrak{G}$, $A \notin \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ unter $\mathfrak{N}_A = \overline{\mathfrak{N}_A\,\mathfrak{Z}_1} \leq \mathfrak{N}_A\,\mathfrak{Z}_2 \leq \cdots \leq \mathfrak{N}_A\,\mathfrak{Z}_c = \mathfrak{G}$ zwei aufeinanderfolgende Glieder gleich, da sonst $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{N}_A \geq p^{c-1} \geq p^{\beta+1}$. Nun ist $\mathfrak{N}_A\,\mathfrak{Z}_{c-1} \neq \mathfrak{G}$, wenn die $\mathfrak{Z}_i$ die <u>ab</u>steigende Zentralreihe sind und $A \notin$ Zentrum $\mathfrak{G}$ *.
Also $\mathfrak{N}_A\,\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N}_A\,\mathfrak{Z}_{i-1}$ $\quad i < c$
dh jedes $Z_i = N_A\,Z_{i-1}$, $(Z_i,\, A) \in \mathfrak{Z}_{i-2}$, dh. A zentralisiert eine $\mathfrak{Z}_i\,/\,\mathfrak{Z}_{i-2}$ $(i = 2, \ldots, c - 1)$. <u>Diese</u> A bilden echte Untergruppe $\mathfrak{G}_i \geq$ Zem

$\mathfrak{G}_i \sum_{2}^{c-1} \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}$, also ihre Anzahl $\geq p+1$, $c-2 \geq p+1$ $\quad \underline{c \geq p+3 \geq \beta+3}$
geht nicht.
Verschärfungen ergeben sich, wenn man ihr $\mathfrak{Z}$ em $\mathfrak{G}$ eine Zentral Φ <u>Reihe bildet</u>, statt gewöhnl Zentralreihe.
[: *h*] * $\mathfrak{N}_A\, \mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \to \mathfrak{N}_A\, \phi\,(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} \to \mathfrak{N}_A = \mathfrak{G}$ [: *h*]
Seite 53

19.1.53 Eine notwendige Bedingung für die Auflösbarkeit einer primitiven Permutationsgruppe besteht darin, daß
(1) $n = p^a$, (2) für jede Untergruppe $\mathfrak{U}$ gilt gilt $n - Gr\,\mathfrak{U} = p^{\beta_{\mathfrak{U}}}$. Denn die von $\mathfrak{U}$ festgelassenen Ziffern entsprechen den Elementen des minimalen Normalteilers $\mathfrak{N}$ die von $\mathfrak{U}$ zentralisiert werden; diese bilden eine Untergr von $\mathfrak{N}$.[Schon bei $\left\{\begin{array}{l}\text{Galois}\\ \text{Gösta Beuht}\end{array}\right.$?]
Frage: Ist diese Bedingung auch hinreichend ?
NB: Entält eine Permgr $\mathfrak{G}$ einen trans reg Normalteiler, so bilden, in dessen Elementen als Vertauschsymbolen, die Transitivitätssysteme jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}_E$ einen S-Ring. Allg also, wenn $\mathfrak{N}$ reg in $\mathfrak{G}$, aber $\neq \mathfrak{G}$, dann gilt das für die $\mathfrak{U} \leq$ Nor $\mathfrak{N}$, so wie für jedes $\mathfrak{U} = G_1$, wenn $\mathfrak{N} \leq G \leq \mathfrak{G}$.

Ist $\mathfrak{G}$ auflösbare prim Permgr, so lässt sich jede Untergr. $\mathfrak{G}_1' \leq \mathfrak{G}_1$ darstellen als $\mathfrak{G}_1' = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}'$, wo $\mathfrak{G}_1'$ eine trans Untergr von $\mathfrak{G}$. Gilt auch Umkehrung ?

Nicht jede Matrix ist unitär ähnlich einer komplexen symmetrischen Matrix (sonst wäre jede Matrix ihrer Transponierten unitär ähnlich, die EV würden denselben Winkel bilden wie die transp.). Also Frage: <u>Welche</u> Matrizen A sind zu A' unitär ähnl. ?
[: *h*] $\uparrow$ an Schnitzer 12.10.57 [: *h*]

Seite 54

11.2.53 Spektraltheorie unitärer Operatoren.
1) U unitär, f Laurent-Polynom $\to Sp\, f(U) = f(Sp\, U)$
$f = \sum_{-n}^{n} a_\nu\, U^\nu \qquad \lambda \in sp\, f(U) \to 0 \in Sp\ \sum_{-n}^{n} a_\nu\, U^{\nu+n} - \lambda U^\nu \to \omega \in Sp\, U$,
$\sum a_\nu \omega^\nu = \lambda \to f(\omega) = 0 \quad *)$
2) f reelles trigon. Polyn, $f \geq 0$ auf $Sp\, U \to f(U) \geq 0$ denn f in $\mathfrak{W}_{f(U)} \in Sp\, f\,(U)$.
3) Kgenzsatz: $I \geq A_1 \geq A_2 \geq, \ldots \quad \geq 0 \to A_n \to 0$
dies mit Hilfssatz: $0 \leq A_p - A_q \leq I \to 0 \leq (A_p - A_q)^2 \leq (A_p - A_q)$
4) Def von $f(U)$ für $f = \lim \searrow f_n$
Hieraus Spektralt unbeschr. Hermitescher Op: Cayley
* Ähnlich Riesz-Nagy 117 zum Beweis : $I(z) \geq 0 \to t(z) = |s(z)|^2\cdot$ Fejér Zfm

146, 53
Zur Spektraltheorie normaler Operatoren:
Für $x - y$ Polynom f gilt $Sp\, f\,(N) \subseteq f(Sp\, N)$
Bew: sei $0 \in Sp\, f\,(N)$. Dann (f sei reell) mit Spektralzerlegg für $f(N)$: es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein E_ε so dass $E_\varepsilon\,\mathcal{R} \neq 0$ und $\|f(N)\,E_\varepsilon\| < \varepsilon$. Wähle $\lambda_\varepsilon \in Sp\,\mathcal{N}_\varepsilon$ beliebig, wobei $\mathcal{N}_\varepsilon$ die Einschränkg von $\mathcal{N}$ auf $E_\varepsilon\,\mathcal{R}$. Dann ist $f(\lambda_\varepsilon) \in Sp\, f(\mathcal{N}_\varepsilon)$, also $|f(\lambda_\varepsilon)| \leq \varepsilon$. $\varepsilon \to 0$: $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ (Teilfolge), $f(\lambda) = 0$.

Seite 55

1.3.53 Zum Beweis des Satzes, dass der abg. Stellungsvorrat einer hermiteschen Paarung die konv Hülle des Spektrums ist:
Man braucht dazu nicht den vollen Satz von der allgemeinen Konvexität des Stellungsvorrates. Sondern es genügt zu zeigen, dass mit $0,\, \infty \in Sp\, P$ die ganze Gerade $\overline{S_0\, S_\infty} \in \overline{\text{stg P}}$. Bew für das Letztere: Nach Vor gibt es $\frac{y^n}{x^n} \in P$, $\frac{y'^n}{x'^n} \in P$ mit $\|x_n\| = \|y'_n\| = 1$, $y_n \to 0$, $x'_n \to 0$. Wegen $P = P^*$ gilt $(x_n,\, y'_n) - (y_n,\, x'_n) = 0$, also $(x_n,\, y'_n) \to 0$, also für jedes $\alpha \geq \overline{\alpha}$: $\frac{\tilde{y}_n}{\tilde{x}_n} = \frac{y_n + \alpha\, y'_n}{x_n + \alpha\, x'_n} \in P$ mit $\|\tilde{x}_n\| \to 1$, $(\tilde{x}_n,\, \tilde{y}_n) \to 0$.
$(\tilde{y}_n,\, \tilde{y}_n) \to \alpha^2$; also $\{0,\, 0,\, \alpha^2\} \in \overline{\text{stg P}}$.

Damit hat man den entsprechenden Satz für schiefe und unitäre P.

Gehört ein im Innern der Parabel gelegener Randpunkt des (reellen) Stgsvorrats von $P = P^*$ zu stg P, so sind beide Enden der durch ihn gehenden Stützgeraden EWe.
Bew: OBdA sei $0 \leq A \leq I$, $|x| = 1$, $(A^2 x,\, x) = (A\, x,\, x) \neq \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$
Dann ist $A\, x = x_1 \neq 0$, $(I - A)\, x = x_0 \neq 0$, aber ferner $(\underbrace{(A - A^2)}_{\geq 0}\, x,\, x) = 0$, also $(A - A^2)\, x = 0$, $A\, x_0 = A_1\, x_1 = 0$; 0, 1 EW. Also wenn $Psp\, P$ leer, ist stg P eine offene Menge.
Insgesamt ist stg P = konv Hülle $P_{sp}\, P \bigoplus\limits_{\text{konv}}$ Inneres der konv Hü $K_{sp}\, P$.

Seite 56

III 53: Bartsch, Helmut, in Hamburg
hat dem Arch Math. am 28.2. den folgenden Satz eingesandt: Sind A, B hermitesch, $B \gg 0$, $y = A\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z} = B\,\mathfrak{x}$, und liegen alle Quotienten $q_j = \frac{y_j}{x_j}$ in einem abg. Kreis (wobei $x_j = 0 \to y_j = 0$ vorausgesetzt wird, und dann wird q_j weggelassen), so liegt mindestens ein EW von $A\,\mathfrak{x} = K\, B\,\mathfrak{x}$ in dem Konzentr. Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{\beta \max}{\beta \min}}$ · alter Radius; d.h.
$|q_j - m| \leq r \quad s = 1, \cdots, n \to$ einmal $|K_j - m| \leq \sqrt{\frac{\beta \max}{\beta \min}} \cdot r\cdot$

25.3.: Frage: Kann man die Vertauschbarkeit normaler Matrizen schon aus der Eigenschaft P für endlich viele Polynome $f(x,\, y)$ erschliessen, die nicht linear sind ?

Frage von Ky Fan: Sei $\zeta \in W_A^{(2)} \longleftrightarrow \zeta = Sp\, V^* A\, V,\ V = (x\, y),\ V^*\, V = E.$
Ist $W_A^{(2)}$ konvex ?
Bemerkung: Antwort ist "ja", falls die Nullstellen jeder hermiteschen Form von n^2 Variablen auf der unitären Gruppe zusammenhängen.

Seite 57

1. Vermutung:

   Gehört ein Randpunkt zum Stellungsvorrat von A, so besitzt A einen (Punkt.) Eigenwert. (Ev. $A = A^*$ vorraus)

2. Aufgabe:

   Extremaleigenschaften der Eigenwerte normaler Matrizen (mittels ${}_3\mathfrak{W}_A$). (Oder mittels $\sum[c_i'\, Re\, \alpha_i + c_i''\, Im\, \alpha_i]$.)

3. Aufgabe:

   Wann kann ein komplexer Vektor x in einen anderen gegebenen mittels einer doppelt stochastischen Matrix übergeführt werden ? [: h]
   Die Bedingung sollte sich mittels konvexer Hüllen von je m y_i bzw x_i aussprechen lassen. Horn ? [: h]

4. Aufgabe:

   Spektrenvorrat von $A_1 + A_2$, allg. $A_1 + \cdots + A_m$ für hermitesche Matrizen A_μ mit bekannten Spektrum genau bestimmen. Entspr. f normale A_μ. Dann $A_1\, A_2 \ldots A_m$? A no
   [: h] Lidskiĭ [: h]

5. Allgemeine Frage:

   Welches sind die genauen Ungleichungen, die zwischen den EWerten [von A und den EWen] der Projektionen A_i von A auf gegebene Teilräume $R_i \subseteq R$ bestehen ? Allg. $A_i = T_i^* A\, T_i$; T_i gegeben
   [: h] insbesondere siehe S. 57 Nr.2 [: h]

Seite 58

Frage:

   Gilt für die Elementarteiler $\alpha_i,\, \beta_i,\, \gamma_i$ von $A,\, B,\, C = A\, B$
   $\alpha_3\, \alpha_5\, \alpha_6\ \beta_1\, \beta_2 \beta_3 \,|\, \gamma_3\, \gamma_5\, \gamma_4$ usw ?
   Beweis mit einer Minimaxeigenschaft der Elementarteiler ?
   [: h] aus Schnitzer X 57 [: h]

2.

Ist $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix} = A^*$, EWe $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ usw., so gilt (in Verallg. des Satzes von Aaronszajn ?) $\beta_1 \geq \ldots \beta_h$, $\delta_{h+1} \geq \cdots \geq \delta_n$ $\beta_1 + \delta_m \leq \alpha_1 + \alpha_m$

3.

Frage von Transkyy: Für welche Werte von c ist es wahr, dass jede matrix A mit den EWen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, zu der es eine Permutation $k_1, \cdots, k_n$ gibt so dass $A + c\,A^* + [A,\, A^*]$ die EWe $\alpha_i + c\,\overline{\alpha}_{k_i}$ hat, normal ist ? Sie weiss: a) richtig für $c = 1$ b) falsch für $c < 0$

II. Der Trennungssatz sollte etwas allgemeiner so formuliert werden: Zwei Spektren, die mit dem selben Momentenpkt vertr. sind, können nicht durch einen Kreis getrennt werden.

Seite 59

Kontinuitätsschluss: Ist $A \subseteq B$, A, B abgeschlossen, enthält A einen inneren Pkt von B und ist Rand $A \subseteq$ Rand B, so das ganze Innere von B in A enthalten.

Ist $Sp\,A = 0$, A beliebige $n \times n$-Matrix, so gibt es U unitär mit $U^{-1}\,A\,U = B$ $b_{ii} = 0$ $(i = 1 \ldots k)$

Bew: $0 \in$ konv Hülle Spektrum $\alpha\, v_i \subseteq {}_2\mathfrak{W}_A$, also A ähnl. $\begin{pmatrix} 0 & v \\ | & M \end{pmatrix}$ $Sp\,M = 0$ Indukt.

Gewichte bei der numerischen Integration $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ können zwar im Innern alle $= 1$ gewählt werden, und man kan durch geeignete Wahl der äussersten Gewichte dafür sorgen. dass die Formel für x^0, $x^1, \ldots, x^k$ genau ist. Aber der Faktor bei Max $|f^{(k+1)}|$ fällt viel grösser aus, als wenn man das Gesamtintervall in Stücke unterteilt und / oder von diesen einzeln nach der Formel gleicher ordnung integriert.

Z.B mittels Simpson wird $\frac{1}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{1}{3} = \int\limits_0^{12} + \frac{48}{6!}\, f^{IV}$

dagegen ist $\frac{16}{66}\,\frac{17}{66}\; 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\, \frac{17}{66}\,\frac{16}{66} = \int\limits_0^{12} + \frac{18750}{6!}\, f^{IV}$

Seite 60

Der absolut grösste Eigenwert einer Matrix (a_{ik}) braucht nicht jeder Halbebene anzugehören, die alle a_{ik} enthält. Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{hat} -2, 1, 1.$$

Rangsätze für $n = 3$, wenn $Rg\,(A-B) = Rg\,(A-C) = Rg\,(C-A) = n$ VIII 61
Graph

Shenandoah-Valley-Theorem (9.5.53):*
Ist $A = (a_{K\,\lambda})$ eine beliebige $n \times n$-Matrix, $B = (b_{k\,\lambda})$ eine Diagonalmatrix, α ein EW von A, $C = A - B$, $r_i = \sum_k |c_{ik}|$, $s_i = \sum_k |c_{ik}|$, so gibt es ein i mit $|\alpha - b_{ii}| \leq [r_i\, s_i]^{\frac{1}{2}}$.
NB: Für $B = 0$ bei Barankin BAMS 51 (1945), 767 - 770. Auch VII_{10}
Bew: 1) Es ist mit $D = \alpha\, I - B$ und $x = EV\;\, A$ zu α

$$\begin{aligned} C\,x &= D\,x \\ D^{-1} C\,x &= x \end{aligned}$$

also mit $\tilde{M} = (|m_{ik}|)$ generell, wenn $\mu(M)$ die Max-Wu ist:

$$\mu\,(\tilde{D}^{-1}\,\tilde{C}) \geq 1.$$

2) Es ist mit $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{C}\,e = R\,e \qquad R = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix}$

$$\tilde{C}^*\,e = S\,e \qquad S = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix}$$

$R^{-1}\,\tilde{C}\,e = S^{-1}\,\tilde{C}^*\,e = e$, also $R^{-1}\,\tilde{C}\,S^{-1}\,\tilde{C}^*\,e = e$.
* Allgemeiner bei Ostrowski, über das Nichtverschwinden etc, Comp. Math. 9, 209 - 226 (1951): ein $|\alpha - b_{ii}| \leq r_i^p\, s_i^{1-p}$ N.B. $\leq P\,r_i + (1-p)\,s_i$, wenn $0 \leq p \leq 1$ gegeben.
Bew mit $A\,x = 0$, Hölders Ungleichung
Seite 61

Da diese Matrix ≥ 0, $e \geq 0$, ist 1 die Max-Wu der Matrix. Also
$1 = \mu\,(R^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{C}\,S^{-\frac{1}{2}}.\; S^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{C}^*\,R^{-\frac{1}{2}})$.
3) Allgemein ist $\mu(M^*\,M) \geq \mu(M)^2$, denn $M\,p = \mu(M)\,p$, $\mu(M^*\,M)\,p^*\,p \geq p^*\,M^*\,M\,p = \mu^2(M)\,p^*\,p$.
4) Nach 2) und 3) ist $1 \geq \mu\,(R^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{C}\,S^{-\frac{1}{2}}) = \mu\,(S^{-\frac{1}{2}}\,R^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{C})$
Wäre $\tilde{D}^{-1} < S^{-\frac{1}{2}}\,R^{-\frac{1}{2}}$ so wäre erst auch $\mu\,(\tilde{B}^{-1}\,\tilde{C}) < 1$ im Widerspruch zu 1).

NB: Es braucht keine Paarung der EWe α_i zu den b_{ii} zu geben, so daß $|\alpha_i - d_{ii}| \leq [r_i\, s_i]^{\frac{1}{2}}$ für alle i. Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ hat beliebig vorzuschreibende EWe: $\underline{\alpha} + \delta = c_1$; $-1 + \alpha\,\delta - \underline{\beta\,\gamma} = c_2$; $-\underline{\delta} = c_3$

Rangsätze für normale Matrizen: (Fortsetzung von S.7)
Seien A, B normal, $Rg\, A - B = r$.

1)

$r = 1$, $\mathfrak{K}$ ein Kreisbereich der alle α_ν, und $\geq$ drei davon auf seinem Rande $\dot{\mathfrak{K}}$ enthält $\to \dot{\mathfrak{K}}$ enthält ein β_ν, [: h] $\mathfrak{K} \geq n-1$, $\overline{\mathfrak{K}} \leq 1$. [: h]

2)

r beliebig, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$ ein Kreisring (dh $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2 =$ Alles)
$\mathfrak{K}$ enthält k EWe von $A \to \mathfrak{K}$ enthält $\geq k - 2\,r$ EWe von B.
z.B.

3)

A herm, B nor $\to B$ hat $\geq n - 2r$ reelle EWe.
[: h] Frage bei 3) $r = 1$ $\quad A \vee B$ oder B hermitesch ?!
Forts. S 69
Frage : Durchschnitt beliebiger Kreisbereiche [: h]

Seite 62

Aufgabe über Binomialkoeffizienten:

a) $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\nu}{\nu} 2^{n-\nu} = 4^n$

b) $\sum_{0}^{n} \binom{n+\nu}{\nu} = \binom{2n-1}{n}$

Bew a): $s =$ Koeff x^n in $\sum_{v=0}^{n} (1+x)^{n+v} 2^{n-v} = \frac{2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1}}{1-x}$

$= 2^{n+1} \sum_0^n \binom{n}{v} - \sum_0^n \binom{2n+1}{v}$

$= 2^{n+1} \sum_0^n \binom{n}{v} - \frac{1}{2} \sum_0^{2n+1} \binom{2n+1}{v} = 2^{n+1} \cdot 2^n - \frac{1}{2}\, 2^{2n+1} = 2^{2n}$

EWe von $A\,z^2 + B\,z + C$
Seien $\alpha_\nu z^2 + \beta_\nu z + \gamma_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Dann sind zwar α_ν die EWe von A, γ_ν

die von C, aber nicht notwendig β_ν die von B. Bew α_ν, γ_ν mit $z = 0$; $z = \frac{1}{\xi}$, $\xi = 0$; Gegenbeispiel β_ν:
$\begin{pmatrix} z^2+z & 1 \\ 1-z^2 & -z+z^2 \end{pmatrix}$ hat EWe z^2+1, z^2-1, also $\beta_\nu = 0, 0$; obwohl B die EWe $+1$, -1 hat.
Dasselbe Beispiel zeigt auch, dass die Koeff von $U^{-1} \cdot \mathrm{diag} \cdot U$ nicht alle vertauschbar zu sein brauchen, wenn der höchste Koeff diagonalisierbar ist.

Seite 63

20.5.53
<u>Vermutungen im Zusammenhang mit diagonalisierbaren Matrizen:</u>
Sei $M(t) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_r z^r$. $A_\rho = (a_{ik}^{(\rho)})$, $a_{ik}^{(\rho)} \in K$ alg. abg.
1) Tritt bei der Entwicklung der EWe μ_i von M nach Potenzen von $(z - z_0)$ als niedrigste gebrochene Potenz $(z - z_0)^\alpha$ auf und ist $M(z_0)$ diagonalisierbar, so tritt bei $N(z) = \Pi_{\sigma=1}^{s}(M(z) - \mu_\sigma(z_o I) \cdot (z - z_o)^{-1}$
als niedrigste Potenz $(z - z_o)^{\alpha-1}$ auf $(\mu_0(z_0)$? EWe ?? $M(z_0))$

2) ist für jedes $z_o \in K$ in der Taylorentwicklung $R(z) = B_{???}(z - z_o)^p + \cdots + B_{q \neq 0}(z - z_o)^q \qquad (p \leq q)$
B_p diagonalisierbar für jedes $R(z)$ in dem kommutativen Ring $\mathcal{R}$, so sind alle $\mathcal{R}$ simultan unimodular auf Diagonalform zu transfomieren.
Sind überdies alle B_q diab, so kann $\mathcal{R}$ mittels einer konstanten Matrix auf Diagonalform gebracht werden.
Seite 64

Aus MS Kaplansky, Products of normal operators (1952 ?):
(1)

Sind A, B Op Hilbertraum, A und $A\,B$ normal, so gilt: $B \vee A^* A \longleftrightarrow B\,A$ normal

(2)

Putnam (Amer J Math 73(1951, 357 - 362) hat gezeigt: Sind P und Q normal, $P\,A = A\,Q$, so ist $P^*\,A = A\,Q^*$.

(3)

Sind A, B, $A\,B$ normale Op Hilbertraum, $C = [B, A^*A]$, so ist C eine Summe von Kommutatoren.
Gibt $C = 0$ wenn dimension endlich oder wenn man allgemein einen rinf of finite type in the sense of Dixmier hat (Ann sei $E <$ norm.sup. 66.(1949), 2×9 - 261.)

(4)

Sind A, B, $A\,B$ normal, hat A reines Punktspektrum, sind die charakteristischen Räume für A^*A endlichdimensional bis auf höchstens

den EW 0, und hat jede Menge von charakt. Wu von A, die nicht 0 enthält, ein Maximum und ein Minimum - so ist $B\,A$ normal.
(5) Verallgemeinerung

Seite 65

Übungsaufgabe über Fourierreihen (Problem of Dr. Page, 21.5.53)

x_n reell $(n = 0, 1, 2, \dots) \to \int\limits_0^{2\pi} \sum n\,x_n \cos n\,\varphi \cdot (\sum x_n \cos n\,\varphi)^{2p+1}\,d\varphi \geq 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$

Bew: $F(t) = \sum x_n\,t^n \cos n\,\varphi$ einführen, zeige $t\,\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^{2\pi} F\,d\varphi \geq 0$ mittels 2maliger partieller Integration nach φ.

Über $Sp(A) =$ Matrix mit $\binom{n}{p}$ Zeilen, EWe $= \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_p}$, $i_1 < \cdots < i_p$.
Def: $Sp\,(A) = [p\text{-te Det-Transf von } (E + tA)]_{\text{Koeff von } t}$.
(1) $Sp\,(\alpha\,A + \beta\,B) = \alpha\,Sp\,(A) + \beta\,Sp\,(B)$
(2) $Sp\,(A^*) = [Sp\,(A)]^*$
(3) $Sp\,(A)$ hat EWe $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p, \cdots$
(4) $Sp\,(T^{-1}\,A\,T) = (dp\,T)^{-1}\,Sp\,A \cdot dp\,T$
(5) Richtig mindestens für $n = 2$ ist die Vermutung $\beta_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2$, wenn $\beta_1 \geq \dots, \alpha_1 \geq \dots$ die singulären Werte von $B = s_2(A)$ und A sind.

Seite 66

4.5.53 <u>Normale Abschnitte normaler Matrizen.</u> Seien $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$ & B normal, $A = (n, n)$, $B = (m, m)$, $F = (r, r)$. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kreisbereich (abg. Inn od. Äusseres, od. Halbebene). Die Anzahl der EWe von $\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\}$ in $\mathfrak{K}$ sei $\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$. Dann gilt:
(1) $a - r \leq b \leq a + r$ wenn $\mathfrak{K}$ ein Kreisinneres
(2) $a - r \leq b \leq a$ wenn $\mathfrak{K}$ eine Halbebene $[: h] \leftarrow= \overline{\underline{VI}}_{3\,(4)}\,[: h]$
(3) $a - 2r \leq b \leq a$ wenn $\mathfrak{K}$ ein Kreisäusseres.

Bew:
(I) Wäre $b > a + r$, so enthielte der $m - \dim.$ Raum $R_m : \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = s$ ein $x \neq 0$ mit $x \perp \alpha_1, \dots, \alpha_a$; $\beta_{b+1}, \dots, b_m$; $D\,y = 0$. Zu diesem x gehört für A derselbe Momentenpunkt, wie zu y für B: Also können nicht alle $\alpha_{a+1}, \cdots, \underline{\alpha_k}$ von den $\beta_1 \cdots \beta_b$ durch einen Kreis getrennt werden; aber $\alpha_{a+1} \cdots, \alpha_n \in \overline{\overline{\mathfrak{K}}}$, $\beta_1 \cdots \beta_b \in \mathfrak{K}$.
(II) Ist $\mathfrak{K}$ ein Kreisinneres und wäre $a - r > b$, so ergäbe es in demselben R_m ein x mit $x \perp \alpha_{a+1}, \dots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_b$

Es läge dann ${}_3M_A(x)$ senkrecht <u>über</u> ${}_3M_B(y)$ <u>über</u> Trennebene aber ${}_3M_A(x)$ unter Trennebene.   Damit (1) erledigt.
Ist $\mathfrak{K}$ [: h] Halbebene Grenzübergang von (1) [: h]
Übergang zum Komplement $b \leq a$. Damit (2) erled.
(3) linke Hälfte folgt durch Übergang zum Komplement in der rechten Hälfte von (1).

Seite 67

<u>Übungsaufgabe zu Analysis-Algebra:</u>

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x - \cos\frac{2\,\pi\,\nu}{n}} = \frac{4p}{z_1 - z_2}\,\frac{z_1^a + z_2^a}{z_1^a - z_2^a}$$

wenn $n = 2p$ $\quad z_{1,\,2}$ die Wu von $z^2 - 2zx + 1 = 0$

Frage von Horn: Welche Beziehung besteht zwischen den singulären Werten von A und A^2 ?   18.6.53

Der "centrosymmetric case" $a_{r,\,s} = a_{n+1-r,n+1-s}$ mit seiner Aufspaltungsmöglichkeit ist erwähnt bei Aitken, Determinants and $\cdots$ trices, 1939

29.6.53:

> Die EWe normaler Matrizen können mit Hilfe jedes doppelpkt-freien Kreisbüschels geordnet werden; dh die zugehörigen Paraboloidpunkte mittels eines Ebenenbüschels; dessen Achse das Paraboloid nicht schneidet.

Seite 68

9.7.53 Aufgabe:

> Fehlerabschätzung für die EWe der im Quadratmittel besten Näherungsmatrix $\overline{M}$ des Ranges r für eine gegebene nichtnormale Matrix M.
> Kann man Schiefe M mittels dieses $\overline{M}$ definieren, dh mittels der Schmidtschen EWe & EVekt. ?

Den Satz, dass das Polynom $p(A)$ die EWe $p(\alpha_i)$ hat, schreibt V. Amato (Sn ? polinomi di matrice, 1941) Sylvester zu, zitiert G.Scorza, Corpi numerici ed algebre, Principata, Messina, 1921.

<u>Buch Determinanten.</u> a) Abschätzg. von Koch unendl Determin.

b) Zu Tema 1943: Statt sich auf Unterdet. einer Matrix zu beschränken, deren v-te Zeile eine Zahlenfolge mit konstanter $(\nu - 1)$-ter Differenz ist, kann man $n \times \infty$. Matrizen nehmen, so dass $a_{k\lambda} = p_k(x_\lambda)$, ω_0 p_k ein Polynom mit $Gr \leq n - 1$ ist Unterdeterminanten zu gegebenen x_λ können dann durch passende Wahl der p_k bequem bezeichnet werden (als Determ. von Dreiecksmatrizen).ist $Gr\, p_k = k - 1$ so ist der von den p allein abh Faktor ebenfalls eine Dreicksmatrix. Im Differenz-Fall kann man jede Zeile in sich verschieben, ohne die Det. zu ändern.

Seite 69

Verallgmeinerung der S-Konvexität [34]:
Sei $\mathfrak{G}$ eine endl Gruppe linearer Transformationen von R_n. Sei $K(X)$ stets die konvexe Hülle von $G_v x \quad (G_v \in \mathfrak{G})$
Sei für jedes x stets $F(x) \geq F(y) \to y \in K(x)$.
Dann heisse $F \quad \mathfrak{G}$-konvex. [: h] (An. Ky Fan mitgeteilt 14.7.53) [: h]
S-Konvexität bedeutet dann $\mathfrak{S}$-Konvexität.
Was kann man sagen, wenn $\mathfrak{G}$ irreduzibel ?

Frage: Kann man die für den grössten singulären Wert gültige Regel (I S.160)
$A = (B\,C) \to \alpha_1 \leq (\beta_1\,\gamma_1)_1$ verallgemeinern auf α_2 ?

Die Rangsätze für normale Matrizen
hat Ky Fan so verallgemeinert: A, B nor, $A - B = D$, D hat sing Werte $\delta_1, \ldots, \delta_n \geq 0 \to$ so enthält jedes Kreis, der a EWe von A umschliesst, nach konzentr. Vergrösserung des Radius um δ_{r+1} mindestens $a - r$ EWe von B. Bew: Nimm Kreis $|z| \leq R$. $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \underline{\leq}. \quad \leq |\alpha_a| \leq r$, $A = B + D \to$ sing. Werte $|\alpha_a| \underline{\underline{\geq}} |\beta_{a-r}| + |\delta_{r+1}|$

Seite 70

Frage: Wenn zwei hermitesche Matrizen A, B einen <u>irreduziblen</u> Ring erzeugen, ist dann für Realität aller EWe von $A\,B$ auch <u>notwendig</u>, dass eine Linearverbindg von A und B definit ist ?

Ist $A(t)$ diffbar, $A(0)$ normal, $\alpha(t)$ EW von A mit diffbaren EV. $x(t)$, so gilt $\dot{\alpha}(t) = x^* \dot{A}(0)\,x \qquad (\|x\| = 1)$.
Daher $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = (\frac{x^* \dot{A}\,x}{x^* A\,x} =) x^* \dot{A}\,A^{-1}\,x$. Z.B. $A = \Pi_1^k\, e^{i\,H_k(t)}$ mit $H_k(t)$ monoton wachsend: $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha\,i} = x^* \left\{ \dot{H}_1 + e^{iH_1} \dot{H}_2 + \dot{H}_2\, e^{-iH_1} + \ldots \right\} x \geq 0$

Frage:

Sei $A > 0$ hermitesch, $B > 0$ hermitesch. Bildet dann der $k-te$ EW (k fest) von $A\,B^\nu$ $\quad(\nu = 1, 2, \dots)$ eine konvexe Zahlenfolge ?

Enthält der Wertevorrat ${}_2\mathfrak{W}_A$ 0 nicht, so ist $\underline{|\ A\ |} \geq \min(x^* A\,x)$, dh.
Graph

Frage: Kann die Sache sogar so sein:
Graph ?

Seite 71

Frage: Wie sehen die unzerfällbaren Paare normaler Matrizen aus, für welche $A+B$ normal ist ? Damit $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ normal ist, ist $n+h$: $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$, dh die EWe von A, B liegen auf parallelen Geraden. Allgemein ist $n\,\&\,h$, falls $A = A_1 + i\,A_2$ usw, daß[: h] $[A_1 + B_1,\ A_2 + B_2] = 0$, dh. [: h] $[A_1,\ B_2] = [A_2,\ B_1]$ Hieraus folgt, falls $A = A^*$, daß$B = B^*+$ const.E: $\alpha_\nu \| \beta_\nu$.
Mit $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ untersuchen ! [: h] Schnitzer genannt X 57 [: h]

Meine “Minimalpolynome“ könnten “Infrapolynome“ im Sinn von Fekete-v Neumann [1922, Fekete 1951] sein. Trennungssätze auch bei Motzkin-Walsh [1950 ?]

Dass die Ritzwerte bei der schwingenden Membran einseitige Schranken liefern, hat schon Poincaré (Amer J Math 12 (1890), 211 - 294 insb. 259-261) bewiesen. [Nach Manuskript P*ó*lya für Mises-Festband 1953]. Dort macht Polya auch auf das Min max Prinzip im Gegensatz zu dem Max Min Prinzip von Courant ausdrücklich aufmerksam
[: h] P. arbeitet mit stückweise bilinearen Funktionen im Zusammenhang mit Differenzmethode für $\triangle\,u + \lambda\,u = 0$ [: h].
Seite 72

Aufgabe: $\iint G(x,\,\xi)^2 dx\,d\xi$ rechnen für die Greensche Funktion gegebener gewöhnlicher Dglen (aus deren Koeffizient).

Die möglichen EWe der Abschnitte einer hermiteschen Matrix sind von Schur bestimmt worden (Satz I*,[4])

Aus Ledermann [42]:
p. 373. Lemma: Sind $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m$ und η reell, $g_1 > 0, \ldots, g_m > 0$, so hat die rat. Fkt.

$$\psi(x) = (x - \eta) - \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{x - \mu_j}$$

genau $m + 1$ reelle, verschiedene Nullstellen $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_{m+1}$ so daß $\rho_1 < \mu_1 < \rho_2 < \cdots < \mu_m < \rho_{m+1}$.
[Hinweis auf Polya Szegö, Aufgaben 2, No 26, 41]
Theorem (p 376): Wenn in einer hermiteschen Matrix

Seite 73

die Elemente von r Zeilen und der r entsprechenden Kolonnen beliebig abgeändert werden (so daß die Matrix hermitesch bleibt), dann kann sich die Anzahl der EWe in einem gegebenen Intervall höchstens nun $2r$ ändern.
(Bew für $r = 1$ mit Lemma) ([: h] Das ist eine spezielle Abänderung von einem Summanden vom Rang) $2r$ [: h])

Lit über alte Fastkörper: Buch Carmichael S. 396.

Seite 74

Substitutionsgruppen: 21.2.54
1. Das Zentrum jeder über einem Körper K irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist zyklisch. Ist $\mathfrak{G}$ sogar zyklisch, so ist Grad $\mathfrak{G}$ = Grad der primitiven $(\mathfrak{G})$-ten Einheitswurzeln über K (also durch $(\mathfrak{G})$ und K eindeutig bestimmt).

Hauptreihen endlicher Gruppen:
Sei $(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ mit $((\mathfrak{A}), \mathfrak{B})) = 1$.
Die Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$, die keinen Kopf mit Ordnung $|(\mathfrak{B})$ haben; entsprechen eineindeutig den Durchschnitten $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} = \vartheta$ [: h] $= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\,\mathfrak{B}$ [: h]. Diese sind gekennzeichnet durch $\vartheta \lhd \mathfrak{A}$, $\vartheta\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\vartheta$. [: h] siehe [: h]
[: h] Entsprechendes für die $\mathfrak{N} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{N}$ ist klar. [: h]
[: h] Aber entsprechendes gilt für die $\mathfrak{N} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ <u>ohne</u> $\mathfrak{N}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{N}$.? [: h]
[: h] Folge ? [: h]
3. Je zwei nicht zu verfeinernde "Hauptketten" $\mathfrak{A} \rhd \mathfrak{A}_1 \rhd \ldots (\mathfrak{A}_i \lhd \mathfrak{A})$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{A}_i$ (wobei $\mathfrak{U}$ eine Untergr. einer Obergruppe von $\mathfrak{G}$, sind gleich lang, und die Faktorgruppen $\mathfrak{A}_i \,/\, \mathfrak{A}_{i+1}$ sind eindeutig bestimmt. [Jordan Hölder für Gruppen mit Abbildungen in sich].
NB: Die durch ein Element $B \subset \mathfrak{B}$ erzeugte Abbildung

Seite 75

von $\mathfrak{A}$ in sich (wobei $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}$) die durch "$A \to A'$, wenn $A\,B = B_1\,A'$" gegeben ist, hat die Eigenschaft: Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}$ zulässig**???**, so ist die Menge der Nebenklassen $\mathfrak{U}\,A$ zulässig.
[: h] Gilt doch wohl ebenso für Kompositionsreihen. [: h]

1. Aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_1 \lhd \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2\,\mathfrak{H}_1$ folgt : 5.3.54

(Norm) $\quad \mathfrak{H}_1^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_1\,\mathfrak{H}_2$ mit $\mathfrak{h}_2 < \mathfrak{G}_2$. [: h] Bew: $\mathfrak{H}_1 \leq \mathfrak{H}_1^{\mathfrak{G}} \leq$ Indikator $\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{G}_2$. [: h]
Kurzer Beweis der Aufösbarkeit von $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2$, wenn in $\mathfrak{G}_i$ jede Untergr. invariant (Hupperts Satz) mit Durchschnittssatz: $(\mathfrak{G}_1 \,:\, \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_1^G) < (\mathfrak{G}_2) \quad (\leq (\mathfrak{G}_1))$.

Aufgabe: Alle Untergruppen einer auflösbaren $Gr.\,\mathfrak{G}$ betrachten, die mit einem geg. Sylowsystem von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind. Die (in ihrer Sylowgr.) normalen p-Gruppen darunter sind Sylowgr. ihrer Normen unter $\mathfrak{G}$.

Seite 76

Vermutung: Bei homomorphen Abb α von $\mathfrak{G}$ mit einem p-freien Kern geht $\Phi_p(\mathfrak{G})$ in $\Phi_p(\alpha\,\mathfrak{G})$ über: $\alpha\,\Phi_p = \Phi_p\,\alpha$.
Daher $\Phi_p = p$-Sylowgruppe von $\Phi(\mathfrak{G})$. Klar ist von vorn herein nur: $\alpha\,\Phi_p \leq \Phi_p\,\alpha$

Habe Huppert 5.3. auf die folgende Vermutung hingewiesen: Die Erzeugendenzahl jeder Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}$ der Ord p^α des Grades k ist $\leq k$, wenigstens wenn Charakteristik des Körpers $\not|\,(\mathfrak{G})$.

Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{A})\,b = a\,b$, $(b,\,a) = 1$, und ist $\mathfrak{A}$ nilpotent, so ist jede Ugr $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ mit $(\overline{\overline{\mathfrak{A}}})\,|\,\mathfrak{A}$ ähnlich einer Untergruppe von $\mathfrak{A}$.
Bew:

a) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ auflösbar
b) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ beliebig: Induktion nach $(\overline{\overline{\mathfrak{A}}})$.
Jede Ugr von $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ ist nilpotent (Iwasawa, Schmitd), daher $\overline{\mathfrak{A}}$ auflösb.

Zum Bew a): Ist $p\,|\,(\mathfrak{G})$ und erleidet jede p-Untergr.
Seite 77

von $\mathfrak{G}$ unter ihrem Normalisator nur Autom. der Ord p^ρ, so gibt es wohl ein invariantes p-Sylowkomplement.
Bew wohl wie bei Iwasawa (Proc Phys math Soc Japan (3) <u>23</u> (1941), 1-4)
Einfacher:
Oder:(a) Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ der Normalisator einer p-Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ und hat $\mathfrak{G}$ eine nilpotente a-Halbgruppe $\mathfrak{A}$, so hat $\overline{\mathfrak{G}}$ eine a-Halbgruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ mit $g < \overline{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}^{G.}$
Bew: Sei $p^{\overline{\alpha}}\ (\overline{\mathfrak{G}})$ und $\overline{\mathfrak{p}}$ eine g enthaltende p-Sylowgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$. Dann $\overline{\mathfrak{p}} < \mathfrak{A}^G$, daher ist $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^G \cap \overline{\mathfrak{G}}$ das verlangte.

Diss-Thema: Gruppen der Ordnung $p^\alpha\, q^\beta$
Dazu eine Arbeit von Burnside ≤ 1910. [44]

Verschärfung des Satzes von Miller (Speiser S. 63):
Ist $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} =$ Normalisator von $\mathfrak{H}$, so ist mit $\mathfrak{D} = G \cap \mathfrak{N}^G$

$$(\mathfrak{H} : \mathfrak{D}) < (\mathfrak{G} : \mathfrak{N})$$

[: h] ist $\mathfrak{H}$ Halbgruppe, so gilt dieselbe Abschätz. wenn $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$ für $\mathfrak{D} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^{G \cdot}$[: h]
Seite 78

Zur Methode von Schur: [: h] $\mathfrak{G} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}$ [: h] 23.3.54
1.

> $\mathfrak{G}$ sei die reguläre Untergruppe, $\mathfrak{K}$ ein primitiver Komplex, der ein Element $Z \in$ Zentrum $\mathfrak{G}$ enthält, $\mathfrak{L}$ ein beliebiger Hauptkomplex. Dann ist $\mathfrak{K}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,\mathfrak{K}$.
> Bew: $\mathfrak{G}_1\, Z\, \mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cdot\, \mathfrak{G}_1\, Z\, \mathfrak{G}_1$
> $\mathfrak{G}_1\, \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{K} = \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{L}\, \mathfrak{K}$.
> Ähnlich für den von $\lambda\, \mathfrak{Z}$ erzeugten Hauptkomplex $\mathfrak{K}$ wenn $\mathfrak{Z}$ ein beliebiger mit $\mathfrak{L}$ vertauschbarer Komplex aus $\mathfrak{H}$ ist.

2.

> Ist $\mathfrak{S} = \sum' c_i\, H_i,\ c_i > 0$, und $\{H_1, \cdots\} = \mathfrak{H}$, so ist $\sum\limits_{H \in G} H =$ Polynom in $\mathfrak{S}$.
>
> Bew: Es genügt zu zeigen, dass $\sum' c_i$ einfacher EW von $\mathfrak{S}$ in der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}$ ist
> Ann: nein I. Dann gebe es Vektor $\mathfrak{v}$: $\sum' c_i\, H_i\, \mathfrak{v} = \sum c_i\, \mathfrak{v}$ Längen vergleichen: $H_i\, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}$, $H\, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}$ falls $H \in \mathfrak{H}$
> $\mathfrak{v} = \mathrm{const} \cdot (11 \cdots 1)$. Also zu $\sum' c_i$ gints nur einen EV.

Seite 79

II.: Annahme: $\mathfrak{S}$ unitär ähnlich $C = \begin{pmatrix} c & u & \\ & c & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

mit $c = \sum' c_i$, $u \neq 0$. Dann $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Länge $> c$, geht nicht.

Thema für Dissertation: Die Struktur der p-Sylowgruppen von $GL\,(n,\, q^B)$ bestimmen (insbesondere die Hauptfaktoren). Für $q = p$: [46] [: h]

Automorphismen [: h]

Zu Schurs Methode: 8.4.54

Dass nicht jeder S-Ring durch Einbettung entsteht, sieht man deutlich so:
Sei $(\mathfrak{H}) = p^2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} = E$.
Es seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Transitivitätssysteme, d.h. wenn $G_1 \in \mathfrak{G}_1$ so $\mathfrak{P}_{G_1} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}_{G_1} = \mathfrak{Q}$.
Dann folgt aus $P_{G_1} = P^\alpha$, $Q_{G_1} = Q^\beta$ stets

$$(P\,Q)_{G_1} = P^\alpha\,Q^\beta$$

Bew: $P\,Q \in \mathfrak{P}\,Q \cap \mathfrak{Q}\,P$
also $(P\,Q)_{G_1} \in \mathfrak{P}\,Q^\beta \cap \mathfrak{Q}\,P^\alpha = P^\alpha\,Q^\beta$.
NB: Der Schluss klappt schon wenn $G_1 \notin \mathfrak{G}_1$; gebraucht wird nur:
$\begin{cases} P_G \in \mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}^\alpha, \quad Q_G \in \mathfrak{p}\,Q^\beta \\ \mathfrak{P}_{G_1} = \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}_{G_1} = \mathfrak{Q} \end{cases}$ wenden

Seite 80

Im Fall, dass $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Transitivitätssysteme von $\mathfrak{G}_1$ sind, ist also die ganze Gruppe $\mathfrak{G}_1$ als Permugr. schon durch ihre beiden Konstituenten auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bestimmt, und es ist daher plausibel, dass die weiteren Transitivitätssysteme dann stark gebunden sind. In der Tat, wenn noch $\{P\,Q^n\}$ fest ist bei $\mathfrak{G}_1$, dann wird bei der Bezeichnung

$$(P^\alpha)_{G_1} = P^{\alpha_G}, \quad (Q^\beta)_{G_1} = Q^{\beta^{G_1}}$$
$$(\alpha\,m)^G = \alpha_G \cdot m$$

ist insbesondere $m = 1$, also $\{P\,Q\}_{\mathfrak{G}_1} = \{P\,Q\}$ so folgt

> $\alpha^G = \alpha_G$, also <u>dann</u> für m bel.
> $(\alpha_m)_G = \alpha_G\,m$; wähle für m Primitiv **???**
> daher $\alpha_G = 1_G \cdot \alpha$ für alle α

D.h. wenn $\{P\}$, $\{Q\}$, $\{P\,Q\}$, $\{P\,Q^m\}$ fest bei $\mathfrak{G}_1$, so besteht $\mathfrak{G}_1$ nur aus $P^\rho\,Q^\sigma \to (P^\rho\,Q^\sigma)^\nu$, $\nu = \nu_{(G_1)}$.
Es sind dann durch diese 4 Transitivitätssysteme alle weiteren festgelegt, nämlich die verschiedenen $\{P\,Q^\rho\}$.
Also hat man den <u>Satz</u>: Hat $\mathfrak{G}$ den Grad p^2, enthält $\mathfrak{G}$ eine reguläre Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Typ (p, p) und hat $\mathfrak{G}_1$ vier geeignete Untergr der Ord p von $\mathfrak{H}$ zu Intransitivitätssystemen,

Seite 81

so ist $G \lhd \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{G} : G) \,|\, p-1$, $H^G = H^{\alpha_G}$.
Dann nach obigem folgt, da man von vornherein annehmen kann, dass die Permut. $H \to H^\nu$ aus dem Holomorph von G schon in $\mathfrak{G}$ liegen, dass $\mathfrak{G}$ nur

aus diesem besteht.

[2] [3] [4] [5] [6] **Seite 88**

3.

Ist $(F) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \qquad$ [: h] NB: s. auch $7\,5_1$ 126 [: h]
winw Faktorisierung von $\mathfrak{G}$, so heisse $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ eine **???** Gruppe, wenn $\mathfrak{H} = \tilde{\mathfrak{A}} \cap \tilde{\mathfrak{B}}$ mit $\tilde{\mathfrak{A}} \geq \mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{B}} \geq \mathfrak{B}$.
Es gilt: Mit $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind auch $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ und $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$ F-Gruppen.
Das letztere folgt aus

4.

$\mathfrak{H}$ ist F-Gruppe genau wenn $\mathfrak{H} = \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{B}}$ mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \leq \underline{\mathfrak{A}} \leq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \leq \underline{\mathfrak{B}} \leq \mathfrak{B}$, $\underline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\underline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}} = \underline{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{A}$.
Es ist nämlich $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\} = \{\underline{\mathfrak{A}}_1\,\underline{\mathfrak{A}}_2\}\,\{\underline{\mathfrak{B}}_1\,\underline{\mathfrak{B}}_2\}$.

[7] **Seite 89**

[: h]Jede F-Gruppe ist faktorisiert (vielleicht trivial) C heisst vertauschbar mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$] [: h] 2. Durchschnitt zweier F-Gruppen ist F-Gruppe.
Denn $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2 = (\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)\,(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2)$, wenn

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}_i\,\mathfrak{B}_i.$$

[: h] Zu diesen Ore, **???** II 1938 [: h]

4.

NB: "'$\mathfrak{N}$ ist F-Gruppe" heisst: $A\,B \in \mathfrak{N} \rightarrow A \subset \mathfrak{N}$.

[*folgender Satz ist durchgestrichen* : *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{A}_p\,\mathfrak{B}_p$, $\mathfrak{A}_p \lhd \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_p \lhd \mathfrak{B}$, *eine Sylowgr von* $\mathfrak{G}$, **???**, $\mathfrak{z} =$ *Zentrum* $\mathfrak{G}_p$, *so ist* **???** $\mathfrak{z}$ *eine* $F-$*Gruppe.*

[: h] ist Sonderfall von 91_3 [: h]

4'.

Definiert man allgemein: $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{h}_F = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{h}\} \cap \{\mathfrak{B}, \mathfrak{h}\}$ so $\mathfrak{h}$ eine F-Gr. $\leftrightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{h}_F$

[2] S.81 ist unten durchgestrichen
[3] S.82 ist vollständig durchgestrichen
[4] S.83 - 86 existieren nicht
[5] S.87 ist vollständig durchgestrichen
[6] S.88 ist oben durchgestrichen
[7] S.89 ist oben und in der Mitte durchgestrichen

[8] [9] Seite 91

1.

Mit 89.4' gilt: $\mathfrak{A}_F = \mathfrak{A}_3 \quad G_F = \mathfrak{G} \longleftrightarrow \{G\,\mathfrak{A}\} = \{G\,\mathfrak{b}\} = \mathfrak{G}$;
$\{G,\,\mathfrak{K}\}_F = \{G_F,\,\mathfrak{k}_F\} = G_F,\,\mathfrak{K}_F$
$G \leq \mathfrak{K} \to G_F \leq \mathfrak{K}_F$.

2.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ inv bei $\mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{b}}$ inv bei $\mathfrak{b}$.
??? : Dann sind $\mathcal{N}s\,\{\tilde{\mathfrak{A}}\,\tilde{\mathfrak{b}}\}$ und $\mathcal{N}_1\,\tilde{\mathfrak{A}} \cap \tilde{\mathfrak{b}}$ F-Gruppen

3.:

[Dieser Satz enthält alle vorangehenden dieser Art (S.85-91)]
Satz: Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ inv bei $\mathfrak{A}$ $\tilde{\mathfrak{b}}$ inv bei $\mathfrak{b}$.
Es sei a) G einzig in $\tilde{\mathfrak{A}} \cap \tilde{\mathfrak{b}}$ dh $G^G \subset \tilde{\mathfrak{A}} \cap \tilde{\mathfrak{b}} \to G^G = G$
oder b) G einzig über $\{\tilde{\mathfrak{A}},\,\tilde{\mathfrak{b}}\}$ | | $G^G \supset \{\tilde{\mathfrak{A}},\,\tilde{\mathfrak{b}}\} \to G^G = G$
Dann ist $\mathcal{N}_1\,G$ eine F-Gruppe. *Allgemeiner: 5*

4.

Ist $\mathfrak{A}$ einzigartig in seinem Normalisator G, so ist G einzigartig über $\mathfrak{A}$; [: h] ferner ist jedes $\mathfrak{h}^*$ mit $\mathfrak{A} < \mathfrak{h}^* \triangle \mathfrak{h}$ einzigartig über $\mathfrak{A}$ [: h]

5.

$$\text{Satz}\begin{cases} \text{Sei } \mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A}_i \text{ inv bei } \mathfrak{A},\ \ \mathfrak{B}_i \text{ inv bei } \mathfrak{b}\ \ (i = 1,\,2). \\ \text{Sei } G \text{ einzigartig mit } \{\mathfrak{A}_1,\,\mathfrak{B}_1\} \leq \mathfrak{h} \leq \mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{B}_2. \\ \text{Dann ist } \mathfrak{N} = N_s\,\mathfrak{h} \text{ eine } F\text{-Gruppe } \mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A})\,(\textbf{???}\,) \end{cases}$$

Zusatz: Ebenso auch $Z_s\,\mathfrak{h}$, wenn $(|\mathfrak{A}|,\,|\mathfrak{B}|) = 1$

Seite 92

Frage zur Darstellungstheorie:
Kann eine einfache Gruppe zwei Ähnlichkeitsklassen enthalten, deren Produkt <u>eine</u> Ähnlichkeitsklasse ist ?
Bei der Untersuchung könnte nützlich sein:
Hat die Ähnlichkeitsklasse α_i die Elementezahl k_i und wählt man $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{k_i}\,\alpha_i$ als Basis für das Zentrum des Gruppenrings, so werden die Matrizen, der regulären Darstellung des Zentrums des Gruppenrings <u>normal</u>. Ist also die Multiplikationstafel der Klassen $\alpha_i\,\alpha_l = \sum^{j} k_{ij}^{l}\,\alpha_j$, so sind die Matrizen $\mathcal{M}_{(\alpha_l)} = (k_{ij}^{l}\sqrt{\frac{k_j}{k_i}})$ normal. Daher ist $\mathcal{M}(\alpha_l^{-1}) = \mathcal{M}^*(\alpha_l)$.
Ausserdem ist mit der Permutationsmatrix $P = (\alpha_l \to \textbf{???}\,)$

[8] S.90 ist vollständig durchgestrichen
[9] S.91 ist oben durchgestrichen

$\mathcal{M}^*(\alpha_l) = P^{-1}\,\mathcal{M}^*(\alpha_l)\,P$.
Genau dann erzeugen die zu α_l gehörige Kommutatoren.
???
Seite 93

einen erhten Normalteiler von $\mathfrak{G}$, d.h. $\{\alpha_l\,\alpha_l^{(-1)}\} \neq \mathfrak{G}$, wenn die hermitesche Matrix mit nicht negativen Elementen $\mathcal{M}(\alpha_l)\,\mathcal{M}^*(\alpha_l)$ ihren Maximaleigenwert k_l <u>mehrfach</u> hat.

Zur Darstellungstheorie:
Ist $\chi(G)$ ein einfacher Charakter der endl. $Gr.\,\mathfrak{G}$, $Grad\,f$, so ist die Matrix $M = (\chi\,(G\,H^{-1}))$ hermitesch und befriedigt $M^2 = \frac{G}{f} \cdot M \cdot$

Die rationalen Charaktere einer abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ord $\mathfrak{g}$ sind die Linearverbdgen (**???** $\mathfrak{g}$.rat.Koeff.) der speziellen eigentlichen Charaktere $\psi_n(G) = \rho\frac{(G^n)}{n}$, wo n die Teiler von $\mathfrak{g}$ durchläuft und ρ den regulären Char. bedeutet: $\rho(G) = \begin{cases} 0 & G \neq E \\ \mathfrak{g} & = \end{cases}$.
Die irred. rat. Charactere sind

$$\chi^{???} = \sum^{d/n} \mu_d\ \psi_{n/d}$$

Auch die Koeff der χ^ν in $|x\,E - R(G)| = \sum c_\nu\,x^n$, $c_n = c_\nu(G)$, bilden eine Modulbasis der rat irred Char.; dabei $R =$ Reg. **???**
Demnach Frobenius 1907
Seite 94

Ist das direkte Produkt einer Schur - Gruppe mit einer beliebigen Gruppe **???** Ordnung eine Schurgruppe ?

Zur Darstellungstheorie: Ein in $\mathfrak{G}$ invarianter Komplex $\mathfrak{K}$ ist genau dann ein Normalteiler, dh. Gruppe, wenn
1) $E \in \mathfrak{K}$ 2) Für jeden einfach ein Charakter χ von $\mathfrak{G}$ gilt:
$\sum\limits_{K \in \kappa} \chi(K) \geq 0$ und ganz rational.
Bew: Dann ist $\omega(G) = \begin{cases} \mathfrak{g} & G \in \mathfrak{K} \\ 0 & \notin \end{cases}$ ein eigentl. Charakter. Ist der zugehörigen Darstellg haben genau die K $\quad Sp\,K = Sp\,E$.

??? Zusammenhang zwischen Darstellungstheorie und Methode von Schur: **???**, 2. Aufl., S. 342/3
Die auf S. 343 oben auftretenden Summen sind die EWe des zu $x_{b_{10}} \sim, x_{b_{???}}$ gehörigen primären Komplexes.
Ansehen:

Proc LMS 33 (1900), 170.
Quart J Math 37 (1906), 215

Sind darin die primären Komplexe deutlicher zu erkennen ?
Seite 95

Warum gibt es in $\mathfrak{G}$ zu der Untergruppe G einen komplementären Normalteiler ? Notwendig **???**
1. Für jedes $G' < \mathfrak{G}$ ist $\mathcal{N}s\,G' = (G \cap \mathcal{N}s\,G') \times \mathfrak{L}$
2. Ist $\mathrm{G}^{-1}\,G'\,\mathrm{G} \subseteq G$, so gibt es $H \in G$ mit $\mathrm{G}^{-1}\,H'\,\mathrm{G} = H^{-1}\,H'\,H$ f. alle $H' \in G$!
Frage: Kann man diese oder ähnliche Bedingungen mittels Verlagerg oder Charakteren auch als hinreichend nachweisen ? IX 91

Kann man alle perfekten (= topologisch vollständigen) Matrizengruppen nach analytischen Verfahren bestimmen ? Dann hätte man durch Übergang zu **???** alle Kongruenzgruppen !

Zur Methode von Schur:
Entsteht über eine Gruppe vom Typ **???** jeder ëinbettbareSSchurring durch eine **???** ?

Seite 96

Lineare Gleichungen in allgemeinen Ringen:
Matrizen-Äquivalenz **???** $\mathfrak{A}_{m\,x\,n}\mathfrak{W}$ mit invertierbaren **???** ist eigentlich gar nicht der geeigneten Hilfsbegriff:
Man braucht $\mathfrak{p}\,\mathfrak{A}$ **???** mit **???** invertierbar, $\mathfrak{p}$ **???** nur die O-Spalte. Im kommutativen Fall soll also die Determinante von $\mathfrak{p}$ kein Nullteiler sein. [Die Äquivalenz tritt erst dann als Hilfsmittel ein, wenn man gleichzeitig das transponierte Gleichungssystem betrachtet.] $\mathfrak{p}$ braucht daher nicht einmal quadratisch zu sein. Es muss nur vollen Spaltenrang haben. Damit sollte eine Vereinfachung der Normalform erreichbar sein; diese würde nicht nur von den Determinantenteilern abhängen, da diese für die transponierte Matrix gleich sind. Von $\mathfrak{W}$ braucht man nur zu fordern. $\mathfrak{W}$ **???** , $\mathfrak{W}y = 0 \leftrightarrow y = 0$
Seite 97

Aus einer Schlussweise von Jacobs (**???** 17 1272) folgt:
Der Durchschnitt einer fallenden Mengenfolge von stark angeschl **???** konvexen Mengen im Hilbertraum ist nicht leer. (Desgl. wohl für gleichen konvexe Räume).

Zu $s > 1$ Iterationsschritten der EigW.-Einschl.:
Inhalt Fekete-Neumann [49]:
$f(x)$ heisse ein Extremalpolynom zu der abgeschlossenen beschränkten Pktmenge E der komplexen Ebene, wenn aus $Gr\,g < Gr\,f$ stets folgt: $\exists\ z \in E$ so dass $|f(z_0) + g(z_0)| \geqq |f(z_0\,|$. Dann gilt der Satz: Jede Nullstelle eines Extremalpolynoms vom Grade n liegt in der konvexen Hülle von E, vorausgesetzt,

den E mehr als n Punkte enthält. Die nichtreellen Nullstellen eines reellen Extremalpolynoms liegen, wenn $E = \overline{E}$, ausserdem in der Vereinigung der Kreise mit Durchmesser $[z, \overline{z}]$, $z \in E$.
- Normen wie $\left\{ \sum_E |f(z)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ nennen die Verf im Anschluss an Feje'r (Math Ann 85, 41 - 48) eine "Besselsche" Abweichung. - Der Satz von Gauss über $f'(z) = 0$ ist Spezialfall des obigen.

S.98 ist vollständig durchgestrichen
S.99 ist oben durchgestrichen

Seite 100

Ein Imprimitivitätskriterium. **???** : 25.11.54
Sei T ein Tras $\mathfrak{G}_1$, $\sum$ ein Tras $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, $1 \neq T \subseteqq \sum \neq$ **???** .

Ist $|\sum| = p =$Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ imprimitiv.
Bew: Da die grösste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die T als ganzes fest lässt, gerade $\mathfrak{G}_1$ ist, **???** die Konjugierten T_G die Gruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}$ führt T in eine durch p teilbare Anzahl von Konjugierten über, da $\mathfrak{U}_1$ T fest lassen muss, im **???** auf $\sum$ also keine durch p teilbare **???** mehr hat. Also ist $p||1_{\mathfrak{U}}|$ und daher nach dem vorigen Satz $|1_{\mathfrak{U}}| = p$, $\mathfrak{G}$imp übrigens hat dann der **???** von $\mathfrak{U}$ auf $\sum$, der den Grad p hat, noch eine nichttriviale Untergruppe von Index p, nämlich $\mathfrak{U}_1$.
Frage: Welche Gruppen vom Grade p haben nichttriviale Untergruppen vom Index p. ?**???**
???

S.101 ist vollständig durchgestrichen

Seite 102

Untersuchung der Permu.-gr., die vollstetig reduziert nur 3 irred. Bestandteile enthalten: **???**
Die Translängen von $\mathfrak{G}_1$ seien 1, v, w.
Seien v, w zugehörige mit $\mathfrak{G}$ **???** Matrizen, also $E + V + W = F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
(A) $\underline{W = \overline{V}'} \to 0 = Sp\, V^2 = v^2 + f'v'^2 + f''v''^2 \to f' = f''$.
(B) $\underline{V = \overline{V}'}$. $\quad V^2 = a\,V + b\,E + c\,F \qquad f' + f'' = v + w = n - 1$.
$Sp\, V^{2}$' $\quad v = b + c$
EW: $v^2 = a\,v + b + c\,n$
$v'^2 = a\,v' + b$, $v''^2 = a\,v'' + b$
SpV: $v + f'v' + f''v'' = 0$
Aus dem letztem folgt $(f', f'')\,|\,v$, ebenso $|w, \to |\,(v, w)$.
Ist daher $f' = f'' = \frac{n-1}{2}$, so ist auch $v = w = \frac{n-1}{2}$.

Vermutung: $|f' - f''| \underline{\underline{\geq}} |v - w|$.
Über "Star-Algebras": Bohenblust Kongress 1954
???
Seite 103

Halbprimitive Perm.-g.: 27.11.54
$\mathfrak{G} < \mathfrak{G}$ heisse halbmaximal, wenn es nur eine einzige maximale Untergr. von $\mathfrak{G}$ gibt, welche G umfasst. Eine Pgr $\mathfrak{G}$ heisse halbprimitiv, wenn $\mathfrak{G}_1$ halbmaximal. Aus $\mathfrak{G}$ ist dann nur eine primitive Gruppe $\overline{G}$ durch Vergröberung abzuleiten. Es scheint lohnend, diese Begriffe zu untersuchen.Z.B. gilt: Ist $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \neq E$, $\mathfrak{N}$ nur halbprimitiv, so auch $\mathfrak{G}$.

??? Müller-Dresden **???** 1954:
??? mit nocht-linearen auftreten dem EW μ.
Faber 1914, Tamarkin, Taylor 1938
Meranda 38, 40, **???** 40, Goshberg 51
Charasov 1950, $\underline{\underline{\underline{1949}}}$. Atkinson

Kann man den Hauptidealsatz beweisen mittels (verlag. G) $|\mathfrak{G} : \mathfrak{G}'| = E$, indem man notfalls $\mathfrak{G}$' weiter aufspaltet ?
Seite 104

Zur Schur-Methode.
I.

> Genau dann ist $\mathfrak{G}_1$ auf zwei Transsystemen $\mathfrak{G}_1^K \mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_1 < \mathfrak{G}_1$ simultan ("doppelt") transitiv, wenn $\mathfrak{G}_1 = (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_1^K)(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_1^L)$

II.

> Genau dann ist $\mathfrak{G}_1 \, K \, \mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_1 \, L^{-1} \, \mathfrak{G}_1$ ein einziges Transsystem wenn $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_1^K \cdot \mathfrak{G}_1^L$.
> Also gilt $I \to II$.
> NB: Es ist
> I $\leftrightarrow$ Für jedes $G_\alpha \in \mathfrak{G}_1$ ist $\quad {\mathfrak{G}_1}^K G_\alpha \cap \ \mathfrak{G}_1^L$**???** $\cap \, \mathfrak{G}_1 \neq \oslash$
> II $\leftrightarrow$ $\quad || \quad$ ${\mathfrak{G}_1}^K G_\alpha \cap \ \mathfrak{G}_1^L$**???** $\cap \, \mathfrak{G}_1 \neq \oslash$

III.

> Genau dann ist $\mathfrak{G}_1$ auf ${\mathfrak{G}_1}^K \mathfrak{G}_1$ zweifach transitiv wenn zu jedem $G_\alpha, G_\beta \in \mathfrak{G}_1$; $G_\alpha, G_\beta \notin \mathfrak{G}_1^K$ gilt $G_\alpha \, \mathfrak{G}_1^K \cap \mathfrak{G}_1^K \, G_\beta \cap \mathfrak{G}_1 \neq \oslash$

IV.

> Genau dann ist ${\mathfrak{G}_1}^K \mathfrak{G}_1 \cdot {\mathfrak{G}_1}^{K^{-1}} \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1 \, L \, \mathfrak{G}_1$ **???** wenn $G_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_1^K \to G_\alpha \, \mathfrak{G}_1^K \cap \mathfrak{G}_1^K G_\beta \neq \oslash$.

???
NB: Daher gilt: III $\to$ IV.

Vorschlag: $\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \mathfrak{W}\mathfrak{R} + \mathfrak{p}\ldots$ **???** deutet Zählung der Vielfachheiten an.
Schreibweise bei Schur-Meth.

Seite 105

1.Satz:

Sind zwei gepaarte trans.Konstituenten von $\mathfrak{G}_1$ in einen <u>primitiven</u> Gruppe $\mathfrak{G}$ regulär, so ist jeder von ihnen **???** $\mathfrak{G}_1$.
Bew:

$$\mathfrak{G}_1 \cap {\mathfrak{G}_1}^K \lhd \mathfrak{G}_1 \text{ und } {\mathfrak{G}_1}^{K^{-1}} \cap \mathfrak{G}_1 \lhd \mathfrak{G}_1 \to$$
$$\mathfrak{G}_1 \cap {\mathfrak{G}_1}^K \lhd \{\mathfrak{G}_1, {\mathfrak{G}_1}^K\} = \mathfrak{G}$$

2.Satz: in jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ gerader Ordnung enthält $\mathfrak{G}_1$ mindestens einen selbstgepaarten Konstituenten. [im wesentl. Manning 1927, S.819]
Bew: $K^L = E$; $\mathfrak{G}_1\, K\, \mathfrak{G}_1$

3.Frage zu 1. Ist ein Konstituent von $\mathfrak{G}_1$, der mit einem regulären gepaart ist, stets "treu" ? (dh. $\cong \mathfrak{G}_1$).

4. Satz: Ist δ eine Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}$ prim, $\mathfrak{K}$ ein **???** Konsitit von $\mathfrak{G}_1$, so besitzt $\mathfrak{K}$ **???** G mit $G \geq F$.

Dh. die Kompfaktorgr. (u. ihre Untergr.) <u>eins</u> **???** Ko von $\mathfrak{G}_1$ enthalten <u>alle</u> Kompfaktgr von $\mathfrak{G}_1$.
??? : Jede **???** von $\mathfrak{G}_1$ ist "Teil" von $\mathfrak{K}$.

S.Sonderfall: Ist ein **???** Ko von $\mathfrak{G}_1$ auflösbar, so $\mathfrak{G}_1$ auflösbar.
Konstituent von $\mathfrak{G}_1$ die $\mathfrak{A}_5$ als eine Kompfaktorgruppe.

Jede maximale Kompfaktgr. <u>eines</u> Konstituenten von $\mathfrak{G}_1$ ($\mathfrak{G}$ prim) ist auch eine Kompfgr jedes andern Konstituenten. Dh dies umfasst 4. **???**

Seite 106

Satz von Manning B̈AMS 1929: Ist $\mathfrak{G}$ primitiv und hat $\mathfrak{G}_1$ einen 2fach transitiven Konstituenten 7 des Grades $k > 2$, so hat $\mathfrak{G}_1$ einen Konstituenten eines Grades l mit $k < l \mid k(k-1)$.
Bew mit Schur-Methode unter der (wohl vermeidbaren) Zusatzvoraussetzungen: $\mathfrak{G}$ enthält eine trans. neg. Untergruppe: $\mathfrak{G}_1$ sei 2-tra auf $\mathfrak{K}$. Dann ist $(104_{III})\, \mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}} = k\,E + \mu\,\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}$ primär. Daher $\begin{cases} \mu\, \text{???}\; k-1 \\ \mu \cdot |\mathfrak{L}| = k \cdot (k-1) \end{cases}$; es kann angenommen werden $|\mathfrak{L}| \leq k$, also $\mu = k-1$: **???**

$* \qquad \mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}} = k\,E + (k-1)\,\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}$ primär.
Hierausfolgt $\mathfrak{L}\,\mathfrak{K} = (k-1)\,\mathfrak{K} + \ \mathfrak{W} \qquad (\mathfrak{W}\,\underline{\eta}\,\mathbf{???}\,)$
also $\mathfrak{L}\,\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{K}} = k\,(k-1)\,E + (k-1)^2\,\mathfrak{L} + \mathfrak{W}\,\overline{\mathfrak{K}}$
andererseits$(*) \qquad = k\,\mathfrak{L} + (k-1)\,\mathfrak{L}^2$
daher $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{L}^2 = k\,E + (\mathfrak{L}-2)\,\mathfrak{L}) + \frac{\mathfrak{W}\,\overline{k}-\mathfrak{L}}{k-1}$ **???**
Wie $*$ ist auch $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}\,\overline{\mathfrak{L}} = k\,E + (k-1)\,\mathfrak{R} \qquad \mathfrak{R}$ pri
also $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}$ aus $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, daher $\mathfrak{L}^2 = k\,E + (k-1)\,\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}+E$ Gruppe, $\mathfrak{G}$ imprimitiv.

Konstituenten-Paarung:
Jeder transitive Konstituent von $\mathfrak{U}$ bei Darst. nach G ist gepaart mit einem eindeut bestimmten trans Konst von G bei Darst. nach $\mathfrak{U}$: $\quad G\,A\,\mathfrak{U} \leftrightarrow \mathfrak{U}\,A^{-1}\,G$.
Seite 107

Aufgabe: Satz von Manning $\leftarrow$ ohne Zusatzvorauss.
Ähnlich: Beweise den folgenden Satz von Manning 1927 TAMS: Ist $\mathfrak{G}$ pri und nur ein trans Konst von $\mathfrak{G}_1$ impri, so ist dieser treu. Sind alle pri, so ist jeder treu. Allgemeiner **???**. Wenn $\mathfrak{K}$ ein (treu oder intreu) Konstituent von $\mathfrak{G}_1$ pri sind, so ist $\mathfrak{K}$ treu.
Ebenfalls 1927 TAMS zeigte Manning:
Ist ein Konstituent $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}_1$ (imprim. $\mathfrak{G}$) $2\frac{1}{2}$-tra, Grad $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}$ treu oder $\mathfrak{G}_1$ hat einen impri Konstituenten des Grads $k\,(k-1)$ mit einem **???** $k-1$, dessen prim Kopf " gleich $\mathfrak{K}$ ist.
Frage: Gelten ähnliche Sätze, wenn **???** nicht einen mehrfach treu Konst von $\mathfrak{G}_1$ voraussetzt, sondern simultane (doppelte) Transitivität von $\mathfrak{G}_1$ auf zwei oder mehr Konstituenten ?
Ja:
Satz: Ist $\mathfrak{G}$ pri und $\mathfrak{G}_1$ simultan tra auf **???** und enthält $\mathfrak{G}$ eine neg tra Ugruppe] **???** $k \leq l$, so enthält $\mathfrak{G}_1$ einen tra Konst $\mathfrak{W}$ eines Grades m: $m\,|k\,l$, $m > l$
Bew: sonst $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{L}} = k_1\,\mathfrak{W}$, $\overline{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{W} = k\,\overline{\mathfrak{L}}$, $\overline{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{k}\,\overline{\mathfrak{L}} = k\,\overline{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{W} = k^2\,\overline{\mathfrak{L}}$
??? $\qquad < \overline{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{K} >$ intrans
Die Vor ist erfüllt insbesondere <u>bei</u> $(k,\,l) = 1$.
Falsch ist die Vermutung:
Jede primitive Gruppe des Grades $q\,p$ (p Primzahl $q < p$) ist zweifach transitiv . Gegenbeispiel:
Die symmetrische γ_p hat als Untergr. $G = \gamma_{p-2} \cdot (p-1 \;\; p-2)$, diese ist maximal, erzeugt eine nur $1\,\frac{1}{2}$ fach transitive Darstellung von γ_p vom Grade $p \cdot \frac{p-1}{2}$.
Ähnlich gibts eine Darst. des Gr. $\frac{p+1}{2}$ von γ_{p+1}. Die obige Vermutung ist also höchstens bis $q < \frac{p-1}{2}$ richtig. Der niedrigste unentschiedene Wert ist also $n = 33$. Ist dort jede primitive Gruppe 2-tra ?
Achtung:
Für $p = 5$ ergibt sich eine genau $1\,\frac{1}{2}$-tra Darstellung des Grades 10 von γ_5. Wie verträgt sich das mit Satz von S.98 ?
s.S.109

Neue Vermutung: Bei festem k sind alle prim Gruppen des Grades k_p 2-tra, ausgenommen gewisse p von der Dichte 0. Siehe für $p = 2$ S.109

S.109 ist vollständig durchgestrichen

Seite 110

Falls es eine einf tra pri Gruppe G des Grades 26 gibt, hat $\mathfrak{G}_1$ Transsysteme d. Länge 1, 10, 15, und erscheint sowohl $\mathfrak{K}_{10}$ **???** $\mathfrak{K}_{15}$ primitiv zu sein, $\mathfrak{K}_{15}$ <u>nur</u> 1 $\frac{1}{2}$-tra. Eine Gruppe, die zwar solche Darstellungen besitzt, ist $\mathfrak{A}_6$ (auch γ_6). Dort **???** $\mathfrak{K}_{10}$ 2-tra.
Vielleicht erhält man eine $\mathfrak{G}^{26}$ der gesuchten Art einer geeignete Gruppe Untergruppe der Komplexgruppe $C\,(4,\,5)$, falls diese $\mathfrak{A}_6$ als Teil enthält. $C\,(4,\,5)$ hat *Ord.* $26.6! \cdot \cdot 5^3 \cdot 4$ oder man könnte versuchen, die oben angegebene intra Dartellg von γ_6 oder $\mathfrak{A}_6$ des Grades 25 zu "erweitern".
Der Ip-Satz gibt etwas ihrer Gr. des Grades $2p = q+1$, $q - PZ$!
Dazu: Frobenius ansehen (Gr.)
Die transitiven Konstituente von $\mathfrak{G}_\alpha$ ($\mathfrak{G}$ primitiv) seien
(α) , $7_{???}, \sim, 7_k$; sei $G \leqq \mathfrak{G}$ mit den trans. Konstituenten **???** . Die Grade seien $t_2 \ldots u_m$. Dann gibt es $\overline{i}$, j so, dass **???** t_2', wobei t_2' den Grad einer gewissen trans. Permgr bedeutet, die <u>sowohl</u> als trans. Konstituent einer Untergruppe von **???** wie von 7_2 auftritt.
Bew: **???** $S = \begin{pmatrix} \omega & \varphi & \mu \\ \alpha & \beta & - \end{pmatrix}$, wobei ω von einem $\mathfrak{U}$ betroffen, φ von einer $\mathfrak{W}$, und β fest gewählt in 7_2. Also kann man $(G \to S^{???}\, G\, S)$ oBdt

Seite 111

annehmen, dass α von **???** , β von **???** betroffen ist. Dann ist $G_1 \leq \mathfrak{G}_\alpha$, also β_{g_α} trans von G_α in $\left\{ \begin{array}{l} ??? \\ 7_2 \end{array} \right.$, und $v_j =$ **???**

1.

> Anders ausgedrckt: $\Omega = T + \triangle$, $T_G = T$, $\alpha + \beta$, $\mathfrak{G}$ pri $\to$ es gibt γ, δ: $|\gamma_G| \mid |\delta_G|.t'$, wobei t' der Grad einer tra konst. Gruppe ist, die sowohl in $\mathfrak{G}_\alpha^{\beta_{G_\alpha}}$ wie in G^{δ_G} als tra Ko einer Untergruppe auftritt.
> Folgen:
>
> 2. Ist 7_2 reg, so gibt genauer $|\gamma_G| \mid |\delta_G|.t_2$
> 3. Stets ist $|\gamma\, G| \leq t_2\, |\delta_G|$ (keine Lücke **???** als t_2)
> 4. $t_2 = 3$, $|\gamma\, G| \geqq |\delta_G| \to |\gamma\, G| = |\delta_G| \cdot \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 3 \end{array}$.

Ist $\mathfrak{G}$ primitiv, und besitzt $\mathfrak{G}_1$ zwei trans. Konstituenten des Grades t, von denen einer $\mathfrak{A}_t$ enthält, so tut der andere dies auch. Bew: Die Ordnunugen der Konstit enth dieselben Primz.

Seite 112

Methode v. Schur
Gibts in $\mathfrak{G}$ eine reg abelsche Untergruppe, oder wenigstens zu jedem ν ein $A = \begin{pmatrix} 1 \cdots \\ \nu \cdots \end{pmatrix}$, dessen Zentralisator transitiv ist, so die Klassenmatrizen skalare Vielfache der V_i ("der primären Komplexe"). Dann kann man sicher $V_i^P = V_j$ einführen.
Bew: $\mathfrak{G}_1 \, A \, \mathfrak{G}_1 =$ **???** $\supseteq G_1^{-1} \, N^{-1} A \, N \, G$, $\mathfrak{R} \, \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{G}_1 \, A \, \mathfrak{G}_1 \supseteq$ Klasse A, die zugeh. Klassenmatrix **???** hat daher nur in einem Transs von $\mathfrak{H}_1$ nicht **???**, ist $= const.V_i$

Das Homolorph von $\mathfrak{G}$ ist primitiv genau wenn $\mathfrak{G}$ keine char. Ugr. hat.

Ist eine Klassenmatrix C "primär" $= c \cdot V_i$ mit $l_i = \min$, so auch alle $C^{(p)}$, $(p, \gamma) = 1$. Denn $Sp \, G^{-1} \, Vi = n = Sp \, G^{-p} \, V_i^{(p)}$, aber $V_i^{(p)}$ hat alle Matrixelemente ≤ 1 da **???** invariant gegen $^{(p)}$, daher müssen sie alle $= 1$ sein: $V_i^{(p)}$ ganz ≥ 0.

Seite 113

Folge des Frame. Satzes (S.113):
a) ist $(f_\rho, n) = 1$ in einer Perm.Gr., so ist $\Pi \, f_\rho{}^{l_\rho^2} \, | \, \Pi \, t_\sigma$ (Anzahl der Faktoren ist **???**
a) Ist $f_2 = f_3 = \cdots$, so ist $f \rho, n) = 1$, daher nach a) $\Pi \, f_\rho{}^{l_\rho^2} \, | \, \Pi \, t_\sigma$
Hieraus **???**
$\rightarrow$ Jede Primzahl $p \, t^n$ geht in höchstens so vielen f_ρ auf (mit $V f h \; l_\rho^2$ gezählt) wie in t_σ. Satz von Frame "(buke 3 (1937)) richtiggestellt: 30.1.55
Sei $\mathfrak{G}$ Permgr, tra von Grade n, Translängen von $\mathfrak{G}_1$ seien $1 = t_1$ **???**, die Grade der irred Bestdteile von $\mathfrak{G}$ $f_1, \sim, f_r$, ihre Vfh $l_1 \; \sim, l_r$, so ist $\frac{n^{s-2} \, \Pi \, t_\sigma}{\Pi \, f_\rho{}^{l_\rho^2}} = Q$ ganz, und wenn alle irred Bestdteile rat. Spen haben,
damit ist $Q = R^2$.
Bew: $\mathfrak{W}$ der zugeord Ring, Basis $V_\sigma \quad \sigma = 1 \sim s$. Reduziere $\mathfrak{G}_1$ $v^1 \, \mathfrak{G} \cup = G =$
???

X= $(X_{\rho \, \sigma})$ $\quad \begin{matrix} (r = 1, \ldots, s; \text{ Typ } X = s, s) \\ (\rho = 1, \ldots, \text{???} \end{matrix}$ wird dann mit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & f_\rho \;\; \mathrm{x} \;\; E_{e_\rho} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & t_\sigma & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad : \text{Wegen}$$

$\sum\limits_{\sigma} V_\sigma = (1)$ ist Spalten
$\overline{X}' \, F \, X = n \, T = (Sp \, \overline{V}_\alpha{}' \, V_\sigma)$. Daher $\frac{|n\,T|}{|F|} = |\overline{X}'| \, |X|$ ganz alg.
Sind die Char. alle **???** , so ei $*$ ein Autom des Körpers, indem die W transf ω_σ liegen. Es ist $U \, \omega_\sigma \, U^{-1} = V_\sigma = U^* \, \omega_\sigma^* \, U^{*-1}$, also $U^{-1} \, U^*$ transf ω_σ in ω_σ^*, also

$$U^{-1} \, U^* = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & M_\rho & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$M_\rho^{-1} \, \textbf{???} = W^{\text{x}}_{\textbf{???}} \, \text{x} \, E_{f_\rho}$$

Hieraus folgt $Sp \, W_{\rho\,\sigma^2} \, Sp \, W^*_{\rho\,\sigma}$, also ist für die irred Gruppe, die von den $W_{\rho\,\sigma}$ erzeugt wird, $W^*_{\rho\,\sigma}$ eine äqu. Darst:
$W^*_{\rho\,\sigma} = P^{-1} \, W_{\rho\,\sigma} \, P$. Hieraus $X^*_{\rho\,\sigma} = Q \cdot X_{\rho\,\sigma}$ mit $det \, Q = 1 \rightarrow det \, X$ rat.
Frage: Verallgemeinerung auf impr. lieare Gruppen ?

Seite 114

Frame:
a) Zur Verschärfg der Elementarteileraussagen beim Problem von Frame die trivialen $t_,$, f_1 abspalten !

b) Ist ausser $f_1 = 1$: $f_2 = f_3 = \cdot = f_r$ in einer Permgr., so ist nicht nur . **???** (113), sondern noch . $r = s$, also $e_2 = \cdots = l_r = 1$, daher **???** abelsch.

c)Falsch ist die Vermutung: Die $\left\{ \begin{array}{l} \text{oder Determinantenteiler} \\ \text{Elemetarteiler} \end{array} \right.$ von $P' \, A \, P$ unter scheiden sich von denen von A um Quadrate. Gegenbeispiel:
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & 2 \end{pmatrix}$.

d) Wohl immer ist $\frac{n^{k-2} \Pi \, t_\sigma}{\Pi \, f_\rho{}^{l_\rho^2}} \equiv 0, 1$ uwd 4: $det \, W \equiv$ ganz rat uwd 2 **???**

$\downarrow$

e) Nicht immer ist $Q = \mathcal{R}^2$.
Gegenb: $\left\{ \begin{array}{l} a) \;\; (\mathfrak{G}) = 2. \\ b) \\ |\mathfrak{G}| = 2 \cdot 5, \mathfrak{G} \text{ nicht abelsch}, n = 5. \quad t_\rho = f_\rho = 1, 2, 2\,, \, Q = 5 \end{array} \right.$

f) Ist **???** kommut, so sind die V_i Linverbogen der Klassensummen.

Seite 115

Schur.

1. Eine Permgr. ist genau dann imprimitiv, wenn unter den **???** vertauschbaren **???** Matrizen V_i eine zerlegbare ($\neq E$) vorkommt,

??? wenn unter den V_i einige für sich die Basis eines Rings bilden.

Denn in beiden Fällen ist **???** $\left(\begin{array}{c|cc} F & & \\ \hline & G & \\ & & \ddots \end{array}\right)$ **???** mit $F = \begin{pmatrix} 1 & ??? & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, also bilden die **???** Zeilen ein Imprimivitätssystem von $\mathfrak{G}$.

2. Ist jede Transs von $\mathfrak{G}_1$ selbstgepaart, so ist **???** kommutativ und "reell", da alle V_i hermitesch, Folge: $l_\rho = 1$, alle $X_{\rho\,\sigma}$ reell.

3. Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche Untergr. von $\mathfrak{G}$ mit s Transsystemen **???** Längen > 1, so **???** $\sum\limits_{\mathfrak{G}} G^{-1}\,\mathfrak{A}\,G$ aus $\leq s$ der V_i zusammen.

4. Ist $Z \lhd A$ transitiv, so ist $\sum G^{-1}\,A\,G =$ **???** V_i.

5. Sind alle $l_\rho = 1$, also **???** kommt, so ist $\mathfrak{G}_1\,V_i = K_i$:

$\downarrow$

Das ist isom Abb **???** $\leftrightarrow \mathfrak{K}$

$$K_i = \sum_{\wedge R_v = v \in T_i}$$

6. für jede Klassensumme ist $C^p \equiv C^{(p)}$ (und p). Wenn $(p,\, g) = 1$

Seite 116

(1) Ist im $V_{???} = \sum$ ganz. C_i, so m **???** $\equiv m\,V^p \quad (p)$ wenn $(p,$ **???** $) = 1$; für die EWe ω_i von V folgt
$m\,\omega_i^p \equiv m\,\omega_i^{(p.)} \rightarrow \underline{\omega_i^{(p)} \equiv \omega_i^p \quad ???\ p}$
Das letztere gilt aber wohl für alle ganzen Zahlen im g-ten Kreistelungskörper.

Aufgabe: Die maximalen Untergruppen der symm γ_n bestimmen.

Seite 117

5.3.1955

Über trans. Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$, des Grades $2p+1 \quad (p = P\,z > 2)$ deren Ordnung durch p teilbar ist.
(1) $\mathfrak{G}$ pro.
(2) Ist $|\mathfrak{G}|$ gerade, so ist $\mathfrak{G}$ 2-tra.
Bew: sonst hat $\mathfrak{G}_1$ ausser $\{1\}$ noch zwei Transs. der Lge p, und diese sind

selbstgepaart; also die zu einem von ihnen gehörige Matrix V ist hermitesch: $V = V^*$. Die Grade der irred. Bestandteile von $\mathfrak{G}$ sind 1, p, p. [Denn nach Frame ist $\frac{(2p+1)\,p^2}{f_2\,f_3} = Q$ ganz, und hat $f_2 \neq p$ also $f_2\,f_3\,|\,(2p+1)$

$$f_2\,(2p - f_2) = f_2\,f_3 \leq 2p + 1$$

$$f_2{}^2 - 2p\,f_2 + 2p + 1 \geq 0$$

$f_2 \leq f_3$:

$$\begin{array}{l} f_2 \leq p - \sqrt{p^2 - 2p - 1} < p - \sqrt{p^2 - 4p + 4} \\ f_2 < p - (p-2) - 2 \qquad f_2 = 1,\ \chi^2 \text{ rat} \to \chi^2 \equiv 1 \text{ geht } r)] \end{array}$$

Nun wird, wenn V die (g rat.) EWe p, v', v'' hat;

$$\otimes \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 = Sp\,V = p + p\,v' + p\,v'' \to v' + v'' = -1 \\ (2p+1)\,p = Sp\,V^2 = p^2 + pv'^2 + pv''^2 \to \underline{v'^2 + v''^2 = p + 1} \end{array} \right.$$

$$2v'\,v'' = (-1)^2 - (p+1) = -p$$

Hieraus folgt $2/p$, $p = 2$ entgegen Vor.
(3) Ist $|\mathfrak{G}|$ ungerade, so ist $n\,(= 2p+1) = q^{2a+1}$, $q\,Pz \equiv 3\,(4)$
Bew: Wieder sind wie oben, die Grade der irred Bestdteile 1, μ, μ, jetzt gilt aber $V \neq V^*$ und dabei statt $\otimes$:

Seite 118

$$\left. \begin{array}{l} 0 = p + pv' + pv'' \\ 0 = p^2 + pv'^2 + pv''^2 \end{array} \right\} \quad \to \quad \begin{array}{l} v' + v'' = -1 \\ v'^2 + v''^2 = -p \end{array}$$

also $v',\, v'' = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{n} = v,\, \overline{v} \qquad (n = 2p+1)$
$\sqrt{n}$ ist irrat, da $n = 2p + 1 \equiv 3$ mod 4.
Wenn nun für ein $G \in \mathfrak{G} \quad \chi(G) \equiv 0(mod 2) \qquad (\chi = \chi^1 + \chi^2 + \chi^3)$ so ist $\chi^{2^{(G)}} + \chi^{3^{(G)}} \equiv 1 \quad (2)$, daher $\chi^2 \neq \chi^3$. daher erzeugt $\chi^{2^{(G)}}$ den Körper $K(i\sqrt{n})$.
Stets ist $\chi^{(G)} = 0,\, 1,\, 3$ da sie Konstit von $\mathfrak{G}_1$ auflösbar, da $\neq$ 2-tra
Falls daher $q\,|\,n$ existiert, $q\,Pz > 3$, so ist die q-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ regulär, es gibt Q mit $Q^q = E$, $\chi^{(Q)} = 0$, also ist dann $K(\chi^{2^{(6)}}) = K(i\sqrt{n})$, dh $i\sqrt{n}$ erzeugt den quadratischen Teilkörper von $K(\sqrt[q]{1})$, daher ist $n = m^2 \cdot q$, folglich gibts kein zweites q dieser Art, d.h. es ist

$$n = 3^{2b}\,q^{2a+1}$$

Ann: Sei $b > 0$.
Die Transsysteme einer 3-Sylowgr haben also alle Längen $\geq q$, daher ist jeder Element aus ihrem Zentrum regulär (wegen $\chi \leq 3$), also erzeugt auch $i\sqrt{n}$ den Körper $K(\sqrt[3]{i})$, das geht nicht. Folglich $b = 0$.

Also ist, wenn $3 < q\,|\,n, \quad n = q^k$ mit $q^k - 1 = 2p$. Da $q - 1\,|\,q^k - 1$, ist $q - 1 = 2$, $q = 3$. Also: Stets ist, wenn $2f\,|\mathfrak{G}|$, $n = 3^{2a+1}$.

Seite 119

???

(5)

Ist $\left\{\begin{array}{l}\textbf{???}\\ \text{dh } 3\,|\,|\mathfrak{G}_1|\end{array}\right.$, so enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler vom Index 3.

Bew: Wenn dies für g_1 selbst falsch ist, also $3\,|\,\mathfrak{G}_1$, so hat das Zentrum $\mathfrak{Z}$ einer 3-Sylowgr γ die Ordnung 3, da seine Elemente die **???** für $\gamma_1 = \gamma \cap \mathfrak{G}_1$ festen Ziffern untereinander permutieren, also das **???** ein Trans der Länge 3 hat. Sei $|\mathfrak{Y} : \mathfrak{Z}| = 3$, $\mathfrak{Y} \trianglelefteq \gamma$. Dann hat dieser Zentralistaor von $\mathfrak{Y}$ in γ den Index 3. Es ist transitiv. [Denn sonst bestünde es aus allen $S \in \gamma$, welche seine Transs, fest lassen, er enthielte insbesondere γ_1. Wenn γ_1 $\mathfrak{Y}$ zenralisiert, hat $\mathfrak{Y}$ auf dem 3 von γ_1 fest gelassenen Ziffern einen Konstituenten des Grades 3, und **???** $\mathfrak{Y} \trianglelefteq \gamma_1$ haben <u>*alle*</u> Konst. von $\mathfrak{Y}$ den Grad 3, bestehen also aus den Transgebieten eines Zentrumelements Z von γ. Es wäre dann $\mathfrak{Y}_1 \neq E$, dh. es gibt $Y_1 \in \mathfrak{Y} \cap \gamma_1$. Dieses Y_1 stimmt auf jedem Transgebiet von $\mathfrak{Y}$ mit Z oder Z^1 überein, aber nur auf $\leq$ einem mit Z nur auf $\leq$ einem mit Z^{-1}, da man sonst in γ ein Element mit $\chi \geq 6$ hätte. Folglich ist dann $n \leq 9$ und wegen $n = 3^{2a+1} n = 3$,]
Da Zentral. $\mathfrak{Y}$ transitiv, ist $\mathfrak{Y}$ regulär, hat nur Transs. der Ord q.
Der Zentralisator vom Index 3 in γ enthält daher γ_1 nicht, und man kann durch Verlagerung von $\mathfrak{G}$ nach γ / **???** $\mathfrak{Y}$ eine Faktorgruppe der Ord 3 abspalten

(6)

Weiterhin kann also vorausgesetzt werden: $2f\,|\mathfrak{G}|$, $n = 3^{2a+1}\,T\,|\mathfrak{G}|$.
Zu zeigen: $\mathfrak{G}$ auflösbar.

Seite 120

Nach $n = 2p+1$. $\quad n = 3^{2a+1}$ ist Sylowgr, $\mathfrak{G}_1$ auflösbar

$2f\,|\mathfrak{G}|$.

<u>und</u> es gebe ein Element einer Ord $3^x\,q$, q Primzahl $\neq 3$
Dann ist $q\,|\,f = \frac{(\mathfrak{G}_1)}{p}$, und die q-Sylowgruppe ist im Zentrum ihres Normalisators, also kann man sie oben abspalten. Induktion: Normalteiler auflösbar, $\mathfrak{G}$ auflösbar. Bleibt
(7) $(3, |\mathfrak{G}_1|) = 1$, es gibt keine Elemente "gemischter Ordnung" $3^x q$.
Dann gibt es
n p.Sylowgr., $\frac{n\,p}{3}$ Gr. der Ord f (alle konjugiert), also $a_p = n\,(p-1)$ El. d. Ord p, $a_f = \frac{n\,p\,(f-1)}{3}$ El der Ord $|\,f$ und > 1, daher $a_3 = n\,p\,f - n\,(p-1) - \frac{n\,p\,(f-1)}{3} - 1$ El der ord $3 > 1$. Von den El der ord $3'''$ hat jedes $\chi^2 \neq 0$, da sonst $\chi = 1$ wäre; als ganze Zahl des Körpers $K(^3\sqrt{\ })$ ist dann $|\chi^2| \geqq 1$, denn $\chi^2 = x + i\,\rho$. Für manche Elemente $Z \in G$ der Ord 3 ist aber $|\chi^2|$ noch grösser: Ist $Z \in Ztr\,G$,

so ist $\sum\limits_{G_1 \in Y_1} G_1^{-1}\, Z\, G_1$ vertb. mit allem Matrizen von $\mathfrak{G}$, daher
$\sum\limits_{G_1 \in Y_1} G_1^{-1}\, Z\, G_1 = f\, V \quad$ (oder V^*). Vergleich der Spuren ergibt
$p\, f\, \chi^2(Z) = p\, f\, v \quad$ (oder $\overline{v}$)
$|\chi^2(Z)|^2 = |v|^2 = |\frac{-1+i\,\sqrt{n}}{2}|^2 = \frac{1+n}{4}$
Die Anzahl der zu Z konjugierten ist $p\, f$, zu Z^{-1} ebenso viel, also gibt es in $\mathfrak{G}$ mindestens $2\, p\, f$ Elem der Ord 3 mit $|\chi^2|^2 = \frac{1+n}{4}$

Seite 121

$\downarrow E \quad \downarrow G^{f_2}\, E \quad \downarrow G^3 = E \quad \downarrow G^3 = E$

Nun wird $n\, p\, f = \sum\limits_G |\chi^2(G)|^2 \geqq p^2 + a_f \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + 2p\, f\, \frac{n-3}{4}$
also
???

$n\,(p-1) + 1 \geqq p^2 + \frac{p\, f\,(n-3)}{2}$
$n\, p > p^2 + \frac{p\, f\,(n-3)}{2} = \frac{p\, f\, n}{2} + p\,(p - \frac{3f}{2}) > \frac{p\, f\, n}{2}$
$\rightarrow f < 2 \rightarrow f = 1 \rightarrow |\mathfrak{G}| = 3^{2a+1} \cdot p \rightarrow \mathfrak{G}$ aufl.

(7) Ist $n = 3^r = 2p+1$, so ist r Primzahl [sonst $d\,|\,r$, $3^d - 1\,|\,2p$].
$2f\,|\mathfrak{G}|$
Hieraus folgt, dass sie äussere Autom-Gruppe der in $\mathfrak{G}$ normal enthaltenen Gruppe $G\,\mathfrak{p}$ die Ord $2\,r$ hat. Denn wegen $G \lhd \mathfrak{G}\,\mathfrak{p}$ ist $G\,\mathfrak{p} \simeq \begin{pmatrix} \omega & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mit $\alpha \in G\,F\,(3^r)$, $\omega = \beta^2 \neq 0 \;\; \in \;\; G\,F\,(3^r)$. Und jeder **???** dieser Matrizengruppe lässt sich durch nachfolgende Transf min einer Dreiecksmatrix verwandeln in einen der $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ überführt, mit einem natürl. m sogar ungeraden (da Ord ω ungerade) m. Dann aber führt er $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ & 1 \end{pmatrix}$ **???** $\begin{pmatrix} 1 & \pm\omega^a \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{-a} & \\ & 1 \end{pmatrix}$ über in $\begin{pmatrix} \omega^{m\,a} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{-m\,a} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm\omega^{-m\,a} \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^m \\ & 1 \end{pmatrix}$
Also ist dann $(\alpha + \beta)^m = \alpha^m + \beta^m$; $\alpha \rightarrow \alpha^m$ Autom von $C_0\, F(3^r)$ aber davon gibts nur r Stück; die Dreieckstransf mit $Det = \rho^2$ sind innere Autom. **???** |äussere $AG| = 2r$. Die Folge:

Seite 122

Zusammenfassung: Sei $\mathfrak{G}$ eine trans Permut.-Gruppe des Grades $2p + 1 = n$ (p Primz.) deren Ord. durch p teilbar ist.
(a)Ist $2f\,|\mathfrak{G}|$, so ist $\mathfrak{G}$ auflósbar, $n = 3^{???}$, r ungerade Primzahl, $|\mathfrak{G}| = n \cdot p$

oder $n\,p\,r$. Zu jeder dieser beiden Ordnungen gilts wirklich genau eine Gruppe

$\mathfrak{G}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{zweistufig}\\ \text{dreistufig}\end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{l} \\ \\ \textbf{???}\,. \end{array}\right\}$

(b) Ist $2\,|\,|\mathfrak{G}|$, so ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv.
[Frage: Wann kann man mit Hilfe des $2p$-Satzes sogar dreifache Transitivität behaupten ?]

Zu (α): Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sind: I. $\begin{pmatrix} \omega & \alpha \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 0 \neq \omega = \beta^2 \in G\,F\,(3^r)$; Ord $n\,p$

$\alpha \in \quad |\,|$

II. I erweitert mit $\{\rho \to \rho^{???}, \rho^q, \dots\}$; Ord $n\,p\,r$
[d.h: $\mathfrak{G}$ ist die **???** lineare Gruppe $\xi \to \alpha^2\,\xi^{3^\nu} + \beta \qquad \xi,\, \alpha \neq 0$,
$\beta \in G\,F\,(3^r)$]
Fortsetzung S.129

Über Gruppen des Grades $p+1$, deren Ord durch p teilbar ist, wird im Fall nur 2-fahcer Transitivität was bei frobenius stehen (SB **???** 1902, 351 - 369).
Über Gruppen des Grades p: Zu untersuchen wäre, ob sie vielleicht im Fall der Unauflösbarkeit sogar $2\frac{1}{2}$-tra sind.

S.123 ist unten durchgestrichen

Seite 123

Bemerkung über Gruppen mit "geordneten Sylow-Turm":
Das Wesentliche ist vielleicht, dass die Hauptfaktoren dieser auflösbaren Gruppen von "unten 'nach' oben" monoton fallen.

Zur Methode von Schur: $\mathfrak{G}$ enthalte reg tra $G \leq \mathfrak{G}$.
??? Ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^* = \mathfrak{b}^{-1} \subseteq G$ ein reeller Block von $\mathfrak{G}_1$, so ist die grösste Untergruppe $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{G}_1$, die $\mathfrak{b}$ fest lässt, mit $\mathfrak{b}$ vertauschbar
Bew: Zu jedem $F \in \mathfrak{f}$, $B \in \mathfrak{b}$ gibt es $G_1 \in \mathfrak{G}_1$, $B' \in \mathfrak{b}$ mit

$$B\,F = G_1\,B' \qquad \text{da } \mathfrak{b} \text{ fest bei } \mathfrak{f}_1$$

$\mathfrak{G}_1\,B'^{-1} = \mathfrak{G}_1 \cdot F \cdot B'^{-1} = \mathfrak{G}_1\,B'^{-1}\,\mathfrak{G}_1 \quad$ zeigt: G_1 führt eine Z_i von $\mathfrak{b}^*$ nach $\mathfrak{b}^*$

$$\text{Also} \quad G_1 \in \mathfrak{f}_1 \qquad \mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_1 \leq \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{b} \quad = \quad .$$

Seite 124

(2)

Sind $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k$ ein im Ganzen reelles volles System [dh $\mathfrak{b}_1^* = \mathfrak{b}_1$] volles System konjugierter Blöcke von $\mathfrak{G}_1$, und bewirkt $\mathfrak{G}_1$ auf ihnen eine reguläre Permut.gruppe, so ist deer Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}_1$, der die $\mathfrak{b}_i$ einzeln in sich überfḧrt mit jedem $\mathfrak{b}_i$ vertauschbar.
Bew: (1)

Zu B_1 gibts B_1', mit G_1 mit $B_1\mathcal{N} = G_1\,B_1'$.

$$\mathcal{N}\,B_1'^{-1} = B_1^{-1}\,G_1$$

also G_1 lässt den Block $\mathfrak{b}_1^*$ fest, $G_1 \in \mathfrak{R}$.

(3)

Sind $\mathfrak{b}_1, \sim, \mathfrak{b}_k$ ein vollst System von konj Blöcken von $\mathfrak{G}_1$, so gibt es eine umfassendste Obergr. $\tilde{\mathfrak{G}}$ von G, die

$$\begin{cases} \mathfrak{b}_1 + \sim + \mathfrak{b}_k \text{ festblock für } \mathfrak{G}_1 \\ \mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_k \text{ als Blöcke} \quad | \, | \end{cases}$$

besitzt.
Denn wenn die $\mathfrak{b}_1$ von $\mathfrak{G}_1$ und $\hat{\mathfrak{G}}_1$ nur untereinander permutiert werden, so auch von $< \mathfrak{G}_1, \hat{\mathfrak{G}}_1 > = < \mathfrak{G}_1 \hat{\mathfrak{G}} >_1$.

Seite 125

Über Perm-Gr vom Grade p^2 und G: (p, p)
Hat $\mathfrak{G}_1$ konj. Blöcke $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k'$; $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i' + E$ Untergruppe von G so hat $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe des Index $k\,p$: Sei $\mathfrak{f}_1$ die grösste Ugr von $\mathfrak{G}_1$, die $\mathfrak{p}_1'$ in sich überführt. Nach S.123 ist $\mathfrak{f}_1\,\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{f}_1$, also Gruppe von Index $k\,p$. Daher hat dann $\mathfrak{G}$ eine primitive Darstellung als Pgruppe vom grade l_p $\quad (l|k)$.
Seite 126

<u>Allgemeines über Faktorisierung. s. auch S.85</u> Sei $\mathfrak{G}_1 \leqq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_2 \leqq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2$
Man bildet alle Zerlegungen
$A \in \mathfrak{A} \rightarrow \qquad A = A_1\,A_2, \qquad A_i \in \mathfrak{G}_i$
Alle $A \in \mathfrak{A}$: Die Menge der A_i heisst $\mathfrak{A}_i$.
Dann ist
(1) $\quad \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_2, \quad \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{A}$

(2) $\quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_2, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{A}$

ist $\mathfrak{A}$ Gruppe, so $\mathfrak{A}_i$ nicht immer. Aber:

(3) $\quad \mathfrak{A}$ Gruppe, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E \rightarrow |\mathfrak{A}_i| \,|\, \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \text{Bew:} \quad A_1 = A_1' &\leftrightarrow A = A_1\,A_2,\ A' = A_1\,A_2' \\ &\leftrightarrow A^{-1}\,A' \in \mathfrak{G}_2 \leftrightarrow \in \vartheta_2 = \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{A} \\ &\leftrightarrow A' \in A\,\vartheta_2 \end{aligned}$$

Allgemeiner:
(3') $\quad \ldots \quad \to |\mathfrak{A}_1| = \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_2|} \quad , \quad |\mathfrak{A}_2| = \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_1|}$

(4) $\quad \mathfrak{A}$ Gruppe, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i\,\mathfrak{A} \quad (i = 1,\, 2) \to \mathfrak{A}_i$ Gruppe. Bew (2)

Seite 127

(5) $\quad \mathfrak{A}$ Gruppe, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_{???} = \mathfrak{G}_{???}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2\,\mathfrak{A}_1$

Bew: $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_2$ Gruppe

(6) $\quad \mathfrak{A}$ Gruppe, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i\,\mathfrak{A} \quad (i = 1,\, 2) \to \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\,\mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{A}$

Nachinvariante Untergruppen von Perm.-Gruppen:

(1)

$\mathfrak{G}$ pri Gr $\mathfrak{G} = n$, $\mathfrak{A}$ minimale nachinvariante Untergr. von $\mathfrak{G}$, $|\mathfrak{A}| = p \to$ jedes minimale $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ hat $|\mathfrak{b}| = p$; $\mathfrak{G}$ besitzt nur einen minimalen Normalteiler, dieser hat die Ordnung $n = p^{\alpha}$.
Beweis: $< \mathfrak{A}^G >= \mathfrak{p} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{p} \lhd \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{p}| = p^{\beta}$; setze $\mathfrak{z} = ztr\,\mathfrak{p}$, dann $\mathfrak{z} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{z}$ tra, $\mathfrak{z}$ regulär. Ist $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, und wäre $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{z} = E$, so $\mathfrak{N} \leq Z_{???}\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$.

Seite 128

<u>Nachinv. Untergr. von Perm.-Gruppen:</u> (Fortsetzung).
(3)

$\mathfrak{G}$ 2-tra, Gr $\mathfrak{G} = n$, $\mathfrak{A}$ minimale nachinv. Ugr., $|\mathfrak{A}| \neq p =$ Primzahl
$\to \begin{cases} \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G} \text{ und } \mathfrak{A} \text{ pri.} \\ \mathfrak{A} \text{ einziger minimaler Normalt. v. } \mathfrak{G} \end{cases}$
Bew: Sei $\mathfrak{N} =< \mathfrak{A}^{???} >_{G\in\mathfrak{G}}$. $\mathfrak{N} \underline{\lhd} \mathfrak{G}$. $\mathfrak{N}$ ist pri, sonst wäre nämlich $\mathfrak{N}$ halbregulär (= Ferobniusgruppe). $\mathfrak{N}$ enthielte reg tra Normeteiler $\mathcal{R}$ als char. Ugr., so $k \lhd \mathfrak{G}$, wegen $\mathfrak{G}$ 2-tra wäre $u = |\mathcal{R}| = \sqrt{\ }^{\alpha}$; ist nun $|\mathfrak{A}| \neq p$, so ist $\mathfrak{A}$ einfach von zusammengesetzter Ordnung, also $\mathfrak{N}$ keine Primzahl als Kompfaktor, widerspricht $\mathfrak{N}$. Folglich ist $\mathfrak{N}$ pri. Bei der Annahme $|\mathfrak{A}| \neq p$ ist $\mathcal{R}$ direkter Produkt der konjugierten $\mathfrak{A}^G$, ferner $\mathcal{R}$ pri, also $\mathfrak{A}^G$ transitiv, also $\mathfrak{A}^G =$ voller Z, $\mathfrak{A}$ in γ^{Ω}, wenn $\mathfrak{A}^G \neq \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ reg. Also gibt es, wenn $\mathfrak{A}$ **???** $\mathfrak{G}$, zu $\mathfrak{A}$ genau 2 konjugierte: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$. Ns $\mathfrak{A} = \underline{\mathfrak{G}}$ hat Index 2 in $\mathfrak{G}$; $\underline{\mathfrak{G}} \underline{\underline{\lhd}} \mathfrak{G}$. $\underline{\mathfrak{G}}_1$ hat ≤ 2 Trennsysteme ausser (1), da $\mathfrak{G}_1$ tra auf Ω-1. Also zerfallen die Elemente $A \neq E$ von $\mathfrak{A}$ in zwei Ähnlichkeitsklassen unter $\underline{\mathfrak{G}}$, folglich gehen höchstens 2 Primzahlen p, q in $|\mathfrak{A}|$ auf. Dann ist aber $\mathfrak{A}$ auflösbar, und wegen min nach inv $|\mathfrak{A}| = p$. Folglich ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$. Wäre $\mathfrak{A} \neq$ pri, so $\mathfrak{A}$ reg (dann wieder $|\mathfrak{A}| = p$) oder $\mathfrak{A}$ halbreg, dann nicht

minimal nach inv. gäbe es ausser $\mathfrak{A}$ noch einen min $\mathcal{NT}$, **???** $\lhd \mathfrak{G}$, $[\mathfrak{b}, \mathfrak{A}] = E$, $\mathfrak{b}$ tra, $\mathfrak{A}$ reg.

Seite 129

(2)

Eine primitive Gruppe besitzt höchstens 2 minimale Normalteiler. Diese sind (wenn es 2 gibt) isomorph, reg tra und zentralisieren sich. Bew: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ sind tra, zentral sich sreg, sind Links- und Rechtsregul. Darstellung derselben abstrakten Gruppe.

(2a)

Ist $\mathfrak{A}$ eine abstrakte <u>einfache</u> Gruppe, so ist die Permgruppe ("inneres Holomorph") $\begin{pmatrix} \text{x} \\ A \text{ x } B \end{pmatrix}$ primitiv. Sie hat min. Normalteil.

<u>Gruppen des Grades $p = 2q+1^*$</u> $\begin{matrix} (p) \\ (q \neq \text{Primzahl}) \end{matrix}$.
die nicht aufösbar sind, 2 fach primitiv [das ist stets erfüllt]
Beweis: $\mathfrak{G}_1$ sei imprimitiv. (a) 2 Blöcke der Länge q kommen nicht vor; denn man kann $\mathfrak{G} \underline{\underline{\leq}} \mathfrak{A}^\Omega$ annehmen, und wenn 2 Bl d Lge q, dann enthielte $\mathcal{N}\!\int\ < \mathcal{Q} >$ ungerade Permu, da tra. Also (b) q Blöcke der Lge 2. Durch Transf mit Q, das $P \to P^{a^2}$ transformiert ($a \not\equiv 0$ und p), sieht **???** jeder Block hat Gestalt $\{P^{a^2}$, $P^{a^2\nu}\}$, wo ν ein festen $\square$ Nichtrest uwd p. Lässt nun $F \in \mathfrak{G}_{1\,2}$ p fest, so auch P^ν, also $P^\nu\, F = G_1\, P^\nu$, $P^{-\nu}\, G_1 = F\, P^\nu$, also lässt G_1 den Block <u>mit</u> $P^{-\nu}$ fest, daher $P^{-\nu^2}\, G_1 = G_2^1\, P^{-\nu^2}$, also $P^{\nu-\nu^2} F = P^{-\nu^2}\, G_1\, P^\nu = G_1^1\, P^{\nu-\nu^2}$.

* Beispiele: $p = 11, 23, 47, 59, 83, 107$

S.130 ist oben durchgestrichen

Seite 130

Alle bei $(\mathfrak{G}_1)_2$ festbleibenden Ziffern $\in \Omega - 1$ bilden einen Block von $\mathfrak{G}_1$: hätte es mehr als 2 Ziffern, so müsste es alle $2q$ sein: $\mathfrak{G}_1$ wäre regulär, $\mathfrak{G}$ halbregulär $\to$ auflösbar.
Also darf $(\mathfrak{G}_1)_2$ nur P, P^ν fest lassen:

$$P^{\nu-\nu^2} = P, \text{ da } \neq P^\nu$$

$$\nu^2 - \nu + 1 \equiv 0 \ (p) \qquad v^3 \equiv -1 \ (p)$$

da 3 f $p-1$, ist die Abb $x \to x^3$ eineindeutig uwd$_p$, also

$$\text{folgt } \nu \equiv -1 \ (p).$$

.

Die q Blöcke sind also $\{P^r,\, P^{-r}\}$ $\quad (r \equiv a^2$ und $p)$.
also alle reell. Die El. $\in \mathfrak{G}_1$, die $\{P,\, P^{-1}\}$ fest lassen, sind also eine mit $< \;P^{-1} >=< P >$ vertauschbare Gruppe, das Produkt ist $\neq$ 2-tra also **???**.

Seite 131

1. <u>Gruppen des Grades $p = 2q + 1$</u> > 7 $(p,\, q$ Primzahlen)
mit $p - 2 \neq u^2$ sind 3-fach transitiv od. auflösb.
Beispiele: $p = 23,\, 47,\, 59,\, 10$

2. $\underline{\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_1}$
Ist $g = a\, b$, $(a,\, b) = 1$, und $G_i \leq \mathfrak{A}_i$, $|G_i| \,|\, a^\infty$, $(|G_i|,\, b) = 1$, also G_i Hallgruppe von $\mathfrak{A}_i$, und ist $(\{G_1,\, G_2\},\, b) = 1$, so ist $G_1\, G_2 = G_2\, G_1$ eine Hallgr von $\mathfrak{G}$, $G_1 \cap G_2$ eine von $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$.

S.132 und S.133 sind vollständig durchgestrichen
S.134 ist oben durchgestrichen

Seite 134

Nachinv. Ugr: $\lhd\lhd$:
1) Rang $\mathfrak{G} \,|$ Rumpf $\mathfrak{G}$ = Minimalzahl erzeugender Sinköpfe.
2) In direkten Produkten einfacher Gruppe **???** wohl jede $\lhd\lhd$ Ugr sogar $\lhd$.
Auch bei ein<u>reihigen</u> ?
??? Nein: $\mathfrak{G} \overline{= (p\, q)}\, \mathrm{x}\, (p\, q)$ wo $(p\, q)$ nicht besch der Ord $p\, q$

Seite 135

$\lhd\lhd$

1. Versteht man unter $\mathfrak{G}^p$ die kleinsten nach invar. Ugr. von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^p = p'''$, so gilt: a) $\mathfrak{G}^p \lhd \mathfrak{G}$; **???** $\mathfrak{A} \lhd \lhd\mathfrak{G}$, $b \lhd \lhd\mathfrak{G} \to \{\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}\}^p = \{\mathfrak{A}^p,\, \mathfrak{b}^p\}$;
b: Bew mit Hilfssatz
2. Ist $\alpha \lhd \lhd\mathfrak{G}$, $|\mathfrak{G} : \alpha| = p^{'''}$, α keinen $p - Kopf \to \alpha$ **???** $\mathfrak{G}^p$.
Bew: $\vartheta(\alpha,\, G^{-1}\, \alpha\, G) \lhd \lhd \mathfrak{G}_1$ hat Index p''; $\alpha = \vartheta$.
3. Ebenso für $\mathfrak{G}^{\mathfrak{f}}$, wo $\mathfrak{f}$ eine einfache Gruppe ist : = kleinster Nt, der von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{G}^f$ nur Kompfaktorgr = $\mathfrak{f}$ hat
4. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{p}$ Sylowgr von $\mathfrak{G}$, so $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{p}$ Syl. von $\mathfrak{A}$ Bew genügt für $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$. Dort bekannt (Zassenhaus)

5. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{p}$ Syl von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{p}$ vertauschbar mit $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}$.
   Bew: Hilfssatz Fortsetzg 136 (4)

6. Ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{p}$ p-Gruppe in $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ Syl $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}''$ Syl $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}''\,\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p}''$ Syl $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}$.
   Bew: $|\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''| = \frac{|\mathfrak{p}'|\,|\mathfrak{p}''|}{|\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p}''|}$ **???** $c \cdot \frac{|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}|} = c \cdot |\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}|$, also $c = 1$
   und $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}'' \leq \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}$

6' $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$; $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ Syl $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$, $\{\mathfrak{p}', \mathfrak{p}''\}$ p-Gruppe $\to= \mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}'' =$ Syl $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$

Seite 136

Rumpf $^{\lhd\lhd}$

1. Sei $R(\mathfrak{G})$ der Durchschnitt der Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit einfacher Faktorgruppe. Dann gilt: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\psi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} \to \mathfrak{A} = \mathfrak{G}$.

2. Komposlge $j\,(\mathfrak{G}/\psi\,(\mathfrak{G})$ = Minimalzahl der einköpf nachinv. Untergr. von $\mathfrak{G}$, die zur Erzeugg von $\mathfrak{G}$ notwendig sind. Bew mit 1:

3. $\mathfrak{A}$ einköpf (**???** $\lhd \lhd \mathfrak{G}$) $\to \mathfrak{A} \leq \psi(\mathfrak{G})$ oder $\mathfrak{A} \cap \psi(\mathfrak{G})$ = max Normalteiler von $\mathfrak{A}$.

4. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ habe <u>nur</u> p-Köpfe; $\mathfrak{p}$ p-Syl $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{A}$

   ($\overline{\mathfrak{p}} =$ kleinste nachinv Gr $\geq \mathfrak{p}$).

5. $\left.\begin{array}{c}\mathfrak{b}\\ \mathfrak{A}\end{array}\right\}$ $\lhd = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}$ nur p-Köpfe: $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ seien p-Sylowgr von $\mathfrak{A}$. Dann folgt aus $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}''\,\mathfrak{p}'$: $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$.
   Bew: 4 und 1939 (31)

6. $\left.\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{b}\end{array}\right\}$ $\lhd \lhd \mathfrak{G}$ **???** nur p-Köpfe haben. Genau dann ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$, wenn es in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}$ p-Sylowgr gibt, die vertauschbar sind.
   Bew: $136_5 + 135_5$.

7. In einer Gruppe $\mathfrak{G}$ sind alle nachinv. Ugr vertauschbar, wenn dies in jeder Sylowgr von $\mathfrak{G}$ gilt.
   ???

Seite 137

$\lhd\lhd$

1. Jeder nichtabelsche Kopf von $\mathfrak{G}$ wird durch einen einköpfigen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gedeckt. Bew: 1939 S.233 oben.

2. Frage: Sind in einer p-Gruppe, die Produkt paarweis vertauschbarer zyklischer Gr. ist, je zwei Untergr. vertauschbar ?
(Iwasawe 1941 ? Huppert) Stimmt nicht für 2-Gruppen: **???** $\vartheta_{2.8}$.

3. Frage: Kann man aus Kenntnis der einköpf. nachinv Ugr. von $\mathfrak{G}$ und ihrer Lagebeziehungen alle Kompreihen von $\mathfrak{G}$ aufstellen ? D.h. alle nachinv. Ugr aufstellen samt ihren **???** ? Ja bei "lockeren" Gr (Keller) od allgemeiner wenn nie typ $(p, p\dots) > p$ in Hauptkette auftritt

4. Ist das Erzeugnis von zwei nachinv. Ugr $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ einköpfig, so ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} < \mathfrak{A}$ und die grössere ist einköpf.
Bew: a) wäre $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}\} \neq \left\{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{b}\end{array}\right.$, so gibt es max Normalteiler $\mathfrak{G} > \underline{\mathfrak{A}} \geq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{G} > \underline{\mathfrak{b}} \geq \mathfrak{b}$ mit $\underline{\mathfrak{A}} \neq \underline{\mathfrak{b}}$ trotz Einköpf. von $\mathfrak{b}$

5. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b}_i \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \leq \{\mathfrak{b}_1,\, \mathfrak{b}_2, \dots\} = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ einköpf perfekt. Dann gibt es i mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{b}_i$.
.denn sonst $[\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}_i] \leq \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$, $[\mathfrak{A},\, \mathfrak{G}] \leq \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ abelsch.
"Eine **???**-(und ein-) köpfige Gruppe, die in einem Erzeugnis, liegt **???**

S.138 ist oben durchgestrichen

Seite 138

$\lhd\lhd$

1. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \{\mathfrak{b}_1, -,\, \mathfrak{b}_m\} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b}_\nu \lhd \lhd \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{b}_m$ besitze eine max Normalteiler $\underline{\mathfrak{b}}_m$ mit **???** $\approx \mathfrak{b}_m/\underline{\mathfrak{b}_m}$ **???** jeder Kopf von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A} < \{\mathfrak{b}_1, -,\, \underline{\mathfrak{b}_m}\} = \mathfrak{G}'$
Dann von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{G}'$ gibts nur Köpfe $\simeq \mathfrak{f}$.

2. Sei M eine nach unten vollständige Menge einköpfiger nachinvar. Ugr von $\mathfrak{G}$ (dh. $\mathfrak{A} < \mathfrak{b} \in M$ **???** $\mathfrak{A} \in M$). Sei $\mathfrak{A}$ einköpfig, Kopf $\mathfrak{f}$ (**???** $\mathfrak{A}$ sei $\mathfrak{f}$-köpfig) und im Erzeugnis von M. Dann liegt $\mathfrak{A}$ schon im Erzeugnis der $\mathfrak{f}$-köpfigen aus M. Bew: 1. [NB: ist nützlich f **???** $\mathfrak{G}$]
Es bleibt also die Frage: Wie findet man alle p-köpf Untergr des Erzeugnisses gewisser p-köpf Ugr von $\mathfrak{G}$?
Das muss zuerst für p-Gruppen gelöst werden.

3. $|\mathfrak{G}| = p^m \to \{\Phi(\{A_i,\, A_j\})\}_{A_i,\, A_j \in \mathfrak{G}} = \Phi(\mathfrak{G})$

Seite 139

p-Gruppen

1. Man könnte versuchen die Struktur einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ graphisch darzustellen, indem man die Untergr. mit ≤ 2 Erzeugenden als Punkte nimmt und ihre Lagebeziehungen durch Pfeile andeutet. Hierbei ist die Anzahl der Punkte einer Gr der Ord p^n bei gegebenen n noch unbeschränkt. Frage: Wie findet man dann $\phi\mathfrak{G}$?

2. Frage: Ist bei festem n die Anzahl der charakt Untergruppen einer Gr der Ord p^n beschränkt ?

3. Falls man feinere Aussagen als nur mit den char. Ugr von $\mathfrak{G}$ haben will, könnte man die nachinvarianten Ugr des Holomorphs von $\mathfrak{G}$ (die in $\mathfrak{G}$ liegen) nehmen.

Seite 140

$\triangleleft\triangleleft$

1. Zu je zwei einköpf. Ugr $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}\triangleleft\triangleleft\mathfrak{G}$ mit p-Köpfen gibt es eine Kompreihe von $\mathfrak{G}$, in der beide denselben Kompositionsfaktor **???** - es sei denn, **???** $\mathfrak{A} < \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} < \mathfrak{A}$; dann nie.

2. Nennt man in zwei Kompositionsreihen von $\mathfrak{G}$ je einen **???** "verwandt", wenn es eine gemeinsame nachinv. **???** gibt, so sind genau die Köpfe der einköpf Glieder einer KReihe diejenigen, die <u>nur</u> mit <u>höherer</u> stehenden KFaktoren anderer KReihen verwandt sind. Welche sind nur mit niedrigeren verwandt ?
???

3. Aufgabe: Struktur der Produkte paarweise vertauschbare einköpfige **???** Untergruppen ermitteln | Dazu gehören alle, die keine zwei isomorphen Köpfe haben. Oder man fordere dies für jede nachinv Ugr.

4. Sei $\mathfrak{f}$ einfach. Def: $\mathfrak{G}^f = \cap \mathfrak{A}$ **???**

$$\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}, \text{ von } \mathfrak{G} \text{ bis } \mathfrak{A} \text{ nur } \mathfrak{f}\text{'s.}$$

5. $\mathfrak{G}^f \triangleleft \mathfrak{G}$; $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{G}^f \to \mathfrak{A}^f \neq \mathfrak{A}$, kurz: $\mathfrak{A}^f = \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}^f$.

6. $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^\mathfrak{f} = \mathfrak{A}$, von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ nur $\mathfrak{f}$'s $\to \mathfrak{A} = \mathfrak{G}^f$
Bew: **???** $\triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{b}$ nur $\mathfrak{f} \to \{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}$ bis $\mathfrak{b}$ nur $\mathfrak{f}$ also $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ nur $\mathfrak{f}$

7. $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}^\mathfrak{f}\} = \{\mathfrak{A}^\mathfrak{f}, \mathfrak{b}^\mathfrak{f}\}$ wenn $\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{b}\end{matrix} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$. Bew: σ

8. $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}^\mathfrak{f} \underline{\leq} \mathfrak{G}^\mathfrak{f}$

9. ,dh: ρ homomorph $\rightarrow \varphi(\mathfrak{G}^{\mathfrak{f}}) = \varphi(\mathfrak{G})^{\mathfrak{f}}$

Seite 141

1.

Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$. Bew mit Induktion nach $j\,(\mathfrak{G},\,\mathfrak{b}) + j\,(\mathfrak{G},\,E)$ a) Man kann **???** $\{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\} = \mathfrak{G}$
b) Wähle **???** $\mathfrak{G}' \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ maximal.
Setze $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\,\mathfrak{b}$. Indukt: $\mathfrak{b}$ vertb $\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}}$
I. Es gebe $\mathfrak{G}'$ so dass $\mathfrak{G}\,/\,\mathfrak{G}' \simeq \delta \rightarrow \mathfrak{A}\,/\,\mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}} \underline{\underline{\geq}} \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}}$
II. Es gibt kein $\mathfrak{G}'$: **???** $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}\,/\,\mathfrak{G}' \not\simeq \mathfrak{f}$ $\rightarrow$Setze $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}}$, Es ist

??? vtb $\mathfrak{A}$, <u>also wenn</u> $\mathfrak{b}_1 > \mathfrak{b}$: $\mathfrak{b}_1$ vtb $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$
$\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}$

Sei weiter $\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{b}$; von $\mathfrak{G} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}'$ bis $\mathfrak{b}$ nur KFGr von $\mathfrak{A}'$ bis $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}' \geq \mathfrak{A}'^{\mathfrak{f}}$, also nur $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{G}'$ bis $\mathfrak{b}$ nur $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{b}$ Es ist $\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}}$ char in $\mathfrak{G}'$, $\lhd\mathfrak{G}$. Rechne in $\mathfrak{G}\,/\,\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}}$, wenn $\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}} \neq E$: <u>uwd $\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}}$</u> ist (Indukt) $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$, dh $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$
Bleibt also nur der Fall $\mathfrak{G}'^{\mathfrak{f}} = E$, dh. $\mathfrak{G}'$ reine $\mathfrak{f}$-Gruppe, denn $\mathfrak{b}$ reine $\mathfrak{f}$ Gruppe; $\mathfrak{A}$ enthält Kopf $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{f}$, also gibt es einköpfiges $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}$ mit kopf $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{f}$. Nach 133 ist $\mathfrak{b}$ vertb $\mathfrak{A}_1$. Da der einzige Kopf von $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{b} = \mathfrak{K}$ ist und alle Faktoren von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{b}$, bis auf den obersten $\mathfrak{K}$ sind, muss $\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{G}$ sein, es ist aber $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$ also $\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$.
??? $\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{G} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}$

Seite 142

$\mathfrak{A},\,\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ 28.3.55

1. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ rein p-köpfig [dh $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}$ für $|\mathfrak{f}| \neq p$], so ist $\mathfrak{A}$ vertb $\mathfrak{b}$ genau wenn sie mod $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}}$ vertb sind
Bew: nach 133 ist $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}}$, nach 141 denn $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$ vtb $\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}}$, also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}} = \{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\}^{\mathfrak{f}} \lhd \{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\}$. Ist nun $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}} = \cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}}$, so $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$.

2. Ist $\mathfrak{A}$ rein $\mathfrak{f}$-köpfig, $\mathfrak{b}$ beliebig $\lhd \lhd \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$ vtb $\mathfrak{b}$.
Bew: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{K}} \ldots$ wobei (3); dann $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b}_{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$, ...

$\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$ vtb $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$

3. Def: $\mathfrak{G}_{\mathfrak{K}}$ = Erzeugnis aller rein $\mathfrak{K}$-köpfigen $\lhd\lhd$ Ugr von $\mathfrak{G}$.

4. $\{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\}_{\mathfrak{K}} = \left\{ \begin{array}{l} = \text{“}\mathfrak{K}\text{-Komponente“ von } \mathfrak{G}) \\ \mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\} \end{array} \right.$???

4'. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{G}_{\mathfrak{K}} \ldots \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{b}$, die versch. Köpfe $\mathfrak{G}$.

5. $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$. Denn $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}^{\mathfrak{K}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{K}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{K}\,\mathfrak{b} \ldots}$

6. $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ vtb $\mathfrak{b}_{\mathfrak{K}} \wedge \mathfrak{A}_{\mathfrak{b}}$ vtb $\mathfrak{b}_{\mathfrak{b}} \wedge \dots$ (5)

7. Verallgemeinerung der p-Gruppen und nilpotenten Gruppen: Def: $\mathfrak{G}$ reine $\mathfrak{f}-$ Gruppe $\leftrightarrow \mathfrak{G}^{\mathfrak{f}} = E$
   $\mathfrak{G}$ separiert **???** $\leftrightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{A}$ **???** wo $\mathfrak{A}$,-rein

8. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ sep $\rightarrow \{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}$ sep

9. Def: $\mathfrak{G}_* =$ Erzeugnis aller separ. nachinv. Ugr von $\mathfrak{G}$

10. $\mathfrak{A}$ sein $\leftrightarrow \mathfrak{G}^{\mathfrak{K}} \cap \mathfrak{G}^{\mathfrak{b}} \cap \dots = E$

Seite 143

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$

1. Sei $\mathfrak{G}^*$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$, für den $\mathfrak{G} \,/\, \mathfrak{G}^*$ sep

2. $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^k \cap \mathfrak{G}^b \cap \dots$ Zusammenhang mit Loewg ?

3. Ist $\mathfrak{A}$ einköpfig, $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b}$, so $\mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ vtb $\mathfrak{b}$.
   Bew: wähle $\mathfrak{R}$ **???** $\lhd \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$; **???** $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{A} = \begin{cases} \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}} \\ \mathfrak{A} \end{cases}$

4. Ist $\mathfrak{A}$ eink. u. perfekt, so $\mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ vtb mit jedem $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.
   denn $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\}$ wenn $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{b}$.

5. $|\mathfrak{G}| = \infty$: $\mathfrak{A}_2 \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{b}_k \lhd \mathfrak{b}_{k-1} \lhd \dots \lhd \mathfrak{b}_1 \lhd \mathfrak{G}$
   $\rightarrow \{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{b}_k\} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ mit einer Kette der **???**

6. $\mathfrak{A}$ perfekt, $\mathfrak{b}$ beliebig $\begin{pmatrix} \text{beide} \\ \lhd \lhd \mathfrak{G} \end{pmatrix} \rightarrow$ Rumpf $\mathfrak{A}$ vtb mit $\mathfrak{b}$.

   Bew 4

   6' Es ist sogar <u>jede so Obergr</u> des Rumpfs von $\mathfrak{A}$ vtb mit $\mathfrak{b}$

7. $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A} \,/\, \mathfrak{W}$ einfach, nichtbesch $\rightarrow \mathfrak{W}$ vtb $\mathfrak{b}$.

   Bew mit **???**

Seite 144

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$

1. Ist $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{A}'$ ein max Normalteiler von $\mathfrak{A}$, so $\mathfrak{A}'$ vtb $\mathfrak{b}$, <u>oder</u> $|\mathfrak{A}/\mathfrak{a}'| = p$ <u>und</u> $\mathfrak{b}$ hat auch einen p-Kopf <u>und</u> $\mathfrak{A}$ hat noch mehr p-Köpfe.

2. Es gibt reine **???** Gruppen $\mathfrak{G}$ (zu $\mathfrak{f} \neq$ abelsch) derart, dass $\mathfrak{G}$ zweiköpfig und doch nicht direkt zerlegbar ist. z.B. nimm **???** mal die $\mathfrak{A}_{???}$, in Matrix 60 x 60 angeordnet, und setze zwei $\mathfrak{A}_{???}$ darauf, von denen die eine die Zeilen, die andere die Spalten regulär permutiert. Dieses Beispiel wird wohl typisch sein*, nur können andere Permutationsdarstellgen als die reguläre auftreten. Klassifikationen nach der Lge der "Rumpfkette".
   ??? : Man kann $\mathfrak{A}_{???} \times \mathfrak{A}_{???}$ schon als Gruppe des Grades **???** darstellen (Holomorph von $\mathfrak{A}_5$). s. auch **???** .

3. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ beliebig, $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ einköpfig
   $\to \mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{W}_{\mathfrak{U}}$

4. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} < \mathfrak{G} \to$ jeder Kopf von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{U}\}$ ist Kopf von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{U}$.

5. Ist $k = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots$ x $\mathfrak{A}_k \lhd \mathfrak{G}$, und sind $\mathfrak{A}_i$ und werden sie von $\mathfrak{G}$ <u>transitiv</u> permutiert, so ist $\mathcal{R}$ ein minimaler Normale von $\mathfrak{G}$. Ist also $\mathfrak{G} \,/\, \mathcal{R} \simeq \mathfrak{A}_\infty \times \mathfrak{A}_\in$ x $\ldots$ x $\mathfrak{A}_p =$ **???** $\mathcal{R} = \mathcal{E}$, so $\mathcal{R} =$ Rumpf $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}$ **???**

Seite 145

$\lhd\lhd$

1. Nicht richtig ist die Vermutung:
   $\mathfrak{W} \lhd_{\max} \mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{W}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{W}$.
   Sonst müssten in einer p-Gr j 2 Ugr vtb sein ($\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$)

2. $\mathfrak{U}$, **???** beliebig $< \mathfrak{G} \to$ jeder Kopf von $\{\mathfrak{U},$ **???** $\}$ ist Erzeugnis zweier Faktorgr von $\mathfrak{U}$ und **???** , also haben $\mathfrak{U}$, **???** stets Köpfe, die "Stücke" des Kopfs von $\{\mathfrak{U},$ **???** $\}$ sind

3. Nicht richtig ist die Vermutg: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, γ Sylowgr $\mathfrak{G}$)
   $\to \mathfrak{A}\,\gamma = \gamma\,\mathfrak{A}$. Bew: **???**

4. Nicht richtig ist die Vermutung: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{x}$ nilpot, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{A}$

   Beispiel: $\mathfrak{A} = \{(12)\,(34)\,(56),\,(13)\,(24)\}$ $|\mathfrak{A}| =$ **???**
   $\mathfrak{p} = \{(56)\}$, $\mathfrak{x} = \{(123)\}$ $|p\,q| = 6$
   Wäre $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{A}$,
   $\mathfrak{A} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{A} \cap$ **???** $\lhd \mathfrak{A}$ $\mathfrak{x} \to ((13)\,(24))^{123} \in \mathfrak{A}$
   $\to (21)\,(34) \in \mathfrak{A} \to (56) \in \mathfrak{A} \to |\mathfrak{A}| = 8$
   (Es ist $|\mathfrak{G}| = 24$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_{24}$ x $\{(56)\}$ **???**

   4! Also gibt es auch nicht allgemein: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{U} \to \mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{U}^{\mathfrak{f}}$ aber vielleicht wenn $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}$!

[10] Seite 146

$\lhd\lhd$

1. ??? $\vee\, \mathfrak{n},\, \mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G},\, \mathfrak{n} < \mathfrak{G} \to$ Kette $\mathfrak{A}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{A}$??? Kette $\mathfrak{n} \ldots (\mathfrak{n}$??? $\mathfrak{A})$

2. Falsch wäre die Vermutung: Auch für $\mathfrak{m}$??? $\mathfrak{G}$ gilt
   $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{m} \to \mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{m}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{G}^{\mathfrak{f}}$ (??? $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{m}^{\mathfrak{f}} \lhd \mathfrak{G}$). 31.3.55

3. Bemerkg: Falsch wäre: $\left\{ \begin{array}{l} \{\mathfrak{n},\, \mathfrak{m}\}^{\mathfrak{f}} = \{\mathfrak{n}^{\mathfrak{f}},\, \mathfrak{m}^{\mathfrak{f}}\} \text{(selbst wenn} \mathfrak{n}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}) \\ \mathfrak{n},\, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{m}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{f}} \quad \text{(auch bei } |F| \underset{\neq}{=} p). \end{array} \right.$
   s. auch 145 ???
   Beispiele:

   a) $\mathfrak{n} = \mathfrak{A}_6,\, \mathfrak{m} = 7\cdot$ Zyklus ??? $\mathfrak{A}_7$; $\mathfrak{n}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{A}_7$; $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_6$ oder $\mathfrak{m}$
   b) $\mathfrak{n} = \{(12)\,(34), \ldots, (2_k - 1\;2_k)\}$ und $\mathfrak{A}_k -$???, so dass transitiv)
   ???

Seite 147

$\lhd\lhd$

1. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{A}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{A} \to^{?}$ a) $\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}$, b) $\mathfrak{A}\,\mathfrak{m}^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{A}$.
   Hiermit (141.1) neuen Beweis für den Satz 133:

2. Seien $\mathfrak{A},\, \mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}$ rein $\mathfrak{K}$-köpfig, $\mathfrak{b}$ rein $\mathfrak{K}$-köpfig, $k \neq \mathfrak{b}$.
   ??? $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$. Bew: Indukt $j\,(\mathfrak{G},\, E)$.
   Bew:

   b) Es gebe $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A})(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{b})$. Dann Indukt, $\mathfrak{G} \,/\, \mathfrak{N}$
   a) ??? : $\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\} = \mathfrak{G}$
   c) Es gebe $\mathfrak{f}$ als Kompf in $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$??? $\neq \mathfrak{K},\, \mathfrak{b}$.
   Dann $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}$ vtb $\mathfrak{b}$ (Indukt) $\to$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}$ vtb $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$???, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$ vtb $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \lhd \mathfrak{G}$
   ???
   d) Nur ??? sind Kompf von $\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}$. Es ist dann $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}}$ kopffreund ???, also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}} \vee \mathfrak{A}^{???}$ (Indukt), also nach 147.1
   $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}} \vee \mathfrak{b}^{???\,\mathfrak{K}}$. Nun ist
   $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{K}} = \{\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}},\, \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{K}}\} = \{\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}\}^{\mathfrak{K}} = \{\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}\}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{K}}$
   Da b) schon erled, ist das $= E$, also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}} = E = \mathfrak{G}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{K}} \lhd \mathfrak{G}$ ebenso $\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}} = E$. Dann aber zentralisieren sich $\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}$ sogar.
   ???

[10] S.146 ist die Mitte durchgestrichen.

Seite 148

$\lhd\lhd$

1. Aufgabe: Eindeutigkeit von Prod. Zerlegg $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ rein $\mathfrak{K}$- bezw $\mathfrak{l}$-köpfig. Mit Hilfe des Prozesses $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^{\mathfrak{K}\,\mathfrak{l}} \cdot \mathfrak{G}^{\mathfrak{l}\,\mathfrak{K}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{b}^{\mathfrak{l}}$ kommt man zu einer Invariante, nämlich wenn z.B. $\mathfrak{G}^{**} \approx E$ erstmals, so $\mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{K}\,\mathfrak{l}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{l}\,\mathfrak{K}} = \tilde{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{K}\,\mathfrak{l}}\,\tilde{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{l}\,\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}^{\mathfrak{K}\,\mathfrak{l}} = \tilde{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{K}\,???}$ ... da nilpotent“.
   Damit ähnlich wohl auch $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{l} = 3$ reinköpf Faktoren.

2. $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}} < \mathfrak{A}' < \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}'$.
   $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{l}$ kopffreund Bew.: $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{b} > \mathfrak{A}^{\mathfrak{K}}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{G}^{\mathfrak{K}} \lhd \mathfrak{G}$

3. Neuer Beweis für den Hauptsatz 133:
   $$\mathfrak{A},\ \mathfrak{b} \lhd\lhd \mathfrak{G},\quad \left.\begin{array}{c}\mathfrak{A} \text{ rein } \mathfrak{k}\text{-köpf.}\\ \mathfrak{b} \text{ rein } \mathfrak{l}\text{-köpf.}\end{array}\right\} \to \mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}.$$
   Man wähle zwei möglichst kleine Gruppen $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{b}}$ so, dass $\mathfrak{A} < \overline{\mathfrak{A}} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{b}} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{A}$.
   Das gibts, z.B. $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{b} = \mathfrak{G}$
   Dann ist

   (a) $\overline{\mathfrak{A}}$ rein $\mathfrak{K}$-köpfig: $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{A}}$. Denn $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{K}} \vee \overline{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{A} < \overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{K}} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.
   Ebenso $\mathfrak{b}$ rein $\mathfrak{l}$-köpfig
   (b) $\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{A}}$. Denn $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{K}} \cup \overline{\mathfrak{b}}$ nach (a) **???**
   (c) aus a) b) folgt $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$: **???** . Allgemein: 149·1
   ebenso: $\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$.

Seite 149

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ $\lhd\lhd$

1. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \lhd\lhd \mathfrak{G}$; $\{\mathfrak{A},\ \mathfrak{b}\}$ sei rein $\mathfrak{K}$-köpfig, $\mathfrak{b}^{\mathfrak{K}} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} < \mathfrak{A}$.
   Bew: Sonst $\mathfrak{A} < \mathfrak{W} \lhd \{\mathfrak{A},\ \mathfrak{b}\}$ mit $\{\mathfrak{A},\ \mathfrak{b}\}\,/\,\mathfrak{W} \simeq \mathfrak{b}\,/\,\mathfrak{b} \cap \mathfrak{W}$

2. Sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{b}_1$ nicht freundköpfig, so besitzt zwischen ihnen ein Mesomorphismus im Sinn von Remak 1931.

3. $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}$-Rumpf $\mathfrak{A}$ vtb $\mathfrak{K}$-Rumpf $\mathfrak{b}$, Produkt $= \mathfrak{K}$ Rpf $\mathfrak{G}$
   Daher $\mathfrak{K}$-Rumpf $= \cap\,\mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{A}\,/\,\mathfrak{W} \sim \mathfrak{K}$. Bew 1.

4. $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}$ kopffreund, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ “gross“ $\to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{b}_1$
   dabei $\mathfrak{A}_1$ gross **???** $\mathfrak{A}$ / Indikator $\mathfrak{A}$ separiert $= X$ **???** Gr.

5. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightarrow$ Pseudo-Rumpf $\psi(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{b}$. Dabei $\psi(\text{???}) = \cap \mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{W} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} / \mathfrak{W} =$ einfach oder p-Gruppen
   Bew durch Zerlegg $\psi(\mathfrak{A}) = \Pi_{\mathfrak{f}} \psi(\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}})$

6. Falls es vernünftige Sätze für $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ gibt, lassen sie sich wahrscheinlich auf Produkte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{G}$ verallgemeinern, die eine Kompositionsreihe $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{G}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{G}_{r-1} \rhd E$ besitzen, in der $\mathfrak{G}_i = (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{a}).(\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{b})$.

Seite 150

$\lhd\lhd$

1. Zwei nachinv. Untergr., die fremdköpfig, ??? und elementefremd sind, brauchen nicht elementweise vertauschbar zu sein.
   Bew: $\begin{matrix} 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}$ $\quad \mathfrak{A} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{matrix} & 3 & \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \quad |\mathfrak{A}| = 6 \quad |\mathfrak{b}| = 12$
   NB: Ebenso mit nichtabelschen Komp-Faktoren.

2. $\mathfrak{R} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $G = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, $G =$ Hallgr $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{R} \cap G =$Hallgr $\mathfrak{R}$

3. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, $G =$ Hallgruppe von $\mathfrak{G} \rightarrow G \cap \mathfrak{A} =$Hallgr $\mathfrak{A}$, $(G \cap \mathfrak{A})\,(G \cap \mathfrak{b}) = G$.

4. Kompositionsreihen untersuchen: $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{G}_1 \rhd \sim \rhd \mathfrak{G}_r = E$, derart dass für ein vorgegebenes $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ stets $\mathfrak{G}_i\,\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_i$??? vgl S.74,2, 3. Z.B. $U =$ Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ etc. Falls die Frage 147.1 ??? wird: $\mathfrak{G}_i \vee \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{G}_i{}^{\mathfrak{f}} \vee \mathfrak{U}$, so wären alle $\mathfrak{G}_i(\mathfrak{G}_{i+1}$ rein !

S.151 ist unten durchgestrichen

Seite 151a

$\lhd\lhd$

Operatoren auf Nachinvarianzsystemen ??? 1955
$\mathfrak{G}$ sei Gruppe mit Max. u. Minbedg. für nachinv Ugr; diese ??? den Verband $\mathcal{N}$ bilden. Ein Operator α auf $\mathcal{N}$ ist eine Abbildg. von N in sich mit den beiden Eigenschaften:
$\alpha \in \Omega \leftrightarrow \begin{cases} \text{I,} & \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{A}^\alpha \lhd \mathfrak{b} \\ \text{II.} & \{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}^\alpha = \{\mathfrak{A}^\alpha \lhd \mathfrak{b}^\alpha\} \end{cases}$ Es gilt: (1) $\mathfrak{A}^\alpha \lhd \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{A}^\alpha \lhd \lhd \mathfrak{b}^\alpha$.
(2)

$\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^\alpha\,\mathfrak{b}^\alpha = \mathfrak{b}^\alpha\,\mathfrak{A}^\alpha = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{b})^\alpha$
Bew: Wähle $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{b}} \lhd \mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \qquad \overline{\mathfrak{b}} \lhd \lhd \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$
Indukt: $(\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{b}})^\alpha = \mathfrak{A}^\alpha\,\overline{\mathfrak{b}}^\alpha = \overline{\mathfrak{b}}^\alpha\,\mathfrak{A}^\alpha$ **???** $\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}$, also $\vee\mathfrak{b}^\alpha$, also $\mathfrak{A}^\alpha \cup \mathfrak{b}^\alpha$.
$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{b})^\alpha = \{\mathfrak{A}^\alpha\,\mathfrak{b}^\alpha\} = \mathfrak{A}^\alpha\,\mathfrak{b}^\alpha$.

Seite 151b

$\lhd\lhd$

1. setzt man für α, $\beta \in \Omega \qquad \mathfrak{G}^{\alpha\,???} = \mathfrak{G}^\alpha\,\mathfrak{G}^\beta$, so ist $\alpha \cup \beta \in \Omega$:

   $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$
   $(\alpha+\beta)\,\gamma = \alpha\,\gamma + \beta\,gamma$, $\gamma(\alpha+\beta) = \sim$.

2. Setze, wenn $\alpha_1, \sim, \alpha_n \in \Omega$ gegeben: $\bigcup\limits_{i=1}^{n}{}_n\, d\,i$ = Vereinigg aller Produkte von k versch α_ν, in jeder Anordnung.

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}{}_{n-1}\,\alpha_i = 1 \to \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{G}^{\alpha\,i} = \mathfrak{G}^{\bigcup\limits_{i=1}^{n}{}_n\,\alpha_i} = [P\,\textbf{???}\,]$.
   Bew:

   a) klar ist $P \subset D$.
   b) $\bigcap = D$ gesetzt gibt $D = D^{\bigcup_{n-1}\alpha_i}$
   Nun ist z.B. $D^{\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \subset \mathfrak{G}^{\alpha_n \cdot \alpha_1 \sim \alpha_{n-1}} \subset P$.

4. Ist für $i \neq j \qquad \alpha_i \cup \alpha_j = 1$, so ist $\bigcup_{n-1}\,\alpha_i = 1$
   Bew: Indukt:

   $\bigcup\limits_{i\neq 1}{}_{n-2}\,\alpha_i = 1 \quad \alpha_{???}$

   $\bigcup\limits_{i\neq 2}{}_{n-2}\,\alpha_i = 1 \quad \alpha_{???}$

   $\cdot\alpha_2 \bigcup\limits_{i\neq 2}{}_{n-2}\,\alpha_i + \alpha_1 \bigcup\limits_{i\neq 1}{}_{n-2}\,\alpha_i = \alpha_1 + \lambda_2 = 1$
   also erste **???** $\bigcup_{n-1}\,\alpha_i = 1$; denn $\alpha \cup \beta = 1 \to \alpha \cup \beta \cup \gamma = 1$

5. $(1 \leq i < j \leq n \to \alpha_i \cup \alpha_j = 1) \to \bigcap G^{\alpha_i} = G^{\bigcup_n\,\alpha_i}$

Seite 151c

$\lhd\lhd$

1. α, β, $\gamma \in A$, $\gamma \sim 0 \to \alpha + \gamma \sim$ **???** $\beta + \gamma$**???**
   Also die Abbildgsklassen permuntieren sich bei Add eines $\gamma \sim 0$.

2. $\mathfrak{A} \sim 0,\, \beta \sim 0 \to \alpha + \beta \sim 0$
   2. $\quad \mathfrak{A}\,\xi + \beta\,\eta = 1 \to \alpha + \beta = 1$

3. $\alpha \leq \beta \to \alpha\,\omega \leq \beta\,\omega$

4. $\alpha \leq \beta,\, \beta^n = 0 \to \alpha^n = 0$

5. Schon aus den folgenden schwachen Vorauss. **???** Vertauschungssätze: M ist eine Menge von Ugruppen von G; so dass $A,\, B \in M \to A \cup B \in M$. α ist eine Abbildg von M in sich mit $(A \cup B)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$, $\& A^{\alpha^p} \vee B^{\alpha^q} \to A^\alpha \cup B$.
   [Insbesondere: Ist $A^{\alpha^n} \vee B$ für ein n und alle $B \in M$, so ist schon $A^\alpha \cup B$.]
   Beweis: (6) $A^\alpha \vee B^\alpha \to A^\alpha \vee B$
   Bew: $A^\alpha\, B = A^\alpha\, B^\alpha\, B = \{A,\, B\}^\alpha B = B\{A\, B\}^\alpha = B\, B^\alpha\, A^\alpha = B\, A^\alpha$.

   (5): Indukt.

Seite 152

$\lhd\,\lhd$ **???**

1. $n \geq 1,\, \mathfrak{A}^{\delta^n} \vee \mathfrak{b}^{\delta^n} \to \mathfrak{A}^\delta \vee \mathfrak{b}$!!
   Bew: Wähle δ wie 151 (4): Dann $\delta = \delta^\alpha\, \mathfrak{b} = \delta^{\alpha^2}\, \mathfrak{b}^\alpha\, \mathfrak{b} = \delta^{\alpha^2}\, \mathfrak{b}, \ldots,\, \delta = \delta^{\alpha^w}\, \mathfrak{b}$.
   $\mathfrak{A}^\alpha \vee \delta^{\alpha^n}\, \mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{G}^{\alpha^n}\, \mathfrak{b} = \{???\}\, \mathfrak{b} \quad (\mathfrak{G} = \mathfrak{A},\, \mathfrak{b}\}???) = \mathfrak{A}^{\alpha^n}\, \mathfrak{b}^{\alpha^n}\, \mathfrak{b} = \mathfrak{A}^{\alpha^n}\, \mathfrak{b}$
   ??? $\mathfrak{A}^{\alpha^n}$, Produkt $\vee\, \mathfrak{A}^\alpha \to \mathfrak{b} \vee \mathfrak{A}^\alpha$

2. Bew: Wähle δ wie 151(4): $\delta = \delta^\alpha \mathfrak{b}$. OBdA $\{A,\, B\} = \mathfrak{G}$

   $\mathfrak{A}^\alpha \vee \delta$

   (151.3)

   $\mathfrak{A}^\alpha \vee \delta^\beta = \delta^{\alpha\,\beta}\, \mathfrak{b}^\beta$
   $\mathfrak{A}^\alpha \cup \mathfrak{G}^{\alpha\,\beta}\, \mathfrak{b}^\beta = \{\mathfrak{A}^{\alpha\,\beta},\, \mathfrak{b}^{\alpha\,\beta}\}\, \mathfrak{b}^\beta$
   nach Vor. $\quad = \mathfrak{A}^{\alpha\,\beta}\, \mathfrak{b}^{\alpha\,\beta}\, \mathfrak{b}^\beta = \mathfrak{A}^{\alpha\,\beta}\, \mathfrak{b}^\beta$
   $\mathfrak{b}^\beta \cup \mathfrak{A}^{\alpha\,\beta}$, $\mathfrak{b}^\beta\, \mathfrak{A}^{\alpha\,\beta} \cup \mathfrak{A}^\alpha \to \mathfrak{b}^\beta \cup \mathfrak{A}^\alpha$.

   Aus $\mathfrak{X}^\alpha = \mathfrak{X}^\beta$ folge stets $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ **???** $\mathfrak{Y} \in \mathcal{N}$.
   Dann ist $\mathfrak{X}^{\alpha\,\beta} \vee \mathfrak{Y}$
   Dann wähle n: $\mathfrak{z} = \mathfrak{X}^{(\alpha\,\beta)^n} = \mathfrak{X}^{(\alpha\,\beta)^{n+1}} = \mathfrak{z}^{\alpha\,\beta}$. Dann
   $\mathfrak{z} \rhd \mathfrak{z}^\alpha \rhd \mathfrak{z}^{\alpha\,\beta} = \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}^\alpha = \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^\beta$.
   $\to \mathfrak{X}^{(\alpha\,\beta)^{???}} \vee \mathfrak{y}$
   $\to_1 \mathfrak{X}^{\alpha\,\beta} \vee \mathfrak{y}$

Seite 153

schwächer als 152.1

Der zentrale Satz ist:

schärfer: $\mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{b}^\alpha \mathfrak{K}$ **???** $\mathfrak{K} = \mathfrak{b}$.

1. $\mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{b}^\alpha \rightarrow \mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{b}$. Beweis: $\mathfrak{A}^\alpha\, \mathfrak{b}^\alpha \mathfrak{K} = \{\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\}^\alpha$ **???** $=$ **???** $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}^\alpha =$ **???** $\mathfrak{b}^\alpha\, \mathfrak{A}^\alpha = (\mathfrak{b}^\alpha\, \mathfrak{K})\, \mathfrak{A}^\alpha$.
   Damit
   (152.2): $\mathfrak{A}^{\alpha\,\beta} \vee \mathfrak{b}^{\alpha\,\beta} \rightarrow \mathfrak{A}^{\alpha\,\beta} \vee \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{A}^{\alpha\,\beta} \vee \mathfrak{b}^\beta \rightarrow \mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{b}^\beta$.
2. $\mathfrak{A}^{\alpha^2} \vee \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{b}$.
3. $\mathfrak{A}^{\Pi\,\rho\, i} \vee \mathfrak{b}^{\Pi\,\sigma\, j}$ $\qquad \rho_i,\, \sigma_j = \alpha,\, \beta$
   $\rightarrow \mathfrak{A}^\alpha \vee \mathfrak{b}^\beta$ $\qquad$ Bew:$\ldots\, \alpha^2$ **???**
   es gilt auch weiter: $\rightarrow \mathfrak{A}^\beta \vee \mathfrak{b}^\alpha$.) $\qquad \ldots\alpha\,\beta,\, \ldots\beta \rightarrow \cdots\alpha,\, \ldots\beta$
   usw.
4. (Minbedgg) $\rightarrow \mathfrak{A}^{(\alpha\ldots\beta\,\gamma)^\infty} \underline{\subseteq} \mathfrak{A}^{\alpha^\infty} \cap \cdot \cap \mathfrak{A}^{\beta^\infty} \cap \mathfrak{A}^{\gamma^\infty}$

   denn $\mathfrak{A}^{\gamma^\infty}$ ist die grösste Untergr von $\mathfrak{A}$, die bei γ fest bleibt, und $\mathfrak{A}$ fest bei $\alpha\,\beta \leftrightarrow$ fest bei α und fest bei β.
5. Ist $\alpha^2 = \alpha, \ldots, \gamma^2 = \gamma$, so ist $\mathfrak{A}^\alpha \cap \mathfrak{A}^\beta \cap \ldots \mathfrak{A}^\gamma \underline{\geq} \mathfrak{A}^{(\alpha\,\beta\ldots\gamma)^\infty}$

[11] Seite 156

Bruchso'-theorems, 17.4.55

1. Fortsetzg von S.155.5:
   Es gilt $A^\alpha \vee B$, wenn $B^\alpha \subseteq A$ $\qquad$ Bew 155.5,**???** $B^\alpha \vee A^\alpha$ **???**
2. Ohne Vorauss. gilt also stets: $\{A,\, B^\alpha\}^\alpha \vee B$ $\qquad$ Bew: 1
3. Stets ist $\qquad \{A,\, B^{\alpha^k}\}^\alpha \vee B \qquad (k \geq 1)$ $\quad$ Bew 2 $\quad B \,|\, B^\alpha$ Indukt. 156.6
4. Stets ist $\qquad \{A,\, B^{\alpha^k}\} \cup B^{\alpha^l} \qquad (k \geq 0)\ \ (l \geq 1)$
5. Stets ist $\qquad \{A^{\alpha^m},\, B^{\alpha^n}\} \vee \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right.$. $\qquad$ Bew: $\vee \left\{ \begin{array}{c} A^{\alpha^m} \\ B^{\alpha^n} \end{array} \right.$ $\quad$ 156.5
   (Von Nutzen bei Faktorisierungen ?)

Seite 157

[11] S.154 und S.155 existieren nicht.

Gute p-Gruppen.

1. Def'. <u>p-Gruppe $\mathfrak{G}$ heisst gut</u>, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \underline{\leq} \mathfrak{G} \to$
   $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{b})^p = \mathfrak{A}^p \cup \mathfrak{b}^p$. Daher $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}^p = \{A^p\}_{A \in \mathfrak{A}} \\ \mathfrak{A} \cup \mathfrak{b} = \{\mathfrak{A},\, \mathfrak{b}\}. \end{array} \right.$

2. $\mathfrak{G}$ gut, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{G} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{b})^{p^k} = \mathfrak{A}^{p^k}\, \mathfrak{b}^{p^k} \quad (k > 0)$; $\mathfrak{A}^p \vee \mathfrak{b}$. **???** : $p =$Op.

3. In einer guten Gruppe bilden die Lösungen von $X^{p^k} = E$ eine Gruppe.
   Bew: $A^{p^k} = B^{p^k} = E$, $C = A\,B \to C^{p^k} \in \{A,\, B\}^{p^k} = \{A^{p^k}\}\,\{B^{p^k}\} = E$

4. In einer guten Gruppe bilden die p^k-ten Potenzen eine Gruppe.
   Bew: $k = 1$ genügt (nach 5). Sei $G = \Phi\,(\mathfrak{G})$; OBdA $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G} \text{ nicht zyklisch.} \\ \mathfrak{G} = \{A,\, B\} \quad (5) \end{array} \right.$
   a) $G^p \neq E$: Indukt: 4 richtig in $\{\mathfrak{G}^G \,/\, G^p$. Also, wenn A, $B \in \mathfrak{G}$,
   $A^p\, B^p = H^p\, C^p$. Da $\{H,\, C\} \neq \mathfrak{G}$ (**???** $\neq$ zykl.)
   ist nach Ind. D^p. b) $G^p = E$: Sind $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{N}$ max in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{W}^p\, \mathfrak{N}^p = \mathfrak{G}^p$. Und es ist $|\mathfrak{W}^p| \underline{\leq} p$. Daher $|\mathfrak{G}^p| \underline{\leq} p$ dann **???** trivial) oder $|\mathfrak{G}^p| = p^2$, dann stets $|\mathfrak{W}^k| = p$, $\mathfrak{W}^k \neq \mathfrak{N}^k$; daher alle $p+1$ Untergruppen von $\mathfrak{G}^p$ die Gestalt $\mathfrak{W}^p$, jedes $X \in \mathfrak{G}^p$ ist $X = Y^p$.

5. Unter- und Faktorgruppen einer guten Gruppe sind gut.

6. $\mathfrak{G}$ ist schon dann gut, wenn für A, $B \in \mathfrak{G}$ stets $\{A,\, B\}^p = \{A^p,\, B^p\}$ ist. Bew: Sei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{G}$. OBdA $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{G}$. Ist Y^p, $X^p \in \mathfrak{A}^p \cup \mathfrak{b}^p$ so ist $(X\,Y)^p \in \{X,\, Y\}^p = \{X^p,\, Y^p\} \leq \mathfrak{A}^p \cup \mathfrak{b}^p$, also dies $= (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{b})^p$

Seite 158

<u>Gute p-Gruppen.</u>

1. Ist jede <u>echte</u> Untergruppe von $\mathfrak{G}$ gut, so ist für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{G}$ sets $\mathfrak{A}^p \vee \mathfrak{b}^p$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{b}^{p^2}$.
   Bew:

   a) $\mathfrak{b} = \mathfrak{G}$: klar.

   1 p^2

   b) $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{G}$: $\underbrace{\mathfrak{A}^p \cup \mathfrak{b}}_{\text{also gut}} \neq \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{A}^p \leq \Phi(\mathfrak{G})$; $\to \mathfrak{A}^p \vee \mathfrak{b}^p$quad 158.2

2. $\mathfrak{G}$ gut $\to$ Für jedes $B \in \mathfrak{G}$, $A \in \mathfrak{G}^p$ ist $\{A\} \vee \{B\}$.
   dh jede Ugr von $\mathfrak{G}^p$ ist quasi-normal in G: Ore 1938, **???** 1941, 184

3. $\mathfrak{G}$ gut $\to$ In $\mathfrak{G}^p$ sind je zwei Untergruppen vertauschbar. 158.4, 2.

4. Sind in $\mathfrak{G}$ je zwei Untergr. vertauschbar, so ist $\mathfrak{G}$ gut.
   Bew: 157.6 und Huppert Satz 2: $\mho_1(\{A\}\{B\}) = \{A^p\}\{B^p\}$.
   NB: Es genügt nicht, wenn stets $\{A^p\} \vee \{B\} : \mathfrak{G}$ = dort Sylowgr von γ_p.
   $\mathfrak{G}^p \subseteq$ ztr $\mathfrak{G}$

5. Gute Gruppen haben die "Eigenschaft $\mathcal{R}$" meiner Arbeit 1940.

6. Ist jede echte Ugr von $\mathfrak{G}$ gut, $G = \Phi\,\mathfrak{G}$, $G^p = E$, so ist $\mathfrak{G}^p$ elementar abelsch und im Zentum von $\mathfrak{G}$.
   Bew:

   a) $\mathfrak{G}$ zyklisch: klar
   b) $\mathfrak{G}$ nicht zykl: bei $\mathfrak{z} > G$, $\mathfrak{z} : G = p$. Dann $\mathfrak{z}$ eine,
   also gut: $|\mathfrak{z}^p| = p$ und $\mathfrak{z}^p \lhd \mathfrak{G}$; $\{$alle$\mathfrak{z}^p\} = \{$alle $G^p\} = \mathfrak{G}^p$.
   also $\mathfrak{z}^p \in$ ztr $\mathfrak{G}$. Also: $\mathfrak{G}^p = ??? \rightarrow \mathfrak{G}^p = \mathfrak{K}$

   Seite 159

7. Jede echte Ugr von $\mathfrak{G}$ gut $\rightarrow \mathfrak{G}^p/(\Phi\,\mathfrak{G})^p$ elementar abelsch, wird von $\mathfrak{G}$ zentralisiert. Bew: 6

8. Def: <u>$\mathfrak{G}$ fast gut</u> = Jede echte Untergr. von $\mathfrak{G}$ ist gut

9. $\mathfrak{G}$ fast gut, $\mathfrak{A} < \mathfrak{G} \rightarrow (\mathcal{N}\,\mathfrak{A})^p = \mathcal{N}(\mathfrak{A}^p)$ $\qquad \mathcal{N}$ = "Norm"

$$= \prod_{X \in \mathfrak{G}} (\mathfrak{A}^p)^X$$

10. Hupperts Beispiel einer irreg Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ord 3^4 ist eine gute Gruppe. Denn dort (siehe Sammelmappe Hall) ist, wenn $\{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\} = \mathfrak{G}$, jedenfalls ein
    $P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & X \\ X & \cdot & \cdot \\ \cdot & X & \cdot \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$ od. ??? also $P^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & & \\ & ??? & \\ & & ??? \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^3$,
    aber $\mathfrak{G}^{???}$ ist <u>nur</u> $\{P^3\}$. Ist $\{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\} \neq \mathfrak{G}$, so Ord $\{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\} \leq 3^3$, daher $\{\mathfrak{A},\,\mathfrak{b}\}$ gut.
    Also <u>nicht jede gute</u> Gruppe ist <u>regulär</u>; und genauer:
    Bei guten Gruppen ist nicht immer $Omega_1 : Omega_0 = \mho_0 : \mho_1$.

11. <u>Nicht jede reguläre Gruppe ist gut</u>. Gegenbeispiel: s.u.
    Gegenbeispiel: $Z^{p^2} = E = A^{p^2} = B^{p^2}$; $\{\mathcal{Z}\}$= ztr $\mathfrak{G}$
    $\mathfrak{G} = \{A,\,B\}$ $\quad A^B = \mathcal{Z}A.$ $\qquad |\mathfrak{G}| = p^6$ <u>Klasse = 2</u> $(p > 2)$
    Es ist $A^p \vee B^p$, also $\{A^p,\,B^p\} \lhd \mathfrak{G}^p = \{A^p,\,B^p\,\mathcal{Z}^p\}$

[12] **Seite 162**

[12]S.160 und S.161 sind durchgestrichen.
S.162 ist oben durchgestrichen.

Über p-Gruppen:
Eine Klasse von p-Gruppen, welche sowohl die regulären wie die "guten" von S.157 enthält, wird definiert durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{G} \rightarrow \{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}^p = \{\mathfrak{A}^p, \mathfrak{b}^p\} \cdot \{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}'^p$. Statt des letzten Faktors koennte man auch $\Phi(\{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\}')$ **???** wählen.

Seite 163

Frage von Itô (5.4.55): Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} G$, $\mathfrak{P} \cap G = 1$, $\mathfrak{P}$ eine abelsche Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ zum kleinsten Primteiler der Ordnung. Kann $\mathfrak{G}$ dann einfach sein ? (Itô habe sehr speziellen Fall erledigt.)

Arbeiten von Amato [54]: [Fundemental-Untergruppe $= \mathcal{Z}\mathrm{s}\,(A) \neq \mathfrak{G}$. Eine nichtabelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\tau + 2$ Fundamentaluntergruppen hat "Typ τ"]. Nach Amato 1917 sind für $\tau \leq 6$ alle FUG abelsch.] a) b): Uber Index von Ztr $\mathfrak{G}$ in den FUG u. ähnlich.
c) "Quasiabelsche Gruppen, eingeführt von Zappa 1942, besitzen nur vertauschbare Untergruppen". Hier werden **???** Gr. mit 2 Erzeugenden d. Ord p^m, p^w betrachtet (zykl. Normalt. mit zykl. Faktorgr.): FUG und Typ werden bestimmt. Dasselbe hatte Cipolla 1924 für Höldersche Gruppen getan
e) f) Minimale FUG haben Geschlecht 1; solche, die nur welche vom Geschlecht 1 enthalten, aber selbst nicht minimal sind, haben Geschlecht 2,. . . .
Rang $\mathfrak{G}$ = maximales Geschlecht der FUG. Über die Darstellg der gesamten gruppe als Linearverbdg von FUG'en.
g) **???**

[13] **Seite 164**

Gewisse maximale Permutationsgruppen.
Ist eine transitive Gruppe G gegeben, und eine beliebige, die Ziffer 1 festlassende Gruppe $\mathfrak{F}$, so sei $G * \mathfrak{F} = G\mathfrak{F}^*$, wobei $\mathfrak{F}^*$ die Grösste mit G (in **???**) vertauschbare Untergruppe von $\mathfrak{F}$ ist.
Diese Bildung enthält die Erweiterungsgruppen $\mathfrak{G}(G|$**???**$)$.

Seite 165

Verschärfung eines Verlagerungssatzes von **???**: 31.7.55

1. Sei $\mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A}$ <Ztr $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times G$
   Bew: Verlagere $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{p}/\mathfrak{b}$. Ist $|\mathfrak{G} : \mathfrak{p}| = \dot{\nu}$ so ist für $A \in \mathfrak{A}$
   Verlag $(A) = A^i$, also bilden die $\mathcal{G}$ mit Verl $\mathcal{G}$= 1 ein $G \lhd \mathfrak{G}$ $(G, \mathfrak{A}) = 1$, $G\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$
   Sonderfall: ? Satz v. **???** $(\mathfrak{A} = \mathfrak{p})$.
2. Verschärfung: Es genügt $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p} \text{ Sylowgr.} \\ \mathfrak{p} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \end{array} \right.$ mit $\mathfrak{A}$ Ztr G, dann folgt wie oben $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,G$ mit $G \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{b}$; $G \underline{\lhd} \mathfrak{G}$.

[13] S.164 ist unten durchgestrichen.

3. Sonderfall: Besitzt $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler vom Index **???** , so ist $\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ztr}\mathfrak{G} \leq \Phi\mathfrak{p}$.

Seite 166

Permutationsgruppen von Primzahlgrad p,

??? 1.8.55
$\mathfrak{G}$ sei abstrakte Gruppe, $\mathfrak{p}$ eine p-Sylowgruppe; $|\mathfrak{G}| = g$; $p\,T\,g$.

1. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}\,G_1\,\mathfrak{U} \\ \mathfrak{U},\ \mathfrak{w} < \mathfrak{G} \end{array} \right.$, $|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{w}| = \frac{g}{p}$, und ist $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{p}$ so bestimmt, dass $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{U}$ **???** $\mathfrak{w}$, so ist $1 \in \mathfrak{K}$
   a) $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}$ $\quad \circ\rho \quad 1 \in \mathfrak{K}$ **???** $1 \in \mathfrak{U}\,\mathfrak{w}$
   b) $\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}^* = \frac{k(p-k)}{p-1}E + \frac{k(k-1)}{p-1} \cdot \mathfrak{p}$ mit $k = |\mathfrak{K}|$
   c) $\underline{\mathfrak{K}}$ kein Nullteiler im Gruppenring von $\mathfrak{G}$; Eigenwerte k, K **???** $K\underline{K} = \frac{k(p-k)}{p-1}$
   Bew:

   a) $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}$ und $|\mathfrak{U}\,\mathfrak{K}| = k\,|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{K}\,\mathfrak{w}|$
   b) $\mathfrak{K}^*\,\mathfrak{U} = \mathfrak{w}\,\mathfrak{K}^*$
   ??? $\quad \mathfrak{U}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}\,\mathfrak{K}^*\,\mathfrak{U}$ zweiseitige NKlasse
   $\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}^* = k \cdot E + b\,\mathfrak{p}'$ mit $\quad b = \frac{k^2-k}{p-1}$.
   c) In der reg Darstellg von $\mathfrak{p}$ hat $\mathfrak{K}$ die EWerte k, $K_1, \ldots$ **???**
   $K_\nu\,\overline{K_\nu} = \frac{k\,(p-k)}{p-1} = K\,\overline{K} \equiv k^2$

2. Ist insbesondere $a = \frac{k\,(p-k)}{p-1} = l^2 =$ **???** , so ist
   $k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ p-1 \end{array} \right.$. Bew: $p\,(k - l^2) = k^2 - l^2$, $\quad \begin{array}{r} k \equiv \pm l \\ k = \pm l \\ \rightarrow k = l^2 = 1 \end{array}$
   dh $|K|$ rat.

3. Ist ausserdem $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^*$ so ist $k = 1$, wenn $\leq \frac{p}{2}$ und > 0.
   Bew: $K^2 = \frac{k(p-k)}{p-1} = \Pi q_\rho^{\beta_\rho} \quad q_\rho$ Primzahl.
   (Hierzu genügt es, dass K_ν **???** k reell ist.) NB: **???**
   Da alle $q_\rho \neq p$ und p der einzige **???** in $\mathfrak{N}$**???** folgt aus q_ρ **???** q_ρ:
   $\left\{ \begin{array}{l} q_\rho^{2\,\alpha_\rho}\,T\,K^2 \\ \text{???} \end{array} \right\} \rightarrow \beta_\rho = 2\,\alpha_\rho \rightarrow \frac{k(p-k)}{p-1} = l^2$. **???**

   Seite 167

4. $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,\mathfrak{w} \leftrightarrow$ **???** $= \begin{cases} \mathfrak{K} \\ \mathfrak{p}-\mathfrak{K} \end{cases}$ Bew: $\mathfrak{K}\,\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{K}\,\mathfrak{p}^*$ **???**, klar mit $\mathfrak{U} \to$ linab $\to \mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{p}^*$ lin ab (1c) $\to \mathfrak{L}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{p}$ lin ab
   (4.1) $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ **???** $\to \mathfrak{w} =$ **???**. Bew: $\mathfrak{K}^*\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{p} = r\,\mathfrak{w} + \leq \mathfrak{G}$.

5. Ist $\vartheta = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$, $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\,\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}\,\vartheta = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{p} \cap \vartheta = 1$.

   Bew: $N \in \mathfrak{N} \to$

   $N = P\,U$, da $\mathfrak{p}\,\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$
   $U = P^{-1}\,N \in \mathcal{U}$
   $\mathfrak{p} \cap \vartheta = 1$ wegen $p \nmid |\vartheta|$.

6. $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$ ist konjugiert zu $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{w}$ unter $\mathfrak{p}$ ist konjugiert zu $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{w}$ unter $\mathfrak{p}$. denn beides sind Vertretergruppen für $\mathfrak{N}\,/\,\mathfrak{p}$, also konj. in $\mathfrak{N}$.

7. Ist $2 \,\Big|\, |\mathfrak{N}|$ mit $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\,\mathfrak{p}$, so ist $k = \begin{cases} 1 \\ p-1 \end{cases}$.
   ???

   Bew: Wähle $P \in \mathfrak{p}$ so, dass $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{w}^P$.
   $N^2 = E$, $N \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{w}^P$.
   $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w} = \mathfrak{K}\,P \cdot \mathfrak{w}^P \cdot P^{-1}$ $\quad \mathfrak{U}\,\mathfrak{K}\,P = \mathfrak{K}\,P\,\mathfrak{w}^P$

   Transformiere mit N: $\mathfrak{U}\,(\mathfrak{K}\,P)^N = (\mathfrak{K}\,P)^N \cdot \mathfrak{w}^P$ $\quad \mathfrak{K}\,P = \mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}^N = \mathfrak{L}^*$
   ??? $\quad \mathfrak{U}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,\mathfrak{w}^P$, $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}^*\,\mathfrak{w}^P$
   Fortsetzg X 33:
   Verschärfung: Aus (4) folgt: $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{p} - h$. Letzteres fällt aus wegen $|h^*| \neq |p-h|$, also $h^* = h$. Nach (3) folgt $|\mathfrak{L}| = h^{???} = |\mathfrak{K}|$.
   (7') **???**

8. Ist in einer Permgruppe vom Grade p $|\mathcal{N}s\,\mathfrak{p}|$ gerade, so besitzt $\mathfrak{G}$ nur p Untergruppen vom Index p.
   Beweis: klar, wenn $\mathfrak{G}$ $1-$tra. $\quad \mathfrak{G}$ $2-$tra nach (7).
   Seite 168

9. Folge: $p - 1 = 2^\alpha \to \mathfrak{G}$ von Grade **???** hat nur p Untergr. vom Index p. (vgl S. 51).

10. Stets sind die von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{w}$ erzeugten Permutationsdarstellungen von $\mathfrak{G}$ einander ähnlich.

    Bew: Für jeden Charakter $\chi = \mathrm{Sp}\ D(G)$ von $\mathfrak{G}$ ist wegen
    $\mathfrak{N}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}$ $\quad D(\underline{\mathfrak{U}})\ D(\underline{\mathfrak{K}}) = D(\underline{\mathfrak{K}})\,D(\underline{\mathfrak{w}})$
    $\chi(\underline{\mathfrak{U}}) = \chi(\underline{\mathfrak{w}})$ Schluss folgt nun so:

11. Daher enthalten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{w}$ aus jeder einzelnen Klasse von konjugierten Elementen in $\mathfrak{G}$ die gleiche Anzahl Elemente.
Bew 10: Daher sind die induzierte Char. von $\mathfrak{G}$ gleich

12. In jeder Primzahl der Form $p = \frac{Q^n-1}{Q-1}$, $Q = q^\alpha$ q Primz., $n >$ **???** gibt es eine Gruppe des Grades p mit (mindestens) $2\,p$.
Untergruppen vom Index p. Für diese Beispiele ist stets
$\frac{k(p-k)}{p-1} = Q^{n-1} = q^{\alpha\, n-\alpha}$

	q	=	2	3	4	5	7	8
Also z.B.	p	=	7	13	?	31	?	73
			31					

Bew: Die Gruppe $P\,L\,(n,\,Q)$ ist transitiv auf den $\frac{Q^n-1}{Q-1} = p$ Punkten des $n-1-\dim$ **???** über $G\,F(Q)$.

Die Untergruppen $\begin{pmatrix} 1 & — \\ 0 & — \\ \vdots & \\ 0 & — \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ Ξ **???** beliebig

haben die Indizies p und sind nicht ähnlich, da die zweite **???**
Seite 169

(12') Frage: Ist bei <u>allen</u> Gruppen mit mehr als p Untergruppen des Index p stets $\frac{k(p-k)}{p-1}$ eine Primzahlpotenz ? Folgt das vielleicht arithmetisch aus $K\,\overline{K} = \frac{k(p-k)}{p-1}$?

13. Hat der EW $K \neq k$ von $\mathfrak{K}$ einen ungeraden Grad u über **???** , so ist $k = 1$ oder $p-1$.
Bew a) σ sei ein erzeugen der Automorphismus von **???** .
Dann ist $K^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{u-1}} = c$ ganz rational
$K\,\overline{K} = \frac{k(p-k)}{p-1} = d$ ganz rational
also $d^U = (K\,\overline{K})^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{u-1}} = C\,\overline{C} = C^2$
daher $\quad d = l^2$ also nach (2) $\quad k = \begin{cases} 1 \\ p-1 \end{cases}$.
b) <u>Anderer Beweis</u>: Jeder Normalkörper ungeraden Grades ist reell; **???** . (3)

14. Jeder **???** ungerader Ord von $\mathfrak{G}$ permutiert die **???**
Frage: Wieviele Klassen konjugiert Untergr vom Index p kann **???** ? 2^α ? 2 ? Sind sie stets unter Automorphismen von $\mathfrak{G}$ konjugiert ? Ist die Lösung **???** im wesentl. eindeutig bestimmt ?

Seite 170

Automorphismen einer 2-tra Gruppe $\mathfrak{G}$ des Grades p.

15. Jeder Automorphismus σ ungerader Ordnung μ von $\mathfrak{G}$, welcher $\mathfrak{p}$ als Ganzes fest lässt, vertauscht die p Gruppen $\mathfrak{G}_1,\sim,\mathfrak{G}_p$ nur untereinander (wird also durch ein Element von γ_p erzeugt).
Bew: Es ist

$$\begin{aligned} &\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{G}_1^\sigma \qquad \text{oBdA } \mathfrak{K}^\sigma = \mathfrak{K} \text{ siehe } (15)\\ &\mathfrak{G}_1^\sigma\,\mathfrak{K}^\sigma = \mathfrak{K}^\sigma\,\mathfrak{G}_1^{\sigma^2} \quad \dots\\ &\text{also } \mathfrak{K}^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{nl}} = c\,E + d\mathfrak{P}\end{aligned}$$

$P^\sigma \in \mathfrak{P}$ $\qquad$ $K^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{n-1}}$ ganz rat. Nun wie 13 a)

16. Jeder Automorphismus ungerader Ordnung, der $\mathfrak{P}$ elementarweise fest lässt, ist

17. Jeder Automorphismus ungerader Ordnung, der $\mathfrak{P}$ elementweis fest lässt, ist ein innerer (erzeugt von einem P^i).
Bew: (14); man braucht nur den Sonderfall $\mathfrak{k}^\sigma = \mathfrak{k}$.

Seite 171

Schärfer: $\mathfrak{A}$ ist zyklisch, $|\mathfrak{A}|\,\big|\,p-1$. Dann:

18. Jeder Automorphismus σ von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{P}$ elementweis fest lässt, wird von einem $P^i \in \mathfrak{P}$ erzeugt. Bew: Man kann Ord $\sigma =$ **???**
$\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w} = \mathfrak{U}^\sigma$. Sei $\sigma^{???} = 1$. Dann
$\mathfrak{U}^\sigma\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}^\sigma$
$\mathfrak{w}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{U}$
$\mathfrak{U}\,\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{K}^2\,\mathfrak{U}$
$\mathfrak{K}^2 = a + b\,\mathfrak{p}$
$K^2 = a$ also $a > 0$ (sonst $K + \overline{K} = 0$, $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}^{-1} = \frac{2k}{p}\,\mathfrak{p} \cap p|2k$)

Anderer Bew: Sei $\mathfrak{K}^r = a + b\,\mathfrak{p}$, r Primzahl. Dann $K^r = a \not\equiv$ **???** $\to a = \pm l^r$ (**???** $\to (\frac{K}{l})^r = 1$**???** $\frac{K}{l} = 1$
$r = 2 \to \frac{K^2}{l^2} = \pm 1$ $K \neq k \to$ **???**
(3) $\to$ Also führt die Konj. zu $\mathfrak{G}_1$ ineinander über, so ist $|\mathfrak{K}| = k = 1$ durch γ_p erzeugt, lässt P fest: $\sigma = 1$.

Frage: **???** Autom einer Permgr., die eine trans Ugr elementweis fest lassen ?
Frage: Kann man mit dieser Methode $\mathfrak{U}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{w}$ die Vermutung von Zassenhaus angreifen, nach der je zwei Vertretergruppen von $\mathfrak{G}\,/\,\mathfrak{N}$ konjugiert sind, wenn $(g_0\,\frac{g}{u}) = 1$?
???

Seite 172

Imprimitive Gruppen des Grades p^2.

1. Sei $\mathfrak{G}$ impr., Grad$= p^2$, p Primzahl; je zwei verschiedene p-Sylowgruppen seien zueinander fremd; $p^2 \top g$. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ <u>nur eine</u> p-Sylowgruppen. Bew: Seien G, G' zwei verschiedene **???** transitiv. OBdA in $\mathfrak{G} = \{G,\, G'\}$. Es gibt $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ p **???** der Länge p, die von $\mathfrak{P} < G$ und $\mathfrak{P}' < G'$ einzeln fest gelassen werden. $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P}'$ haben Ordnung p, da $|\mathfrak{G} \,/\, \mathfrak{A}| = c.p$, und sind daher in $\mathfrak{A}$ ähnlich. Wegen Fremdheit der Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ ist also G' zu G konjugiert <u>unter $\mathfrak{A}$</u>. Also ist $G = G'$ nwd $\mathfrak{A}$, und da $\{G,\, G'\} = \mathfrak{G}$, ist $|\mathfrak{G} \,/\, \mathfrak{A}| = p$. $\mathfrak{A}$ ist $\simeq$ seinem ersten transitiven Konstituenten, da sonst $p^2 \,\Big|\, |\mathfrak{A}|$, $p^3 \,|\, g$. Sei nun $Q \in G - \mathfrak{P}$. Dann ist $X \to Q^{-1}\, X\, Q$ ein Autom von $\mathfrak{A}$, der $\mathfrak{P}$ elementweise fest lässt und daher nach S.171 von $P \in \mathfrak{P}$ erzeugt wird ; dh. $P^{-i}Q \in Zs\,\mathfrak{A}$; daher $\{P^{-l}Q\} \leq$ Zentrum $\mathfrak{G}$.
   Also $P^{-i}Q \in G \cap G'$, $G = G'$ Ist $\mathfrak{G}$ ein **???**
   NB: Es ist nicht benutzt worden, dass etwa G Typ $(p,\, p)$ hat:
   Gleichwertig ist:

2. In einer Gruppe des Grades p^2 mit $p^2 \top g$ sei je zwei <u>verschiedene</u> p-Sylowgruppe fremd. Dann erzeugen je zwei solche p-Sylowgruppen eine <u>primitive</u> Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Seite 173

Gruppen vom Grade p^2.
$\mathfrak{G}$ enthalte eine reg Gruppe G vom Typ $(p,\, p)$. Alle Transitivitätssysteme vom $\mathfrak{G}_1$ (als primitive Komplexe) seien rational. Die Längen der Transsysteme seien
$\left\{ \begin{array}{lllll} E & \mathfrak{K} & \mathfrak{L} & \mathfrak{W} & \\ 1 & k(p-1) & l(p-1) & m(p-1) & \ldots \end{array} \right.$, also $k + l + m + \cdots = p + 1$.
Die Darstellungen von dem (aus reduzierten) G seien so geordnet, dass erst 1 kommt, dann die **???** Kern in $\mathfrak{K}$, dann Kern in $\mathfrak{L}$, ... Dann sind die in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Charaktere:

Eigenwerte II

I	E	$K \in \mathfrak{K}$	$L \in \mathfrak{L}\ \cdots$	E	$\underline{\mathfrak{K}}$	$\underline{\mathfrak{L}}$	$\mathfrak{W}$
χ_1	1	1	$1 \cdots$	1	$k(p-1)$	$l(p-1)$	$m(p-1)$
χ_2	1	$p-k$	$-k$	1	$p-k$	$-l$	$-m$
χ_3	1	$-l$	$p-l$	1	$-k$	$p-l$	$p-m$
χ_4	1	$-m$	$-m$	1	$-k$	$-l$	m

Aus II sieht man, dass jeweils die Darstellungen, die ihre Kerne in $\mathfrak{K}\mathfrak{L} \sim$ etc haben, in <u>eine</u> Darstellg von $\mathfrak{G}$ liegen: $\chi^2,\, \chi^3, \cdots$.
Die Darstellung liegen alle in Ra.
Gibt es in $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{L}$ zwei Elemente K, L mit $|Zs\,K| = |Zs\,L| = p$ so sind alle Elemente von $\mathfrak{K}$ zueinander konjugiert. Denn $2p^2 = \sum\limits_{\chi} |\chi\,(K-L)|^2 =$
$o + p^2 + p^2 + o \cdots + o + \sum\limits^{n} |\chi\,(K-L)|^2 \to \chi''(K-L) = 0$

Also $\chi(K - L) = o, p_1, o\cdot, o, \cdots, o$ Also K' unähnlich $K \to$??? $\sum \overline{\chi}(K')_\chi(K-L) = p\,(\lambda^2(K') - \chi^3(K')) = p(p-k+l)$ aber $p - k \neq -l$.

??? $\mathfrak{K}$ ist dann $\mathcal{N}s\ G$ regulär falls G zu allen Konj. fremd.

[14] **Seite 176**

Bemerkungen zu Jakobs, Maxx Ann ???, 1955:

1. Ist $\mathfrak{G}$ eine isometrische Gruppe linearer Transf. einem gl. konvexen Banachraum $\mathfrak{b}$, so enthält jede bei $\mathfrak{G}$ invariante abgeschlossene kovexe Menge $\mathfrak{K}$ mindestens eeinen Fixpunkt F, nämlich den zunächst bei 0 gelegenen Punkt von $\mathfrak{K}$.

2. Ist auch $\mathfrak{b}^*$ (adhungiert zu $\mathfrak{b}$) ??? konvex, so enthält die $\mathfrak{G}$-invar. abgeschl. konvexe Hülle eine $f \in \mathfrak{b}$ stets genau einen Fixpunkt. Denn zu ???, f_1, f_2 wähle $u \in \mathfrak{b}^*$ mit $u\,(f_1 \cdot f_2) \neq 0$. Sei v ein Fixpunkt von $\mathfrak{G}^*$ ind der konvexen inv. Hülle $\overline{u}$ von U.
   Dann ist $(v,\, f_1 \cdot f_2) =$ const auf $\overline{u}$, daher $(u,\, f_1 \cdot f_2) = (v,\, f_1 \cdot f_2)$.
   Ebenso $(v,\, \mathfrak{G}) =$ const auf $\overline{f}$, also $\sim$ $= (v,\, f_1 \cdot f_2) = 0$.

3. Ist $\mathfrak{K}$ abgeschlossen und ??? und konvex, so gibt es in $\mathfrak{K}$ einen Pkt K_0, der fest bleibt bei jeder Abbildg ??? sich, die die Schranke 1 hat und $\mathfrak{K}$ fest lässt: wähle für K den zunächst bei M gelegenen Pkt; $M =$ Mittelpkt der ??? von $\mathfrak{K}$ (existiert eindeutig, da $\mathfrak{b}$ glen konvex).

4. In einem glen konvexen Raum ist der ???
   ??? kovexer abgeschl Mengen nicht leer: Betrachte, wenn $\overline{O\,\mathfrak{K}_n} = r_n \to r$, der Durchschnitt. $\mathfrak{K}_n \cap$ Kugel von O mit $r + \frac{1}{n}$.

Seite 177

Aus 3. folgt in Verallgemeinerung des Satzes von Riesz (vgl. Riesz-Nagy 1943):
Ist $\mathfrak{b}$ glen konvex und ??? eine lineare Abb mit der Schranke 1 von $\mathfrak{b}$, so konvergiert für $n - m \to \infty$??? gegen jeden in der konvex invarianten Hülle von f gelegenen Fixpunkt f_0. (Dieser ist also eindeutig bestimmt)

Bew: OBdA sei $f_0 = 0$ const f ??? f_0 betrachten. es gilt $\sum\limits_{???}^{k} \mu_K\, T^X f = e = P(T)\, f$
mit $\mu_K \geq 0$, $\sum\limits_K = 1$, $|e| < \varepsilon$. $f = P(1)\, f = P(1)\, f - P(T)\, f + e = (1-T)\, Q(T)\, f + e$
$\sum\limits_m^{???} \frac{T^{???}\, f}{n-n} = \frac{T^n - T^m}{n-m}\, Q(T)\, f + ???\, e'\ (< \varepsilon$
$< 2\,\varepsilon$ für $n > m > \mathcal{N}???$.
Das ist ein "??? theorem".

[14] S.174 und S.175 existieren nicht.

Sind G, $\mathfrak{K}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so gibt es zwei bestimmte transitive Permutationsdarstellungen G und $\mathfrak{K}$, die in natürlicher Weise miteinander gekoppelt sind: Man permutiere die Linksnebenkl. nach $\mathfrak{K}$ in $G\mathfrak{K}$ druch Linksmult. mit H^{-1}, die Rechtsnebenkl nach G in $G\mathfrak{K}$ durch Rechtsmult mit K

Aufgabe: Wie gross ist die Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ höchstens, wenn die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gegeben ist ? Nach BMNeumann ist $|\mathfrak{G}|$ beschrkt.
Seite 178

Kompositionsreihen und Sylowgruppen.

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2 \lhd \lhd \mathfrak{p}$ eine $p\cdot$ Sylowgr von $\mathfrak{G}$.
<u>Vermutlich</u> gilt:

1. $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{A}$ ist Sylowgr von $\mathfrak{A}$,
2. $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{A}_1) \cup (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{p} \cap (\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2)$, entspr. für **???** U =Erzeugnis
3. Ist $\mathfrak{p}_i$ p-Sylowgr von $\mathfrak{A}_1$, so enthält $\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$.
4. Ist $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ vertauschbar, so auch $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{A}_1)$ mit $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{A}_2)$.
   NB: Zy 4 siehe Handexpl {31} S.2; ferner {5} Satz 31.
   (2) und (4) bedeuten eine Art Homomorperismus des Verbands der nachinvar. Ugr von $\mathfrak{G}$ in denjenigen von $\mathfrak{p}$
5. Ist jeder Kompositionsfaktor von $\mathfrak{G}$ durch p teilbar, so ist der eben genannte Homom. <u>**???**, also</u> Isom, (aber "in"). Die Umkehrg von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{p} \cap \mathfrak{A}$ lautet dann $\mathfrak{A} = \overline{(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{A})}$.
   (5') Innen ist der Homom. **???** auf dem Teilverband (?) der $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, die in jedem ihrer Köpfe die Primzahl p aufgehen haben. Denn das sin die $\overline{\mathfrak{U}}$ mit $U \leq \mathfrak{p}$.
   NB: Hier liegt eine neue Art der "Abschiessung" für die $U \leq \mathfrak{p}$ nahe: setze $U^* = \mathfrak{p} \cap \overline{\mathfrak{U}}$, wo $\overline{U}$ die kleinste $\lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\geq U$.
6. $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{w} \leq \mathfrak{p} \to (U \cup \mathfrak{w})^* = U^* \cup \mathfrak{w}^*$

   Ähnlich für beliebiges G **???** $\mathfrak{G}$ statt **???**

   Seite 179

7. Ist eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ abelsch, so sind je zwei **???** p-köpfige nachinv. Untergruppen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. In einer A-group sind daher je zwei nach invariante Ugr vertauschbar.

8. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{A}_i \leqq \mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ (∪ =Erzeug.) Dann ist

   $|\mathfrak{G} : \mathfrak{b}| \,\Big|\, |\mathfrak{G}_1 : \mathfrak{A}_1| \cdot |\mathfrak{G}_2 : \mathfrak{A}_2|$
   und $=$ genau wenn $\mathfrak{b} = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2$ & $\mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{A}_i \leqq \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{A}_1 \cap$**???**
   Beweis: $\mathfrak{b} = \sum\limits_R \mathfrak{A}_1\, R\, \mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{b}| = \sum\limits_R \frac{(\mathfrak{A}_1) \cdot (\mathfrak{A}_2)}{(\mathfrak{A}_1^{G_1} \cap \mathfrak{A}_2^{G_2})}$ wenn $R = G_1\, G_2$
   $= c_R \cdot \frac{(\mathfrak{A}_1) \cdot (\mathfrak{A}_2)}{(\vartheta)}$ wenn $\vartheta = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$
   $|\mathfrak{b}| = c \cdot \frac{(\mathfrak{A}_1) \cdot (\mathfrak{A}_2)}{(\vartheta)}$ mit $c = \varepsilon\, c_R \geqq \begin{matrix} c_R = (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{G}_1} \cap \mathfrak{A}_2^{\mathfrak{G}_2}) \\ c_E = (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \end{matrix}$
   $|\mathfrak{G}_1 : \mathfrak{A}_1| \cdot |\mathfrak{G}_2 : \mathfrak{A}_2| = \frac{(\mathfrak{G}_1)\,(\mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{A}_1)\,(\mathfrak{A}_2)} = \frac{(\mathfrak{G}) \cdot (\vartheta)}{(\mathfrak{A}_1)\,(\mathfrak{A}_2)} = c\, \frac{(\mathfrak{G})}{(\mathfrak{b})} = c\, |\mathfrak{G} : \mathfrak{b}|$.
   $c = 1 \leftrightarrow c_E = 1$, $c_R = 0$ sonst $\leftrightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2$, $\vartheta = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$

   NB: 8. enthält noch nicht ganz {31} Satz 4, aber doch im wesentlichen Bessere Fassung:

9. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \to$ **???** $= c$ ist ganz, und $c \geq (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)$
   Genau dann ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2$, wenn $c = (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)$.
   Beweis (3) (und damit auch (2)): Induktion nach $\begin{cases} (\mathfrak{G}) \\ (\mathfrak{G} : \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_2) \end{cases}$
   Nach Indvor. kann man annehmen $\mathfrak{A}_1^{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2 = \overline{\mathfrak{p}_2}$.
   Dann ist $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_1 \to$ Rest mit

10. Sonderfall von (9): $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{G}_1$ vertb. $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{A}_i$ enth p-Sylo. Gr. von $\mathfrak{G}_i \to G_1 \cup \mathfrak{A}_2$ enth p-Sylowgr von $\mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2$.

Fortsetzg IX 5