D9

FRITZ SCHIMPF · TÜBINGEN ·

IX

Sept. 55 – Nov. 57

NA

IX 5

19 ← Čunihin?

29

36

43

49

51 5

149

169

= Ergebnisse über den Zusammenhang Verteilbarkeit ⟺ Normalität und Verwandtes

5

5" g

Gen

schwäche

Beweis von (2) $\mathfrak{L}$ so g_1,

also Kfg $(g_1,$

$\to g_1^{\mathfrak{R}+\mathfrak{L}'_\beta}$

Beweis von (1) $g_{1\beta}^{\mathfrak{R}_\alpha + \mathfrak{L}'_\beta} =$

NB: Ferner ist Kfg $(g_{1\alpha},$

FRITZ SCHIMPF TÜBINGEN

IX

Sept. 55 – Nov. 57

IX 5
19
29
36
43
49
51
149
169

: Ergebn
Zusa
Vertl
und Ve

$A, B \in_s G$

$|A|, |B|$ mögen höchstens 2 Punkt gemeinsam haben, $A = A'$

$\Rightarrow \quad B \in NA$

Bew. ⊕ 25

$A \in_s G, \quad A \vee B, \quad B \not\equiv A$

$\Rightarrow \quad B \cap NA > B \cap A$

& wenn noch $B \in_s G$, so $B \cap \underline{NA} > B \cap A$

Bew von (2)

Bew von (1)

NB: Ferner ist Kfg

[illegible]

3. Allgemeinere Fassung des Satzes 2.1. Wir wollen un~~s~~ von der Beschränkung ~~auf~~ frei machen, daß $\mathfrak{A}$ einköpfig ist, d.h. nur einen einzigen maximalen Normalteiler enthält. ~~(kurz: daß $\mathfrak{A}$ einköpfig ist).~~

(3.1) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \neq 1$. Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{A}$ stimme mit $\mathfrak{A}$ überein. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ sei in dem Durchshcnitt $\mathfrak{M}$ aller maximalen Normalteiler von $\mathfrak{A}$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{B} \subseteq N\mathfrak{A}$.

Beweis. Wir bezeichnen die sämtlichen subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{A}$, welche ~~mit~~ nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten sind und welche mit ihrer Kom mutatorgruppe ferner übereinstimmen und nur einen einzigen Noraltteiler maximalen enthallten, mit $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$. Da $\mathfrak{A}_\nu$ nicht in $\mathfrak{M}$ liegt, ~~und und~~ aber $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ ist, ist $\mathfrak{A}_\nu$ nicht [illegible]. Nach Satz 2.1 ist $\mathfrak{B} \subseteq N\mathfrak{A}_\nu$, daher auch $\mathfrak{B} \subseteq N \cup \mathfrak{A}_\nu$. Es genügt also, zu zeigen, daß $\cup \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ ist.

Angenommen, es sei $\cup \mathfrak{A}_\nu \neq \mathfrak{A}$. Da $\cup \mathfrak{A}_\nu$ in $\mathfrak{A}$ subnormal ist (2.4), können ~~Dann wählen~~ wir einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\cup \mathfrak{A}_\nu \subseteq \mathfrak{N}$ wählen. Wir wähllen ferner eine minimale unter den subnojenigen subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{A}$, die nicht in $\mathfrak{N}$ liegen (solche gibt es, z.B. $\mathfrak{A}$ selbst); sie heiße $\mathfrak{A}_0$. Wir sind fertig, sobald wir zeigen können, daß $\mathfrak{A}_0$ ebtgegen der Konstruktion doch in $\mathfrak{N}$ liegt. D[illegible]

Das ~~ergibt sich so:~~ $\mathfrak{A}_0$ läßt sich wegen der Minimaleigenschaft nicht als Erzeugnis zweier echter subnormaler Untergruppen darstellen. Daher enthält $\mathfrak{A}_0$ nur einen einzigen maximalen Normalteiler $\mathfrak{N}_0$, ist also einköpfig. Da $\mathfrak{A}_0 \not\subseteq \mathfrak{N}$ ist und $\mathfrak{N}$ max. Normalteiler von $\mathfrak{A}$ ist, gilt $\mathfrak{N}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0$, ~~Also~~ ~~| keine Primzahl |~~ ist $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{N}_0 \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ nicht abelsch. Ferner ist $\mathfrak{A}_0 \not\subseteq \mathfrak{M}$, da $\mathfrak{A}_0 \not\subseteq \mathfrak{N}$ ist. Also stimmt $\mathfrak{A}_0$ nach der Definition ~~der~~ von $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ mit einer von diesen Gruppen überein, $\mathfrak{A}_0$ liegt also ~~auch~~ in $\mathfrak{M}$ und daher auch in $\mathfrak{N}$.

Kompositionsfaktoren von G_1 und G_{12}.

6.9.58

G sei primitiv, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ seien gepaarte Konstituenten von G_1; es wirke $\mathfrak{K}$ (u.a.) auf α und $\mathfrak{L}$ auf β.

(1) Jede Kompositionsfaktorgruppe von $G_{1\alpha}$ ist auch eine von $\mathfrak{K}_\alpha$ oder $\mathfrak{L}_\beta$; zugleich eine von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}_\beta$.

(2) Jede Kompositionsfaktorgruppe von G_1 ist auch eine (in derselben Vielfachheit) von $\mathfrak{K}'$ oder $\mathfrak{L}_\beta$ (a oder b); zugleich eine von $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{K}_\alpha$.

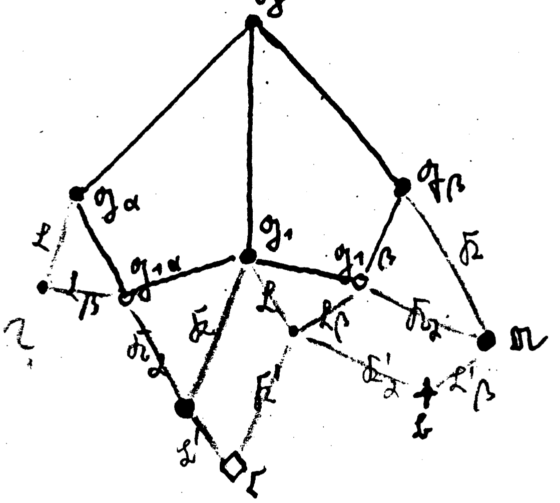
Erweiterung: S. 3

Beweise:

$S^{-1} G_\alpha S = G_1$

$S^{-1} G_1 S = G_\beta$

so genügen schon schwächere Voraussetzungen



| Faktorgr.

$\mathfrak{K}'$ = Teilmenge der KFG von $\mathfrak{K}$

Bew von

(2) $\mathfrak{L} \triangleleft G_1, G_\beta$

also $\mathrm{Kfg}(G_1, \mathfrak{L}) = \mathrm{Kfg}(G_\beta, \mathfrak{L}) \rightarrow \mathfrak{K} + \mathfrak{L}'_\beta = \mathfrak{L} + \mathfrak{K}'_\alpha$

$\rightarrow G_1^{\mathfrak{K}+\mathfrak{L}'_\beta} = G_\beta^{\mathfrak{K}+\mathfrak{L}'_\beta}$, also $\triangleleft G$, also $= E \rightarrow G_1^{\mathfrak{K}+\mathfrak{L}'_\beta} = E$

Bew von

(1) $G_{1\beta}^{\mathfrak{K}_\alpha+\mathfrak{L}'_\beta} = \alpha^{\mathfrak{K}_\alpha+\mathfrak{L}'_\beta} \triangleleft G_\beta$, ebenso $\triangleleft G_1 \rightarrow G_{1\beta}^{\mathfrak{K}_\alpha+\mathfrak{L}'_\beta} = E$

ebenso $G_{1\beta}^{\mathfrak{L}+\mathfrak{K}'_\alpha} = E$

NB: Ferner ist $\mathrm{Kfg}(G_{1\alpha}, \mathfrak{L}) = \mathrm{Kfg}(G_{1\beta}, \mathfrak{L})$, also $\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{K}' + \mathfrak{L}_\beta$

$\rightarrow G_{1\beta}^{\mathfrak{K}'+\mathfrak{L}'_\alpha+\mathfrak{L}_\beta} = 1$

Frage: besitzt $\mathfrak{G}_1$ in einer primitiven Gruppe $\mathfrak{G}$ einen transitiven Konstituenten vom Primzahlgrad p, so ist $p \mid |\mathfrak{G}_1|$ (Zwei ~~[illegible]~~ Konstituenten v. Grad p sind also stets „gekoppelt", insbesond. isomorph)

Beweis: Die Kfaktoren von $\mathfrak{G}_{1\alpha}$ sind Teiler von $(p-1)!$ nach S. 1 (1)

Frage: Kann die altern. $\mathfrak{A}_{11}$ als transitiver Konstituent auftreten? Dann sind alle KFG von $\mathfrak{G}_1$ entweder $\mathfrak{A}_{11}$ oder $\mathfrak{A}_{10}$. Dabei $\mathfrak{A}_{11}$ nur einmal (die $\mathfrak{A}_{10}$'s kommen als direktes Produkt vor?)

Bemerkung: Gebraucht wird bei diesen Schlüssen stets ~~$\mathfrak{A}$ max in $\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$~~, ~~und~~ $\mathfrak{A}$ enthält keinen Normalteiler von $\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}=\mathfrak{G}$. Manchmal auch $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

Vielleicht nützen diese Schlüsse etwas für die Gruppen mit regulären Automorphismus, etwa in Verbindung mit Burnsides Überlegungen über maximale Sylow-Durchschnitte.

Oder Anwendung auf das Produkt von 2 nilpotenten Gruppen?

Ist $\mathfrak{G}$ primitiv, ~~[illegible]~~ ein Konstituent von $\mathfrak{G}_1$ p-auflösbar, so ist $\mathfrak{G}_1$ p-auflösbar. Steht in 18.2

Burnside, On simply transitive groups of prime degree, Quart. J. Math. 37 (1906) [BG 349] beweist seinen Satz so:

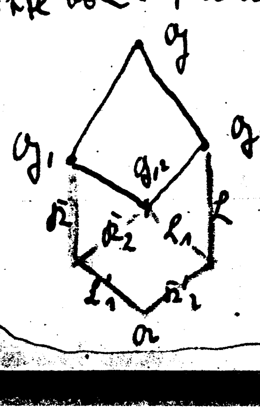
Die mit G vertauschbaren Matrizen werden in der Form $\sum_{\alpha\in\Pi} P^{\alpha} : V$ dargestellt; P wird auf Diagonalform transformiert. Es werden die Elemente einer Zeile der reduzierten Matrizengruppe $U^{-1}GU$ betrachtet und es wird gezeigt, dass alle ausser einem $= 0$ sind, sodass die g_r $U^{-1}gU$ monomial ist und daher die Diagonalgruppe P invariant lässt. Der springende Punkt ist das

Lemma: Sind $1, \alpha, \dots, \alpha^{r-1}$ eine multipl. Untergr. der Ord r mod p, und gibt $A_0x + A_1x^{\alpha} + A_2x^{\alpha^2} + \dots + A_{r-1}x^{\alpha^{r-1}}$ $(r < p-1)$ eine Permutation der p p-ten Einheitswurzeln, so sind $r-1$ der $A_i = 0$.

Gruppenkranz: Polya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chem. Verbdgen, Acta math 68 (1937) 145–254

Erweiterung: Die Sätze von § 1 hängen nicht vom (Begriff der) Paarung ab!

Vollständig $g_1 \cong g_2$ (?)



2 kommen in g_1 in Konst. $\mathfrak{k}$ vor
1 " " g_2 " $\mathfrak{l}$ vor

a) $KFG(g_1) \subseteq \mathfrak{k} + \mathfrak{l}_1' = \mathfrak{l} + \mathfrak{k}_2'$

denn $a \triangleleft\triangleleft g_1, g_2$; $a^{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}_1'} = g_2^{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}_1'} \triangleleft g_2$

$a^{\mathfrak{l}_1'+\mathfrak{k}_2'} = \mathfrak{l}^{\mathfrak{l}_1'+\mathfrak{k}_2'} \triangleleft g_1$, $\triangleleft g_2$

b) $KFG(g_{12}) \subseteq \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{l}_1$ ← hier wird nur Kern g_1 ∩ Kern g_2 = 1 gebraucht

Über die Φ-Gruppe. (1)

1. Weder Gaschütz 1953 noch Ore 1939 haben den Satz explizit:

Ist $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$, so ist $\Phi(\mathfrak{N}) \leq \Phi(\mathfrak{G})$.

Bew.: Satz 5 bei Gaschütz zeigt sogar: aus $\Phi(\mathfrak{N}) \triangleleft \mathfrak{G}$ folgt $\Phi(\mathfrak{N}) \leq \Phi(\mathfrak{G})$

2. Der Satz von Ito 1955 ist wie folgt zu verschärfen:

Ist $\mathfrak{U} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} \cap \Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{U}/\mathfrak{D}$ nilpotent, (2)

so ist $\mathfrak{U}$ nilpotent. Kurz: $\left.\begin{array}{l}\mathfrak{U} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}\\ \mathfrak{U}^{\nu} \leq \Phi(\mathfrak{G})\end{array}\right\} \to \mathfrak{U}^{\nu} = E$.

Beweis: Sei $\mathfrak{W} = \bigcup_{G} G^{-1}\mathfrak{U}G$. Dann ist $\mathfrak{W}^{\nu} = \bigcup_{G} G^{-1}\mathfrak{U}^{\nu}G \leq \Phi(\mathfrak{G})$

also $\mathfrak{W}^{\nu} = E$ nach Gaschütz Satz 10.

3. Gaschütz' Satz lässt sich so verschärfen:

Ist $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ vertauschbar mit jeder maximalen Ugr. von $\mathfrak{G}$ (3)

und $\mathfrak{H} \leq \Phi(\mathfrak{U})$ für ein $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{H} \leq \Phi(\mathfrak{G})$.

Bew.: $\mathfrak{G}_1$ maxim. in $\mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{H} \Rightarrow \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{H}$, $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_1$,

$\Rightarrow \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \Rightarrow \mathfrak{U}_1 \geq \mathfrak{H} \Rightarrow \mathfrak{G}_1 \geq \mathfrak{H}$.

4. Aus 1 folgt:

Ist $\mathfrak{U} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, so ist $\Phi(\mathfrak{U}) < \Phi(\mathfrak{G})$.

Jordan- und Sylowstruktur: 31.12.55 5

(1) $\mathfrak{A}$ ss $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \le \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{B}) = p^{\mu}$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. $\mathfrak{A}$ ⇒

$\mathfrak{P} \cup \mathfrak{B}$ enthält eine p-Sylowgr von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ u. Erzeugung

Bew: Induktion nach $\mathfrak{G}:\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}^{\mathfrak{P}} \neq \mathfrak{A}$

x(g) Sonst $\mathfrak{A}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{A}$, so $\mathfrak{A}$ vertauschbar $\mathfrak{P}$: dann VIII S. 179 (10)

<u>Verschärfung</u>: 6_2 (die Vor $(\mathfrak{B}) = p^{\mu}$ ist unnötig)

(2) $\mathfrak{A}$ ss $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \le \mathfrak{G}$ ⇒ von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$ gibt es nur Kompositionsfaktorgruppen aus $\mathfrak{B}$, und

x(4) $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$ hat nur solche aus $\mathfrak{A}$. Also hat $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ nur solche aus $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{A}_i \le \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1$ ⇒ $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| \,\big|\, |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty} |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$

≡ VIII S. 179, Satz (8)

~~(4): (4) Sei $\mathfrak{A}_i \le \mathfrak{B}_i$ ss $\mathfrak{G}$. Dann ist $|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| \,\big|\, |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty} |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$~~

g ~~Verschärfung: 6_2.~~

~~Bew: p $|\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1| \, |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|$ ⇒ $\mathfrak{A}_i$ enthält eine p-Sylowgr von $\mathfrak{B}_i$~~

~~Besser $\mathfrak{A}_2$ A2 für $\mathfrak{A}_2$ A2 ∈ $\mathfrak{A}_2$~~

g1, ~~⇒ I. $\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} \neq \mathfrak{B}_1$ Induktion ⇒ (3)~~

~~$|\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{A}_2}| \,\big|\, |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty}$~~

~~Induktion $\mathfrak{g}:\mathfrak{B}_1$~~

~~$\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} \cup \mathfrak{B}_2$ $|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| =$~~

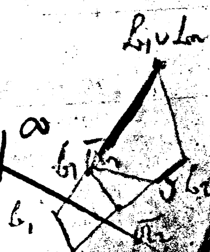
~~$|\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{A}_2} \cup \mathfrak{A}_2| \,\big|\, |\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{A}_2}|^{\infty} |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$~~

Besser auf Zettel

~~II. $\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_1$ vth $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_1$ vth $\overline{\mathfrak{A}_2}$~~

~~(3) ⇒ $|\mathfrak{B}_1 \cup \overline{\mathfrak{A}_2} : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| \,\big|\, |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty} |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$~~

~~und $|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{B}_1 \cup \overline{\mathfrak{A}_2}| \,\big|\, |\mathfrak{B}_2 : \overline{\mathfrak{A}_2}|^{\infty} \,\big|\, |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$~~



(1) Ist $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B} \le \mathfrak{G}$, $\mathfrak{T} \le \mathfrak{G}$, so ist

$$(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{T} : \mathfrak{A}\cup\mathfrak{T}) = \frac{(\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}} \cap \mathfrak{T})}{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}\cap\mathfrak{T})}\cdot(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}) \;\Big|\; (\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})$$

$$= \frac{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})}{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}\cap\mathfrak{T} : \mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}\cap\mathfrak{T})}$$

wobei $\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}$ das Erzeugnis aller $\mathfrak{A}$ bedeutet.

Bew.: $$\ldots = \frac{(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{T}:\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}})(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})}{(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{T}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})} = \frac{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}\mathfrak{T}:\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}})}{(\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}\mathfrak{T}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})}(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})$$

$$= \frac{(\mathfrak{T}:\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}\cap\mathfrak{T})}{(\mathfrak{T}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}\cap\mathfrak{T})}\cdot(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}})$$

Hauptsatz:

(2) Ist $\mathfrak{A}\le\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}\le\mathfrak{G}$, so ist

$$(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{T}:\mathfrak{A}\cup\mathfrak{T}) \mid (\mathfrak{B}:\mathfrak{A})^\infty$$

Bew.: Nach (1) folgt dies aus $(\mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}) \mid (\mathfrak{B}:\mathfrak{A})^\infty$, dies aus 5_4.

Bemerkung:

(3) Ist $\mathfrak{A}_1\le\mathfrak{B}_1 \triangleleft\triangleleft\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_2\le\mathfrak{B}_2\le\mathfrak{G}$, so kann $\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$ andere Primfaktoren enthalten als $\mathfrak{B}_1:\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_2:\mathfrak{A}_2$, sogar wenn $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{E}$.

Beispiel: ~~$\mathfrak{B}_1$ = alternierende Gr. vom Grad 5, dazu $\mathfrak{B}_1', \ldots, \mathfrak{B}_1''''$, $\mathfrak{G} = \underbrace{\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_1'\times\cdots\times\mathfrak{B}_1''''}_{\triangleleft\,\mathfrak{G}}\cdot\mathfrak{T}$, wo $|\mathfrak{T}|=5$, $\mathfrak{T}$ die $\mathfrak{B}_1^{(\nu)}$ zyklisch vertauscht~~, und $|\mathfrak{A}_1| = 12$. Hier $|\mathfrak{B}_2:\mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{T}| = 5$

$\mathfrak{G}$ = alternierende Gr. von $1, \ldots, 4$; $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 = \{(12)(34)\}$; $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(123)\}$

1.1.56

Eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ sei mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Dann ist $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$, aber nicht stets $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Vorschlag S. 12)

Bew. S. 8. ~~Bew. indirekt. Sei (I) $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung~~ und darin (II) $\mathfrak{A}$ von möglichst grosser Ordnung. Wähle $B \notin N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$. Dann ist nach Indvor. I $\mathfrak{A}\{B\} = \mathfrak{G}$. Sei $B^{pq} \in \mathfrak{A}$, aber $B^q \notin \mathfrak{A}$ (p Primzahl, $q = p^a$). Dann ist $(\underbrace{\mathfrak{A}\{B^q\}}_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{A}) = p$.

$\mathfrak{N}$ ist mit jeder Ugr $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{G}$ vertauschbar. Denn $\mathfrak{N}\mathfrak{L} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}\mathfrak{L} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{A}\{B^m\}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\{B^q\}\mathfrak{A}\{B^m\} =$ ~~$\{B^q\}\{B^m\}\mathfrak{A} = \{B^m\}\{B^q\}\mathfrak{A} =$~~ $\{B^m\}\mathfrak{A}\{B^q\}\mathfrak{A} = \mathfrak{L}\mathfrak{N}$. Nach IndVor II ist $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. $(\mathfrak{G}:\mathfrak{N}) = p^a$.

$\mathfrak{A}$ enthält keinen Normalteiler $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ $(\neq E)$, sonst $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ betrachte statt $\mathfrak{G}$. Also ist $\bigcap_G \mathfrak{A}^G = E$; ~~daher wegen $\mathfrak{N}/\mathfrak{A} \cong p$ $\mathfrak{N}$ elementar abelsch~~ Ferner ist $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{N}$, denn sonst gäbe es $N \in \mathfrak{N}$ mit $N^{-1}\mathfrak{A}N \neq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cdot N^{-1}\mathfrak{A}N = \mathfrak{N}$, $N = A \cdot N^{-1}A_1N$, $E = AN^{-1}A_1$, $N \in \mathfrak{A}$, Widerspruch. Wegen $(\mathfrak{N}:\mathfrak{A}) = p$ ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ abelsch, also $\mathfrak{N}$ (elementar) abelsch wegen $\bigcap G^{-1}\mathfrak{A}G = E$, $\mathfrak{N}/G^{-1}\mathfrak{A}G$ abel.

Daher $(\mathfrak{G}) = p^k$. Es ist $\{B^q\} = \mathfrak{N} \cap \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{G}$. Denn $B^q \in \mathfrak{N}$, also $\in$ Ztrsator $\mathfrak{A}$, und $\in \mathrm{Ztr}\,B$, also $\in \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{G}$; und wäre $(\mathfrak{N} \cap \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{G}) > p$, so wäre $\mathfrak{A} \cap \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{G} \neq E$, obwohl $\mathfrak{A}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthält. (Es ist also auch $B^{pq} = E$). Die $(NB)^q B^{-q} N^{E+B+\dots+B^{q-1}}$ bilden ~~eine Normalteiler $\mathfrak{L} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ (wenn N ganz $\mathfrak{N}$ durchläuft). Denn~~

$(\mathfrak{A}^{E+\dots+B^{q-1}})^{G} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\Sigma B^{\nu} G} = \mathfrak{A}^{G \Sigma B^{\nu}} = \mathfrak{A}_1^{\Sigma B^{\nu}}$, da

$B^{-\nu} G B^{\nu} G^{-1} \in \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{A}$ zentralisiert. Es ist $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{L} < \mathfrak{N}$.

α) Ist $\mathfrak{L} \neq E$, dann enthält $\mathfrak{L}$ etwas vom Zentrum von $\mathfrak{G}$, da $(\mathfrak{G}) = p^{\delta}$. Also ist dann $B^{-q} \in \mathfrak{L}$, $B^{-q} = (NB)^{q} B^{-q}$,

$(NB)^{q} = E$, $\mathfrak{A}\{NB\} \neq \mathfrak{G}$, nach I $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{A}\{NB\}$,

$\mathfrak{A}$ normal bei NB und daher bei B entgegen Definition von B.

~~β) Sei $\mathfrak{L} = E$, also stets~~

Beweis: Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Es sei $\mathfrak{M}$ eine möglichst grosse Ugr von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ mit allen Konjugierten $G^{-1}\mathfrak{M}G$ vertauschbar ist; $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{M} \triangleleft \mathfrak{G}$, denn sonst gälte $\mathfrak{M} \cdot G^{-1}\mathfrak{M}G = \mathfrak{G}$, $G = M G^{-1} M_1 G$, $G \in \mathfrak{M}$, $G^{-1}\mathfrak{M}G = \mathfrak{M}$.

Ferner ist nach Induktionsvor. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

Dass nicht stets $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}$ ist, zeigt das Beispiel der Gruppen $\mathfrak{G}$ der Ord p^3 $(p>2)$, die nicht nur Elem. d. Ord p enthalten; sei $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{A}) = p$. Dann ist $\mathfrak{A}$ mit jeder Untergr. $\mathfrak{L}$ der Ord p vertauschbar, denn die Lösungen von $X^{p} = E$ bilden eine abelsche Gruppe, vom Typ (p,p). Von Natur ist aber $\mathfrak{A}$ mit jeder Ugr $\mathfrak{L}$ mit $(\mathfrak{L}) \geq p^2$ vertauschbar, denn diese $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{G}$.

Kommutierende Untergruppen [= quasinormal: Ore 1938] 1.1.56

$\mathfrak{a} \le \mathfrak{g}$ heisse kommutierend in $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\mathfrak{a}$ für jede Untergruppe $\mathfrak{h} \le \mathfrak{g}$. Sei $(\mathfrak{g}) \le \infty$. Schreibe $\mathfrak{a} \, K \, \mathfrak{g}$

(1) $\mathfrak{a}$ komm in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' \le \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}'$ komm in $\mathfrak{g}'$.
denn $\mathfrak{h}' \le \mathfrak{g}' \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}'\mathfrak{a}$ vergleiche die El. $\in \mathfrak{g}'$:

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}'\mathfrak{a}'.$$

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ komm in $\mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ komm in $\mathfrak{g}$.

(3) $\mathfrak{a}$ komm in $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ abelsch $\Rightarrow$ jedes $\bar{\mathfrak{a}} \ge \mathfrak{a}$ ist komm in $\mathfrak{g}$.
denn $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{h} = \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}\bar{\bar{\mathfrak{b}}} = \bar{\bar{\mathfrak{b}}}\,\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \cdot \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{a}}$.

(4) $\mathfrak{a}$ komm in $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{g} : \mathfrak{a}) < \infty \Rightarrow \mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$ (S. 7.)
"Kommutativität" steht also zwischen Invarianz und Nachinvarianz.
$\mathfrak{a}$ ~~heisse~~ nachkommutierend in $\mathfrak{g}$ (schreib $\mathfrak{a} \, KK \, \mathfrak{g}$), wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r \, K \, \mathfrak{a}_{r-1} \, K - K \, \mathfrak{a}_1 \, K \, \mathfrak{g}$.

(5) ~~Hat~~ $\mathfrak{g}$ eine endliche Kompositionsreihe, so ist
$\mathfrak{a} \, KK \, \mathfrak{g} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$.

Bew: Sei $\mathfrak{b}$ maximal $\supset \mathfrak{a}$ und $K \, \mathfrak{g}$. Dann
$\mathfrak{b} \triangleleft \mathfrak{g}$ wie auf S. 8. Induktion.

10

Fragen: (1) Ist stets $\mathfrak{a}$ kk $\mathfrak{g} \leftrightarrow \mathfrak{a}$ ss $\mathfrak{g}$?

(2) Folgt aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ kk $\mathfrak{g}$ auch $\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}$ kk $\mathfrak{g}$?

NB: Dass aus $\mathfrak{a}$ kk $\mathfrak{g}$ stets $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}'$ kk $\mathfrak{g}'$ folgt, stimmt, daher gilt $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ kk $\mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ kk $\mathfrak{g}$.

(3) Gilt für ~~[illegible]~~ Ketten von kk Ugr ein ~~Eindeutigkeitssatz?~~ Verfeinerungssatz?

4) Ist $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \leq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, so ist

$$\frac{|\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}|}{|(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})|} = \frac{|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|\cdot|\mathfrak{c}| \cdot |\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}|}{|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|\cdot|\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}||\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}||\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}|}$$ symmetrisch

Bew: $|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}||\mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}|\cdot|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\cdot\mathfrak{c} = |\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}||\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|\cdot|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}|$

$$\frac{|\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}|}{|(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})|} = \frac{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}||\mathfrak{c}| \ |\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}|}{|\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}||\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}||\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}||\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}|}$$

6) Frage: Ist stets $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$ vertauschbar? oder ist diese Eigensch. invar. gegen Permut. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$?

(5) Ist $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \leq \mathfrak{g}$ und je zwei von ihnen vertauschbar, so ist

$$\frac{|\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}|}{|(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})|}$$

invariant gegen Vertauschung der $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. (Kürzer Remak 1931, für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \triangleleft \mathfrak{g}$).

Kompositionsreihen und Sylowgruppen.

1. Sei $\mathfrak{T} \le \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{H} \le \mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}$ Sylowgr. von $\mathfrak{N}$. Dann ist die nahinvariante Hülle $\bar{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{G}$ invariant gegenüber $\mathfrak{H}$:

$\bar{\mathfrak{T}}^{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{T}}$: Allg. bei Autom. α von $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{T} \le_\pi \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^\alpha = \mathfrak{H} \to \bar{\mathfrak{T}}^\alpha = \bar{\mathfrak{T}}$

Beweis: Sei $\mathfrak{T}^*$ die nahinvar. Hülle von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{T}^* \le \mathfrak{N}$, ~~...~~ daher $\mathfrak{T}^* \triangleleft \mathfrak{H}$, und $\overline{\mathfrak{T}^*}$ invar. bei $\mathfrak{H}$.
$\mathfrak{T}^*$ = Erzeugn. aller p-Sylowgr. von $\mathfrak{N}$.
Andrerseits ist $\mathfrak{T}^* \le \bar{\mathfrak{T}} \cap \mathfrak{H}$, also $\mathfrak{T} \le \mathfrak{T}^* \le \bar{\mathfrak{T}}$,
$\overline{\mathfrak{T}^*} = \bar{\mathfrak{T}}$.

2. Insbesondere: Ist $\mathfrak{T}$ eine Sylowgr. (oder Hallgruppe) von $\mathfrak{H} \le \mathfrak{G}$, so ist $\bar{\mathfrak{T}}^{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{T}}$.

---

3. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \le \mathfrak{G}$ paarweise miteinander vertauschbar, und ist $\mathfrak{AC} \cap \mathfrak{BC} = \mathfrak{C}$, so ist

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad \mathfrak{AB} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$$

also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ vertauschbar.

Bew.: $|\mathfrak{A}||\mathfrak{C}||\mathfrak{B}||\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{AC}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{BC}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{ABC}||\mathfrak{C}|$

$|\mathfrak{AB} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{A}||\mathfrak{B}||\cancel{\mathfrak{C}}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{ABC}||\cancel{\mathfrak{C}}| \to |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}||\mathfrak{AB} \cap \mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|$

$= |(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})||\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|$

$\sim \; \ge \; \sim$

und $\equiv \; \ge \; \equiv$

Vertauschbarkeit und Normalinvarianz. (Noch nicht bei Ore 1938) 1.

1. Sei $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{G}:\mathfrak{A}) < \infty$ und $\mathfrak{A}$ mit allen seinen Konjugierten vertauschbar. Dann ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

Bew.: Indukt. nach $(\mathfrak{G}:\mathfrak{A})$. [NB: Der Satz ist stärker als der von S. 9: $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}$ mit seinen Konjugierten vertauschbar]

Sei $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}$ ein möglichst grosses Erzeugnis (= Produkt) von $\mathfrak{A}$ und geeigneten Konjugierten: $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{G_2}\cdots\mathfrak{A}^{G_r}$. 12,

Dann ist $\mathfrak{M} \triangleleft \mathfrak{G}$, denn sonst wäre für ein T

$\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}^T = \mathfrak{G}$ wegen Maximalität, $T = M \cdot T^{-1} M_1 T$

$T \in \mathfrak{M}$, geht nicht. 2.

Also $\mathfrak{M} \triangleleft \mathfrak{G}$, und nach Induktion $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{M}$, daher $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

Der Kern davon steht schon bei Ore 1938 (Satz 5; vgl. auch S. 431)

2. $\mathfrak{G}$ ist nie das Produkt von zwei vertauschbaren konjugierten Untergruppen (= Ore 1938, S. 434) Völlig einfacher Fakt. S. 37

3. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1 = F$ einfach {und F nicht abelsch oder K_p in Kopfwerten}

so ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1$. d.h. F kein Primkopf von $\mathfrak{B}$.

denn $\mathfrak{A}^F \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^F \cdot \mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ Erzeugnis aller F-köpfigen Normalinvarianten, also $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$ ist. Allgemeiner!

1. Ist $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}^* \triangleleft \mathfrak{a}$ derart, dass $\mathfrak{a}^*$ alle abelschen Kompfaktorgruppen von $\mathfrak{a}$ enthält, die Köpfe von $\mathfrak{b}$ sind, so ist $\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{b}$.

Denn von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{a}^*$ sind alle KFgr nichtabelsch: wende 12_3 an.

2. Ist $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \le \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, so ist für die Nebenklassen-multigruppen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$

die Zuordnung $A\mathfrak{b} \leftrightarrow A\mathfrak{d}$ $\quad (\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$

eineindeutig, aber nicht immer ein Isomorphismus.

Bew: $A_1\mathfrak{b} = A_2\mathfrak{b} \leftrightarrow A_1\mathfrak{d} = A_2\mathfrak{d}$, also Zuordnung eineindeutig.

$\cancel{A_1\mathfrak{d}\,A_2\mathfrak{d} = \Sigma A_i\mathfrak{d}}$

Isomorphie besteht i.a. nicht, sonst müsste aus $\mathfrak{d} \le \mathfrak{a}' \le \mathfrak{a}$ stets folgen $\mathfrak{a}'\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, was z.B. bei $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ = Ikosaedergr. nicht stimmt ($|\mathfrak{a}|=12$).

14

Beweis des Burnsideschen Kriteriums (wesentlich wie Schur):

a) Sei $\mathfrak{G}$ eine Halbgr. von Matrizen G über einem Körper (beliebig) K; $\mathfrak{G}$ sei irred. $:K$. Sei $\mathfrak{M}$ ein maximaler Modul von Matrizen $:K$ mit $\mathfrak{G}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \neq 0$.

Dann tritt jede bel. Spalte u als erste Spalte von einer Matrix aus $\mathfrak{M}$ auf (es sei denn alle 1. Spa. sind 0), und die i-te Spalte von M ist $P_i u$ wenn u die erste ist. Dabei ist $P_i G = G P_i$ für alle G.

Bew.: $\mathrm{Rg}\{u\} = n$ wegen Irred. von $\mathfrak{G}$; $u_2 = P_2 u$ wegen $u = 0 \to u_2 = 0$. $P_2 G$ wegen $G(u\; u_2 \dots) = (Gu\; GP_2u \dots)$
$= (Gu\; P_2Gu \dots)$.

b) Ist nun ~~$\mathfrak{G}$ absolut irred., also~~ K alg. abgeschl., so ist $P_i = \lambda_i E$, also mit $l = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: $M = ul$, l unabhängig.

c) Wählt man, wenn $\mathrm{Rg}\,\mathfrak{G} < n^2$ und $\mathfrak{G}$ irred. $:K$, K alg. abg., für $\mathfrak{M}$ einen minimalen Modul $:K$ mit $\mathrm{Sp}\, GM = 0$ für alle G,

dann besteht $\mathfrak{M}$ aus allen ul (l fest $\neq 0$, u beliebig) nach (b).

$0 = \mathrm{Sp}\, Gul = \mathrm{Sp}\, ulG \to 0 = lG$. Ergänze l zu $L = (l \dots)$, $|L| \neq 0$, dann $LG = \binom{0}{H}$, $LGL^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ & \end{pmatrix}$ reduzibel.

Folge aus Burnside: $\mathfrak{G}$ irred. $:$ alg. abg. $K \to \mathfrak{G}$ irred. $:$ jedem Erweiterungskörper.

Nach Lektüre von Hupperts Habilschrift bemerkt:

1. Ist $\mathfrak{G}$ eine (auflösbare) absolut irreduzible Matrizengruppe (über beliebigem Charakteristik) vom Grade p (= Primzahl) (beliebige Ordnung $\leq \infty$), so ist $\mathfrak{G}$ <u>monomial</u> zu machen. falsch s.u.

Bew: Induktion nach Stufe. Indirekt: Sei $\mathfrak{G}$ primitiv. Dann jeder reduzible Normalt. $\subseteq$ Ztr $\mathfrak{G}$

a) $\mathfrak{G}'$ reduzibel: dann alle Bestandteile v. $\mathfrak{G}'$ gleich, und da $\mathfrak{G}'$ voll reduzibel, ist $\mathfrak{G}' = \lambda \cdot E$, $\mathfrak{G}' \subseteq$ Zentrum $\mathfrak{G}$. Beh: $\mathfrak{G}$ abelsch ~~Beweis~~ ~~jeder reduzible Normalteiler~~ Bew: Wähle M beliebig. Dann $\{\mathfrak{G}', M\} \triangleleft \mathfrak{G}$ und abelsch, also red., also $\subseteq$ Ztr $\mathfrak{G}$, $M \in$ Ztr $\mathfrak{G}$

b) $\mathfrak{G}'$ irreduzibel. Indukt: $\mathfrak{G}'$ monomial, $\mathfrak{P}$ sei die zugehör. Permgr. des Grades p. $\mathfrak{P}$ ist transitiv, da $\mathfrak{G}'$ irreduzibel. Als trans. auflösb. Permgr. des Grades p hat $\mathfrak{P}$ eine einzige p-Sylowgruppe; die zugehörigen Matrizen bilden Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$; ~~es ist~~ es ist $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{D}, P\}$, wo $\mathfrak{D}$ die Diagonalen, $P \in \mathfrak{P}$, $P \notin \mathfrak{D}$

Da $\mathfrak{D}$ ~~$\subseteq$ Ztr $\mathfrak{G}$~~, ist $\mathfrak{N}$ abelsch, $\mathfrak{N} \subseteq$ Ztr $\mathfrak{G}$, P diagonal. Wid.

falsch

Gegenbeispiel (laut Huppert schon bei Burnside!)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho & \\ & & \rho^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\rho^3 = 1), \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 \\ 1 & \rho^2 & \rho \end{pmatrix} \cdot c, \quad |V| = 1$$

$$BV = VA, \quad AV = VB^{-1}$$

Ist $\mathfrak{G} = \{A\,B\,V\}$ nicht monomial, da schon $\{A\,B\}$ irreduzibel bleibt und nur diese Monomialen, so $\mathfrak{G}$ ähnlich einem $\mathfrak{H}$ enthalten müsste

Über primitive Permutgr. mit einer trans Konst. $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}_1$ des Grades 3: (Grd $\mathfrak{G} = n$) 25.1.5

Ist $\mathfrak{K}$ selbstgepaart, so hat (wenn 2 von $\mathfrak{K}$ betroffen) $N_1 \mathfrak{G}_{12}$ ein Element, das ~~$\mathfrak{G}_1$ + $\mathfrak{G}_2$ trans~~ $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{G}_2$ vertauscht, daher ist $2 \mid |\mathfrak{G}_{12}| \mid |\mathfrak{G}|$, also $2 \mid n$. Daher ist die Anzahl der selbstgepaarten Konst. des Grades 3 von $\mathfrak{G}_1$ stets 0 oder ungerade. – Ohne Vor. über Selbstpaarung gilt:

Der Normalisator von $\mathfrak{G}_{12}$ ist transitiv auf den von $\mathfrak{G}_{12}$ festgelassenen Ziffern. Denn da alle trans Konst des Grades 3 gekoppelt sind, sind alle Untergruppen von $\mathfrak{G}_1$ vom Index 3 und Grad $\leq n-2$ schon in $\mathfrak{G}_1$ konjugiert (es gibt genau 3 solche in $\mathfrak{G}_{12}$).

NB: hat $\mathfrak{G}_1$ mehr als 2 trans Konst des Grades 3, so ist die Anzahl der Konjugierten von $\mathfrak{G}_{12}$ $< n$; gilt dasselbe von $\mathfrak{G}$ des Grades $< n$.

Frage: Was für endliche Gruppen können in einen Schiefkörper eingebettet werden?

Notwendig ist jede abelsche Unterg. zyklisch, also $\mathfrak{G}$ zweistufig, falls von ungerader Ordnung. Rg des kleinsten Einbettgs-Körpers K über Primkörper K_0 ist $< \infty$. Gibt's Darstellg ohne EW 1? Ja, die reguläre über K_0. Offen bleibt, ob jede Gr ohne EW 1 sich in einen Körper einbetten (d. h. von K) läßt.

25.1.56 $\mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}}$, für $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ endl. Kompositionsreihe ($\mathfrak{G}_0$ ...).

Def: Ist $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ eine Menge von einfachen ~~Faktorgruppen~~ abstrakten Gruppen, so sei $\mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}}$ die umfassendste nach Invariante Untergr. von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{b}^{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{a}$. Entsprechend $\mathfrak{a}^{1/\alpha}$, wenn α Verbandsoperator.

Existenz: Ist $\mathfrak{b}_i^{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{a}$, so ist $(\mathfrak{b}_1 \cup \mathfrak{b}_2)^{\mathfrak{F}} = \mathfrak{b}_1^{\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{b}_2^{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{a}$.

Rechenregel: $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^{1/\mathfrak{F}} = \mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{b}^{1/\mathfrak{F}}$.

Bew.: $\mathfrak{c} \le (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^{1/\mathfrak{F}} \to \mathfrak{c}^{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \le \mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{b}^{1/\mathfrak{F}}$

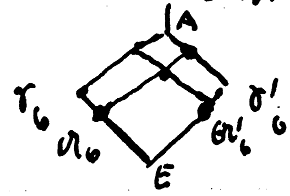
$\mathfrak{c} \le \mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{b}^{1/\mathfrak{F}} \to \mathfrak{c}^{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \le (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^{1/\mathfrak{F}}$.

Ferner gilt stets $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})^{1/\mathfrak{F}} \geqq \mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{b}^{1/\mathfrak{F}}$; $(\mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{F}})^{1/\mathfrak{F}} \ge \mathfrak{a}$

Nicht gilt i.a.: $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})^{1/\mathfrak{F}} = \mathfrak{a}^{1/\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{b}^{1/\mathfrak{F}}$. Gegenbeispiel!

Sei $\mathfrak{S}_6$ die symmetr. Gr. der Ord 6! und α ein äusserer Automorph. der Ord 2 von $\mathfrak{S}_6$. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_6 \times \mathfrak{S}_6'$ erweitert mit einem Element A, das sowohl auf $\mathfrak{S}_6$ wie auf dem zweiten Exemplar $\mathfrak{S}_6'$ den Autom. α macht. Dann ist $\mathfrak{a}_6^{1/2} = \mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{a}_6'^{1/2} = \mathfrak{S}_6'$ und

$(\mathfrak{a}_6 \times \mathfrak{a}_6')^{1/2} = \mathfrak{G}$



Beweis für $\mathfrak{a}_6^{1/2} = \mathfrak{S}_6$: Sonst wäre, da $\mathfrak{a}_6 \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{a}_6^{1/2} \triangleleft \mathfrak{G}$ und von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{a}_6^{1/2}$ gäbe es an Kompfaktorgr. höchstens eine 2, sonst eine $\mathfrak{a}_6$. Daher enthielte $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_6^{1/2} \cap \mathfrak{a}_6'^{1/2}$ die KFGr. 2 mindestens einmal. Nun ist $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}_6 \cap \mathfrak{a}_6')^{1/2} = E^{1/2}$, enth. nur KFGr 2, ist also $\mathfrak{d} \le$ Zentralisator $\mathfrak{a}_6$; aber dieser ist nur $= E$, da α nicht α macht, also in $\mathfrak{S}_6$ liegt, und aber ist er E.

(1) $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \not\lhd \mathfrak{G}$ → es gibt $\mathfrak{A}' = G^{-1}\mathfrak{A}G$ mit $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \vee \mathfrak{A}$.

sogar $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$

Bestimme $\mathfrak{G}'$ min. $\lhd\lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \not\lhd \mathfrak{G}'$

Sei α Verbandsop. auf $\mathfrak{G}$. Dann gilt:

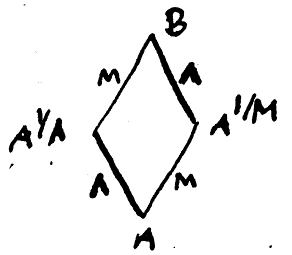
(2) $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}^{\alpha} \vee \mathfrak{B}^{1/\alpha}$ Denn $\mathfrak{A}^{\alpha} \vee \mathfrak{B}^{\alpha} = (\mathfrak{B}^{1/\alpha})^{\alpha}$

(3) $A \leq B \to A^{1/\alpha} \leq B^{1/\alpha}$

(4) Sind Λ, M Mengen einfacher Gruppen, $\Lambda \cap M = \emptyset$, so ist

$$A^{1/\Lambda} \vee A^{1/M}$$

Bew.: ~~Setze~~ $B = A^{1/\Lambda} \vee A^{1/M}$



Nach Jordan-Hölder ist $|B/A^{1/\Lambda}| = |A^{1/M}/A|$

(1) Aufgabe: Gruppen untersuchen, in denen je zwei nichtinvariante Untergruppen vertauschbar sind (Verallgemeinerung des Falls von Taussky-Best) d.h. Verband modular

(1') Aufgabe: Haben in einer auflösb. Gr. $\mathfrak{G}$ diejenigen $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ besondere Eigenschaften, die mit allen Gliedern eines Sylowsystems vertauschbar sind?

~~(2) Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{P}| = p^\alpha$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{P}$, so ist~~

~~$$\mathfrak{A}^p = (\mathfrak{A}\mathfrak{P})^p \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{P}$$~~

~~denn $\mathfrak{A}^p \triangleleft\triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{P}/\mathfrak{A}^p| = p^r$, $(\mathfrak{A}^p)^p = \mathfrak{A}^p$~~

(2') $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^M \leq \mathfrak{A}_\mathfrak{B}$ →

$$\mathfrak{A}^M = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^M \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B} \qquad (\text{u/y/ibid})$$

Aufgabe: einen „symmetrischen" Obersatz suchen!

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} \leq \mathfrak{G} \\ \mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \end{array} \right.$; zu jedem $p \mid |\mathfrak{B}|$ gebe es eine Sylowgr. $\mathfrak{B}_p$ mit $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}_p$. Dann ist $\mathfrak{A}^\pi \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{A}^\pi$ min. mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^\pi$ aufl.

Bew: $\mathfrak{A}^p \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}_p$ nach (2)

$$\mathfrak{A}^\pi = \mathfrak{A}^{p\pi} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}_p \qquad \mathfrak{A}^\pi \triangleleft \bigcup_p \mathfrak{A}\mathfrak{B}_p = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

✓ „auflösbar" → $\mathfrak{G}^\alpha$ grösster perf. Normalteiler

Čunihin ? s. S. 167 = Zushg vertauschbar ⇔ Normalteiler?

(4) $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{G}_p$ für jede Sylowgr. $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$ → $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{G}^{\pi}$

Bew: Sei $\mathfrak{F}$ ein ~~auf~~ Kopf von $\mathfrak{G}^\pi$ und $\mathfrak{M}$ ein Kopf nach inv. in $\mathfrak{G}^\pi$ so daß $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{M}$ gedeckt wird. Dann ist für $p, q \mid |\mathfrak{F}|$ $\mathfrak{A}^p$ normal bei $(\mathfrak{G}^\pi_p)^{\mathfrak{G}^\pi}$, also bei $\mathfrak{M}$; ebenso $\mathfrak{A}^q$ normal bei $\mathfrak{M}$,

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^p\mathfrak{A}^q$ normal bei $\mathfrak{M}$. Dies gilt für alle $\mathfrak{M}$, also für $\bigcup \mathfrak{M} = \mathfrak{G}^\pi$.

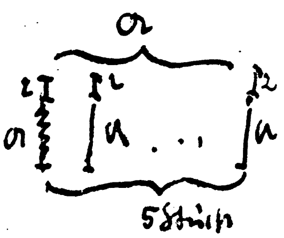
20

Falsch ist die Vermutung:

Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ rein p-köpfig, so ist $\mathfrak{A}$ mit jeder p-Sylowgr. $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ vertauschbar.

Dann müßte nämlich $\mathfrak{A}^{\mathfrak{P}} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{P}$ sein, und das stimmt nicht bei dem folgenden Fall:

$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_5$



Hier ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{A}$ nicht Sw. bei $\mathfrak{G}$, also auch nicht bei allen 2-Sylowgruppen $\mathfrak{G}$

Der Satz, dass es zu einem nichtabelschen Kopf von $\mathfrak{G}$ nur eine einköpfige maximale Teilgruppe $\mathfrak{A}$ gibt, ist durch Induktion leicht zu beweisen; wenn man zeigt erst, dass jede einköpfige Teilgr. $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}$ normal ist (betrachte $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^G\} = \mathfrak{G}, \mathfrak{K}$; hätte zwei Teilgr. so $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^G$). Nun für zwei Teilgr. $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ (= Komm.) betrachten

Vielleicht ähnlich bei Ore?

Frage: Was bedeutet die Zerlegung von $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, ($a_\nu$ ganz) mod pq für die Galoisgruppe?

Kann man ein Kriterium für „zweifache" Irreduzibilität angeben entsprechend dem von Eisenstein für einfache?

Vielleicht mit Sätzen von Ore?

Zur „Schiefe" nilpotenter Matrizen:

Dass es eine Schranke $m>0$ gibt derart dass aus A nilpotent, $\|A\| = 1$ folgt $\|A+A^*\| \geq m$, kann man vielleicht so zeigen: nimm Folge A_n an, A_n nilpot., $\|A_n+A_n^*\| \to 0$, $\|A_n\| = 1$, und bette sie in die ∞-reihigen Matrizen derart ein, dass $A_n \to A_\infty$ mit A_∞ nilpotent, $|A_\infty| = 1$, $\|A_\infty - A_\infty^*\| = 0$. (Man kann dabei die A_n unitär ähnlich transformieren und dadurch vielleicht die Konvergenz herbeiführen.)

Gewöhnlicher Wertevorrat und Norm:

Ist $|\varphi^* A \varphi| \leq 1$ f. alle $|\varphi| = 1$, so ist $\|A\| \leq 2$, und die Grenze wird erreicht z.B. für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dass aus $|\varphi^* A \varphi| \leq 1$ f. alle φ folgt: $|\varphi^* A^2 \varphi| \leq 1$, ergibt sich, wenn man das Entsprechende für hermitesche A weiss, so:

$$A^2 = G^2 - H^2 + i\,(GH + HG), \text{ wenn } A = G + iH, \text{ hier}$$

$$-1 \leq G^2 - H^2 \leq 1, \text{ da } G^2 \leq 1,\ H^2 \leq 1.$$

Zu Knoche: In einer p-Gruppe zentralisiert jedes Element der Breite ≤ 1 die Gruppe $\Phi(G)$. Daher erzeugen alle Elemente der Breite ≤ 1 eine Gruppe^{G} der Klasse ≤ 2 (sogar mit $\Phi(G) < Z(G)$).

Frage: Erzeugen die Elemente der Breite $\leq r$ eine Gruppe der Klasse $\leq r+1$? Bei der Untersuchung nützt die Formel

$$a \circ b \circ c < b \circ a \circ c + c \circ a \circ b \quad \text{(Bei Zassenhaus)}$$

wo $+$ = Gruppen-Verknüpfung, $a \circ b = a\,b = [a, b]$ gesetzt ist.

Ebenso $a\,b\,c\,d = a\,b\,c\,d + a\,b\,d\,c$

(genommen $= ((a \circ b) \circ c) \circ d$.)

Ist die Breite von $G = \beta(G) \leq p$, so ist die Ordnung der Kommutatorgruppe G höchstens etwa p^{β^2}.

Denn man kann, von unten anfangend, eine Kette

$$G_0 = Z < G_1 < \dots < G_m = G$$ konstruieren derart dass

$$G_r \trianglelefteq G, \qquad [G, G_r] \neq [G, G_{r+1}],$$

$$\left| [G\, G_r] / [G\, G_{r-1}] \right| \leq p^{\beta}.$$ Wie bei meinem alten Satz $c \leq \beta + 1$ für $\beta \leq p$ folgt, dass $m \leq \beta$, daher $|G' : E| \leq (p^{\beta})^{\beta}$.

Frage: Wenn man eine endliche Gruppe (mit Zentrum möglicherweise) in ihrem Holomorph erweitert, diese wieder, usw., bekommt man dann schließlich eine Gruppe ohne Zentrum? oder spaltet sich wenigstens einmal alles Hinzukommende direkt ab?

Verallgemeinerung der Hallschen Theorie der Sylow-Systeme auf nicht auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ geht vielleicht mit passender Definition der $\mathfrak{F}$-Sylowgruppen γ von $\mathfrak{G}$ (wo $\mathfrak{F}$ eine beliebige einfache Gruppe ist). Etwa so: $\bar{\gamma}_{\mathfrak{F}}$ minimal, alle Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ deckend, die direkte Produkte von $\mathfrak{F}$'s sind; oder $\underline{\gamma}_{\mathfrak{F}}$ maximal, alle andern Hauptfaktoren meidend. Stets ist $|\bar{\gamma}_{\mathfrak{F}}| \geq |\underline{\gamma}_{\mathfrak{F}}|$. Ähnlich $\bar{\gamma}_{\Lambda}$, $\underline{\gamma}_{\Lambda}$.

Zshg mit Tschunichin?

Fragen von Itô (13.3.57):

1) Ist eine nicht auflösbare Permutationsgruppe von Primzahlgrad der Form $p = 2^m+1$ stets 3-fach transitiv? $p = 17$?

2) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei vertauschbare p-Gruppen. Gibt es dann in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ je ein Zentrumselement $\neq E$, die vertauschbar sind?

1. Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{P}$ mit jeder Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Dann ist die nachinvariante Hülle $\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ vertauschbar mit jeder nach inv. Ugr $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$.

Bzw: jede ein-p-köpfige nachinvariante Ugr $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$ hat die Gestalt $\mathfrak{L} = \bar{\mathfrak{B}}$, wo $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{P}$.

2. $\underset{\text{vertauschbar}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}$ π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ π-Hallgr. $\mathfrak{A}$.

Folge:

3. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ π-Hallgr von $\mathfrak{G}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ π-Hallgr von $\mathfrak{A}$

4. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ vertauschbare Hallgruppen von $\mathfrak{G}$
$\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}_2$ " " " $\mathfrak{A}$.

Bew Induktion $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$

5. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ Hallgr $\mathfrak{G}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H} \vee \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$

Frage: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ Hallgr $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}_2$?

6. Nein: $\mathfrak{G} = \begin{array}{c} 3 \\ \hline 1\ 1\ 1 \\ \hline 2\ 2\ 2 \end{array}$ $\mathfrak{A} = 1$ $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}_1 = 111$ $\mathfrak{H}_2 = —$

1. $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{P},\ \mathfrak{A} \vee \mathfrak{Q} \rightarrow$

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}) \vee \mathfrak{Q}$$

Bew: $|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{Q}| = p^{\rho} q^{\sigma}$, daher

$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Q})$; und mit $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$

gilt $\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{Q}$, denn aus $A^*Q = Q_1 A_1$ folgt

$$A_1 = Q_1^{-1} A^* Q \in \underset{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}\ , \text{also} \in \mathfrak{A}^*.$$

Also Gruppe $\mathfrak{A}^*\mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Q})\mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}) \cdot \mathfrak{Q}$.

2. Analog für Hallgruppen statt Sylowgruppen.

3. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{B}| = p^{\alpha} \rightarrow \mathfrak{A}^{p} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

3a. Sei $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$; dann $(\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} : \mathfrak{A}) = p^{\alpha} \rightarrow (\mathfrak{A}^{p})^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}^{p}$
$\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{B}| = p^{\beta}$

4. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$. Es gebe keinen Primkopf, der sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ auftritt. Dann gilt für die normalinvarianten Hüllen: $\bar{\mathfrak{A}} \vee \bar{\mathfrak{B}}$

Bew.:

5. In $\bar{\mathfrak{A}}$ treten höchstens dieselben Primköpfe wie in $\mathfrak{A}$ auf, da $\bar{\mathfrak{A}} = \{G_i^{-1} \mathfrak{A} G_i\}$ für passende i

nämlich $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^{\bar{\mathfrak{A}}}$

Aufgaben: 1. Permutationsgruppen des Grades $2p^\alpha$ mit einem Doppelzyklus der Ord p^α untersuchen. F

2. Satz von Frame auf monomiale Gr. übertragen.

3. Schur-Methode " " " ", nach ursprünglichen Ansatz von Schur.

4. Liegt die Aufspaltung der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}_c$ (wenn man von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}_c$ übergeht)?

5. Bestimmung aller (auflösbaren) endl. Gruppen, in denen jede nach Inv. Ugr normal ist. Vergl. Best-Taussky 1942 und Baer „Nachinvar. Ugr." Nr. (64). F

Gaschütz

zur Frage der Symmetrisierung von Schurs Methode:

Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so braucht der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ mit einer Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{G}$ nicht vertauschbar zu sein mit $\mathfrak{B}$. D.h. es gilt keine Stammring-Eigenschaft für die $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} \vee \mathfrak{A}$, $\mathfrak{K} \vee \mathfrak{B}$.

Gegenbeispiel mit $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) = 1$: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_7$, $\mathfrak{A} = \{(12 \cdots 67)\}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}_1$.

Hieraus folgt: Nicht einmal bei $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) = 1$ braucht die Vermutung zu stimmen. Ist $\Sigma A_i B_i = \mathfrak{K}$ vertauschbar mit $\mathfrak{A}$ und mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und ist $\mathfrak{A}^*$ der primäre Komplex, der A_1 enthält, und $\mathfrak{B}^*$ der primäre Komplex, der B_1 enthält, so tritt in $\mathfrak{K}$ jedes $A_i \in \mathfrak{A}^*$ mit gleich vielen $B_j \in \mathfrak{B}^*$ multipliziert auf (Sonst würde gleich ganz $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ in $\mathfrak{K}$ auftreten, und es gäbe doch Stammring-Eigenschaft.)

1. Über „Knoten"?

In der nomonischen Gr. $\mathfrak{G}$ des Grades p oder Ord $p^{\mu+1}$ 1.
ist jeder Normalteiler entweder in $\Phi(\Gamma)$ oder enthält $\Phi(\Gamma)$.
d.h. er ist mit $\Phi(\Gamma)$ vergleichbar in der Halbordnung der Normalteiler. Nenne $\Phi(\Gamma)$ daher (Graph!) einen Knoten von Γ. Weitere Knoten sind in diesem Fall alle $\mathfrak{G}$-Normalteiler in $\Phi(\Gamma)$. Stets sind Knoten E, $\mathfrak{G}$, der Fuss einer einfüssigen und der Rumpf einer einköpfigen Gruppe. 2

Knoten

2. „Einköpfig" = join irreducible s. Birkhoff S. 139 Lem. 1
wenn endl Komponente 142 " 1
Gegenstück: 33.3

3. Aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ folgt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

Bew.: Kommutator $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \triangleleft \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

Gruppen mit distributivem Nachinvarianz-Verband.

1. Notw. u. hinreichend ist: keine Kom. Faktoren vom Typ (p,p) treten auf; oder: je zwei 1-p-köpfige Untergr. sind vergleichbar. Daher: jede 1-p-köpf. Ugr ist normal.

2. Frage: Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ distributive Nachinvarianzverbände haben u. beide in $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ nachinvariant sind: Hat dann $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ einen modularen Nachinv.-Verband? (Bei p-Gruppen stimmt das nach Huppert) $(p>2)$!. Genügt bei einem Faktor auch schon Modularität? F

2a. Nach Best-Taussky 1942 sind in einer <u>Gr mit lauter zyklischen Sylowgr.</u> alle nachinvar. Ugr sogar invariant. Folgt aus 1. Eine Kennzeichnung <u>aller</u> Gr mit nachinvariant = normal steht noch aus. Eine solche Gr. enth. zu jeder Ord. höchstens absteigender stark charakteristisch eine nachinv. Ugr.

3. Ein <u>Gegenstück zu den einköpfigen</u> nachinvarianten* Untergruppen bilden die meet-irreducible (mi) nachinv. Ugr., die nicht als Durchschnitte grösserer dargestellt werden können („einhütig").

4. Zu einem mi $\mathfrak{A}$ gibt es genau ein $\mathfrak{A}^*$ mit $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{A}$ einfach. Ist $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{A}$ nichtabelsch und $\mathfrak{B}$ die einköpfige (nachinv.) Deckgruppe, so gilt für jedes $\mathfrak{L} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ <u>entweder</u> $\mathfrak{L} \leqq \mathfrak{A}$ <u>oder</u> $\mathfrak{L} \geqq \mathfrak{B}$. Folglich ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt.

* z.B. sind sie schwach abgeschl. bzgl. bezügl. jeder Obergruppe von $\mathfrak{G}$

~~Die Gruppen, in denen jede einköpfige maximale Untergruppe minimal(einfach) ist, sind die gleichen wie die, in denen jede mi-Gruppe (33.3) maximal ist, nämlich die direkten Produkte von einfachen Gruppen.~~ falsch: v. Gruppen mit $x^p = 1$!

Verallgemeinerung auf Jordanlänge der einköpfigen $\leq k$?

$:= m(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ früher

Def: Tiefe $t(\mathfrak{a})$ einer Nahnormalt.-Ugr $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ sei die Schrittzahl der kürzesten Normalkette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{a}$; also $t(\mathfrak{G}) = 0$, $t(\mathfrak{a}) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{G}$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{G}$ habe endl. Kompositionsr. (Abschwächung?). Dann hat jede ein-dir-köpfige Untergr. $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ eine Tiefe $t(\mathfrak{a}) \leq 2$. Bew.: denn $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{a}^{\mathfrak{G}}$.

2. Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge ein-dir-köpfiger Ugr $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{G}$, und kommen in $\mathfrak{M}$ s verschiedene Jordanlängen vor, so ist $t(\{\mathfrak{A}_i\}_{\mathfrak{M}}) \leq s+1$.

Bew. sei $\mathfrak{M} = \bigcup_{\sigma=1}^{s} \mathfrak{M}_\sigma$, in $\mathfrak{M}_\sigma$ alle $\mathfrak{a}_i$ der Jordanlänge l_σ, $l_1 < l_2 < \ldots < l_s$. Dann ist für $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_i\}$:

$$\mathfrak{a} \cdot \{\mathfrak{a}_i\}^{\mathfrak{G}}_{j(\mathfrak{a}_i) \leq l_\sigma} \triangleleft \mathfrak{a}\{\mathfrak{a}_i\}^{\mathfrak{G}}_{j(\mathfrak{a}_i) \leq l_{\sigma+1}}.$$

NB: Es ist sogar $t(\mathfrak{a}) \leq 1 + S$, wo S die Maximallänge einer Kette $\mathfrak{a}_1^{\mathfrak{G}_1} < \mathfrak{a}_2^{\mathfrak{G}_2} < \ldots < \mathfrak{a}_S^{\mathfrak{G}_S}$ ist.

4. Sylow- und Jordan-Struktur:

1. Sei $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, jeder Kopf von $\mathfrak{A}$ habe eine durch p teilbare Ordnung. ($\mathfrak{A}$ = p-kopflos) $\mathfrak{S}$ sei p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{P}$. Dann besteht eine 1-1-Abbildung zwischen den Konjugierten $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ und den in $\mathfrak{S}$ gelegenen Konjugierten $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$, und zwar ist $\mathfrak{A}_i$ die nachinv. Hülle von $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}_i$. ($\mathfrak{A}_i = G^{-1}\mathfrak{A}G$) s. auch S. 49–51

Bew: setze $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}_i$. Dann ist $\mathfrak{P}_i$ ebenso wie $G^{-1}\mathfrak{P}G$ eine Sylowgr. von $G^{-1}\mathfrak{A}G$, also konjugiert zu $G^{-1}\mathfrak{P}G$ und damit zu $\mathfrak{P}$. Wegen Vor. über $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}_i$ = Hülle $\mathfrak{P}_i$. Ist schließlich $H \in \mathfrak{G}$ beliebig, $H^{-1}\mathfrak{P}H = \mathfrak{P}' \leq \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{P}' = H^{-1}\mathfrak{A}H \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$.

2. Sei $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$ eine p-Gruppe, die normal ist in jeder sie enthaltenden p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$. Dann ist die n.i. Hülle $\overline{\mathfrak{P}}$ normal unter jeder a von $\mathfrak{G}$, und es ist $t(\overline{\mathfrak{P}}) \leq 2$.

Bew: Sei $\mathfrak{S}$ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{P}}$. Für ein $G \in \overline{\mathfrak{P}}$ ist $\mathfrak{P} \leq G^{-1}\mathfrak{Q}G \leq G^{-1}\mathfrak{S}G$, also $\mathfrak{P} \triangleleft G^{-1}\mathfrak{S}G$, $\overline{\mathfrak{P}}$ inv. bei $G^{-1}\mathfrak{S}G$, und wegen $G \in \overline{\mathfrak{P}}$ auch $\overline{\mathfrak{P}}$ inv. bei $\mathfrak{S}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{P}}$ inv. bei jeder p-Gruppe und daher auch bei allen Konjugierten von $\overline{\mathfrak{P}}$.

36

1. Ist eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ abelsch (oder hamiltonsch), so hat die normale Hülle jeder p-Untergr. von $\mathfrak{G}$ höchstens die Stufe 2. 1

Bew: 35,2.

2. Falsch ist die Vermutung:

Ist $\mathfrak{S}$ Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{P} \triangleleft \mathfrak{S}$, $\mathfrak{P} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, 2.

so ist $\mathfrak{P} \triangleleft \mathfrak{G}$.

z.B. $p = 3$, $\mathfrak{G}$: $\overset{\overline{1\,1\,1\,1\,1}^{\,S_5}}{3\,3\,3\,3\,3}$, ~~$\mathfrak{S}$~~ $\mathfrak{S}$: $\overline{1\,1\,1}^{\,3}\;1\,1$, $\mathfrak{P} = \ldots 1$.

daher:

3. Falsch ist daher die Vermutung: 3.

Ist $\mathfrak{S}$ Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a}) \triangleleft (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b})$,

$\overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{b}$.

Daher:

4. Falsch ist: Aus $\mathfrak{P}_1 \triangleleft \mathfrak{P}_2$ (p-Gruppen)

folgt $\overline{\mathfrak{P}_1} \triangleleft \overline{\mathfrak{P}_2}$. Vielleicht, wenn $\mathfrak{P}_i$ "vollständig"?

Die entsprechende Vermutung für $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ 4

ist dagegen bekanntlich richtig. 1

5. Falsch ist: Sei $\mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, dann $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{P} \triangleleft \mathfrak{b} \cap \mathfrak{P}$ f. alle Sylowgr. $\mathfrak{P}$.

Gegenbeispiel: $\mathfrak{G} = \overset{\overline{1\,1\,1}^{\,3}}{2\,2\,2} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = 1$

1. Mitteilung von Elliott Wall-Newcastle 31. 8. 55:

Die Automorphismengruppe der alternierenden Gruppe A_6 zerfällt nicht über der Gruppe der inneren Automorph.

2. Der Satz von Ore: $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^G = \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} = \mathfrak{g}$

folgt aus dem allgemeineren (auch bei Ore):

2a: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^G = \mathfrak{g}$

Bew 2a: $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{\cancel{B}A} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^A = \mathfrak{a}^A\mathfrak{b}^A = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^A = \mathfrak{g}$

3. Verallgemeinerung des Satzes von Ore:

Sind $\mathfrak{a}^{G_1}, \dots, \mathfrak{a}^{G_s}$ paarweise (als Ganze) vertauschbar, so ist $\prod_{\sigma=1}^{s} \mathfrak{a}^{G_\sigma} \neq \mathfrak{g}$. Verschärfung s.u.

Bew: Sonst wähle s minimal, setze $\prod_{1}^{s-1} \mathfrak{a}^{G_\sigma} = \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}^{G_s^{-1} G_s} \geq \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{G_s} = \mathfrak{g}$, entgegen Ore.

4. Verschärfung von 3: Es genügt schon die Vor:

$\prod_{\rho=1}^{\tau} \mathfrak{a}^{G_\rho} = \mathfrak{b}_\tau$ ist Gruppe für $\tau = 1, 2, \dots, s$.

Dann gilt schon $\mathfrak{b}_s \neq \mathfrak{g}$.

1. Eine Gruppe, in der die Minimalbedingung für nachinvariante Untergr. gilt, ist das Erzeugnis ihrer einköpfigen nachinvar. Untergruppen. 1

Bew. Ein Gegenbeispiel (zugehörige Gruppe) ~~[illegible]~~ ~~mindestens~~ wäre das Erzeugnis aller ihrer echten Normalteiler, und mindestens einer von diesen wäre wieder schlecht. Gibt absteigende unendl. Kette.

2. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$ einköpfig, so gibt es genau einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M}$.

Nämlich $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \cdot$ Rumpf $\mathfrak{B}$.

3. Eine Gruppe braucht keinen max Normalteiler zu enthalten.

z.B. $\mathfrak{G}$ = addit. Gruppe der $\frac{n}{2^{\alpha}}$ mod 1

4. Ist $\mathfrak{M}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, einköpfig, $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$

5.57

Eindeutigkeitssatz für perfekte einköpfige Deckgruppen. | $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nichtabelsch 39

Satz: $\mathfrak{M}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, und sind

$\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ beide nicht in $\mathfrak{M}$ und beide

Siehe dazu Ore Structures II, Th 9; Aus

einköpfig, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Gegenstück: 42.1 | dort folgt 39.1 erst wenn man 39.2 kennt.

A. Sei $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$. Dann * folgt!

Bew. d. B. Induktion nach $\max(m(\mathfrak{G},\mathfrak{A}), m(\mathfrak{G},\mathfrak{B})) = \max(\alpha,\beta)$.

I. $\max = 1 \rightarrow \mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{G}$ $\rightarrow$ A.

~~Ist $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ wegen Einköpf. von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}} \leq \mathfrak{M}$.~~

~~Ebenso bei $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$.~~

~~Ist keiner der Fall, so $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$~~

~~[* Wäre $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, so $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$ ... $\leq \mathfrak{M}$ ... $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ abelsch]~~

II. $\max = \mu > 1$. Sei $B \in \mathfrak{B}$ beliebig; $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}'$,

$\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$; es ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{M}' \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ einfach, ferner

$\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{A}^B \not\subseteq \mathfrak{M}'$, $\left.\begin{matrix} m(\mathfrak{G}',\mathfrak{A}) \\ m(\mathfrak{G}',\mathfrak{A}^B)\end{matrix}\right\} \leq m(\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}},\mathfrak{A}) \leq \mu - 1$

Nach Induktion $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B$, also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$ $\rightarrow$ A.

Ebenso $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$

---

2. Folge: $\mathfrak{A}$ perfekt einköpfig, $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$.

Bew: 38.2 $\rightarrow \exists\, \mathfrak{M}$ max Normalt. in $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{B}$.

---

* Wäre $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, so nicht $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, etwa $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \neq \mathfrak{A}$;

dann $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \rightarrow \leq \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ abelsch

3. Folge: $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, einfach, nichtabelsch, $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \xrightarrow{38.4} \mathfrak{A} < N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{B}$; $m(\mathfrak{G},\mathfrak{A}) = 2$; $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}] = 1$

$\rightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ max. NT von $\mathfrak{G}$. Forts. 28.9.57

1. Sei $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ eine Menge nachinvar. Untergruppen von 1

$\mathfrak{G}$, die durch $\subseteq$ vollständig geordnet ist. Dann ist

$\mathfrak{V} = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda$ auch Vereinigung einer abzählbaren aufsteigenden Folge

von nachinvarianten Untergruppen $\mathfrak{G}_n$ von $\mathfrak{G}$.

Dann mit

2. Sind die $m(\mathfrak{G},\mathfrak{A}_\lambda) \le k$ beschränkt, so ist $\mathfrak{V} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ und

$m(\mathfrak{G},\mathfrak{V}) \le k$.

Bew. 2: Sei $\mathfrak{A}_\lambda^{(\kappa)}$ das κ-te Glied der kanonischen

Normalreihe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}_\lambda$ $(\mathfrak{A}_\lambda^{(0)} = \mathfrak{G},\ \mathfrak{A}_\lambda^{(k)} = \mathfrak{A}_\lambda)$. –

Sei $\mathfrak{N}_\kappa = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{(\kappa)}$. Dann ist $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{V}$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{V}^{\mathfrak{G}}$; s. u.!

~~*~~ $\cancel{\mathfrak{V} \le \mathfrak{N}_\kappa}$ ~~für alle~~ $\cancel{\kappa}$, $\cancel{\mathfrak{V}^{\mathfrak{N}_1} = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{\mathfrak{N}_1} \le \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{\mathfrak{A}_\lambda^{(1)}}}$

$\cancel{= \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{(2)} = \mathfrak{N}_2}$, ~~ebenso~~ $\cancel{\mathfrak{V}^{\mathfrak{N}_i} \le \mathfrak{N}_{i+1}}$.

Bew. 1: Setze $\mathfrak{G}_n = \bigcup_{m(\mathfrak{G},\mathfrak{A}_\lambda) \le n} \mathfrak{A}_\lambda$; nach (2) ist $\mathfrak{G}_n \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $m(\mathfrak{G},\mathfrak{G}_n) \le n$.

Ferner $\bigcup_n \mathfrak{G}_n = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda$.

* ⊢—⊣ Beh.: $\mathfrak{N}_{\kappa+1} \triangleleft \mathfrak{N}_\kappa$. Bew.: Sei $A \in \mathfrak{N}_{\kappa+1}$, $B \in \mathfrak{N}_\kappa$.

Dann $A \in \mathfrak{A}_\lambda^{(\kappa+1)}$, $B \in \mathfrak{A}_\mu^{(\kappa)}$ für zwei μ, λ; also wegen

Ordnung $A \in \mathfrak{A}_\rho^{(\kappa+1)}$, $B \in \mathfrak{A}_\rho^{(\kappa)}$ für $\rho = \max(\mu,\lambda)$. 3.

Dann $A^B \in [\mathfrak{A}_\rho^{(\kappa+1)}]^{\mathfrak{A}_\rho^{(\kappa)}} = \mathfrak{A}_\rho^{(\kappa+1)} \le \mathfrak{N}_{\kappa+1}$.

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{r}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$

Faktorgr. eines max NT , abstrakt

$\mathfrak{a}_\lambda$ $\quad$ $\mathfrak{a}_\lambda \trianglelefteq \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ Jeder Kopf von $\mathfrak{g}$ ist Kopf eines $\mathfrak{a}_\lambda$

Def.: Nenne $\mathfrak{g}$ M-köpfig (M eine Menge abstrakter Gr.), wenn jeder Kopf von $\mathfrak{g}$ $\in M$.

$\mathfrak{a}_\lambda$ $\quad$ alle $\mathfrak{a}_\lambda$ M-köpfig $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ M-köpfig

1. Sei $\mathfrak{A}$ ss $\mathfrak{G}$ und ein-dick-köpfig. Seien $\mathfrak{B}_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) nachinvariante Untergr. von $\mathfrak{G}$ derart, dass $\mathfrak{A} \le \bigcup_\lambda \mathfrak{B}_\lambda$ (Erzeugnis). Dann ist für einen Index μ $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B}_\mu$.

Bew: OBdA sei $\bigcup_\lambda \mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{G}$. Bew indirekt: Wäre stets $\mathfrak{A} \not\le \mathfrak{B}_\lambda$, so nach 39.2 $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}_\lambda} = \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}$. Sei $\mathfrak{M}_a$ der max. Normalteiler von $\mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{M}_a^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{M}_a\mathfrak{A} \not\le \mathfrak{M}_a\mathfrak{B}_\lambda$, für jedes λ (denn sonst $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B}_\lambda$). Also genügt es, statt $\mathfrak{G}$ zu betrachten $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_a$. D.h. OBdA sei $\mathfrak{A}$ einfach. Dann ist aber $\mathfrak{B}_\lambda \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda$; denn $\mathfrak{B}_\lambda \leqq \mathfrak{C} \underset{\ne}{\triangleleft} \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\lambda \cdot (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \ne \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\lambda$. Also $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_\lambda] = 1$, $\mathfrak{A} <$ Zentrum $\mathfrak{G}$; Wid.

2. Sei $\mathfrak{A}$ ss $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}_\lambda$ ss $\mathfrak{G}$ ($\lambda \in \Lambda$), $n(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\lambda) \le 2$. Sei $\mathfrak{D}$ = Erzeugnis der $\mathfrak{B}_\lambda$ mit $\mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{D}$ = Σ nachinvarianter Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Denn das Erzeugnis endlich vieler $\mathfrak{B}_\lambda$ mit $\mathfrak{A}$ ist ss $\mathfrak{G}$

3. Ist außerdem Λ abzählbar, so ist $\mathfrak{D}$ Σ einer aufsteigenden Folge nachinvar. Ugruppen. Dann setze $\mathfrak{D}_n = \{\mathfrak{A}, \bigcup_{\lambda \le n} \mathfrak{B}_\lambda\}$.

$\mathfrak{G}$ beliebig.

1. In jeder perfekten einköpfigen nachinvarianten Untergr. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ gibt es höchstens einen in $\mathfrak{G}$ maximalen Normalteiler $\mathfrak{M} \triangleleft \mathfrak{G}$, der $\mathfrak{A}$ nicht enthält. Schärfer: 4

Denn wenn $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, betrachte $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{D}$; es ist $\mathfrak{D}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{A}$ einköpfig. Also $\mathfrak{D}\mathfrak{A} = \begin{cases}\mathfrak{M}_1\\ \mathfrak{M}_2\end{cases}$.

2. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \sim K(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \cong K(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})$ mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

3. Ist für eine Menge Λ von einf. Gr. $\mathfrak{B}^\Lambda < \mathfrak{A}$, und $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A}^\Lambda \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, da $\mathfrak{A}^\Lambda = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\Lambda$.

<u>Vermutung.</u>

4. $\mathfrak{G}$ beliebig: In jeder einköpfigen perfekten nachinvar. Ugr $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es (genau) eine umfassendste nachinvar. Ugr $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{A}$ nicht enthält. F

Bew: Setze $\mathfrak{B} = \bigcup_{\substack{\mathfrak{L} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \\ \mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{L}}} \mathfrak{L}$. Es fehlt dann der Beweis für $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

Richtig ist 4. aber jedenfalls, wenn in $\mathfrak{G}$ die Maximalbed. gilt.

1. Ist ~~eine~~ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ von der Klasse c, so gilt für jede nach-invar. Ugr. $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$, deren Kopfordnungen alle durch p-teilbar sind (kurz: für jede <u>px-köpfige</u> Gruppe): $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \le c+1$.

Aufgabe: Erweiterung auf Hall-Gruppen.

Bew: a) $c = 1$, d.h. $\mathfrak{P}' = E$: siehe 36.1

b) $\boxed{\text{Es ist } \mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{U}} \text{ mit } \mathfrak{U} \le \mathfrak{P}^G.}$ Sei $\mathfrak{Z} = Z\mathfrak{P}$.

Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{Z}'} = \mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}^G$. Denn ↓.

Sei $\bigcup_G \mathfrak{Z}^G = \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist die Klasse der p-Sylowgr. $\le c-1$, nach Indukt. also $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}\mathfrak{N}) \le c$.

Ferner ist $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{N}$.

Endl. Kompreihe von $\mathfrak{G}$

2. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, perfekt, einköpfig, so gibt es $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \neq E$, das $\mathfrak{A}$ zentralisiert; es sei denn, $\mathfrak{A}$ enthält einen Normalteiler $\neq E$ von $\mathfrak{G}$.

Bew: Entweder ist $\bigcap \mathfrak{A}^G \neq E$ oder $= E$. Im zweiten Fall gibt es $G_1, \dots, G_k$ so, daß $\bigcap_k \mathfrak{A}^{G_k} = \mathfrak{B} \neq E$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = E$. Es ist $\mathfrak{A}^{G_k}$ normal bei $\mathfrak{A}$ und umgekehrt, also $\mathfrak{B}$ normal bei $\mathfrak{A}$ und umgekehrt: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = E$

$\mathfrak{F}$-Rümpfe bei Gruppen mit endl. Kompreihe.

1. Def: Der $\mathfrak{F}$-Rumpf $\mathfrak{a}^{*\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{F}$ eine einfache Gruppe zusammengesetzter Ord. ist, ist der Durchschnitt aller Normalteiler von $\mathfrak{a}$, deren Faktorgruppe $\sim \mathfrak{F}$ ist.

2. $\mathfrak{a}^{*\mathfrak{F}}$ ist das Erzeugnis aller einköpfigen nachinvar. Ugr von $\mathfrak{a}$, deren Köpfe $\neq \mathfrak{F}$ sind, mit den Rümpfen aller ein-$\mathfrak{F}$-köpfigen; 2b) oder auch = Erzeugnis von $\mathfrak{a}^{\mathfrak{F}}$ mit den Rümpfen der 1-$\mathfrak{F}$-köpfigen. ~~[illegible]~~

3. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g} \curvearrowright \mathfrak{a}^{*\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{g}^{*\mathfrak{F}}$.

4. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g} \curvearrowright (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})^{*\mathfrak{F}} = \mathfrak{a}^{*\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{b}^{*\mathfrak{F}}$.

Bew: 2b) und 41.1

4'. Dh: $*\mathfrak{F}$ ist ein Nachinvarianz-Operator.

[Für $|\mathfrak{F}| = p$ würde das nicht gelten.] Für Vertauschbarkeitsfragen bringt der Op $*\mathfrak{F}$ natürlich nicht mehr als $\mathfrak{F}$.

1. Ist jede maximale Ugr einer endl. Gr. die maximale Hülle einer auflösbaren Untergr. ?

Ja: Wähle in jedem einfachen Faktor F_i von $A \,|\,$ Rennpf A eine auflösb. Gr $A_i \neq 1$, und setze $U =$ kleinste auf ΠA_i abgebildete Gruppe

2. Frage: $\mathfrak{a} \, ss \, \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} < \Phi(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a} < \Phi(\mathfrak{g})$?

Γ- Funktion.

Integriert man Ψ über eine Quadratfläche der Seitenlänge 1 mit Mittelpkt z, so bekommt man mittels Taylor-Entwicklg um z. und mittels

$$\iint_{\boxed{0}} z^n\,dx\,dy = \begin{cases} 2^{1-\frac{n}{2}}\cdot\dfrac{(-1)^{\frac{n}{4}}}{n+1\cdot n+2} & 4\mid n \\ 0 & 4\nmid n \end{cases}$$

die Formel (vgl Bernoullische Reihe 36 auf S. 57 bei Lösch-Schoblik)

Für $|z+n|>\frac{1}{2}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ ist

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\log\left[(z-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{4}\right] - i(z-\tfrac{1}{2})\log\frac{z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{z-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} - 1$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\frac{2\,\zeta(z,4k+1)}{4k+1\cdot 4k+2}\ *$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[(z-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{4}\right] + \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\left\{\frac{2\zeta(z,4k+1)}{4k+1\cdot 4k+2}+\frac{1}{(2k+1)(z-\frac{1}{2})^{2k}}\right\}$$

Das ist um ebensoviel besser wie 36.57 bei Lösch, als diese besser wie 32.55 ist.

Für $x>0$ wird

$$\Psi(x+\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\log(x^2+\tfrac{1}{4}) + 2x\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{2x} - 1$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\,\frac{2\,\zeta^*(x+\frac{1}{2},4k+1)}{4k+1\cdot 4k+2}$$

* Dabei $\zeta(z,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k} = (-1)^{k-1}\frac{\Psi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} = \zeta(z+1,k)$ in Löschs Bezeichnung

NB

Frage: Ergibt sich vielleicht für $\Gamma(z+\frac{1}{2})$ und $\Psi(z+\frac{1}{2})$ eine asymptotische Entwicklung nach Pot. von $\frac{1}{(z^2+\frac{1}{4})^2}$, indem man $\int$ partiell nach x und y integriert, nach Bernoulli-Polynom-Methode?

Und sind nicht schon die Koeff der asymptotischen Entwicklg von $\Psi(z+\frac{1}{2})$ nach $\frac{1}{z^2}$ kleiner als die von $\Psi(z)$?

Diese Koeffizienten sind Bernoulli-Polynome $B_n(\frac{1}{2})$ Lösch S. 29 u

ja: s. Whittaker Watson

NB: wie dort (oder daraus durch $\frac{d^2}{dz^2}$) ergibt sich

$$* \quad \zeta(z,3) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\,\cancel{S_{4k+3}(z)}\,\zeta(z,4k+3)$$

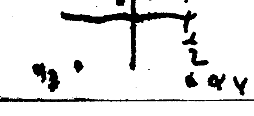
durch Einsetzen der Def von ζ rechts und Vertauschg der Summation gibt das

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(n+z)^3} = \zeta(z,3) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4(z+n)^4+1}\cdot\frac{1}{(z+n)^3}$$

$$z=1 \to \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = S_3 = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-)^{k-1}}{4^k}\cdot S_{4k+3} = 1 + \frac{S_7}{4} - \frac{S_{11}}{4^2} + \frac{S_{15}}{4^3} - \dots$$

*Ist gleichwertig der Laurent-Entwicklung von

$$\Delta \quad \frac{1}{z^2-z+\frac{1}{2}} = i\left\{ \frac{1}{z-\alpha_1} - \frac{1}{z-\alpha_2} + \frac{1}{z-\alpha_3} - \frac{1}{z-\alpha_4} \right\} \text{ um } z=0$$



Distributive Gruppen.

(d.h. mit distrib. Verband der nachinvar. Ugr.)

(1) Perfekte distr. Gruppen: In ihnen ist jeder auflösbare Hauptfaktor zentral, daher auch zyklisch.

Bew: Normalisator einer Sylowgr. des Hauptfaktors.

2 Beliebige Gruppen $\mathfrak{G}$: Verallgemeinerung von $\triangleleft\triangleleft$.

Man könnte für $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$ die „nachinvar. Hülle" $\overline{\mathfrak{A}}$ definieren durch $\overline{\mathfrak{A}}$ = umfassendste Gruppe $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$. Gilt in $\mathfrak{G}$ die Minimalbedgg für nachinv. Ugr, so stimmt diese Def mit meiner alten überein, da dann die absteig. Normalkette abbricht.

Demnach heisse $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, wenn aus $\mathfrak{A} \lneqq \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{H}$; kürzer: $\boxed{\mathfrak{A} \neq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{H}}$.

oder: $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$

oder: $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$

Dann gilt:

$$\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}.$$

Ferner: $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{H}$

" $\mathfrak{A}_\lambda \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \rightarrow \bigcap_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$

" $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$

Offene Frage: $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$?

Fortsetzg: 54.1

1. Sei $\mathfrak{U} \le \mathfrak{P}$ = Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ schwach abgeschlossen in $\mathfrak{P}$; sei $\overline{\mathfrak{U}}$ die nachinvar. Hülle von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{U}} \lhd \mathfrak{G}$. s. auch 53.1

Denn $G \in \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{W} = \overline{\mathfrak{U}}^G \cap \mathfrak{P}$ ist zu $\mathfrak{U}^G$ ähnlich, also $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}$, $\overline{\mathfrak{U}}^G = \overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{U}}$.
(siehe 3) Verschärfg 4.

2. Insbes. (Tamaschke-Best.): Sind alle Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ ~~Ist $\mathfrak{P}$~~ zyklisch, so ist jede nachinv. Ugr. normal.

[NB: Mein Schluß zeigt: Ist $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Bew: Ergänze die Sy-Gr. von $\mathfrak{B}$ zu solchen von $\mathfrak{G}$, schneide mit $\mathfrak{A}$.

3. Genau dann ist eine nachinv. Ugr. $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ die nachinv. Hülle einer p-Gr., wenn jeder Kopf von $\mathfrak{A}$ durch p teilbar ist. Und dann ist $\mathfrak{A}$ die nachinv. Hülle jeder p-Sylowgr. von $\mathfrak{A}$.

4. Sei $\mathfrak{U} \le \mathfrak{P}$ = Sylowgr. von $\mathfrak{G}$; sei $\mathfrak{H} \le \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ transitiv auf den in $\mathfrak{P}$ gelegenen Konjugierten von $\mathfrak{U}$; d.h. $\mathfrak{U}^G \le \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{U}^G = \mathfrak{U}^H$ für ein $H \in \mathfrak{H}$.

Dann ist $\mathfrak{H}$ transitiv auf allen Konjugierten zu $\overline{\mathfrak{U}}$.

Bew: $\mathfrak{W} = \overline{\mathfrak{U}}^G \cap \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{W} = \mathfrak{U}^H \to \overline{\mathfrak{U}}^G = \overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{U}^H} = \overline{\mathfrak{U}}^H$.

NB: Hieraus 1 durch Spezialisierg $\mathfrak{H} = E$.

5a) $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ = schwache Abschließg von $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$ wenden

5. Sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Genau dann ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$, wenn für ein vollst. System von Sylowgr. $\mathfrak{P}_1, \ldots$ gilt: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ schwach abg. in $\mathfrak{P}$.
notw. ist sogar $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ stark abg. in $\mathfrak{P}$. s. 51.5

1. Sei $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{P}$ = Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$; $\overline{\mathfrak{U}}$ = nachinv. Hülle von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$. 1.

Dann gibt es zu $\overline{\mathfrak{U}}$ in $\mathfrak{G}$ genau so viele Konjugierte, als ~~dessen~~ $\mathfrak{P}$ Untergruppen enthält, die zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ konj. sind.

Bew.: $\overline{\mathfrak{U}}^G = \overline{\mathfrak{U}}^H \Leftrightarrow \overline{\mathfrak{U}}^G \cap \mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{U}}^H \cap \mathfrak{P}$; diese Durchschnitte sind zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. s. auch 5

2. Hat z.B. $\mathfrak{P}$ 2 Erzeugende, so gibt es zu dem ~~für jedes~~ $\mathfrak{U}$ mit $|\mathfrak{P} : \mathfrak{U}| = p$ insgesamt höchstens ~~genau~~ $p+1$ verschiedene $\overline{\mathfrak{U}}$.
Also hat $\mathfrak{G}$ (die Autom.-gr.) eine Darstellung des Grades $\le p+1$ als Perm.-Gr. Und:

3. ~~Alle~~ zwei $\overline{\mathfrak{U}}$ {zu dem $\mathfrak{U}$ mit $|\mathfrak{P} : \mathfrak{U}| = p$}, die unter $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, sind schon unter dem Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{P}$ konjugiert.

Bew.: Zwei solche $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}$, die in $\mathfrak{G}$ konjug. sind, sind schon unter $\mathfrak{N}$ konjugiert. Ebenso:

4. Seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V} \triangleleft \mathfrak{P}$. Dann gilt:

$\overline{\mathfrak{U}}$ konj. zu $\overline{\mathfrak{V}}$ in $\mathfrak{G}$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{U}$ konj. zu $\mathfrak{V}$ unter Normal. $\mathfrak{P}$.

zu $\overline{\mathfrak{U}} \sim \overline{\mathfrak{V}}$ 1.5.35!

5. Seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \overset{\text{voll}}{\leq} \mathfrak{P}$. Dann gilt

$\overline{\mathfrak{U}}$ konj. zu $\overline{\mathfrak{V}}$ in $\mathfrak{G}$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{U}$ konj. zu $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{G}$

~~1. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, jedes $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ sei sogar $\lhd \mathfrak{G}$.~~
~~Dann ist jede Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ hamiltonsch, die ungeraden abelsch.~~

~~Bew.: Nach Best ist hat jede Ugr von $\mathfrak{G}$ die gleiche Eigensch., insbesondere jede Sylowgr.~~

~~Aufgabe: Sehen ob Best-Taussky alle solchen Gr. gefunden haben.~~

~~2. Sei $|\mathfrak{P}| = p^{\alpha}$, $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{A}$ eine Sylowgr. von $\mathfrak{A}$.~~

~~(Sonderfall meines Satzes über Sylowgruppen von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$).~~

3. $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^{v^k} < \Phi(\mathfrak{G}) \to \mathfrak{A}^{v^k} = E$.

4. Bezeichnet $\Psi(\mathfrak{G})$ den Durchschnitt aller Normalisatoren von nachinvarianten Untergruppen in $\mathfrak{G}$, so gilt: $\mathfrak{A} \lhd\lhd \Psi(\mathfrak{G}) \to \mathfrak{A} \lhd \Psi(\mathfrak{G})$.

5. Sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{g}$. Dann $\bar{\mathfrak{g}} \lhd \mathfrak{G} \leftrightarrow [\mathfrak{g} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \to \mathfrak{g} \lhd N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}_1]$

Bew. In $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{A}_0 \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \dots \lhd \mathfrak{A}_r = \mathfrak{G}$ die $N_{\mathfrak{G}}(\underbrace{\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}_i})$ [illegible]

= Verschärfg von 49.5

1 Die Sylowgr. $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}$ sei fest gegeben. Dann ist für die p-köpfigen $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ die Abb. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ eineindeutig, die $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ sind die „vollen" Ugr von $\mathfrak{P}$, d.h. $\mathfrak{L} = \bar{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{P}$.

Die Abb. $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_G = \bar{\mathfrak{L}}^G \cap \mathfrak{P}$ ist eineindeutig auf den Verband der vollen Ugr von $\mathfrak{P}$, und sie erhält $\cup$, also auch die Ordnungsrelation, aber auch $\cap$: Verbandsisomorph.

Es ist $\mathfrak{L}_{GH} = (\mathfrak{L}_G)_H$; $\quad \mathfrak{L}_G = \mathfrak{L}_H \Leftrightarrow \bar{\mathfrak{L}}^G = \bar{\mathfrak{L}}^H$.

$\mathfrak{L}_G = \mathfrak{L}^G \Leftrightarrow \mathfrak{L}^G < \mathfrak{P}$. $\quad \mathfrak{L}_G = \mathfrak{L}^{\bar{B}G}$ mit einem $\bar{B} \in \bar{\mathfrak{L}}$.

2 Ist ω ein Verbinvariante-Op., so ist $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}^{\omega}) \leq m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$.

3 Stets ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. (Für Einzelelemente ist auch $A^B = A[A,B]$)

4. $\mathfrak{G}$ habe einige zykl. Sylowgr., gehörig zu $p_1, \dots, p_k$. Sei $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ ~~Dann~~ und Indikator$_{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$.

Dann ist $p_k \nmid |\mathfrak{A} : \mathfrak{J}|$. Denn jede p_k-Sylowgr von $\mathfrak{A}$ tritt auch in $\mathfrak{A}^G$ auf; also in $\mathfrak{J}$.

Verallgem. 53.1

Sei $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, eine ~~p-Sylowgr.~~ Gruppe. $\mathfrak{A}_*$ von $\mathfrak{A}$ schwach abgeschl. in einer p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$. Dann ~~ist~~ $(\mathfrak{A}_*)^{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}$.

~~Denn $\mathfrak{A}_p < \mathfrak{A}^G$, da $\mathfrak{G}_p (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P})^H$~~

Anderer Beweis: $\mathfrak{A} > \overline{\mathfrak{A}_*}$, $\overline{\mathfrak{A}_*} \triangleleft \mathfrak{G}$. 49.1

~~$\mathfrak{G}$ $p*$-knapp, $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ $p*$-knapp $\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}$.~~

Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{P}$ = p-Sylowgr. $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{U}^G \triangleleft \mathfrak{P}$, wenn $< \mathfrak{P}$.

Dann ist $\overline{\mathfrak{U}}\,\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{U}}$.

Fortsetzg.

1. Ist Maxbedg für die nachinv. Ugr von $\mathfrak{G}$ erfüllt,

so gilt: $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{A} \underset{4}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G}$

Bew mittels $\mathfrak{M}$, wo $\mathfrak{M}$ eine max. zu $\mathfrak{G}$ fremde Ugr ist.

2. Ist ~~Minbedg für die nachinv. Ugr. von~~ $\mathfrak{G}$ endlich, so ist

$$\mathfrak{A} \underset{4}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$$

3. $\mathfrak{A}_\lambda \underset{4}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{A}_\lambda \underset{4}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G}$.

4. Die $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \underset{0}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G}$ dürften die Enden der transfiniten ~~Norm~~ Normenketten sein; allg. $\bar{\mathfrak{Z}}$ = Ende der transf. Normenkette von

5. Achtung: Die Vereinigung $\mathfrak{V}$ einer aufsteigenden Folge nachinvarianter Untergruppen von $\mathfrak{G}$ kann die Norm $\mathfrak{V}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ haben.

Beispiel: Permutationen von 1, 2, 3, …, n, … ($\mathfrak{Y}$ endl.) folgender Art (2-Sylowgr. von $\mathfrak{Z}$)

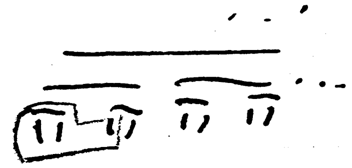
$\mathfrak{Y}$ = 12 34 56 78 … $\mathfrak{V} = (1,2)$ … $= \mathfrak{G}_1$

6. Also können die Def.: $\underset{0}{\triangleleft\triangleleft}$ und $\underset{4}{\triangleleft\triangleleft}$ nichtäq. sein.

1. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ von 55.5 besitzt keinen maximalen Normalteiler, ist aber eine 2-Gruppe (unendlicher Ordnung).

2. Wenn es Gruppen $\mathfrak{G}_i$ mit $\mathfrak{G}_i \triangleright\triangleright \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{G}_i \triangleright\triangleright \mathfrak{b}_i$, $a = m(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{a}_i)$, $m(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{b}_i) = b$ und $m(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{b}_i) \to \infty$ gibt, dann gibt es ein $\mathfrak{G}$ (nämlich $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots$) und $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ (nämlich $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b} = \prod \mathfrak{b}_i$) mit $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) = a$, $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{b}) = b$ und $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \cancel{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G}$.

3. Es gibt 2-Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 1$
$m(\mathfrak{G}, \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = a + b - 1$, wo $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) = a$ usw.

Bew.: In  usw. hat eine Ugr, die aus $a-1$ „Stufen" besteht (im Beispiel $a-1=2$) die Tiefe a. Nimmt man $\mathfrak{a}$ mit $a-1$ Stufen und $\mathfrak{b}$ mit $b-1$ dazu fremden durchweg höheren Stufen, so besteht $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ aus $a+b-2$ Stufen, hat also Tiefe $a+b-1$.

1. Sei $\mathfrak{B}$ voll in einer p-Sylowgr. $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ (d.h. $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{P}$), und $A \in \mathfrak{P}$ lasse jede ~~[illegible]~~ in $\mathfrak{P}$ gelegene Konjugierte zu $\mathfrak{B}$ fest: $\mathfrak{B}'^{A} = \mathfrak{B}'$.
Dann normalisiert jede Konjugierte A^G jede Konjugierte $\bar{\mathfrak{B}}^H$.

Denn A macht unter den $\bar{\mathfrak{B}}$ die gleiche Perm. wie unter den $\mathfrak{B}'$, also die identische. Und die $\bar{\mathfrak{B}}$ erleiden unter $\mathfrak{G}$ eine Permutation, die $\mathfrak{G}$ darstellt.

2. Insbesondere: Lässt $A \in \mathfrak{P}$ jede volle Ugr. von $\mathfrak{P}$ fest, so lässt $\{A^{\mathfrak{G}}\}$ jede px-köpf. nachinv. Ugr von $\mathfrak{G}$ fest

3. Sonderfall: Ist $\mathfrak{z} = \mathrm{Str}\,\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{z} = \mathrm{Kern}\,\mathfrak{P}$ (im Sinne v. Baer), so lässt $\mathfrak{z}^{\mathfrak{G}}$ jede px-köpf. nachinv. Ugr. von $\mathfrak{G}$ fest. Ist also k die Länge der aufsteigenden Kernreihe von $\mathfrak{P}$, so ist ist $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \leq k+1$.

„Kern": siehe Separat Baer: Almost hamiltonian groups.

& Comp. Math. 1 (1934), 4 (1936), 2 (1935), 6 (1939)

Nach Blackburn bilden die p-Gruppen, für die $\mathfrak{A} : U\{A\} \to U\{A^p\} = \mathfrak{A}^p$ 1.
[$= \mho_1 \mathfrak{A}$ im Sinne v. Hall]
ein Operator ist, keine Klasse die zu je zwei Gpp. das direkte Produkt enthält –

– Man kann fragen, für welche $\mathfrak{K}$ $\mho_i$, Ω_i, $\cancel{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'}$, Φ, $\mathfrak{Z}/\mathfrak{A}$ u. dergl. Operatoren sind.

Die Bestimmung aller auflösl. Gruppen mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$ 2
von Taylor ergibt sich leicht aus meiner Theorie:
s. Separat Taylor S. 291 (E-gruppi finiti risolubili, 1952)
Die Bedgg von Taylor läuft im wesentlichen darauf hinaus:
in einem Sylowsystem $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k$ mit $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$
ist jede Ugr von $\mathfrak{P}_i$ normal in $\mathfrak{P}_{i+\lambda}$ $\lambda \geq 0$.

3

Bemerkg von Itô:
Ist $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A}_1 \triangleright \mathfrak{A}$, $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{B}_1 \triangleright \mathfrak{B}$, so ist
$$\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 \triangleright (\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_1)\mathfrak{A}\mathfrak{B} \triangleright \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

$[A\,B] = A^{-1}B^{-1}AB$

1. Iterierte Kommutatoren: mit $A^{B} = A\,[A\,B]$ gilt:

$[A\,B\,C] = [[A\,B]\,C]$

$A, B, C \in \mathfrak{G} \Rightarrow$

$$[C\,A\,B]^{-1}\,[\,[C\,A]\,[C\,B]\,]\,[C\,B\,A] = [B\,A\,C_0]^{-1} \text{ mit}$$

$$C_0 = C^{AB}$$

d.h. $$[\,[C\,A]\,[C\,B]\,] = [C\,A\,B]\,[B\,A\,C_0]^{-1}\,[C\,B\,A]^{-1}$$

2. $$[X,\ AB] = [X, B]\,[X, A]\,[X, A, B]$$

$$[X,\ ABC] = [X, C]\,[X, B]\,[X, B, C]\,[X, A]\,[X, A, C]\,[X, A, B]\,[X, A, B, C]$$

$$\vdots$$

$$[X,\ A_1 A_2 \cdots A_k] \in \{\,[X, A_\alpha, A_\beta, \ldots, A_\rho]\,\}_{1 \le \alpha < \beta < \cdots < \rho \le k}$$

3. Genau dann ist $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ und $m(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}) \le \alpha$, wenn

$$[\mathfrak{G}, \overbrace{\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}}^{\alpha}] \le \mathfrak{A}$$

Das legt den Versuch nahe, die

<u>Vermutung</u>: $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] < \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \Rightarrow$

$$m(\mathfrak{G},\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}) \le m(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}) + m(\mathfrak{G}\,\mathfrak{B}) - 1$$

durch Kommutator-Identitäten zu beweisen.

1. $\mathfrak{G}$ habe zyklische Sylowgr. zu den $p>2$, und die Quat.-gruppe als 2-Sylowgr. Sei $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$. Dann ist entweder $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ oder es ist $2^2 \nmid |\mathfrak{a}|$, und es gibt genau 3 $\mathfrak{b}$; diese ~~diese alle~~ sind ~~alle konj.~~ zu $\mathfrak{a}$ konjugiert.

2. Folgt aus $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{G}| < \infty$, $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ stets

$\mathfrak{a}_1 \vee \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{a}_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \mathfrak{G}$ die Normalkette von $\mathfrak{a}$ ist? OBdA: $\mathfrak{a}_1 \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{G}$

3. Folgt aus $\mathfrak{b} < \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_1 < \cdots < \mathfrak{a}_r = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}$,

$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{a}_\varrho = \mathfrak{L}_\varrho$, $\mathfrak{L}_\varrho \vee \mathfrak{a}_{\varrho-1}$, $p \mid |\mathfrak{a} \cup \mathfrak{L} : \mathfrak{b} \cup \mathfrak{L}|$

stets auch $p \mid |\mathfrak{a} : \mathfrak{b}|$?

OBdA ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{L}$; zunächst $r=2$ untersuchen!

Satz von Dietzmann (Kurosch 2. Aufl.):

Ein endlicher, invarianter Komplex $\mathfrak{K}$ von El. endl. Ordnung $\in \mathfrak{G}$ erzeugt einen endl. Normalteiler von $\mathfrak{G}$!

Bew.: OBdA: $\{\mathfrak{K}\} = \mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{Z}$ = Ztr. $\mathfrak{G}$; dann $(\mathfrak{G}:\mathfrak{Z}) = n < \infty$. Stelle $\mathfrak{G}$ monomial nach $\mathfrak{Z}$ dar. Die Erzeugenden aus $\mathfrak{K}$ haben endl. Ord., also auch ihre Determinanten in der Darstellg, also alle Determinanten endl. Ordnung. Also jedes $Z \in \mathfrak{Z}$ endl. Ordnung.

Ferner hat $\mathfrak{Z}$ nach Reidemeister nur endl. viele Erzeugende, also $(\mathfrak{Z}:E) < \infty$. Folgt $(\mathfrak{G}:E) < \infty$.

NB: Also ist die Ord von $\{\mathfrak{K}\}$ beschränkt durch $|\mathfrak{K}|$ und die Max-Ord der El. aus $\mathfrak{K}$.

Beweisänderung: In jeder unverkürzbaren Darstellung ein

$$x = K_1^{\alpha_1} \cdots K_r^{\alpha_r}, \quad K_\rho \in \mathfrak{K}$$

sind alle K_ρ verschieden, und wenn $\mathfrak{K} = \{L_1, \dots, L_n\}$ durchnummeriert, kann man $x = L_1^{\beta_1} \cdots L_n^{\beta_n}$ erreichen.

Also $|\langle\mathfrak{K}\rangle| \leq \prod_{\nu=1}^{n} |\langle L_\nu\rangle|$

62 u

Über Konjugiertheit der Vertretergruppen im teilerfremden Fall.

Sei $g = \mathfrak{a}\mathfrak{N} = \mathfrak{b}\mathfrak{N}$ minimal mit zwei Vertretergr. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ für $g/\mathfrak{N}$, die nicht konjugiert sind. $(|\mathfrak{a}|, |\mathfrak{N}|) = 1$.

1. $\mathfrak{a}$ ist einfach
2. $\mathfrak{N}$ " "
3. Gibt es ein p derart, daß sowohl $\mathfrak{a}$ wie $\mathfrak{b}$ je eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{N}$ fest läßt, dann $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^N$.
4. Läßt $\mathfrak{a}$ eine p-Gr. von $\mathfrak{N}$ fest ($\neq E$), so auch eine p-Sylowgr.
5. Läßt $\mathfrak{a}$ eine Gruppe $\mathfrak{N}'$ mit $p \mid |\mathfrak{N}'|$ fest, so auch eine p-Sylowgr.
6. Die Primzahlen von $|\mathfrak{N}|$ zerfallen in paarweise fremde Mengen $p_1 \cdots p_k;\ q_1 - q_l; \cdots$ derart: Jede Vertretergr. von $g/\mathfrak{N}$ bestimmt genau eine dieser Mengen, derart daß genau Sylowgruppen zu diesen Primzahlen unter $\mathfrak{b}$ invariant sind.

1. Man sollte Konjugiertheitssätze bekommen für Komplemente regulärer Untergruppe von zweifach trans. Permutationsgruppen, wie im Fall des Grades p.

2. In einer auflösbaren Gruppe gibt es höchstens ein p so, daß die p-Sylowgr. ihr eigener Normalisator ist. Denn der Sylow-System-Normalisator ist $\neq \mathfrak{E}$; (da er $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ deckt) also wenn $N\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_p$, dann $|\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'| = p^\nu$.

3. Die normalinvariante Hülle einer zyklischen Gruppe hat zu jeder Primzahl p <u>höchstens einen</u> p-Kopf. Denn sie wird von den Konjugierten <u>eines</u> Elements erzeugt.

4. Verallgemeinerung: Die normalinv. Hülle einer Gr mit k Erzeugenden hat höchstens k p-Köpfe, d.h.

$$|\mathfrak{A} : \mathfrak{A}^p\mathfrak{A}'| \leq p^k$$

1. Eine minimale nachinv.-Ugr $\mathfrak{a}$ einer primitiven Permutgr hat entweder die Ord p; dann ist sie halbregulär, da das Zentrum von $\mathfrak{a}^k$ transitiv ist; oder sie hat zusammengesetzte Ordnung, dann ist $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g}$, daher sind alle Konstituenten treu. Folge:

2. Eine minimale nachinv. Ugr $\mathfrak{a}$ einer primitiven Permutgr $\mathfrak{g}$ hat nur treue Konstituenten. Folge:

3. Eine nachinvar. Ugr $\mathfrak{a} \neq E$ einer primitiven Permutgruppe lässt keine Ziffer fest. d.h.:

4. Ist $\mathfrak{g}$ endlich, $\mathfrak{a} \underset{max}{\trianglelefteq} \mathfrak{g}$, so ist $\underline{\mathfrak{a}} \triangleleft \mathfrak{g}$.
nachinv. Kern

5. Frage: Sei $\mathfrak{a} \underset{max}{<} \mathfrak{b} < \mathfrak{g}$. Ist dann $\underline{\mathfrak{a}} \triangleleft \underline{\mathfrak{b}}$, vielleicht sogar $\underline{\mathfrak{a}} \triangleleft \mathfrak{b}$?

Frage: Bei monomiale Gr statt Per Gr

Herrn Avakumović gesagt 28.6.57:

Sind $\varphi_n(x)$ die EFn einer Gl. $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$, so ist vielleicht

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda_n \le t} \operatorname{sgn} \varphi_n(x)\, \varphi_n(y) \to G(x,y) \quad = \text{Greensfkt.}$$

oder $\frac{1}{n}$ Anzahl Zeichenwechsel $\to G(x,y)$

NB: Vielleicht für pos. def. Kerne K so zu verallgem.:

$$\frac{1}{n} \text{ Anzahl Zeichenwechsel} \to \lim_{\varepsilon \to 0} K^{(\varepsilon)}(x,y)$$

wo K^{ε} die Iterierte der Ord. ε (reell > 0).

Frage: Die Abstand von zwei meßbaren Mgn. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{G}$

kann definiert werden als

$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = j\{\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\} + j\{\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\}$; oder mit m statt j.

Gilt dann die Dreiecksungleichung?

zur Darstellung von Gruppen $\mathfrak{A}$ durch Automorphismen einer p-Gruppe $\mathfrak{P}$, wo $(p, |\mathfrak{A}|)=1$.

1. Satz: $\mathfrak{P}$ besitze genau einen minimalen $\mathfrak{A}$-Normalteiler $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ besitze lauter Primzahlen als $\mathfrak{A}$-Haupt-Faktoren.

Dann ist auch $|\mathfrak{N}| = p$.

Bew: Sei $\mathfrak{N} \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{L}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{L}$.

~~Dann ist $\mathfrak{L}$ abelsch wegen $\mathfrak{N} < Z(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ zyklisch;~~

~~ist $\mathfrak{L}^p \neq 1$, so $|\mathfrak{L}^p| = p$, $\mathfrak{L}^p = \mathfrak{N}$.~~

~~ist $\mathfrak{L}^p = 1$, so~~

A. $p > 2$: Es ist $\mathfrak{N} < Z(\mathfrak{P})$ wegen Minimalität

α) Ist auch $\mathfrak{L} < Z(\mathfrak{P})$, so ist im Fall $\mathfrak{L}^p \neq 1$

$\mathfrak{L}^p = \mathfrak{N}$, $|\mathfrak{N}| = |\mathfrak{L}^p| = p$; und

ist $\mathfrak{L}^p = 1$, so nach Maschke $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{K}$ wo

$\mathfrak{K}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{K}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{K}$ entgegen Einzigkeit von $\mathfrak{N}$.

β) Ist $\mathfrak{L} \not< Z(\mathfrak{P})$, so wähle man eine $\mathfrak{A}$-Reihe

von $\mathfrak{P}$ $\quad \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{L} \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{R} \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{T} \triangleleft \dots$

derart, dass $\mathfrak{L} < Z(\mathfrak{R})$, aber $\mathfrak{L} \not< Z(\mathfrak{T})$.

Dann ist für $L \in \mathfrak{L} - \mathfrak{N}$, $S \in \mathfrak{T} - \mathfrak{R}$, $C = [L, S] \neq E$

$$C^{\alpha} = [L^{\alpha}, S^{\alpha}] = [L^m N, S^n R] = C^{mn}$$

da $\{L, S\}$ die Klasse 2 hat und $p > 2$.

B. $p = 2$: Wähle L, S wie oben, dann $C = [L, S]$, hier ist
$C^{\alpha} = [L^{\alpha}, S^{\alpha}] = [LN, SR] = [L, S] = C$; $\mathfrak{N} = \{1\}$.

NB: Hieraus folgt: $\mathfrak{g}/\Phi(\mathfrak{g})$ überauflösb. $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ überauflösb. [mittels Sylowtheorie]

2. Die Darstellungen, die eine p'-Gruppe $\mathfrak{A}$ auf einer p-Gr. $\mathfrak{P}$ bewirkt, seien alle vom Grade 1 bis auf eine (d.h. alle $\mathfrak{A}$-Hauptfaktoren von $\mathfrak{P}$ $= p$ bis auf einen). Dann kann man diese eine ganz nach oben schieben, d.h. es gibt eine $\mathfrak{A}$-Hauptreihe $1 = \mathfrak{P}_0 \triangleleft \mathfrak{P}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{P}_r \triangleleft \mathfrak{P}$ mit $|\mathfrak{P}_\rho / \mathfrak{P}_{\rho-1}| = p$ $(\rho = 1..r)$.

Bew.: 66.1 auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$ anwenden, wo $\mathfrak{Q}$ maximaler $\mathfrak{A}$-Normalteiler von $\mathfrak{P}$ derart, daß auf $\mathfrak{Q}$ nur Darstellgn des Grades 1 auftreten. Nach 66.1 ist dann schon $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_r$.

3. Unter der Vor. von 66.1 ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{P}_r$ mit $\mathfrak{P}_r$ wie in 67.2. Denn $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}_r = 1$, da $\mathfrak{N}$ keinen $\mathfrak{A}$-Hauptfaktor mit $\mathfrak{P}_r$ gemeinsam hat.

4. Verallg. von 66.1 wohl auf solche $\mathfrak{N}$ möglich, die Darstellgn erleiden, die nicht in den Kroneckerprodukten der [illegible] auftretenden enthalten sind.

Aufgabe { Erst Theorie der Darst. bei Charakteristik 0, dann Modulare Theorie von R. Brauer auf Darstellgen durch Automorphismen von p-Gruppen übertrag.

Forts. von 67 Ist $\mathfrak{P}$ abelsch und unzerfällbar mit $\mathfrak{A}$ (alle $\neq \mathfrak{P}, \times \mathfrak{P}_1$), so dürfte $\mathfrak{P}$ <u>homogen</u> sein (d.h. lauter gleiche Invar. haben).

Ist $\mathfrak{P}$ abelsch, so dürften die Darstellungen von $\mathfrak{A}$ im Sockel und in der Rumpf-Faktorgruppe äq. sein. Daraus folgt dann durch Anwendung auf geeignete Faktorgruppe: $\mathfrak{P}$ enthält keine andere Darst. von $\mathfrak{A}$, als der Sockel von $\mathfrak{P}$ enthält;
[Bei nichtabelschem $\mathfrak{P}$ gilt das nicht: $|\mathfrak{P}| = p^3$].
Allgemein dürfte $\mathfrak{P}$ nur Darst. enthalten, die aus denen des ~~Sockels~~ Rumpf-Faktors durch Produktbildung von $\leq c$ Faktoren entstehen, wo c = Klasse $\mathfrak{P}$. Beweis direkter als 66.1: Im absteig. Zentrum $\mathfrak{Z}_c$ treten nur Produkte von Darst. von $\mathfrak{Z}_{c-1}/\mathfrak{Z}_c$ und weiter aus $\mathfrak{Z}_1/\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{P}/\mathfrak{P}'$ auf. ($n \geq 2$).

5. Bei der Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Autom. einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ dürfte es stark auf die Struktur der Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ ankommen; es ist nach Huppert MZ 69, 417 der Grad <u>jeder</u> in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Darst. von $\mathfrak{G}$ $\leq r$, wenn dies im Sockel von $\mathfrak{A}$ zutrifft, vorausgesetzt, dass alle Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind.

6. Ist der „Darstellungsmodul" $\mathfrak{M}$ auflösbar, so treten in ihm unter $\mathfrak{A}$ mit $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{M}|) = 1$ keine anderen Darstellungen von $\mathfrak{A}$ auf als in den Sylowgruppen eines Sylowsystems von $\mathfrak{M}$, das bei $\mathfrak{A}$ invariant ist.

~~1. In einer p^α-köpfigen Gruppe mit abelschen p-Sylowgruppen ist jede (ein...) p^α-köpf. nachinv. Ugr. normal, d.h. jeder p^α-Hauptfaktor einfach.~~

~~2. Allg.: Unter dem Erzeugnis der p-Sylowgruppen ist jede nachinv. p^α-köpf. Gruppe normal.~~

über p-auflösbare Gruppen und p-nilpotente Gr.:

3. In einer p-auflösbaren Gruppe [ohne p'-Normalteiler] erzeugen die p-Sylowgruppen eine [nilpotente] p-Gruppe.

~~Sein Erzeugnis hat~~ $l_p = 1$.

des Erzeugnisses

Bew. der ursprüngl. Frage der größte p- [illegible] Normalteiler [illegible] [illegible]

3 steht vielleicht bei Hall-Higman impliziert?

Sei $\mathfrak{G}$ eine ~~Gruppe~~ Gruppe minimaler Ordnung, die lauter abelsche p-Sylowgruppen hat und doch eine p^*-Länge ≥ 2 hat. Oder sollte man [illegible] gleich p'-Länge ≥ 2 voraussetzen?

1. $\mathfrak{G}$ wird von seinen p-Sylowgr. erzeugt.

2. $\mathfrak{G}$ hat keinen p-freien Normalteiler.

3. $\mathfrak{M} = (\mathfrak{G}^{p^*})^{p'}$ ist $\neq 1$ und minimaler Normalteiler.

dabei bedeutet p^* die Menge der einf. Gr. mit $p \mid \mathrm{Ord}$

4. $\mathfrak{M}$ ist einfach (70.2), aber zusammengesetzte Ord.

4a) $\mathfrak{M}$ ist der einzige minimale Normalteiler, weil

5. $\mathfrak{Z}_s(\mathfrak{M} < \mathfrak{G}) = 1$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{G}^{p^*} \\ \mathfrak{M} \\ 1 \end{array}$$

6. $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $1 \neq \mathfrak{H}' \trianglelefteq \mathfrak{H} \Rightarrow \mathfrak{M} \leq \mathfrak{H}'$.

denn wähle $\mathfrak{H}'$ einfach, dann wäre $[\mathfrak{H}', \mathfrak{M}] = 1$

7. $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{H} < \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{H}^{p'}$ ist p^*-Gruppe (mit Induktionsvor.)

denn es hat keinen p-freien Normalteiler (6)

8. Jedes p-Element in $\mathfrak{G}$, das mit $\mathfrak{L}$ zusammen nicht ganz $\mathfrak{G}$ erzeugt, zentralisiert $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$. Bew. 7: S. 343c.

9. Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ nicht eine zyklische p-Gruppe, so ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$.

10. $\mathfrak{G}$ ist einköpfig. Denn $\subset$ Erzeugnis der nicht einköpfigen notwendig 1

11. Ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ keine q-Gruppe, so ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ im Zentrum $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$.

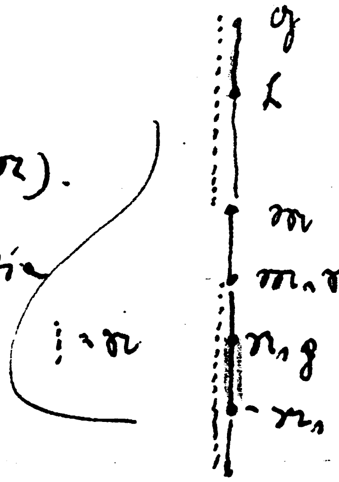
denn wähle in 7: $\mathfrak{g}\,\mathfrak{M}$ = Sylowgr. von $\mathfrak{L}$; p-Sylowgr. $\mathfrak{g}$ sowie eine p-Sylowgr. [illegible] $\mathfrak{G}$, [illegible] $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \neq 1$. [illegible] p-Sylowgr. [illegible] $\mathfrak{G}$ für eine $q, q^*, \ldots$ [illegible] $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, [illegible] $\mathfrak{G} : \mathfrak{L}/\mathfrak{M} \cap \neq 1$.

12. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist q-Gruppe oder abelsch, also nilpotent

13. Sei $\mathfrak{N} = N_s\, \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{N}$).

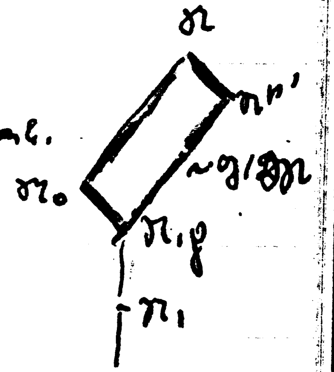
Sei $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$ der größte p-freie Normalteiler von $\mathfrak{N}_0$.

$\mathfrak{N}$ deckt $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{N}^{p'}$; dies liegt im $Z_s\, \mathfrak{g}$, da von den p-Sylowgr. von $\mathfrak{N}$ erzeugt. Nun ist $\underline{Z_s(\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}/\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{M}} = \mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$; denn sonst



könnte man noch ein Stück von $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$ nach unten durchschieben, gegen Def von $\mathfrak{N}_1$.

Also ist $\mathfrak{N}^{p'} \cap \mathfrak{N}_0 = 1$ mod $\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$, da $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}} = \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{N}^{p'}$ mod $\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$.



14. Es ist $\mathfrak{N}_0 \neq \mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$; sonst Verlagerung $\to \mathfrak{N}$ nicht einfach.

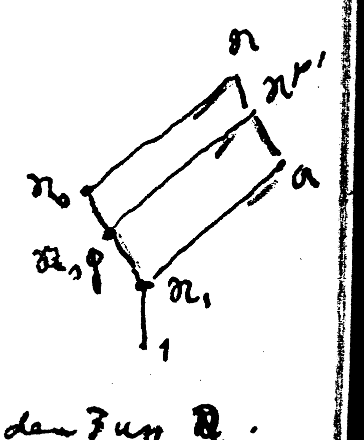
15. $\mathfrak{N}^{p'} < Z\,\mathfrak{g}$, da von p-Sylowgr. erzeugt.

16. Ist der Kopf von $\mathfrak{G}$ nilpotent, so deckt der Zentralisator von $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1$ ganz $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

denn jede normale nilpotente Restgruppe des Kopfes in $\mathfrak{N}^{p'}$ zentralisiert $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1$, da sie $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$ mod $\mathfrak{g}$ zentralisiert und keine p-Faktorgruppe besitzt. $\mathfrak{A} = Z\,\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$

~~$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{N}'$ als p-Kopf nilpotent Ugp von $\mathfrak{N}'$~~ $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}^{p'}$ ...

$\mathfrak{N}^{p'} = \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{A}$ mod $\mathfrak{N}_1$. ($\mathfrak{A} = Z\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_0$ insofern normal in $\mathfrak{N}_1$)



17. Die p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ ist nicht zyklisch.

denn $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1\mathfrak{g}$ zentralisiert den Kopfelement γ, aber nicht den Fuss $\mathfrak{F}$.

18. Es ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ eine kleinste auf Kopf $\mathfrak{G}$ abgebildete Gruppe, denn sonst verschiebe den Rumpf von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ nach unten (auf $\mathfrak{M}$), und desgleichen eine kleinste auf Kopf $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ abgebildete Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$, und setze diese auf die erste verschobene Gruppe auf; das Produkt ist normal unter $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, gibt $\mathfrak{G}^{p'} \neq \mathfrak{G}$.

Vor.: $\mathfrak{G}$ sei eine p-auflösbare, (rein) p-fürsige Gruppe mit metabelschen p-Sylowgruppen. $\mathfrak{G}^*$ bezeichne allgemein das Erzeugnis der Kommutatorgruppen aller p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$. Für jedes solche Gruppe von kleinerer Ordnung gelte $|\mathfrak{G}^*| \le p^{\alpha}$, aber nicht für $\mathfrak{G}$.

1. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{A}$ p-fürsig

2. $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ p-fürsig.

3. $\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{N}| = p^{\alpha} \Rightarrow \mathfrak{N}' \le \mathfrak{Z}\mathfrak{N}\, \mathfrak{G}^*$

4. $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{N}| = p^{\alpha} \Rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nicht rein p-fürsig.
sonst $\mathfrak{G}^*$ mod $\mathfrak{N}$ p-Gruppe.

5. Es gibt nur einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{M}$.
Sonst seien $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ solche; seien $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ die max. NT von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{N}_i$ p-frei. Dann ist $\mathfrak{G}^*$ eine p-Gruppe mod $\mathfrak{L}_i$, also mod $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$. Sei $\mathfrak{N}_3$ ein min. $\mathfrak{G}$-NT in $\mathfrak{D}$. Dann ist $|\mathfrak{N}_3| = p^{\alpha}$, daher $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_1 * \mathfrak{N}_2$.

76

6. $\mathfrak{Z}_s\,\overline{\mathfrak{M}} = 1$, wenn $(\overline{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}) > 1$, p-~~flüssig~~ nicht rein p-flüssig

Denn sonst $\mathfrak{M} < \mathfrak{Z}\,\overline{\mathfrak{M}}$ gegen 2. Solche $\overline{\mathfrak{M}}$ gibts nach 4.

7. Der maximale p-Normalteiler $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ ist abelsch.

sonst $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{F}' < \mathfrak{Z}\,\mathfrak{G}^*$; $\mathfrak{G}^*$ ist nicht rein p-flüssig (4), nach 6 wäre $\mathfrak{M} = 1$.

8. $\mathfrak{M}$ ist der max. p-Normalteiler $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$.

Denn sei $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ p-frei. Mod $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{F}$ fremd zu $\mathfrak{L}$, also $[\mathfrak{F}, \mathfrak{L}] < \mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{V}$ Vertreterge. von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, so deckt der $N_1\mathfrak{V}$ ganz $\mathfrak{F}/\mathfrak{M}$; $N_1\mathfrak{V}$ zentralisiert $\mathfrak{L}$; nach 6 ist $N_1\mathfrak{V} = 1$, also $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

9. $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} \nless \mathfrak{G}$: ~~[illegible]~~ $\mathfrak{H}$ p-flüssig

Denn ein p'-Fuss würde $\mathfrak{M}$ zentralisieren.

10. $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} \lneq \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}^*$ p-Gruppe. (Induktionsvor.)

11. $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} \underset{\neq}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}^* < \mathfrak{M}$. (8)

(4) 12. $\mathfrak{G}$ ist p-köpfig, sonst $\mathfrak{H} \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ p'-Gruppe $\to \mathfrak{H}^* = \mathfrak{G}^* = $ p-Gr.

13. Ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ <u>der max p-freie</u> NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$, so enthält $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ seinen Zentralisator $\mathfrak{Z}$.

Sonst einen p. Faktor von $\mathfrak{Z}/\mathfrak{M}$ nehmen, kann nach unten geschoben werden bis auf $\mathfrak{M}$, entgegen 8.

14. Ist $\mathfrak{P}$ eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{P}$, so $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$.

Bew. $\mathfrak{H}$ p-köpfig; wenn $\neq \mathfrak{G}$, ist nach Ind. $\mathfrak{H}^*$ eine nachinv. p-Gr in $\mathfrak{H}$, zentralisiert also $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$. daher $\mathfrak{H}^* < \mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{P}' < \mathfrak{M}$ f. alle $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{G}^*| = p^{\alpha}$

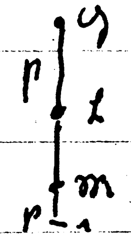
15. Jeder NT $\mathfrak{T} \underset{\neq}{<} \mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{M} < \mathfrak{T}$ ist $\underset{\mathfrak{H} \triangleleft \mathfrak{G}}{\text{und}}$ $\mathfrak{M}$ abelsch. Denn $\mathfrak{H} = L\mathfrak{T}$ gesetzt gibt $\mathfrak{H}^*$ p-Gruppe, $\mathfrak{H}^* < \mathfrak{M}$ nach 11.

16. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist ein <u>minimaler</u> NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ bezüglich der Eigenschaft von keinem p-Element ~~...~~ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ zentralisiert zu werden.

Sonst setze $\mathfrak{J}$ auf einen minimalen.

17. In $\mathfrak{J}/\mathfrak{M}$ sind je zwei Konjugierte vertauschbar.

Denn sie liegen in einem echten max NT, bewiesen.



18. Es ist $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{L}\cdot\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}' \not< \mathfrak{M}$.

Sonst $= \mathfrak{L}_1\mathfrak{J}'$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{J}$ gesetzt gibt $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{M}\mathfrak{J}'$ normal bei $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}'$ zentralisiert $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{L}/\mathfrak{M} < Z\,\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}/\mathfrak{M} \times \mathfrak{J}^*\mathfrak{M}/\mathfrak{M}$ gibt p-Normalteiler über $\mathfrak{M}$ gegen (8).

19. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ besitzt nur einen Sylow-Kopf, der Rumpf ist $= Ztr(\mathfrak{G}^*/\mathfrak{M})$.

Bew wie 18 mit $\mathfrak{f}$ = ~~Rumpf~~ $\mathfrak{r}$ = max NT.

20. Ist $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}| \neq q^\beta$, so gibt es (zu jeder Sylowgr $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{L}$) eine p-Sylowgr. $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, so dass $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{r}'$ mod $\mathfrak{M}$ zentralisiert wird.

21. Ist $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}| \neq q^\beta$, so gibt es zu jedem Primteiler q von $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}|$ und jeder p-Sylowgr $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ eine p-Sylowgr $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, die mod $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{r}'$ zentralisiert wird.

denn $\mathfrak{r}$ ähnlich dem $\mathfrak{r}$ von 20.

21. Es ist $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}| = q^\beta$.

Sonst zentralisiert $\mathfrak{r}'$ $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ n. 21. dann $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \leq Ztr\, \mathfrak{G}^*$ (16)

Sei $\mathfrak{G}$ eine p-aufl. Gr. der p-Länge l, von der jeder echte NT und jede echte Faktorgr. eine kleinere p-Länge hat (= „[illegible]gruppe"). Dann gilt:

1. $\mathfrak{G}$ ist ein-p-köpfig und ein-p-füssig. Der Fuss $\mathfrak{M}$ ist der maximale p-Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und sein eigener Zentralisator. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ ist p'-füssig.

Beweis auf 75 ff.

2. Jede Gr. $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ ist p-füssig. $(\mathfrak{H} \geq \mathfrak{M})$

3. Jedes p-Sylow-Zentrum einer Obergr. von $\mathfrak{M}$ liegt in $\mathfrak{M}$.

4. Hat sogar jede echte Untergr. von $\mathfrak{G}$ p-Länge $< l$, so ist der max. p-freie NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ eine q-Gruppe;

Denn sonst lässt jede p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ zu jeder Primzahl q eine q-Sylowgr. von $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ elementweise fest, zentralisiert also $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$; $\sim \mathfrak{L}/\mathfrak{M} < \mathfrak{Z}_m\, \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ ~~[illegible]~~, geht nicht.

5 Die q-Sylowgr. q von $\mathfrak{g}^{(pp^*)^{2-1}}/\mathfrak{M}$ ist sehr speziell gebaut: der max. q-NT von L ist = Zentrum von L und zyklisch.

Wenn $q > 2$, ist $\exp \mathfrak{q} = q$.

6. Jeder gültige $\mathfrak{g}$-Normalteiler in $\mathfrak{g}'/\mathfrak{M}$ liegt im Zentrum.

Bew: er vertauscht sich nach Induktion jede (Zentralisator) p-Sylowgr., also deren Erzeugnis $\mathfrak{g}/\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{G}$ sei von grösserer p*-Länge l als alle seine Ugr und Fgr.

1. $\mathfrak{G}$ ist ein-p*-köpfig und -füssig. Sei $\mathfrak{M}$ der minimale NT.

2. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ hat mind. einen p'-Fuss $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$.

3. Wenn $|\mathfrak{M}| = p_1$ so ist $\mathfrak{M}$ der max p-NT von $\mathfrak{G}$.

4. $\mathfrak{M}^p \neq 1 \Rightarrow$ Zs $\mathfrak{M} = 1$

5. $\mathfrak{M}^p \neq 1$, $\mathfrak{M} < \mathfrak{g} < \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{M}$ einziger Fuss von $\mathfrak{g}$.

6. $\mathfrak{M}^p \neq 1$, $\mathfrak{M} < \mathfrak{g} \neq \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{g}^{(p'p)^{l-1}} = 1$, $\mathfrak{g}^{(p'p)^{l-2}p'} = $ Syl p*$\mathfrak{g}$

7. $\mathfrak{G}^{(pp')^{l-2}} = \mathfrak{L}$ gesetzt ($\mathfrak{K}^n = \mathfrak{L}$) gibt $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ p-frei, $\neq 1$. Dann ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ eine q-Gruppe. ~~Sonst~~ wird jede Sylowgr. von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ zentralisiert von $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} <$ Ztr $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$.

8. $\mathfrak{L}$ ist speziell unter $\mathfrak{K}$: $\mathfrak{L}$ hat zykl. Ztr $\mathfrak{z}$ (und $\mathfrak{M}$) $=$ Ztr $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{z}$ ist min NT von

83

1. <u>Notwendig</u> für die Existenz eines zu $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ genau komplementären Normalteilers von $\mathfrak{G}$ ist:

Für $\mathfrak{U} < \mathfrak{h}$ bedeute $\mathfrak{T}$ den „Transformator", d.i.

$$\mathfrak{T} = \{ T \mid T^{-1}\mathfrak{U}T < \mathfrak{g} \}.$$

Dann muss $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}\mathfrak{h}$ sein mit $\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{h} = 1$, $[\mathfrak{Z}, \mathfrak{U}] = 1$,
$\mathfrak{Z} < \mathfrak{G}$.

(nämlich, wenn $\mathfrak{K}$ der NT in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{T}$.)

<u>Transformatoren</u> $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})$:

2. Stets $\mathfrak{T}(\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2) = \mathfrak{T}(\mathfrak{U}_1) \cap \mathfrak{T}(\mathfrak{U}_2)$.

2'. $\mathfrak{T}(\{X\}) = \mathfrak{T}(X)$.

3. Also ist die Bedgg 1 zu schreiben: $H \in \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{T}(H) = \mathfrak{Z}(H) \circ \mathfrak{h}$, mit
NB:
(3 ist vielleicht schwächer!) $\circ$ = Produkt ~~ohne~~ mit Durchschn. E; $\mathfrak{Z}(H) < \mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}} H$.

4. Stets ist $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{U}) \cdot \mathfrak{T}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})\mathfrak{h} = \mathfrak{T}(\mathfrak{U})$.

5. Notw. ist nach 1: $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U} < \mathfrak{g}) = \mathfrak{Z} \circ N_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{U} < \mathfrak{h})$
es ist bei $\mathfrak{h}$: $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U} < \mathfrak{G}) = \mathfrak{Z} \circ \mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Z}$.

Notwendig für Existenz eines NT $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{h} = 1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{h} = \mathfrak{G}$ ist:

6. $Ns\, \mathfrak{z} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{z}$ (mit $\mathfrak{z} = Ns\, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{A} = Zs\, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{A}$).

7. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{h}$, $Ns(\mathfrak{U} < \mathfrak{h}) = \mathfrak{U}$, so ist $Ns(\mathfrak{U} < \mathfrak{G}) = \mathfrak{U} \times \mathfrak{z}$.

8. $\mathfrak{U} < \mathfrak{h}$, $\mathfrak{z} = Zs\, \mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}$, so die $\mathfrak{h}^T \cong \mathfrak{U}$ werden unter $\mathfrak{z}$ transitiv perm.

Frage: Sind diese Bedingungen auch hinreichend für Existenz eines kompl. NT?

Dagegen siehe S. 88

Wie sind die Zerfalls-Bedingungen $\{\mathfrak{G}_0 \mathfrak{h} = \mathfrak{G}$

|Frage: Gibt es genauso viele $\mathfrak{G}_0 \triangleleft \mathfrak{G}$ mit $\{\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$, wie es Möglichkeiten gibt, die Charakt. von $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ auf $\mathfrak{G}$ fortzusetzen?

Frage: Folgt aus $\mathfrak{A}_i \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}_{(i=1,2,3)}$, $\mathfrak{A}_i \cup \mathfrak{A}_j$ auch

$$(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \cup \mathfrak{A}_3 \quad ?$$

Brauchte nur für p-Gruppen $\mathfrak{G}$ entschieden zu werden.

Antwort: Nein.

Gegenbeispiel: $\mathfrak{G}$ = Gruppe der Ord p^{p+1}, monomial vom Grade p;

$|\mathfrak{D}| = p^2$; $\mathfrak{D}$ nicht diagonal. $\mathfrak{A}$ = diagonal, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \\ & \ddots & \end{pmatrix}$

$\mathfrak{B}$ diagonal, $B = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & b \ldots & \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & c \ldots & \end{pmatrix}$.

Fortsetzung von S. 87:

Ist $\mathfrak{T}(H) = \mathfrak{Z}(H) \circ \mathfrak{H}$ für jedes $H \neq E$, $H \in \mathfrak{H}$, mit einem $\mathfrak{Z}(H) < \mathfrak{Z}_G(H)$ (d.h. $H^G < \mathfrak{H} \Rightarrow H^G = H^{H_1}$ f. ein $H_1 \in \mathfrak{H}$), so kann man ein Restsystem $R_1 \dots R_{g/h}$ so wählen, dass $R_i H = H' R_i \Rightarrow H' = H$. Man kann danach die R_i noch so ändern*, dass sogar

1. $R_i H = H' R_j \Rightarrow H' = H$

d.h. in der monomialen Darst. von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ sind die Matrizen für $\mathfrak{H}$: $D(H) = H \cdot P(H)$, $P(H)$: Permut.

* unter Festhaltung von einem R_j in jedem Transit.-Syst.; die andern sind durch das eine bestimmt; man kann also R_2 durch $R_2^* = Z_2 R_2$ ersetzen, wenn nur $R_2 H = H R_2 \Rightarrow Z_2 \vee H$; und dann setze $R_j^* = Z_j R_j$ mit $Z_j^* = H_j^{-1} Z_2 H_j$ (wobei $R_2 H_j = H_j R_j$ gewählt ist).

Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $\quad H_1^G = H_2 \to \forall_H \; H_1^H = H_2$.

1. Sei χ ein (eig. od. uneig.) Charakter von $\mathfrak{H}$, π der von der ident. Darst. von $\mathfrak{H}$ erzeugte (Permutations)Char. von $\mathfrak{G}$, ψ der von χ erzeugte Char. von $\mathfrak{G}$.

Dann ist $\psi(G) = \begin{cases} \chi(H)\pi(H) & G \sim H \in \mathfrak{H} \\ 0 & G \notin \cup\, \mathfrak{H}^T \end{cases}$.

Daher ist mit $g = |\mathfrak{G}|$, $h = |\mathfrak{H}|$ (durch Ordnen nach den $\mathfrak{H}^{R_\nu}$):

2. Für jeden Char. Φ von $\mathfrak{G}$: $\frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{G}} \Phi(G)\psi(G) = \frac{1}{h}\sum_{\mathfrak{H}} \Phi(H)\chi(H)$

3. Für je zwei Char. χ_1, χ_2 von $\mathfrak{H}$: $\frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{G}} \psi_1\psi_2 = \frac{1}{h}\sum_{\mathfrak{H}} \chi_1\chi_2\pi$

2. Satz von Frobenius: (Eine Verallg. siehe S. 99)

Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \neq 1 \Rightarrow \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^G$; $\mathfrak{N} = N_G \mathfrak{H}$, $(|\mathfrak{N} : \mathfrak{H}|, |\mathfrak{H}|) = 1$

Dann ist notw. u. hinr. für die Existenz eines NT $\mathfrak{K} \triangleleft \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{N} = E$: Es ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{L}$ mit passendem $\mathfrak{L}$.

Bew: a) Notw. klar: $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{N}$

b) Hinr.: Aus $N^G \in \mathfrak{N}$, $N \notin \mathfrak{L}$ folgt $N = HC$, $H \neq E$, $c := |\mathfrak{L}|$,

$(HC)^G \in \mathfrak{N}$, $(H^c C^c)^G \in \mathfrak{N}$, $H^{cG} \in \mathfrak{N}$, $H^G \in \mathfrak{N}$,

$H^G \in \mathfrak{H}$ (wegen Ordnung), also $G \in \mathfrak{N}$.

Also $N^G \in \mathfrak{N} \Rightarrow G \in \mathfrak{N}$ oder $N \in \mathfrak{L}$.

Nach 84 ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{K} \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{L}$

$= \mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{H} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$; $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H} = E$.

Andere Formulierung: Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \neq 1 \Rightarrow \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^G$, $\mathfrak{N} = N_G \mathfrak{H}$, $(|\mathfrak{N} : \mathfrak{H}|, |\mathfrak{H}|) = 1$.

Notwendig u. hinr. dafür, daß $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$ ein normales Komplement (Untergruppe) enthält, ist, dass $\mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{H}$ " " " ...

92 Notw. Bedgg. für norm. Komplement.

1. Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$. Gibt es zu $\mathfrak{H}$ ein normales Komplement $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G} - \bigcup_{E \neq \Pi H_i^{\mathfrak{G}}} \Pi H_i^{\mathfrak{G}}$

Bew.: $K = \Pi H_i^{K_i H_i^*}$ gibt mod $\mathfrak{K}$ (und mod $\mathfrak{H}$)

$E \equiv \Pi H_i^{H^*}$, also $E = \Pi H_i^{H_i^*}$.

2. Satz von Frobenius. s. S. 154 [Inhalt von Feit PAMS 7, 179]

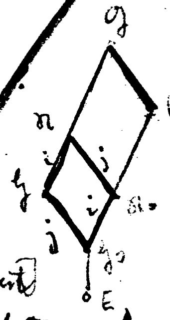
Sei $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{K} < \mathfrak{H} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} = N_{\mathfrak{G}} \mathfrak{H}$, $\mathfrak{K} \triangleleft \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \begin{cases} = \mathfrak{H} & \text{oder} \\ < \mathfrak{K} \end{cases}$

~~[illegible]~~ Sei $(\mathfrak{N} : \mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_j : \mathfrak{K}) = 1$

Notw. u. hinr. f. Existenz eines $\mathfrak{G}_0$ $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{G}$ mit

$\mathfrak{H}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{K}$ ist die Bedgg.

Es gibt $\mathfrak{N}_0$ $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{H}\mathfrak{L} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{K}$



$\mathfrak{G}_0$ ist dann eindeutig bestimmt.

Bew.: Notw.: $\mathfrak{N}_0\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \bigcup (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_0)^G$ [Eindeutigkeit erhalten mit]

folgt wegen Ord. u. Repr. Konstruktion.

Hinr.: Es ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{N}$; [für $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{N}$] $\mathfrak{N}/\mathfrak{H} \sim \mathfrak{L}/\mathfrak{K}$.

ord. prim zu $|\mathfrak{H} : \mathfrak{K}|$

Aus $N^G = (HC)^G = H_1 C_1$ folgt wegen Ord.: $N^i \in \mathfrak{N} \Rightarrow N^{iG} \in \mathfrak{H}$, $N^i \in \mathfrak{G} \Rightarrow G \in \mathfrak{N}V$

$\mathfrak{H} \ni (KH)^G = K_1 H_1$ für geeign. $K_1 \in \mathfrak{K}$ | $N^i \in \mathfrak{H}_0 \Rightarrow N \in \mathfrak{N}_0$

Also entw. $K_1 H_1 \in \mathfrak{K}$ oder $G \in \mathfrak{N}$ → z.B.

dann $\downarrow$ $H_1 C_1 \in \mathfrak{K}$, $H_1 C_1 \in \mathfrak{L}$. Also

$N^G \in \mathfrak{N} \Rightarrow N^G \in \mathfrak{L}$ oder $G \in \mathfrak{N}$. Folgl. gibt es nach S. 85 $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{G}$

mit $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$; $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{L}\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$

1. p-nilpotente Gruppen. s. Referat M. Hall, im Handexemplar

Def $\mathcal{G}$ p-nilp $\Leftrightarrow \exists\, \mathfrak{N} \triangleleft \mathcal{G}$, $\mathcal{G}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{P}$ = p-Sylowgr. p-Sylowgruppe, p-Faktorgruppe

d.h. wenn $\mathcal{G} \xrightarrow[\varphi]{} \mathfrak{P}$, $\varphi(P) = P$.

Satz: Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr.; genau dann ist $\mathcal{G}$ p-nilpotent, wenn $P_1^G \in \mathfrak{P} \wedge P_1 \in \mathfrak{P} \Rightarrow P_1^G = P_1^P$ f. ein $P \in \mathfrak{P}$.

d.h. $\mathfrak{P}$ transitiv auf $\mathfrak{P} \wedge A^{\mathcal{G}}$. Wichtige Verallg.: 94, 95

Bew. a) Notw: $(\mathcal{G} \to \varphi(\mathcal{G}) = \mathfrak{P}$; $P_1^G = P_2 \Rightarrow P_1^{\varphi(G)} = P_2$.

b) hinr.:

2. Hilfssatz. Sei $E < \mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{b} < \mathcal{G}$ mit $p \nmid |\mathcal{G}:\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{b}:\mathfrak{a}| = p^\delta$, $\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ abelsch, $B^G \in \mathfrak{b} \Rightarrow B^G \equiv B\ (\mathfrak{a})$. Dann gibts $\mathfrak{N} \triangleleft \mathcal{G}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{b} = \mathcal{G}$, bei $\mathcal{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. (Verlagerung $\mathcal{G} \to \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$).

Burnside oder Grün ?: Nicht in Bem. Burnside Aber in M. S. Hall

Damit Bew 1: Sei $\mathfrak{P} \underset{p^{\delta_1}}{\triangleright} \mathfrak{P}_1 \underset{p^{\delta_2}}{\triangleright} \mathfrak{P}_2 \underset{p^{\delta_3}}{\triangleright} \cdots \triangleright \mathfrak{P}_c = E$ eine absteig. Zentralreihe.

angew. auf $\mathcal{G}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1$

Nach 2, gibt es $\mathcal{G}_1 \underset{p^{\delta_1}}{\triangleleft} \mathcal{G}$, $(\mathcal{G}/\mathcal{G}_1 \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1$, $\mathcal{G}_1 \mathfrak{P} = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ = Sylowgr. von $\mathcal{G}_1$

Wende 2 auf $\mathcal{G}_1, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ an: $P_1^{G_1} \in \mathfrak{P}_1 \Rightarrow P_1^{G_1} = P_1^{P} \equiv P_1\ (\mathfrak{P}_2)$

es gibt $\mathcal{G}_2 \underset{p^{\delta_2}}{\triangleleft} \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2 \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$.

usw.: $\mathcal{G} \underset{p^{\delta_1}}{\triangleright} \mathcal{G}_1 \underset{p^{\delta_2}}{\triangleright} \mathcal{G}_2 \underset{p^{\delta_3}}{\triangleright} \cdots \underset{p^{\delta_c}}{\triangleright} \mathcal{G}_c$; $\mathcal{G}_c \triangleleft\triangleleft \mathcal{G}$, $\mathcal{G}/\mathcal{G}_c = p^\alpha = |\mathfrak{P}|$

sei $\mathfrak{H}$ π-Sylowgr. von $\mathcal{G}$. $\to \mathcal{G}_c \triangleleft \mathcal{G}$.

Erzeugen $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^G)$, $G \in \mathcal{G}$ $+ \mathfrak{H} \Rightarrow \mathcal{G}$ hat π-Faktorgr.

Anderer Beweis 94 Versuch

1. Anderer Beweis für die Kennzeichnung der p-nilpotenten Gr. s. (92):

Sei $\mathfrak{z} = Zts\, \mathfrak{P}$. Stimmt nicht

$$\mathfrak{z}^G < \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{z}^G < \mathfrak{z}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{z} \Rightarrow \mathfrak{z}^G = \mathfrak{z}$$

$$\mathfrak{z} < \mathfrak{P}^G \Rightarrow \mathfrak{z}^{G^{-1}} < \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{z}^{G^{-1}} = \mathfrak{z} \to \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^G = Zts\, \mathfrak{P}^G$$

$\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{p}$-normal i. S. von Grün.

Sei $\mathfrak{g}_1$ der Ns von $\mathfrak{z}$.

a) $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$: Dann Ind.: $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ erf. Vor., p-nilpot.,

$$1 \underset{p}{<} \mathfrak{z} \underset{p'}{<} \mathfrak{g}_2 \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$$

Da $\mathfrak{z}$ = p-Sylowg. im Ztr $\mathfrak{g}_2$, ist $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{z} \times \mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_3$ charakt.

$$1 \underset{p'}{<} \mathfrak{g}_3 \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}_2 \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g} \qquad \text{fertig.}$$

b) $\mathfrak{g}_1 \lneq \mathfrak{g}$: Dann Ind.: $1 \underset{p'}{<} \mathfrak{g}_2 \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}_1 \underset{p'}{<} \mathfrak{g}$

nach Grün ist die max. abelsche p-Faktorgr. von $\mathfrak{g}$ isomorph

zu der von $\mathfrak{g}_1$, also gibt $\mathfrak{g}_0 \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}$. Induktion: $\mathfrak{g}_0$ erfüllt ?

Vor. mit $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{g}_0$.

p-Nilpotenz, p-Faktorgruppen

95

1. Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}$. Es gebe eine Kette $\mathfrak{P}_0 \triangleleft \mathfrak{P}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$, so dass

$$P, P^G \in \mathfrak{P}_i \Rightarrow P \equiv P^G \bmod \mathfrak{P}_{i-1}.$$

Dann gibt es $\mathfrak{G}_0 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$.

Bew: 92₂. Indukt. OBdA sei $|\mathfrak{P}_i / \mathfrak{P}_{i-1}| = p$

2. Zusatz: Ist $\mathfrak{P}_0 \triangleleft \mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{G}_0 \triangleleft \mathfrak{G}$.

Bew: Sei $\mathfrak{D} = \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} \mathfrak{G}_0^P = \bigcap_{G \in \mathfrak{G}} \mathfrak{G}_0^G$; Dann ist wegen $\mathfrak{G}_0 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$

$|\mathfrak{G} : \mathfrak{D}| = p^\mu$, also $\mathfrak{D}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{P} = \mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$

$|\mathfrak{G}/\mathfrak{D}| = |\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0| = |\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0|$ $\quad |\mathfrak{G}_0 : \mathfrak{D}| = 1$.

Der Schluss von 2 zeigt allgemeiner:

3. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{G} : \mathfrak{A}| = p^s$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, ferner $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G} \Leftrightarrow \mathfrak{P}\cap\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{P}$; allg.: $\mathfrak{G}/\bigcap \mathfrak{A}^G \simeq \mathfrak{P}/\bigcap(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})^P$

Hieraus folgt z.B.: ~~ebenso wohl~~ $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A})^{\mathfrak{P}}$.

denn mit $\mathfrak{D} = \bigcap_{\mathfrak{G}} \mathfrak{A}^G$ wird

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{D}\cap\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\cap\bigcap \mathfrak{A}^P = \bigcap(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A})^P.$$

p-Faktorgr.

1. Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}$ (bzw. $\mathfrak{P}_0 \triangleleft \mathfrak{P}$.)
Genau dann gibt es $\mathfrak{G}_0 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{G}_0 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$) 1
mit $\mathfrak{G}_0\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$, wenn
es eine Kette $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}_1 \dots < \mathfrak{P}$ gibt, so dass

$$P, P^G \in \mathfrak{P}_i \Rightarrow P \equiv P^G \ (\mathfrak{P}_{i-1})$$

Bew: Dann = 94_1, nur dann klar.

Hieraus folgt 92_1 und allgemeiner:

2. Sei $\mathfrak{P}_0 \triangleleft \mathfrak{P}$ = p-Sgr. von $\mathfrak{G}$.
Genau dann gibt es $\mathfrak{G}_0 \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P}_0$, wenn

$$P^G \in \mathfrak{P} \Rightarrow P^G \equiv P^{P_1} \ (\mathfrak{P}_0) \text{ für pass. } P_1 \in \mathfrak{P}.$$

Bew: $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_0$ = Hauptreihe von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$ wählen, dann 1.
(Man braucht diese Verlegung nur mit p-ten EW).

folgt wohl auch aus p-Sylowgr. u. p-Faktorgr., Satz 9

Elemen.:

3. Sei $E < \mathfrak{A} \underset{p^s}{\triangleleft\triangleleft} \mathfrak{B} \underset{p^t}{<} \mathfrak{G}$. Genau dann
gibt es $\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, wenn

$$B, B^G \in \mathfrak{B} \Rightarrow B^G \equiv B^{B_1} \text{ mod } \mathfrak{A}, \text{ d.h. } B^{G-B_1} \in \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{N}$ ist (durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) eindeutig bestimmt; $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$.

p-nilpotente Gr.

1. Sei $\mathfrak{G}$ p-auflösbar, $\mathfrak{N} \triangleleft_{p'} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leq \Phi(\mathfrak{P})$. Dann ist $\mathfrak{G}$ p-nilpotent.

Bew.: Induktiv.

2 Frage: Ist die Voraus. der p-Auflösbarkeit entbehrlich?

2a " von Huppert: Folgt aus $\mathfrak{H} \triangleleft \mathfrak{G}$, p-Syl $\mathfrak{H} < \Phi\mathfrak{P}$ stets $\mathfrak{H}$ p-nilpotent?

3. Es gilt wohl: Ist ~~p-Sylowgr.~~ $E < \mathfrak{A}_1 \triangleleft\triangleleft_{p} \mathfrak{A} <_{p'} \mathfrak{G}$

und gibt es zu jedem A, G mit $A, A^G \in \mathfrak{P}$ ein P derart, dass $A^G A^{-P} \in \mathfrak{A}_1$, so gibt es $\mathfrak{G}_1 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$.

4. Sei $E < \mathfrak{A}_1 \triangleleft\triangleleft_{p} \mathfrak{A} <_{p'} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. $\mathfrak{G}$.
Die Vor 3 sei erfüllt, und $\Phi(\mathfrak{P}) < \mathfrak{A}_1$.
Dann ist $\mathfrak{G}$ p-nilpotent.

Bew.: nach ~~$\mathfrak{A}$ p-nilpot.~~ 3 ist

$\mathfrak{G}_1 \triangleleft\triangleleft_{p} \mathfrak{G}$, ~~$\Phi(\mathfrak{P}) <$~~ $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{P} < \Phi(\mathfrak{P})$; nun 1.

1. Sei $\mathfrak{a}$ ss $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$,

$|\mathfrak{g}:\mathfrak{a}| = p^{\alpha}$, $\mathfrak{b}$ enthalte eine p-Sylowgr. von $\mathfrak{g}$

$\longrightarrow$ die Ugr zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ entsprechen eineindeutig denen zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$; d.h. jedes $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{d} < \mathfrak{l} < \mathfrak{b}$ ist mit $\mathfrak{a}$ vertauschbar.

Bew.: $\mathfrak{a}^p = \mathfrak{g}^p$, $\mathfrak{a}^p \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$; $\mathfrak{a}^p \mathfrak{d} = \mathfrak{a}$ wegen Index,
$\mathfrak{a}^p \mathfrak{l} = \mathfrak{a}\mathfrak{l}$.

"Stämme": Man müsste Erweiterung des rationalen Koeffizientenbereichs einer Darstellung, etwa durch endliche Körper, untersuchen.

Permutationsgruppen vom Grade p.

1. Ist p eine Primzahl der Form $p = q^{mt} + q^{(m-1)t} + \dots + q^{t} + 1$, q Primzahl, so gibt es nichtauflösbare Gruppe des Grades p, für welche $\mathfrak{G}_1$ imprimitiv ist (auf $2, \dots, p$).

Bew.: $\mathfrak{G}$ = Kollineationsgruppe des m-dim. projektiven Raums über $GF(q^t)$. $\mathfrak{G}_1$ lasse O fest. Dann sind die Geraden durch O konjugierte Blöcke für $\mathfrak{G}_1$.

2. Nach Itô ist eine nicht auflösb. Gr. vom Grade p, in der die Ord eines Sylow-Normalisators $2p$ ist, 3fach transitiv. Bew mit Brauers Theorie.

Vielleicht kann man das direkt beweisen mit klassischer Darst.-Theorie, etwa indem man für zwei einfache Char. χ_1, χ_2 von $\mathfrak{G}$ betrachtet $\sum_G |f_1\chi_2 - f_2\chi_1|^2$, und nach Sylowgr. ordnet; oder $\sum |\chi|^2 = g$:

Vielleicht geht Entsprechendes für Ord $d/s = 3p$.

1. Frage: Bilden in einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ diejenigen Elemente A, für welche $\{A\}$ mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, eine Gruppe?
Wenn ja, dürfte es in beliebigem $\mathfrak{G}$ stets eine grösste maximale Ugr $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft geben: $\mathfrak{L}$ ss $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$ ss $\mathfrak{G}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{L}$ v $\mathfrak{H}$.

2. Aufgabe: Die Permgr. vom Grade p^3 (mit Ugr vom Typ (p, p^2)) wirklich aufstellen unter der Vor., daß geeignete 2-fach transitive Gr. als bekannt gelten. Analog (p^α, p^β), $\alpha > \beta$.

3. ~~Jedenfalls~~ Sind die 2-tr. Gruppen der Grade p^n die einfachen Bestandteile aller tr. Gruppen der Grade p^n?
Kühne Vermutung: Eine einfache Permgr. des Grades p^n ist stets zweifach transitiv.

1. Nachinvariante Hüllen: $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} \Rightarrow \bar{\mathfrak{a}} \vee \bar{\mathfrak{b}}$.

a. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien p-Gruppen. Dann ist

$\bar{\mathfrak{a}}^p \vee \bar{\mathfrak{b}}$, da $\bar{\mathfrak{a}}^p$ keinen p-Kopf hat und $\bar{\mathfrak{b}}$ keine anderen abelschen Köpfe als p-Köpfe: Also

$$\{\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}\}^p = \bar{\mathfrak{a}}^p \cdot \bar{\mathfrak{b}}^p \triangleleft \{\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}\}.$$

OBdA sei $\bar{\mathfrak{a}}^p \bar{\mathfrak{b}}^p = \mathfrak{E}$. Dann aber ist $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}}$ eine p-Gruppe, also $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a}} \vee \bar{\mathfrak{b}}$.

b. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ endlich. Zu jedem p gibt es eine p-Sylowgr. $\mathfrak{a}_p, \mathfrak{b}_p$ mit $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_p = \mathfrak{a}_p \cdot \mathfrak{b}_p$: Also $\bar{\mathfrak{a}}_p \vee \bar{\mathfrak{b}}_p$.

Ferner ist $\bar{\mathfrak{a}}_p \vee \bar{\mathfrak{b}}_q$ für $q \neq p$. Also $\bar{\mathfrak{a}}_p \vee \bigcup \bar{\mathfrak{b}}_q = \bar{\mathfrak{b}}$.

3. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} \Leftrightarrow {}_p\mathfrak{a} \vee {}_p\mathfrak{b}$ f. alle p.
Dabei bedeutet ${}_p\mathfrak{a}$ die p-Komponente von $\mathfrak{a}$, d.h. das Erzeugnis aller p-köpfigen nachinv. Ugr. von $\mathfrak{a}$, d.h. ${}_p\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{p'}$.

4. Folge: $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{g}_p \cap {}_p\mathfrak{a} \vee \mathfrak{g}_p \cap {}_p\mathfrak{b}$ f. alle p.

102

Schwache Abgeschlossenheit. Frage noch Offen!

1. Sei $\mathfrak{g} < \mathfrak{P} = \mathrm{Syl}\, G$. Dann:

$\mathfrak{g}$ schwach abg. in $\mathfrak{P} \Leftrightarrow [\mathfrak{g} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{g} \triangleleft N_G \mathfrak{P}_1]$.

Bew $\Rightarrow$ klar. $\Leftarrow$: Sei $\mathfrak{P}_1$ die schwache Abschliessung, ist

sei $\mathfrak{P}_1$ die grösste p-Gruppe der Form $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^G, \ldots\}$.

Also $\mathfrak{g}^G = \mathfrak{g}^H$ mit $H \in N_G \mathfrak{P}_1$; $\mathfrak{g}^G = \mathfrak{g}$.

Folge: ?

2. Ist für jedes $\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{g} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P}$

$\mathfrak{g}$ charakteristische Ugr von $\mathfrak{P}_1$,

so ist $\mathfrak{g}$ schwach abgeschlossen.

3. Wenn 1 stimmt, ist jede Gr. mit reg Autom. α nilpotent! Denn dann ist das Zentrum einer bei α festen Sylowgr. schwach abgeschl., + Satz von Grün.