[1. Verlagerung (allgemein): Ist $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z} < \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Z}$ schwach abg. in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} = N_G \mathfrak{Z}$ und hat $\mathfrak{N}$ eine p-Faktorgr., so auch $\mathfrak{G}$.

Bew: p-Sylowgr. & p-Faktorgr. S. 188, Satz 3.]

~~welche G. a. b. wie auf S. 104~~

2. Ist $A_1 \in \mathfrak{A}$, $N_G A_1 \nleq \mathfrak{A}$, so ist $A_1 \in \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{A}^{*A}$.

2'. ebenso: $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}$, $N_G \mathfrak{U} \nleq \mathfrak{A}$, so $\exists H \in (N_G \mathfrak{A} - \mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}^H = \mathfrak{U}$.

Bew: Sei $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{A}$, ~~dann~~ und $G \in N_G A_1$, $G \notin \mathfrak{A}$.

Dann enthält nach 104, $\mathfrak{N}$ ein H mit $\mathfrak{A}^H = \mathfrak{A}$, $H \notin \mathfrak{A}$.

Also ist $H \in \mathfrak{B}^{*M}$ $(M \in \mathfrak{A})$; da H A_1 vertauscht, liegt A_1 nach VIII 86, 3' in $(N_G \mathfrak{B}^M) \cap \mathfrak{A}$, also mit $M = A_2$: $A_1 \in \mathfrak{A}^{*A_2}$.

3. Hieraus folgt, dass alle Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ord weder $/a$ noch $/b$ ist, in den $(\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*)^G$ enthalten sind.

Bew: Sei $G = AB$, $A = G^\alpha$, $B = G^\beta$, $|A|/a$, $|B|/b$.

Dann ist $A \in \mathfrak{A}^{L}$, $B \in \mathfrak{B}^{L}$, also $A^L \in \mathfrak{A}$, $B^L \in \mathfrak{B}$.

OBdA also sei $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Da $A \in \mathfrak{A}^{*\bar{A}}$, liegt A nur in einem einzigen Konjugierten zu $\mathfrak{A}$ (nach VIII 86_4), d.h. nur in $\mathfrak{A}$; andererseits auch in $\mathfrak{A}^B$; so $B \in \mathfrak{B}^*$. ebenso $A \in \mathfrak{A}^*$.

106 noch Produkte nilpotenter gr., $(|\mathfrak{a}|, |\mathfrak{G}|) = 1$

1. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{a}$, $|Z_3 \mathfrak{U}| \nmid a$, so ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{a}^{*A}$ f. ein $A \in \mathfrak{a}$

Bew. wie 105_2.

2. $\vartheta = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^G_{\neq \mathfrak{a}} \to \vartheta < \mathfrak{a}^{*A}$. Denn $|Z_3 \vartheta| \nmid a$ wegen $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}^G < Z_3 \vartheta$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$)

3. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{a}$, ~~...~~ $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{a}^{*A}$, so ist $N_3 \mathfrak{U} < N_3 \mathfrak{a}$.

Bew: $N \in N_3 \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^N < \mathfrak{a}^N \cap \mathfrak{a}$. $\mathfrak{U} < \mathfrak{a}^{*A}$.

un. nö hj! Kleih 6, 7

4. Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{U}^G < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{a}^{*A}$.

Dann ist $\mathfrak{a}^G = \mathfrak{a}$.

Bew: Sonst $\mathfrak{U} < \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{G^{-1}} \neq \mathfrak{a} \to \mathfrak{U} < \mathfrak{a}^{*A}$

5. Sei $E \neq \mathfrak{U} < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{U}^G < \mathfrak{a}$, Dann $\mathfrak{a}^G = \mathfrak{a}$.

Bew: a) $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{a}^{*A}$: 4

b) $\mathfrak{U} < \mathfrak{a}^{*A}$: $\vartheta = \mathfrak{U}^{A^{-1}} < \mathfrak{a}^*$

$\vartheta^{AG} < \mathfrak{a}$

$\vartheta < \mathfrak{a}^{G^{-1}A^{-1}}$

Nach $\overline{\text{VIII}}\ 86_4$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{G^{-1}A^{-1}} \to \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^G$

6. $\mathfrak{a}^G \neq \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^G \cap \mathfrak{a} = E$

Denn sei $\mathfrak{a}^G \cap \mathfrak{a} = \vartheta \neq E$, so $\vartheta < \mathfrak{a}^{*A}$, aber diese Gruppe ist in einer Konjugierten zu $\mathfrak{a}$ enthalten $\overline{\text{VIII}}/86_4$

7. Sei $|\mathfrak{a}| > |\mathfrak{G}|$. Dann ist $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^G) \neq E$. Wid. 14.8.57

d.

2.

3.

$\lhd\lhd$

1. ~~Hat $\mathfrak{G}$ endl. Kompositionsreihe, so ist Sockel $\mathfrak{G} < N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.~~

~~a) $\mathfrak{N} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, einfach: nichtabelsch klar~~

~~b) $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ minimal, $|\mathfrak{N}| = p^n$:~~

~~sei $\mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{B}$~~

~~und $\mathfrak{B}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{N}\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}\mathfrak{N}}$ ist $\mathfrak{N}$ noch minimal normal:~~

~~$[\mathfrak{A}, \mathfrak{N}] < \mathfrak{B}^{\mathfrak{G}}$. Wegen $\mathfrak{B}^{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ also~~

~~$[\mathfrak{A}, \mathfrak{N}] < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A}$.~~

2. Ist $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, so ist $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd\lhd \mathfrak{G}$, ebenso $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

denn $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}} \cap \mathfrak{B}^{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}} \lhd \mathfrak{A}^{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

3. Mit 2 sollte man alle Sätze neu formulieren, wo von einer subnorm. u. einer beliebigen Ugr. die Rede ist. [man braucht vielleicht als Vor. dann nur: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd\lhd \mathfrak{G}$.]

[~~Quatsch: Es ist ja stets $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$!~~ z. B. $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd\lhd \mathfrak{G} \Rightarrow$ ~~$\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$~~ $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$?]

Allgemeines über „einzige" Unter- u. Obergr. (Forts. v. VIII 91)

1. Def: a. Sei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ fest). $\mathfrak{A}$ heisst einzig in $\mathfrak{B}$, wenn
$\mathfrak{A}^G < \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}^G = \mathfrak{A}$.

b) $\mathfrak{B}$ heisst einzig über $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}^G > \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}^G = \mathfrak{B}$.

2. Sei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C} < \mathfrak{G}$. Dann gilt:

$\mathfrak{C}$ einzig über $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{C}$ einzig über $\mathfrak{B}$. ~~$\mathfrak{C}$ einzig über $\mathfrak{A}$~~

und $\mathfrak{A}$ einzig in $\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A}$ einzig in $\mathfrak{B}$.

3. Alle Gruppen, in denen $\mathfrak{A}$ einzig ist, erhält man in den Untergr. der maximalen Gr., in denen $\mathfrak{A}$ einzig ist.

und dual: Alle Gr, über denen $\mathfrak{C}$ einzig ist, sind die Obergr. der minimalen.

4. Sei $\mathfrak{P}$ Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ einzig über $\mathfrak{g}$.
Dann folgt aus $\mathfrak{g} < \mathfrak{A}$ stets: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ ist Sylowgr. von $\mathfrak{A}$.

Bew: $\mathfrak{g} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P}^G$ nach Sylow, wo $\mathfrak{P}_1$ ~~als Sylowgr. von~~ $\mathfrak{A}$
$\rightarrow \mathfrak{P}^G = \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$.

91) 5. $\mathfrak{P}$ Sylowgr. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ einzig über $\mathfrak{g}$, ~~so der Verband~~ der ~~...~~ Gruppen $\mathfrak{a} > \mathfrak{g}$ werden durch $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \cap \mathfrak{P}$ homomorph in den Verband der Gr. zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{P}$ abgebildet.

~~Bew. $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{P} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{P}) \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{P})$~~

$$\mathfrak{g} < \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{g} < \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{a}_1 \vee \mathfrak{a}_2 \to$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{P} = (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{P})(\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{P})$$

Bew. 108.4.

6. Aufgabe: Die in den bisherigen Faktorisierungsarbeiten angewandten Schlussweisen sammeln und verallgemeinern. Zusammen mit VIII 91 in eine Arbeit „Zur Theorie der Faktorisierung von Gruppen". Hierzu gehört

7. Sei $\mathfrak{G}$ faktorisiert, $\mathfrak{G} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Jede faktorisierte (bzgl. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$!) echte Untergr. von $\mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann ist auch jede echte Untergr. von $\mathfrak{G}$ auflösbar welche die Gestalt $\mathfrak{G} = \{\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}\}$ hat,
a wo $\bar{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{b}}$. (~~Denn~~ dies $\mathfrak{G}$ ist faktorisiert:)
(Es sei denn: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$!)

8. Der Durchschnitt von 2 faktorisierten Untergruppen einer faktoris. Gr. $\mathfrak{G}$ ist selbst faktorisiert.

$n = p^2$

Permutationsgruppen vom Grade p^2. [Auch Allgemeineres]

mit einer transitiven Ugr vom Typ (p,p) fasst man zweckmässig als Abbildungen ~~der~~ affinen Ebene über $GF(p)$ auf sich auf; $\mathfrak{P}$ ist die Gruppe der Translationen; identifiziere nach Auswahl eines Pkts O den Pkt P mit der Transl. $\vec{OP}$ (als Rechtsoperator geschrieben). Also $\mathfrak{K}_P = \mathfrak{K}P$ $(P \in \mathfrak{P})$.

1. Ist $O = E$ ein fester Punkt und $\mathfrak{K}$ ein Transitivitätsgebiet von $\mathfrak{G}_E$, ferner P ein bel Pkt ~~und $\vec{OP}$ die Translation die O in P überführt~~, so gilt für jedes $G \in \mathfrak{G}$ mit $E_G = P$:

$$\mathfrak{K}_G = \mathfrak{K}P \quad . \qquad \text{Kurz: } \mathfrak{K}_G = \mathfrak{K}E_G$$

Denn $G = G_E \cdot P$

d.h. der „Stern" $\mathfrak{K}$ um O wird von jedem G mit O „mitgenommen" vermöge der Translation von O nach P.

2. ~~Allgemein~~ Allgemeiner $(\mathfrak{K}P)_G = \mathfrak{K} \cdot P_G$; denn $G = P^{-1} G_E P_G$

3. Ist $\mathfrak{F}$ irgendeine „Figur", d.h. PMenge mit Vielfachheiten, und $\mathfrak{K}\mathfrak{F}$ (für einen Hauptkomplex $\mathfrak{K}$) $= \Sigma KF$, so gilt $(\mathfrak{K}\mathfrak{F})_G = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{F}_G$

4. Ist $\mathfrak{F}$ invar bei $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ („= Festblock") (d.h. Σ von Transsystemen), so auch $\mathfrak{K}\mathfrak{F}$.

Daher bilden die Transs. von $\mathfrak{G}_E$ Ring.

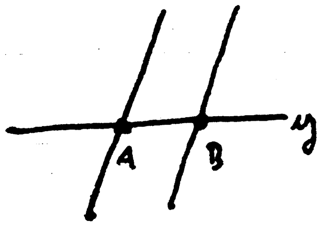
Ist bisher ähnlich für bel. $\mathfrak{G}$ mit reg. Ugr. $\mathfrak{H}$.

5: Im Falle $n = p^2$ und rationaler polarer Komplexe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{(\alpha)}$ (mit $(\alpha, p) = 1$) sind durch $\mathfrak{K}$ gewisse Geraden durch E ausgezeichnet (nämlich $\mathfrak{K}E$); nennt man Q von P aus sichtbar, wenn $Q \in \mathfrak{K}P$, so gilt: G führt die von P aus sichtbaren Pkte in die von P_G aus sichtbaren über. („Sehsterne")

6. Lässt U $\mathcal{F}_i$ fest ($i = 1, 2$) fest, und bilden die Pkte von $\mathcal{F}_1$, von denen aus man genau k Pkte von $\mathcal{F}_2$ „sehen" kann, die Teilmenge $\mathcal{F}_1'$, so ist auf $\mathcal{F}_1'$ fest bei U.

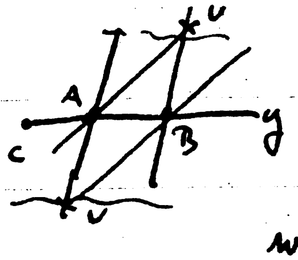
7. Nun p^2: g_E habe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{(\alpha)}$ mit genau k Geraden gemein. d.h. $E + \mathfrak{K} = \sum_{i=1}^{k} \{P_i\}$. Bei $k \leq$ [illegible] lässt G zwei voneinander sichtbare Pkte fest, wenn ihre Verbdgsgerade

$k = 2$:



Aus $A_G = A$, $B_G = B$ folgt (Durchschnitt der beiden Sterne) $g_A = g$.

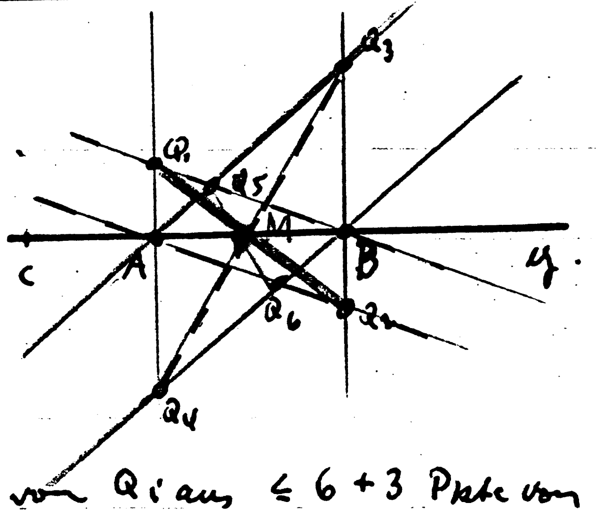
$k = 3$:



Von C aus sind mind. p Pkte von $g \cup u \cup v$ sichtbar, von U, V aus nur je drei, also g fest, wenn $p > 3$. bei $p = 3$, gibt es ein $\mathfrak{K}^*$ mit $k^* = 1$.

Achtung: ist Inzidenzstruktur im Sinne von Buch Dembowski, Arbeiten André

8. $n = 4$:



$\underline{n = p^n}$

$\mathcal{L} = g + \sum_1^6 Q_i$ bl. fest M

bei G, wenn $A_G = A$, $B_G = B$

$Q = \sum Q_i$

$p \geq 11$: von Q_i aus $\leq 6+3$ Pkte von $\mathcal{L}$ sichtbar

von C aus ≥ 11 Pkte (g) sichtbar. also $g_G = g$.

$p = 7$: Vom Mittelpkt M aus ($\mathcal{L}$ Spiegelung an ihm führt $\mathcal{L}$ in sich über) sieht man vermöge π 0 oder 2 Pkte von Q; denn wenn 4 oder 6, sieht man von M aus 11 oder 13 Pkte von Q; von keinem Q_i sieht man so viel, also bleibt M auf Q: $M_G \in Q$. Aber wenn 4 Pkte (allg: k) einer Sichtgeraden auf dieser bleiben, bleibt die ganze Gerade fest.

Vermöge des komplementären ~~Sch~~ Sechsterns π^* (auch $k^* = 9$) sieht man also von M aus 4 oder 6 Punkte von Q und damit von $\mathcal{L}$. Von jedem Q_i aus aber sieht man genau 4 Pkte von g. Folglich sieht man OBdA von M aus auf genau 4 vermöge π^*, d.h. genau 2 vermöge π.

von M aus also 9 Pkte von $\mathcal{L}$ sichtbar, etwa Q_1, Q_2, g.

Allg. Kann man von Q_1 aus Q_2 sehen, so ist $\overline{Q_1 Q_2} \parallel \overline{AQ_3}$, (wegen h 24), also kann man von Q_1 nicht Q_3 sehen. Man kann also ~~Kann man von Q_1 aus Q_6 sehen, so $Q_1 Q_6 \parallel$ von Q_1 aus~~ von jedem Q_i aus höchstens 5 Q_j's sehen, insgesamt ≤ 8 viel.

Wenn man also von M aus 2 Qs sieht, so bleibt M auf g und dann bleibt g fest, oder $M_G = M$. d.h. die Fixgruppe $\mathfrak{U}_{A,B} = \mathfrak{V}_g + \mathfrak{V}_M$, folglich $\mathfrak{U}_{AB} = \mathfrak{V}_g$ oder $= \mathfrak{V}_M$, da keine Gruppe die Vereinigung von 2 echten Untergr. ist.

Also wenn man von M aus ≥ 1 Pkt von Q sieht, so ≥ 2, und $M_G = M$. ~~die von M aus unsichtbaren Q werden~~ nur untereinander permutiert; sind das 4, so führt G noch einen Pkt aus Q 1-1 über, g fest. ~~Also sind's 2: von M~~ aus sieht man 4 Q's ~~außer Q~~. Die 4 Pkte von $g - M - A - B$ gehen in diese Q's über, etwa $Q_1 \cdots Q_4$. Dann sind auf S 112 ~~alle genannten Geraden $\parallel$, ebenso alle ...~~

Aus $M_G = M$ folgt wegen 2-Trans der Kollineation auf g: Lässt G 2 Pkt $A\,B$ auf g fest (oder vertauscht G sie), so bleibt der Mittelpkt von $A\,B$ bei G fest.

Def von M, wenn $O \in g$: $A = P^\alpha$, $B = P^\beta$ $\quad \alpha, \beta \neq 0$

$$(BM^{-1})_{M} = MA^{-1}, \quad \underline{M^2 = AB}$$

$$M(E, Q) = Q^{\frac{1}{2}}$$

$n = p^2$

9. Wie sieht in der Geraden $\overline{PQ}$ mit p Pkten eine Pktmenge aus, die neben P, Q auch stets $(PQ)^{\frac{1}{2}}$ enthält?

Mit E, P enthält sie alle P^{λ}, wo $\lambda = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots$

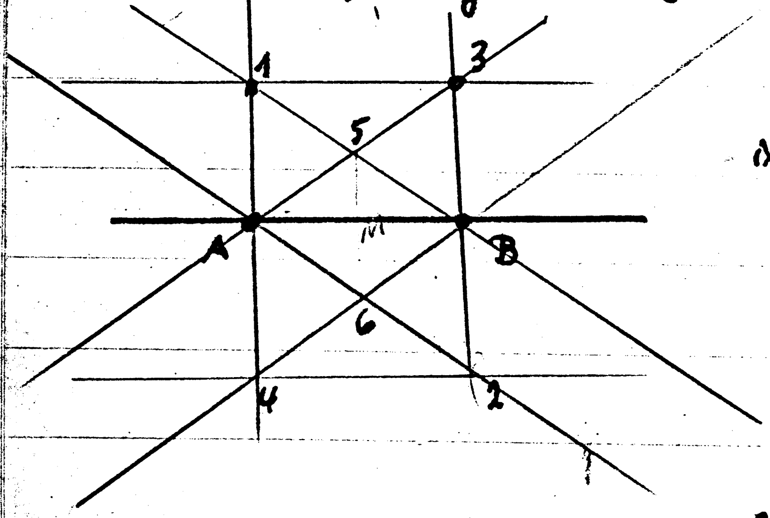
also alle $\lambda = \frac{2k+1}{2^m}$. Wähle m: $2^m \equiv 1$ (p).

dann alle $\lambda \equiv 2k+1$ mod p, d.h. alle λ mod p.

10. Also wenn man im Fall $p = 7$ einen Pkt Q_i von M aus sieht, bleibt g fest bei jedem G ~~mit A_G, B_G fest~~ $\in M_{A,B}$

Weiter sehe man von M aus kein Q.

Kann man von einem Q, etwa Q_1, 7 Pkte aus sehen (kurz: $\sigma(Q_1) = 7$), so kann man Q_6 od. Q_3 sehen, etwa Q_3 und $Q_1 Q_3 \parallel g$. Die Fig sieht dann so aus:



wenn der $\vec{A1} = \vec{p}$, $\vec{AB} = \vec{Q} = \vec{q}$,

ist $\vec{A3} = p + q$ $\quad B1 = p - q$

$A5 = \frac{1}{2}(p+q)$ $(= q + \lambda(p-q) = \mu(p+q))$

Ebenso $A6 = \frac{1}{2}(-p+q)$

$\frac{A6}{2} \pm \frac{q}{2} = M$; $5 - M = \frac{p}{2}$

also könnte man 5 von M aus sehen.

Ist $k = 4$ und $n = p^2$

11. Zusammenfassung: Lässt G zwei Pkte auf einer ~~beliebigen~~ [kam K] geraden g fest, so auch g.

~~Hieraus folgt, da die Kollin. ...~~

12. Nun sei allg. vorausgesetzt: Jedes $G \in \mathfrak{G}$, das $A \neq B$ fest lässt, läßt die Gerade AB fest. Dann führt jedes G, das zwei zu AB $\parallel$ Pkte in ebensolche überführt, die Gerade durch diese beiden Pkte in die Gerade durch die Bildpkte über.

denn die Gr. T der Streckungen in $\mathfrak{G}$ ist transitiv auf diesen $\parallel$ Punktepaaren.

13. Ist $k \geq 3$, so kann man annehmen, daß die Kollin-gr. $\mathfrak{G}^* \supseteq \mathfrak{G}$ auf den k Geraden von K transitiv ist. Dann permutiert nach 12 $\mathfrak{G}_0$ die k Geraden durch O nur untereinander, und $\mathfrak{G}$ ~~besteht nur aus $\mathfrak{G}^*$,~~ ~~$\mathfrak{G}$ besteht nur aus Kollineationen.~~

führt jede zu K $\parallel$ Gerade in eine ebensolche über

~~Die ... das~~ $\mathfrak{G}$ enthält also NT, der alle k Richtungen einzeln fest läßt. Dies ist bei $k = 2$ direkt

11c $\quad n = p^2$

Produkt von zwei Gruppen des Grades p. Bei $k=3$ besteht er nur aus den Streckungen, dann ist G eine affine Gruppe, also $= N_S$ der Translationsgruppe, $p \leq g$.

14. Bei $k=4$, $p \geq 11$ bewirkt die G_1, die g^{ct} fest lässt, auf g nur die Streckgruppe. Denn sonst wäre sie auf g 3-transitiv (da sie die volle p-Hülle der Ord $p(p-1)$ enthält). Aber auf g gibt es ≤ 6 Pkte ausser A, B, von denen aus man etwas von G sieht, die müssten untereinander permut. werden.

15. Bei $k=4$, $p=7$ müsste ~~man~~, wenn G_{AB} auf $g - A - B = h$ mal tr., ~~von jeden der 5 Pkte von h aus gleich viele Pkte der 6 Pkte von G sehen~~ G_g eine 3-tra Gruppe g^* auf g, also vom Grade 7, bewirken. Dann ist aber $g^* \geq A_7$ (denn der grade Teil von g^* ~~hat~~ Ord $\geq 7.6.5.2$, ~~pflt Darst~~ gibt Darst des Grades ≤ 6 von der A_7, also Darst vom Grade 1). Also $h^* \geq A_5$. Ist h^* trans auf G_1, so sieht man von jeden Q aus gleich viel der 5 Pkte von $g - A - B = h$

und umgekehrt: Anzahl der Paare HQ (sichtbar voneinander) ist $\equiv 0 (5)$ und $\equiv 0 (6)$, also 30: Man sieht von Q_1 ganz g, geht nicht.

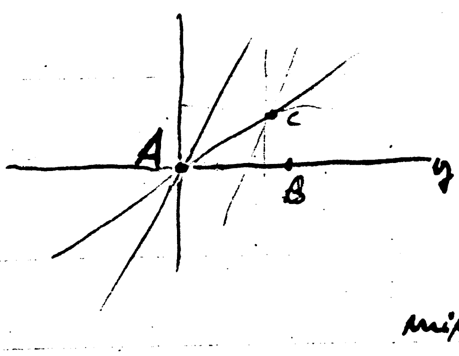
Also hat f^* auf g ein Transsystem T einer Länge $l \leq 3$.

~~von jedem für ein T e~~ sei etwa $Q_1 \in T$: dann ist $f^*_{Q_1}$ noch tra auf g, ~~wegen~~ da $\mathfrak{A}_5$ keine Ugr vom Index 3 hat; also sieht man von Q_1 aus ganz g, geht nicht.

16. Aus 14, 15 folgt: bei $k = 4$ lässt stets $\mathfrak{G}_{AB}$ die Gerade $g = AB$ punktweise fest, wenn $g \parallel \mathfrak{C}$.

17. Ist $k = 4$, $p \geq 11$, so führt ein G, das A fest lässt, jede der 4 Geraden durch A ganz in eine von ihnen über.

~~Ist A A G = A, B_G~~ Denn die $p-1$ Bilder von $g \cdot A$ verteilen sich sonst auf 2 od. 3 Geraden. Ist $B_G = C$, so enthält also eine geeignete (die dichtest belegte) Gerade $\neq AC$ durch A mindestens $\frac{p-1}{3}$ Bilder von $g - A$. Andererseits liegen diese alle auf dem Stern um C, also ist ihre Zahl ≤ 3.

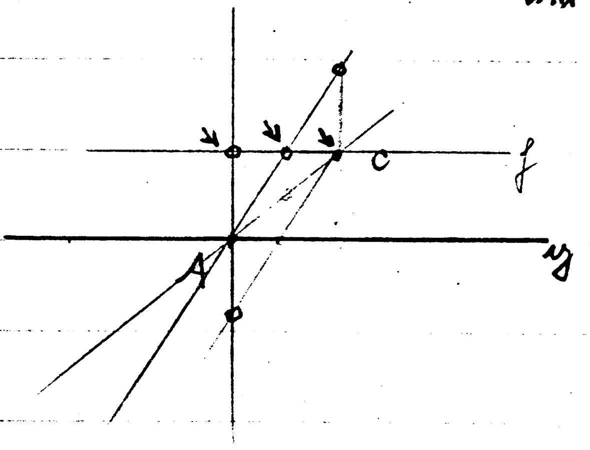


gilt $p \leq 7$.

   $n = p^2$

18. Auch bei $k = 4$, $p = 7$ werden die Geraden durch A nur permutiert unter $\mathfrak{G}_A$.

Bew: Sonst ist das Bild von $g \cdot A$ zu je zwei Punkten auf die drei andern Geraden verteilt nach dem Bew von 17. Also enthält es die drei eingezeichneten (mit C / mit ↘) Punkte; geht nicht, da dann $\mathfrak{G}_G = \mathfrak{f}^n$ wäre. ⚡ Stern A.



Man braucht hierzu nicht ganz 11, sondern nur dies: bleiben 3 Pkte auf g, so $g \to g$.

~~19. Also bei $k=4$ bleiben die 4 Geraden von A einzeln fest bei $\mathfrak{G}_A$, entgegen der Vor., daß A primärer Komplex ist.~~

~~$k=4$ tritt also nie auf. Als kleinste Geradenzahl in einem der primären Komplexen.~~

19. Also bei $k = 4$ werden die vier Geraden als Ganze permutiert bei $\mathfrak{G}_A$. Daher werden die vier Parallelenscharen permutiert. Es gibt NT vom Index $|24$, dieser ist = Streckungsgr.

|| Da er die Translat.gr. $\mathfrak{T}$ als char. Ugr. enthält, ist $\mathfrak{T} \triangleleft \mathfrak{G}$. Ditto bei $k=3$.

$n > p^2$

20. Der Schluss von 18–19 zeigt bei beliebigem k:

Verteilt sich das Bild einer Schgeraden g auf $s>1$ Schgeraden, so enthält die reichste mindestens $\frac{p-1}{s}$ und höchstens $k-2$ Bilder von $g \cdot A$, also ist $\frac{p-1}{s} \leq k-2 \Rightarrow p \leq sk-2s+1$; $s \leq k$; $p \leq (k-1)^2$

$k > 1+\sqrt{p}$

~~Anders.~~

~~21. Bei $p > 3k-5$ werden die Schgeraden nur permutiert.~~

21. Nach dem gleichen Verfahren sieht man unmittelbar ein, dass bei $k=2,3$ die Geraden von $\mathfrak{K}$ permutiert werden.

22. Allgemein: Für reguläre Untergr. vom Typ des N/S einer Gr. der Ord p (und seiner Ugruppen) wird man eine „rechteckige affine Geometrie" betrachten müssen, allgemeiner bei Frobeniusgruppen. Hier gibt es wenige lange Gerade und viele kurze. Nicht je zwei Geraden verschiedener ||-Scharen schneiden sich, doch gibt es stets höchstens einen Schnittpunkt.

$n = p^2$

23. In dem allein offenen Fall, dass die Translat.-gr. $\mathfrak{T}$ der Ord p^2 in ihrem Konj. fremd ist, ist jedes mit einer Translation vertauschbare $G \in \mathfrak{g}$ selbst Translation*.

Daher sind in $\mathfrak{g}$ alle Klassenlängen $\equiv 0\,(p^2)$ ausser den Translationen; diese ~~[illegible]~~ $= \mathfrak{g}/p^2$

Ist $cp^2 =$ Ord $\mathfrak{T} =$ Ord der Kollineationsgr. $\mathfrak{g}^* \supseteq \mathfrak{g}$,

so gibt es $\frac{p^2-1}{c}$ Klassen von El. der Ord p.

Die Faktorgr. $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{T} = \mathfrak{L}$ der Ord c wird auf $\mathfrak{T}$ ohne EW $= 1$ dargestellt und enthält die Elemente $\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$ mod p, $a \not\equiv 0$.

Man könnte über $\mathfrak{L}$ etwas aus der Aufzählung der linearen Gruppen entnehmen

Es gibt für $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{T}$ genau p^2 Untergruppen, alle konjugiert, jede durch ihren Fixpkt gekennzeichnet.

* Es sei denn, G von der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

24. <u>Allgemeines</u>. Gegeben seien $s \cdot p$ Schichtungen und auf eine dazu nicht parallelen Geraden g s Punkte $\{g\}$, die von einem Punkt außerhalb sichtbar sind. ~~Dann~~ Sei $\mathfrak{A}$ die größte Gruppe affiner Abb. von g auf sich, die $\{g\}$ fest lässt.

$n = p^2$

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Streckungen von einem Punkt von g aus, es gibt genau $|\mathfrak{A}|$ Pkte P außerhalb g, von denen aus $\{g\}_{g^*}$ sichtbar ist, und sie liegen auf einer Geraden durch a und entstehen aus a durch die Streckungsgruppe $\mathfrak{A}$ (die durch Ausdehnung der alten auf die Ebene erklärt ist).

Führt AGA g_i in g_{i^*} über, und hält man einen Pkt P fest, so lässt sich $Pg_i \to Pg_{i^*}$ zu einer affinen Abb der Ebene mit Fixpkt P erweitern; diese vertauscht die s Sehstrahlen Pg_i nur unter sich und lässt g fest.

Wenn es also zu einem Pkt $P \notin g$ genau α affine Abb der Ebene mit Fixpkt P gibt, die die s Sehrichtungen nur untereinander vertauschen und g fest lassen, so gibt es genau α Punkte, von denen aus die von P aus sichtbaren Pkte von g sichtbar sind. Sie liegen auf einer g schneidenden Geraden.

25. Ein geordnetes n-tupel von Punkten $\{P_1 \cdots P_n\} = M$ heißt, wenn Transitivitätssystem (= Sehsterne) $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A$ $\neq 0$

$n = p^2$

von $\mathcal{G}_0$ gegeben sind und die Translationsgr. additiv geschrieben wird, ~~die Invariante~~ für jede geordnete Auswahl $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, $1 \le \sigma_\nu \le t$, die Invariante $\sigma(M)$ = Anzahl der Punkte der Ebene, von denen aus P_ν mit einer Richtg aus σ_ν sichtbar ist; d.h.

$$\sigma(M) = \Big| \bigcap_{P_\nu \in M} (P_\nu + A_{\sigma_\nu}) \Big| = \Big| \bigcap_{\nu=1}^{n} (P_\nu + A_{\sigma_\nu}) \Big|$$

d.h. es ist $\sigma(M) = \sigma(M_G)$ für alle $G \in \mathcal{G}$.

26. <u>Punktetripel</u>, kollineare. Geg. 3 versch. Richtgen $y_1 y_2 y_3$. ~~[illegible]~~

3 kollineare Pkte P_ν auf der Geraden g sind genau dann von geeignetem Pkt P aus unter den Richtgn y_1, y_2, y_3 sichtbar, wenn $g \nparallel y_\nu$ und sie durch eine affine Transformation von g in den Schnitt $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, $Q_\nu = P_0 + y_\nu \cap g$ (P_0 bel. fest $\notin g$) überführt werden können.

Berechng von $\sigma\{P_1 P_2 P_3\}$: Wähle $P_0 \notin g$ fest. Schnitte $P_0 + A_\tau$ mit g, gebe die Menge $\mathcal{O}_\tau$; es ist

$$|\mathcal{O}_\tau| = \begin{cases} |A_\tau| - 1 & \text{wenn } g \parallel A_\tau \\ |A_\tau| & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\sigma\{P_1 P_2 P_3\}$

die Anzahl der affinen Abbd von g in sich, für welche

$P_1\alpha \in \mathfrak{q}_{\sigma_1}$, $P_2\alpha \in \mathfrak{q}_{\sigma_2}$, $P_3\alpha \in \mathfrak{q}_{\sigma_3}$ ist.

Nun sind zwei Tripel von $\mathfrak{q}$ genau dann affin äq., wenn sie das gleiche Teilverhältnis haben:

$\vartheta(P_1 P_2 P_3) = \vartheta$ heisst $(P_1 - P_2) = (P_1 - P_3)\,\vartheta$. Es ist $\vartheta \bmod p$, $\vartheta \not\equiv 0, 1$. Es gibt also $p-2$ nicht äq. Tripel.

Für $n = P_1 P_2 P_3$ gilt also:

Also ist $\sigma(n)$ = Anzahl der Tripel $Q_{\sigma_1} Q_{\sigma_2} Q_{\sigma_3}$ mit $Q_\tau \in \mathfrak{q}_\tau$, $\vartheta(Q_{\sigma_1}\ Q_{\sigma_2}\ Q_{\sigma_3}) = \vartheta = \vartheta(P_1 P_2 P_3)$

27. Sei $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{q}$ 3-transitiv. Dann ist $\sigma(n) = \sigma(m)$ für je zwei Tripel n, m von $\mathfrak{q}$; daher gibt es zu jedem $\vartheta_0 = 1, 2, \dots, p-2$ gleich viele Tripel Q_{σ} mit

$$\vartheta(Q_{\sigma_1}\ Q_{\sigma_2}\ Q_{\sigma_3}) = \vartheta_0 .$$

Insbesondere ist die Gesamtzahl <u>aller</u> Tripel $Q_{\sigma_1} \dots Q_{\sigma_3}$ teilbar durch $p-2$:

$\prod_{\nu=1}^{3}{}^{*} |\mathfrak{q}_{\sigma_\nu}| \equiv 0 \quad (p-2)$. Dabei bedeutet $\prod^{*}$: wiederholt sich ein σ, etwa $\sigma_1 = \sigma_3$, so ist der zweite Faktor um 1, (der ev. drittgleiche um 2) zu vermindern.

124 $n = \breve{p}$.

Ausführlich:

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_1 \quad \rightsquigarrow \quad |\varphi_{\sigma_1}|\,|\varphi_{\sigma_2}|\,|\varphi_{\sigma_3}| \equiv 0 \quad (p-2)$

$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \quad \rightsquigarrow \quad |\varphi_{\sigma_1}|(|\varphi_{\sigma_1}|-1)\,|\varphi_{\sigma_3}| \equiv 0 \quad (p-2)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad \rightsquigarrow \quad |\varphi_{\sigma_1}|(|\varphi_{\sigma_1}|-1)(|\varphi_{\sigma_1}|-2) \equiv 0 \quad (p-2)$

Besitzt also (im Fall 3-facher Trans. von G auf g) G einen (nicht notw. primitiven) [illegible] von k Geraden,

so ist für $g \parallel \mathfrak{S}_1$ (mit σ_1 k Geraden, σ_2 restl. $p+1-k = l$ Ger.)

$$
\left.\begin{aligned}
(k-1)(k-2)(k-3) &\equiv 0 \\
(k-1)(k-2)\,l &\equiv 0 \\
(k-1)\,l\,(l-1) &\equiv 0 \\
l\,(l-1)(l-2) &\equiv 0
\end{aligned}\right\}
$$

(mod $p-2$) sagen alle das gleiche!

~~$l \equiv 3-k$~~

wegen $k^3 \equiv k$ besagt das

$$
\begin{aligned}
(k-1)(k-2)(k-3) &\equiv 0 \equiv k^3 - 6k^2 + 11k - 6 \\
(k-1)^2(k-2) &\equiv 0 \equiv k^3 - 4k^2 + 5k - 2 \\
(k-1)^2\,k &\equiv 0 \equiv k^3 - 2k^2 + k \\
\underline{(k+1)\,k\,(k-1)} &\equiv 0 \rightsquigarrow k^3 \equiv k
\end{aligned}
$$

Das gibt

$$
\left.\begin{aligned}
-6k^2 + 12k - 6 &\equiv 0 \\
-4k^2 + 6k - 2 &\equiv 0 \\
-2k^2 + 2k &\equiv 0
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{array}{r|r}
\cdot 1 & 3 \\
 & 1 \\
-3 & -2
\end{array}
$$

p^2

Weiter $6k - 6 \equiv 0$, $\underline{2k-2 \equiv 0}$

Also $p-1 \mid 2k-2$.

Ist $k \leq \frac{p+1}{2}$, also $2k-2 \leq p-1$; folglich muss

$\underline{k = \frac{p+1}{2} \text{ sein bei 3-Tra auf } g}$.

Ist also $\mathfrak{G}$ 3-tra auf g (oder führt $\mathfrak{G}$ auch nur ein affin-Tripel von g in $p-1$ nicht-äqu. Tripel von $\mathfrak{G}$ über), so hat $\mathfrak{G}_0$ nur Transp. der Länge 1, $\frac{p+1}{2}(p-1)$, $\frac{p-1}{2}(p+1)$

d.h. Lgen $= 1$, $\frac{p^2-1}{2}$, $\frac{p^2-1}{2}$.

Ist ferner $p \equiv 1$ (3), so gibt es Tripel $P_1 P_2 P_3$ affin zu $P_2 P_3 P_1 \sim P_3 P_1 P_2$

die Anzahl der hierzu äquivalenten in $\mathfrak{G}_1$ (wo $g \parallel A_1$)

ist also durch 3 teilbar; also $\dfrac{\frac{p-1}{2}\,\frac{p-3}{2}\,\frac{p-5}{2}}{p-1} \equiv 0$ (3) $\to p-5 \equiv 0$ (3) geht nicht.

Folglich ist unter Vor 27 d.h. bei 3-Tra auf g $\Big\}$ $\underline{p \equiv -1 \quad (3)}$.

Ist also $\mathfrak{G}$ 3-tra auf $\mathfrak{G}$ und ist $g \parallel \mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S} = k$ Geraden,

so ist $p-2 \mid (k-1)(k-2)(k-3)$; $p-2$ ist ung.; daher ung. Teil von $k-\nu$ nehmen

$k = 4 \to p-2 \mid 3$ $p = 3, 5$ geht nicht

$5 \to p-2 \mid 1 \cdot 3 \cdot 1$. " "

$6, 7 \to p-2 \mid 5 \cdot 3 \to p = 5, 7, 17 \to p = 17$

$8 \to p-2 \mid 7 \cdot 3 \cdot 5 \to p = 17 \; 23 \; 37$

$9 \to p-2 \mid 7 \; 3 \to p = 23$

$n = p^2$

Sei G 3-tra auf q || G_1 (G_1 k Geraden) . 3

Ist $p \equiv 1$ (3), so ist $3 \mid \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{p-2}$. Stimmt sowieso.

28. ~~Die Punkte, von denen aus man die Ecken eines gegeb. Dreiecks in 3 vorgegebenen, nicht seitenparallelen Richtungen sieht, liegen auf einer Geraden. Ihre Anzahl ist 1, 2 oder 3. Sie gehen durch die Gruppe affiner Streckungen der Ebene auseinander hervor, die das Dreieck gestattet.~~ 3.

„Streckg." = richtungserhaltende affine Abb.

29. Bei einer trans. Permgr. G des Grades p^2 mit einer trans. Ugr. vom Typ (p,p) sind die Grade der irred. Bestandteile 1, $f_i = k_i(p-1)$, wenn die Transsysteme von G_1 die Grade $1, t_i = k_i(p-1)$ haben, d.h. bei passender Numerierung sind die $f_i = t_i$.

Die Eigenwerttafel der Matrizen V_i sieht so aus: s. Anm. 40, S. 138

Grad 1	1	$k_1(p-1)$	$k_2(p-1)$	..	$k_t(p-1)$
$f_1 = k_1(p-1)$	1	$p-k_1$	$-k_2$	..	$-k_t$
$f_2 = k_2(p-1)$	1	$-k_1$	$p-k_2$	..	$-k_t$
$\vdots$					
$f_t = k_t(p-1)$	1	$-k_1$	$-k_2$	–	$p-k_t$

Reduktion verfolgen!

30. Frage: Gilt die Aussage $f_i' = f_i$ vielleicht stets, wenn die Periogr. G eine nej abelsche Ugr enthält?

31. Seien g, f Sch-Gerade. Ein $G \in \mathcal{G}$ führe l Punkte von g nach f über. Dann gilt: ($p \neq 2$)

a) $l = k \Rightarrow g^G = f$. b) $l \geq k-1$ ($k \leq \frac{p+1}{2}$) $\Rightarrow g^G = f$.

Bew: a) g besteht aus allen Pkten der Ebene, von denen aus alle k g_λ sichtbar sind. Entspr. f für die "Innen" g_λ.

b) Es gibt höchstens $k-1$ Pkte $\notin g$ von denen aus alle g_λ sichtbar sind. Wenn G kein weiteres g ~~…~~ nach ~~…~~ f bringt, bringt es alle $p-(k-1)$ Pkte von $g - \{g_\lambda\}$ ~~…~~ in die $k-1$ Aussenpkte von f, also ~~…~~

die Aussenpkte von g müssen ystabil in die von f gd.

~~$p-(k-1) \leq k-1$~~, ~~$p \leq 2k-1$~~ ~~$k \geq \frac{p+1}{2}$~~, $k = \frac{p+1}{2}$

[also $p-(k-1) = k-2$], ~~…~~

Diese liegen auf einer Geraden σ durch ein $\eta_0 \in f$.

Da $p-(k-1) \geq 2$, ist σ Schgerade. Von η_0 aus sieht man also $p-(k-1) + p$ Pkte von $f + f^*$. Also $= p+k-2$

$\eta_0 \notin g^G$, denn von einem Aussenpkt von g aus sieht man höchstens die ~~$k-1$~~ Aussenpkte + $k-1$ Pkte von g, also $2k-2$ Pkte, und ist $2k-2 < p+k-2$.

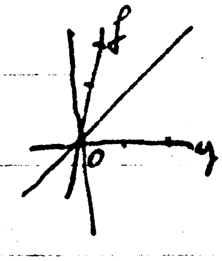
128 Also ist η_0 ... eine der g_1, etwa $\eta_0 = g_l$.

Die Streckungen, die die gemeinsamen Schnittpunkte von $g_1 \cdots g_l$ ineinander überführen, lassen also $\eta_0 : g_l$ fest, Ord $\le l-1$, also gibt es nur $\le l-1$ Schnittpunkte, d.h. Anzahl d. Aussenpunkte ist $\le k-2$, also $= k-2$.

~~$(g_1 \cdots g_l)^G = g^*$. Also $k-2 \mid p-1$ als Ord ... der Streckgruppe. Andererseits $p-1 = p+1-2 = 2k-2 = 2(k-2)+2$. Also $k-2 \mid 2 \Rightarrow k = 3, 4 \Rightarrow p = 5, 7$.~~

G führt also die $p-(k-1)$ ... Punkte von $g - \{g_1\}$ über in die $k-2$ Aussenpunkte auf g^*, $p-(k-1) \le k-2$, $p \le 2k-3$ entgegen $p = 2k-1$.

32. Kurzer Beweis dafür, daß bei $\begin{cases} k \ge 4 \\ p \ge 7 \end{cases}$ G jede Schnittgerade in eine Schng. überführt.



g hat ≥ 6 Punkte $\ne 0$. Es gibt einen Selbstrahl f durch 0, der ≥ 2 Bilder enthält, mit 0 zusammen also ≥ 3. Nach 31 ist $g^G = f$.

32a **Frage**: Sind die Obergruppen der vollen affinen Gruppe des Grades 2 über $GF(p)$ alle auf Ω_{p^2} 3-trans?

33. ~~Bei~~ $k=5$, $p\geq 11$ geht jeder Schnittpunkt in Schnittpunkt über.

Bew: $p\geq 13$: dann verteilen sich die ≥ 12 Bildpunkte von $g=0$ auf 5 Geraden, eine fehlt ≥ 3 Bilder, mit 0 zusammen also 4, dann $g^G = g$ nach 31.

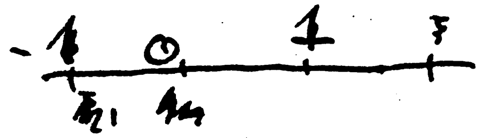
Kürzer: 36 $p=11$. G bringe 3 Pkte $g_1 g_2 g_3$ von g nach g.

α) Bleiben die g_i bei keiner aff. Abb. von g fest, so gibt es höchstens $k-1=4$ Schnittpunkte für sie, ebenso für die g_i^G. Aber $(g-1+i)^G$ ~~die~~ Schnittpunkte für g_i^G, $p-3\leq 4$ gleichzeitig.

β) Bleiben die g_i^G bei 3 affinen Abb. fest, so verteilen sich die Schnittpunkte ~~der g_i^G~~ auf ≤ 4 Geraden durch ein $\eta_0 \in g$ und es gibt mindestens 8. Liegen 3 davon auf einer Geraden durch η_0, so ist diese das Bild von g (weil für $l=4$ schon bekannt, 31). Also liegen je zwei auf einer Geraden durch η_0; also sind das 4 Schnittgeraden, von η_0 aus kann man alle 19 Pkte sehen, von $\eta_0^{G^{-1}}$ aus auch, folglich $\eta_0^{G^{-1}} \in g$; da $\eta_0 \neq g_i$ ~~...~~, liegt Fall $l=4$ vor.

γ) ~~Bleiben~~ Also die g_i bei zwei aff. Abb. fest, ~~so ist~~ ~~etwa g_3 die Mitte von g_1^G, g_2^G. Von g_3^G aus sieht man alle 19 Pkte, also von g_3 aus, also g_3 Mitte g_1, g_2.~~

und man kann dieses Tripel auf 8 Arten affin in die 4 Schnitte ξ des Sterns durch $\eta^A \neq y$ mit y abbilden; jedes Bildtripel gestattet 2 Autom., bestehend aber aus zwei Pkten mit Mittelpkt.



Also sind 3 Pkte ξ_i gleich $0, 1, -1$; $\xi_4 = \xi$.

Dann ist wegen $(0\ 1\ \xi)$ $\quad \xi = 2$ oder $\frac{1}{2}$ ~~(oder -1)~~

und " $(-1\ 0\ \xi)$ $\quad \xi = -2$ " $-\frac{1}{2}$

aber $2, \frac{1}{2} \neq -2, -\frac{1}{2}$ (mod 11). Wid!

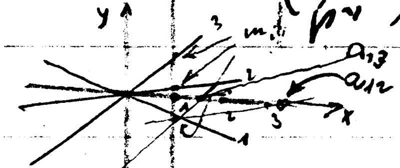
34. Schränkt man die $k(p-1)$ Funktionen, die auf jeweils einer der $p-1$ Parallelen (eigentlichen) zu einem Sehstrahl 1, sonst 0 sind, auf die $k(p-1)$ vom Zentrum verschiedenen Pkte des Scheinsterns ein, so haben die Funktionswerte bei natürlicher Numerierung der Pkte u. Fktionen die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & D(m_2-m_1) & D(m_3-m_1) & \cdots & D(m_p-m_1) \\ D(m_1-m_2) & 0 & D(m_3-m_2) & \cdots & D(m_p-m_2) \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \end{vmatrix}$$

Dabei bedeutet $D(a)$ die Matrix, für die bei $a \not\equiv 0$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\ \vdots\\ p-1\end{pmatrix}\cdot a \equiv D(a)\begin{pmatrix}1\\2\\ \vdots\\ p-1\end{pmatrix} \mod p,$$

und $D(0) = 0$.

Genauer: 

$\Delta = \det(D(a_{ik}))$ mit $a_{ik} = \frac{m_i - m_k}{m_k}$, m_i: Richtungsfaktor der Schergeraden.

Wenn $\Delta \neq 0$, kann man den transitiven Konstituenten von G_1, der den Grad $k(p-1)$ hat, zu einer irreduziblen Darstellung von G erweitern.

Nun ist $\Delta = 0$, wenn $2 \nmid k$, da für einen „primitiven" EW von den $D(a)$ die Det schiefsymmetrisch, also $= 0$ ausfällt.

Ferner ist bei $k = 4$

$$\Delta = 0 \iff p \equiv 1 \ (3).$$

Genaue Rechnung ergibt

$$\Delta = \det\left((\eta,1)^2 - 2D(\eta-1)\cdot(0\ 1) \right)$$

mit $(a\ b) = D(a-b) - D(a) + D(b)$, und passendem η.

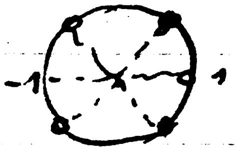
Ist nun $\eta \equiv \zeta^e$, $\eta - 1 \equiv \zeta^f$ (mod p), ζ Primitivwurzel, und $D(\zeta) = Z$, so ist $(\eta\ 1) = Z^f - Z^e + E$, $D(\eta-1) = Z^f$, $(0\ 1) = E + Z^{\frac{p-1}{2}}$. Es wird also $\Delta = 0$ genau wenn für einen geraden EW ε von Z gilt:

$$(\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1)^2 = \varepsilon^f (1 + \varepsilon^{\frac{p-1}{2}})^2 \ ;$$ d.h.

$n = p^2$

a) wenn $\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = -1$: $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1)^2 = 0$

$$\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1 = 0$$



Also ε^f primitive 3te EWurzel.

ε^e — 6 — —

Daher $p \equiv 1$ (3). Umgekehrt ist bei $p \equiv 1$ (3)

ε primitiv, $f = \frac{p-1}{3}$, $e = \frac{p-1}{6}$ wählen gibt $\Delta = 0$.

b) wenn $\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = +1$: $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1)^2 = \varepsilon^f \cdot 4$

$$\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1 = -\varepsilon^{\frac{f}{2}} \cdot 2$$

$$(\varepsilon^{f/2} + 1)^2 = \varepsilon^e$$

$$\varepsilon^{f/2} - \varepsilon^{\frac{e}{2}} + 1 = 0$$

Dann $\varepsilon^{f/2}$ primitive 3. EW, also $p \equiv 1$ (3). —

Umgekehrt kann man $\varepsilon = (\text{primitive } (p-1)\text{te EW})^2$

nehmen, e und f wie oben.

Also bei $k = 4$, $p \equiv 1$ (3) ist $\Delta = 0$.

" $p \not\equiv 1$ (3) " $\Delta \neq 0$.

NB! Überbruppen vom Grad p^2 siehe VII [76]

p^2

35. Wenn aber k gerade und $p = 2^\alpha + 1$, so ist $\Delta \neq 0$.
Denn dann ist für jede $(p-1)$-te Einh.Wu. ε
$\varepsilon \equiv 1 \ (q)$, $q|2$, also $\Delta_\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix} = (k-1)(-1)^{k-1} \not\equiv 0 \ (q)$.
so $\Delta = \prod_\varepsilon \Delta_\varepsilon \neq 0$.
Dagegen bei k ungerade ist stets $\Delta = 0$, da ein $\Delta_\varepsilon = 0$ (ε primitiv).

36. Bei $k=5$, $p=11$ lässt $G \in \mathcal{G}$ von jeder Geraden g mindestens 4 Pkte kollinear.
Bew: Ann: ≤ 3. Von den $11 \cdot 10/2 = 55$ Paaren (ξ^G, η^G) mit $\xi, \eta \in g$ müssen $\geq \frac{55}{5} = 11$ auf die gleiche der ~~5~~ 5 Schrichtungen fallen. Gibt es in der zugehörigen Parallelenschar x_i Geraden mit jeweils i Bildpunkten von g, so ist

Anzahl der Paare dieser Richtung

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11, \qquad x_2 + 3x_3 \geq 11$$

also $x_1 + x_2 \leq 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $3x_3 = 11$, geht nicht.

Ebenso,

37. Bei $k < \frac{p+1}{2}$ lässt G von jeder Geraden g mindestens 4 Pkte kollinear. Denn sonst ist

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = p, \qquad x_2 + 3x_3 \geq \frac{p(p-1)}{2k}$$

$$1 \leq x_1 + x_2 \leq p - \frac{p(p-1)}{2k}, \quad 2k \geq p.$$

$\tilde{p}$

38. Bei $k=5$, $p \geq 11$ ist G affin.

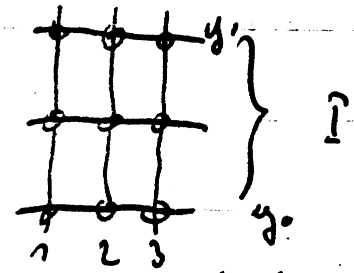
Bew.: nach 37 führt G von jeder Geraden g 4 Pkte in kollineare über. Diese haben höchstens 4 Schzentren, also gehen von den (≥ 7) anderen Pkten von g mindestens 3 noch in die Gerade durch die 4 koll. Bildpkte über, insgesamt also 7. Deren gemeinsame Schzentren sind nur die uktv. Geraden.

39. Bei $k=6$, $p \geq 11$ lässt G von jeder Geraden g vier Punkte kollinear.

$p=11$: Sonst enthalten die 6 Parallelenscharen, nach fallender Anzahl der Bildpaare (aus g^6) geordnet, die folgenden Paarzahlen: (55 Paare sind's insgesamt)

			Paare:	Dreiergeraden:	Zweiergeraden
k	$\frac{55}{6}$	I	$=10$	$\boxed{3}$	1
	$\frac{45}{5}$	II	≥ 9	3	0 od. 1
	$\frac{35}{4}$	III	≥ 9	3	0 od. 1
	$\frac{25}{3}$	IV	≥ 9	3	0 od. 1
	$\frac{15}{2}$	V	≥ 8		
	$\frac{5}{1}$	VI	≥ 5		

Nun ist der Schnitt von zwei Dreiergeraden stets in y^G, da nur von y aus 6 Pkte von y sichtbar sind. Also je zwei Dreierbündel schneiden sich in 9 Pkten, und zwar gehen alle Dreierbündel II, III, IV durch die 9 Pkte ~~parallel~~ in □



Projiziert man y_0 mittels II auf y_1 und mittels II, III, IV zurück auf y_0, so erhält y_0 drei affine Abbildgen, die 1, 2, 3 nur untereinander vertauschen: gibt $3 \mid p-1$, $3 \mid 10$, geht nicht.

$p \geq 13$: (37)

40. || Bei $\begin{cases} k = 6 \\ p \geq 11 \end{cases}$ ist y affin.

Bew: ~~Einige 4 Pkte kommen von jeder y.~~

~~Vier Pkte von y sind von höchstens 5 Pkten ausserhalb y aus sichtbar, wenn sie keine aff. Abb. von y gestatten. a) dies werde zunächst angenommen. Dann werden von G noch mindestens $7-5=2$ Pkte auf die Gerade durch die 4 Bildpunkte abgebildet, insgesamt also 6, dann ist y^G Gerade~~

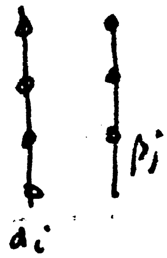
b)

Bew: Wenden!

136 $k=6$ $\tilde{p}$

a) Löst G 5 Pkte von $\mathfrak{y}$ kollinear, so $\mathfrak{y}^G$ gerade nach 31. c)

b) G lasse nur 4 Pkte von $\mathfrak{y}$ kollinear (nach 39). Zu einer Parallelen, (das ~~für die welche Bildpunktpaare von $\mathfrak{y}$ enthält~~) möge es zwei Geraden geben, von denen eine 4 Bildpkte a_i von $\mathfrak{y}$ enthält, die andere ≥ 3: β_j.



Von den 6 Geraden $a_1\beta_j$, $a_r\beta_6$ müssen zwei parallel sein (da es nur 5 nichtzentrale Schiebungen gibt), also kommt die a

Koordinatendifferenz $a_i - a_r$ unter den $\beta_j - \beta_l$ vor. β_i

wenn jede Diff. $\beta_i - \beta_j$ unter $a_i - a_j$ ($i, j = 1\,2\,3$)

Es gibt also nur ≤ 6 Differenzen $a_i - a_j$, da es ≤ 6 Differenzen $\beta_i - \beta_j$ gibt. [Nun gibt es nur ein Tripel unmöglich (bis auf {u. Spiegelung / Translation}), dessen Differenzen unter 6 gegebenen Werten enthalten sind [zum Bew. nimm ein Tripel als $-1, 1, a$ an].

Dann kommt unter den 12 Differenzen entweder eine (etwa 1) dreimal vor, oder jede zweimal. Im ersten Fall gibt's nur

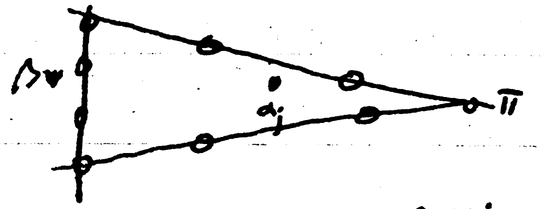
$0\ 1\ 2\ 3$, im zweiten $0\ 1\ a\ a+1$ mit $a+1 = \pm 1, \pm a, \pm(a-1)$

und das gibt nur $-2\ -1\ 0\ 1$ oder $-\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 1$. In jedem Fall also bis auf Affinität $0\ 1\ 2\ 3$. Daher

gibt's unter den β_j nur $\pm 1, \pm 2$ als Diff. (wegen $a_j = 0\,1\,2$), aber auch ± 3 (wegen $a_j = 0, 1, 3$), geht nicht. c) Weiter

c) gebe es in y^6 keinen Vierer mit parallelem Dreier.

Dann gibt es ausserhalb eine Vierergerade ≥ 7 ($p-4$), eine davon Π isoliert auf seiner || zum Vierer; die ≥ 6 ($p-5$) Geraden Πa_j ($\Pi \beta_\nu$)



verteilen sich auf 4 Richtgn, sind höchstens doppelt besetzt: gibt keine β 3-fach besetzt zwei neue Vierer. ~~Die Dreiecke~~.

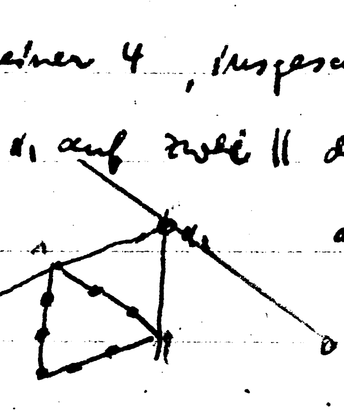
sodass also ist $p-5 \leq 8$, $p = 11$ oder 13,

α) $p=13$: ~~a_j gelten~~ Nun gibt es noch mindestens $a_1, a_2, .., a_4$ ausserhalb der Dreiecksseiten. Das gibt $a_i a_j$ || zu einer Dreiecksseite, denn gibt es a_1, a_2, a_3 auf einer Geraden, gegen Vor. b.

β) $p=11$: Eine Parallele zu a_1, die nur einen Pkt enth., enth. entweder noch 2, nämlich die Schnittpkte mit den nicht || Dreiecksseiten, geht nicht nach Vor. c); oder sie geht durch die der ersten Seite gegenüberliegende Ecke. ~~Sie enthält also 2 Pkte [illegible] Pkte, die 3 andern Schnittgn [illegible] enthalten also mindestens $p-3$ [illegible] Pkte.~~

α) Wenn a_1 auf keiner || durch eine Ecke liegt, dann sieht man auf den 3 restlichen Geraden durch a_1 ≥ 10 weitere Pkte $\neq a_1$, also auf einer 4, insgesamt mit a_1 5, geht nicht.

β) Wenn a_1 auf zwei || durch Ecken liegt: ~~Die 8 übrigen liegen auf 3 Geraden durch a_1, von diesen sind aber zwei 3-fach besetzt, müssten beide die enthalten, geht nicht.~~

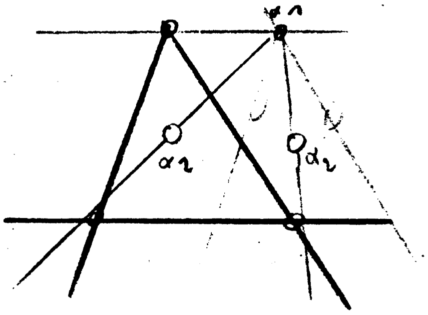


 Zwei von den $\tilde{\gamma}$

~~Die~~ drei übrigen Geraden durch α_1 enthalten jede

0 oder 3 Pkte $\neq \alpha_1$, da sie alle 3 Dreiecksseiten schneiden.
Die dritte enthält dann nur 2, denn
Gesamtzahl = 11 ~~[illegible]~~. Alle diese 8 Pkte liegen
daraufhin den Dreiecksseiten, und α_2 soll es also nicht tun.

8) Wenn α_1 auf genau einer Parallelen durch eine Ecke liegt, ~~[illegible]~~ liegen auf diese // 2, auf den beiden anderen Seitenparallelen durch α_1 je 0; die auf den 2 weiteren Schgeraden durch α_1 zusammen 9, also je 3; hiernach liegt α_2 auf ~~der~~ leider Geraden, die α_1 mit einer der beiden unbenutzten Ecken verbinden, gäbe $\alpha_2 = \alpha_1$.



Lit. zu p^2
auf S. 158

40. Die Elemente der p-Sylowgr. haben folgende Charaktere:

	G	$P \in \mathfrak{K}$	$P \in \mathfrak{L}$	..
Grad $f_1 = 1$	1	1	1	1
$f_2 = k(p-1)$	$k(p-1)$	$p-k$	$-k$	$-k$
$f_3 = l(p-1)$	$l(p-1)$	$-l$	$p-l$	$-l$
$m(p-1)$	$m(p-1)$	$-m$	$-m$	(
⋮	⋮	⋮	⋮	
	1	Anzahl $k(p-1)$	$l(p-1)$	–

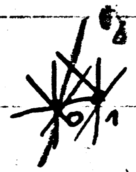
40a. Es genügt nachzuweisen, dass eine ganze Klasse konjugierter Elemente affin ist; die p-Sylowgr. des vorstehenden Normalteilers ist dann normal in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ affin.

41.* Folglich ist, wenn die Sylowgr. elementfremd und $k>2$,

$$k^2(p-1)^2 + s\left[k(p-1)\cdot(p-k)^2 + (p+1-k)(p-1)k^2\right] \le \sum|\chi_2|^2 = g$$

$$k-1 \ge n_{01} = \frac{g}{sp^2(p-1)} \ge \frac{k^2}{sp}\left(1-\frac{1}{p}\right) + k\left(1-\frac{k}{p}\right)^2 + (p+1-k)\cdot\frac{k^2}{p^2}$$

Ord der affinen Gr in $\mathfrak{g}$, die zwei Pkte 01 fest lässt *

da  man von 1 aus nur $k-1$ von 0 verschiedene Pkte der Gerade g durch 0 sehen kann die bei N_{01} ausser $\overline{01}$ noch fest bleibt. Es ist

$$N_{01} = \begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}$$ bei passenden Koordin.

N_{01} ist halbregulär auf g.

Also z.B. $k-1 \ge n_{01} > k - \frac{2k^2}{p} + (p+1)\frac{k^2}{p^2} = k - \frac{k^2}{p} + \frac{k^2}{p^2}$

also $$\frac{k^2}{p} - \frac{k^2}{p^2} - 1 > 0$$

$$k^2 > \frac{p}{1-\frac{1}{p}}$$

* Achtung: Hier ist vorausgesetzt, daß es ein $P \in \mathfrak{P}$ gibt das unter $N_1\mathfrak{P}$ nur in Potenzen von sich übergeht! Oh. $N_1\mathfrak{P}$ transitiv, abelsch über $\mathfrak{P}$. $p^2 \mid g$,

6.8.57

42.* Ebenso ist, wenn $2k \le l$, Also $k = \sqrt{p}$ bei Fremdheit der Sylowgr.!

$$(k^2+l^2)g = \sum_{\mathfrak{g}} |l\chi_2 - k\chi_3|^2 \ge s\sum_{p} = s\cdot\left[k(p-1)l^2p^2 + l(p-1)k^2p^2\right]$$

$$k-1 \ge n_{01} \overset{*}{=} \frac{g}{p^2(p-1)s} \ge \frac{kl^2+lk^2}{l^2+k^2} \ge k.$$

wegen $k>2$ sieht man von 1 aus noch einen Pkt $\neq 0$ von g, also sieht man n_{01} Pkte $\neq 0$, also $n_{01} \le k-1$. Fortsetzg XI 241

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ nilpotent, minimal unauflösbar.

Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1 \times \dots$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2 \times \dots$ mit $\mathfrak{P}_i$ p-...

$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ist Sylow-$\mathfrak{G}$.

(3a) Es ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$. Bew: VIII 90

(1) Jeder eig NT $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$ macht $\mathfrak{A}\mathfrak{N} = \mathfrak{B}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$.

2. Für jede faktorisierte echte Ugr $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}^*$ aufl., $\mathfrak{P}^* \vee \mathfrak{Q}^* \vee \mathfrak{R}^* \vee \dots$ Bew: [31] Satz 4.

2a $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ ist entweder $= \mathfrak{G}$ oder eine p,q-Gruppe

3. Jede Obergr. $\neq \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ ist fremd zu Zfr $\mathfrak{B}$ (enth. also keinen NT von $\mathfrak{B}$)

Sonst $\mathfrak{A} \le \mathfrak{z} \neq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} = \cap\, \mathfrak{z}^G = \cap\, \mathfrak{z}^B \neq \mathfrak{E}$ & $\mathfrak{A}\mathfrak{N} \le \mathfrak{z} \neq \mathfrak{G}$

Wid. zu (1)

4. Für jede echte faktorisierte Ugr $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{G}$ gilt nach 2 auch

$\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2$; $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1 \vee \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2\mathfrak{R}_2$; ...

Bew: da $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2| = |\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$, ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$

5. Um weiter zu kommen, stelle man vielleicht im Fall, dass $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) \neq 1$ ist, mehr behaupten als blosse Auflösbarkeit von $\mathfrak{A}$ zu. Dann hätte man stärkere Induktionshilfsmittel. Man müsste diese Untersuchung, was man behaupten kann, eröffnen mit dem Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_2$. dann $(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2)$

1. $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q})\mathfrak{P}_2$ besitzt, wenn $\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{E}$, stets einen Normalteiler der Ord p^r. Genauer: 2.

Bew. Sonst sei $\mathfrak{N}$ der maximale q-NT. Dann ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{P}_1 < \mathfrak{Z}_\mathfrak{G}\mathfrak{N}$; ~~...~~ ist $\mathfrak{M}_\mathfrak{N}$ minimal NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}^* \times \mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}^* \triangleleft \mathfrak{G}$.

Genauer!

2. $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q})\mathfrak{P}_2 \rightarrow \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{P}} < \mathfrak{P}$.

3. In $(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2)$ ist $\mathfrak{G}^* = \mathcal{N}_S\mathfrak{P} \cap \mathcal{N}_S\mathfrak{Q}$ nilpotent.

Denn $\mathcal{N}_S\mathfrak{P}$ ist faktorisiert, ebenso $\mathcal{N}_S\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{P}^*\mathfrak{Q}^*$, $\mathfrak{P}^* < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}^* < \mathfrak{Q}$

$[\mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*] < \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$.

[$\mathfrak{G}^*$ ist ein Sylow-Systems Normalisator.]

Fortsetzung von S. 140 ~~oben~~ 2f:

4. Ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}\mathfrak{P}$, so ist $\mathcal{N}_S\mathfrak{Z}$ faktorisiert.

Bew: $\mathfrak{Z}$ ist eine im Zentrum von $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^a \times \mathfrak{Z}^b$ liegende Sylowgr von $\mathfrak{Z}$, also einzig in $\mathfrak{Z}$. [Es ist $\mathfrak{Z} < \mathfrak{Z}_S\mathfrak{P}$, da $\mathfrak{Z}^a < \mathfrak{Z}_S\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Z}^b < \mathfrak{Z}_S\mathfrak{P}_2$]

Nach VI4 ist $\mathcal{N}_S\mathfrak{Z}$ faktorisiert.

Forts. von S. 140/1

1. $E \neq z_1 \in \mathfrak{a}, E \neq z_2 \in \mathfrak{b} \rightarrow$ [redacted] $[z_1, z_2] \neq E$.

sonst zentral. $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{a}, z_2\}$ das Z_1.

2. $\mathfrak{Z}\mathfrak{g} = Z_3 \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{Z}\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}_{\ldots} \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{g}^{\mathfrak{b}}_{\ldots} = \mathfrak{Z}\mathfrak{g}$

denn zentr. $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{p}_2$

3. $\mathfrak{N}_3 Z_3 \mathfrak{p}$ direkt faktorfrei. Bew 2.

4. $\mathfrak{z}_i = Z\mathfrak{Z}\mathfrak{r}\,\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{U} = Z_3\{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2\} \rightarrow \{\mathfrak{a}, \mathfrak{U}\} \cap \{\mathfrak{b}, \mathfrak{U}\} = \mathfrak{U}$ ist fakt.

$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{U}\}$ zentr $\mathfrak{z}_1$, $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{U}\}$ zentr $\mathfrak{z}_2$

~~5. $Z_3 Z\mathfrak{Z}\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}$ = ... $\mathfrak{a}$ ... (1)~~

5. $\mathfrak{b} \cap Z_3 \mathfrak{a} = E$ (wenn $|\mathfrak{b}| \neq p^2$).

Untersuchen Sonderfall $\mathfrak{g} = (\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}_1)(\mathfrak{q}_2 \times \mathfrak{R})$

Hier $\{\mathfrak{p}, z\} = \mathfrak{g}$ wenn $z \in Z\mathfrak{Z}\mathfrak{r}\,\mathfrak{q}_2$

Faktorisierg.?

1. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}_1$ ~~usw~~, $\mathfrak{Z}_2 = \dots$.

Dann ist $\bar{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2$ abelsch.

~~Bew: $\mathfrak{Z}_1$ abelsch, denn $Z = Z_1 Z_2$, $Y = Y_1Y_2 \in \mathfrak{Z}$~~

~~$\Rightarrow$ $ZY = Z_1 Y_1 Y_2 Z_2$ $\Rightarrow$ $(ZY)_1 = Z_1 Y_1$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{Z}_1$ abelsch~~

~~Ferner $ZY = Z_1Y_1 \cdot Y_2Z_2 = Z_1Y_1 \cdot Z_2Y_2$~~

~~$= Z_1Z_2Y_1Y_2$, also $Z_2 \vee Y_1$.~~

Bew. $\bar{\mathfrak{Z}}' \le (\mathfrak{Z}\mathfrak{G}_2)' = \mathfrak{G}_2' \le \mathfrak{G}_2$; ebenso $\le \mathfrak{G}_1$; $= 1$.

2. Aufgabe: Gruppen $\mathfrak{G}$ der Ord $p^\alpha q^\beta$ untersuchen; allg. Struktur; sog. Faktorisierungen $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2)$, ob z.B. $\mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{Q}_2$ ist. Minimalen Gegenbeispiele gegen diese oder jene Vermutung genau aufstellen. F

3 Aufgabe. Die Gruppen $\mathfrak{G}$ kennzeichnen, die eine Klasse d. konj. Elemente der Ordq mit $|\mathfrak{K}| = p^\alpha$ enthalten.

$\alpha = 1$?

Saubere Faktorisierung von p-Gruppen.

Sei $\cancel{\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$), $\cancel{\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = E}$ ($\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$), $|\mathfrak{g}| = p^n$, $\mathfrak{z} = \text{Ztr}\,\cancel{\mathfrak{P}}$ ($\mathfrak{g}$)

Sei $\mathfrak{g}\,\mathfrak{P}$ minimal, mit $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2$ ($\mathfrak{z}_i$ wie auf S. 143)
(bezgl. Untergr. u. Darstellung)

"Vermutung: "Zentrum einer sauber faktor. p-Gr. ist sauber" ist falsch!

1. Es ist nicht $\mathfrak{a}\mathfrak{z} = \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{z} = \mathfrak{g}$.

Sonst $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 = \underbrace{\mathfrak{a}\mathfrak{z} \cap \mathfrak{b}\mathfrak{z}}_{=\mathfrak{z}} = \mathfrak{g}$ ~~aber~~ abelsch nach 143,1

2. Es ist nicht $\mathfrak{a}\mathfrak{z} \neq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{z} \neq \mathfrak{g}$.

Sonst $\mathfrak{a}\mathfrak{z} < \mathfrak{g}^* \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{b} < {}^*\mathfrak{g} \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}$ und

$$\mathfrak{z} = \text{Ztr}\,\mathfrak{g}^* \cap \text{Ztr}\,{}^*\mathfrak{g}.$$

Beide Zentren ↖ ↗ zerfallen nach Ind. Vor., also auch $\mathfrak{z}$.

3. Weiter sei etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{z} < \mathfrak{g}^* \underset{p}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$.

Dann ist $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, also $\underline{\mathfrak{a} \text{ abelsch}}$.

4. $\text{Zs}\,\mathfrak{g}^* = \text{Ztr}\,\mathfrak{g}^*$. denn $H \in \text{Zs}\,\mathfrak{g}^*$, $H \notin \mathfrak{g}^* \Rightarrow H \in \overset{\text{Zs}\{\mathfrak{g}^*, H\} =}{\mathfrak{z}} < \mathfrak{g}^*$.

5. Ist $B \in \mathfrak{b}$, $B \notin \mathfrak{g}^*$, so ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^* \cap \text{Zs}\,B$, wo $\mathfrak{z}^* = \text{Ztr}\,\mathfrak{g}^*$.

denn $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*\{B\}$

6. Ist $G_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{g}^*$, so ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^* \cap \text{Zs}\,G_0$.

denn $= \text{Zs}\,\mathfrak{g}^* \cap \text{Zs}\,G_0$.

7. Die weitere Betrachtg ergibt folgenden Bau von $\mathfrak{g}$:

Man nehme eine nichtabelsche Gr. A, B der Ord p^3 vom Exp p, multipl. mit zykl. Gr der Ord $p^{\alpha+1}$ $\overset{\{Z\}}{}$ $(\alpha \geq 1)$ direkt und identifiziere ~~die Kommutat~~ Ztr $\{A, B\}$ mit $\{Z^{p^\alpha}\}$.

Also def. Relationen: $A^p = B^p = Z^{p^{\alpha+1}} = E$, $[AZ] = [BZ] = 1$, $[AB] = Z^{p^\alpha}$. Eine solche Gr. steckt als Teil in $\mathfrak{g}$.

|| Diese Gruppen besitzen tatsächlich eine Faktorisierung, in der das Zentrum nicht faktorisiert ist, nämlich $\mathfrak{a} = \{A\}$, $\mathfrak{b} = \{B, AZ\}$.

Wegen $\mathfrak{g}' = \{Z^{p^\alpha}\} < \mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{b} \triangleleft \mathfrak{g}$, ferner $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \{A, B, AZ\}$, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Und Ztr $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}$ ist zyklisch, $= \{Z\}$, und $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} = E$, $\mathfrak{z} \not< \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{z}$ nicht faktorisiert.

Man kann also bestenfalls noch hoffen, dass bei jeder sauberen Faktorisierg einer p-Gr. mindestens ein Faktor ein Zentrumselement enthält. Versuch!

8. Wenn in einer p-Gr. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit Ztr $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}$ gilt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{z} = 1$, so ist $Z_1\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 1$. Denn $B \in Z_1\mathfrak{a} \to Z \in B^{\mathfrak{g}} = B^{\mathfrak{b}} < \mathfrak{b}$.

146

Verhalten von Indizes beim Durchschnitt u. Kompos.

„Wirkung von Erzeugnis- u. Durchschnittsbildung auf Gruppen-Indizes"

1. $\mathfrak{B} < \mathfrak{A} \to |\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C} : \mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}| \le |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$

oBdA $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}$. $|\mathfrak{C} : \mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}| \le |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$ klar

da $\mathfrak{B}C = \mathfrak{B}C' \Leftrightarrow \mathfrak{D}C = \mathfrak{D}C'$, wenn $\mathfrak{D} = (\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C})$

3

2. $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $|\mathfrak{A} : \mathfrak{B}| = i > 1$, $|\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C} : \mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}| = k > 1$

$\to$ $k \ge p$, wo p der kleinste Primteiler von i. 4

Bew: Nach 1 ist $j = |\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\cap(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})|$

$= |\mathfrak{A}\cap(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C}) : \mathfrak{A}\cap(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})| \le |\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C} : \mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}| \overset{*}{=} k$

und $j = |\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\cap(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})| \mid |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$ wegen $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}\cap(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})$

Ist nun $k > 1$, so $\mathfrak{A}\cap(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}) \ne \mathfrak{A}$, also $j \ne 1$ Teiler 5

von i, und nach $*$ ist $j \le k$.

3. Unter den Voraus. von 2 kann nicht mehr behauptet werden.

Bew: Seien geg. i, $k \ge$ min PT von i, $i, k > 1$. 6

Sei $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der 2 symmetr. Gruppen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$

auf bzw. den Ziffern $a_1, \dots, a_k$ und b_1,

Sei $\mathfrak{A}_2 < \mathfrak{Y}$ beliebig mit $|\mathfrak{A}_2| = \frac{i}{p}$;

Sei $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{S}(a_1, \dots, a_p)$ $\in$ symmetrische

Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}(a_2, \dots, a_p)$

$\mathfrak{C} = \mathfrak{S}(a_{p+1}, \dots, a_k) \times 7$ ($\mathfrak{C} = E$, wenn $p = k$).

Dann $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = 7 \times \mathfrak{S}(a_1 \dots a_k)$!

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 7 \times \mathfrak{S}(a_2 \dots a_k)$

$|\mathfrak{B} : \mathfrak{A}| = p \cdot |\mathfrak{A}_2| = i$, $|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}| = k$.

3a) $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{C} \Rightarrow |\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}| \mid |\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{B}_1|$

Denn OBdA $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}_1$, denn $|\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}| = |\mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}| = \frac{|\mathfrak{C}||\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|} = \frac{|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{B}_1|}$

4. Bessere Anordnung: a) Sind (i_1, k_1) und (i_2, k_2) „möglich", so auch $(i_1 i_2, k_1 k_2)$.

b) ~~[illegible]~~ ~~ist~~ $(\frac{i}{p}, 1)$ und $(1, k)$ mit $k \geq p$ [illegible].

Überhaupt mit Durchschnitt beginnen.

5. Falsch ist die aus 3a nahegelegte Vermutung: $\mathfrak{B}_i < \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2$

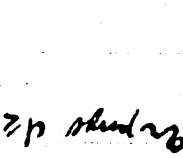
$\Rightarrow \rho = |\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2| \mid |\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{B}_1| \cdot |\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_2| = \sigma$

Gegenbeispiel in der $\mathfrak{S}_7$: $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{S}(12345)$ $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{S}(34567)$

$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{S}(123)$ $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{S}(567)$. Hier $\rho = 3!$, $\sigma = (5.4)^2$

Einfacher: $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_2$ also in der $\mathfrak{S}_4$: $\rho = 2$, $\sigma = 3^2$

6. Es gilt: $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}\, \mathfrak{g} \Rightarrow |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} : \underbrace{\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}}| \mid |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$



Bew: OBdA $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}$. Von Normalkette $\mathfrak{A} \dots \mathfrak{B}$ wird jeder Index in Teiler abgebildet.

7 Folge: $\mathfrak{B}_i \triangleleft\triangleleft \mathfrak{A}_i \Rightarrow |\overbrace{\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2}^{a} : \overbrace{\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2}^{b}| \mid |\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{B}_1||\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_2|$

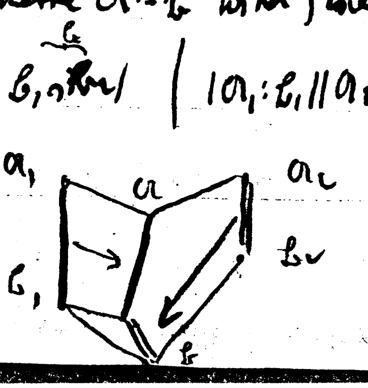
Gilt auch für $i = 1, 2, \dots, k$, denn

$\Rightarrow \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ Bew.

Fortsetzg S. 155

↓

Komp. Faktorgr. wirken!



$\lhd\lhd$

1. Sind alle Sylowgruppen $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ von $\mathfrak{G}$ abelsch (s: Anz. d. Primfakt. von g), so ist $l\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right) \le s$ für jedes $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Dabei bedeutet " die Schrittzahl der Normalenkette von $\mathfrak{A}$.

Bew: mit $\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}_\rho = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_\rho \\ \bar{\mathfrak{A}}_\rho = \text{normalisier. Hülle von } \mathfrak{A}_\rho \end{array}\right.$ gilt bekanntlich: $\bar{\mathfrak{A}}_\rho^{\bar{\mathfrak{P}}_\rho} = \bar{\mathfrak{A}}_\rho$

a) Daher ist mit $\mathfrak{D} = \bigcap \bar{\mathfrak{P}}_\rho \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{D}$

[illegible] 15/11/61

b) Wenn der Durchschnitt von je k verschiedenen $\bar{\mathfrak{P}}_\rho = E$ ist, dann liegt der Durchschnitt von je $k-1$ verschiedenen $\bar{\mathfrak{P}}_\rho$ in $N_s\mathfrak{A}$.

Bew: $\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{P}}_1 \cap \dots \cap \bar{\mathfrak{P}}_{k-1} < N_s \bar{\mathfrak{A}}_\kappa$, $\kappa = 1, \dots, k-1$; und für $\kappa \ge k$ ist $\bar{\mathfrak{A}}_\kappa < \bar{\mathfrak{P}}_\kappa$, ~~daher~~ und $[\bar{\mathfrak{P}}_\kappa, \mathfrak{D}] = E$ wegen $\bar{\mathfrak{P}}_\rho \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D} \cap \bar{\mathfrak{P}}_\kappa = E$; also $[\bar{\mathfrak{A}}_\kappa, \mathfrak{D}] = E$ $(\kappa \ge k)$.

c) Es bedeute $\mathfrak{G}^{(m)}$ das Erzeugnis der Durchschnitte von je m der $\bar{\mathfrak{P}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{P}}_s$. Dann ist

$$\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(s)}\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(s-1)}\mathfrak{A} \lhd \dots \lhd \mathfrak{G}^{(1)}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$$

für jedes $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

Bew: $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(s)}\mathfrak{A}$ ist a), $\mathfrak{G}^{(k)}\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(k-1)}\mathfrak{A}$ ist b).

|| Bemerkenswert, dass die $\mathfrak{G}^{(\sigma)}$ einheitlich für alle $\mathfrak{A}$ gelten! Gibt es so etwas immer? Ist $\bigcap_{\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}} N_s \mathfrak{A} \ne E$? Ja! ↗

Haupt-Untergruppen. („Haupt-Normalteiler" von $\mathfrak{G}$?)

1. Def: $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}} N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$!

2. $\mathfrak{A}$ min. nachinv., zusammengesetzte Ord $\rightarrow$ $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{H}$.

   dann $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}$ bel./einfach

3. $\mathfrak{P}_0 \triangleleft \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{P}_0| = p^\alpha$, α maximal, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. $\mathfrak{G}$,

   $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}_0 \cap \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Z} < \mathfrak{H}$

   Bew. bei $\mathfrak{A}$ einköpfig $\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

   Ist $\mathfrak{A}$ p^*-köpf., so $\mathfrak{Z} \leq \mathrm{Ztr}\,\mathfrak{P} < N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$

   Ist $\mathfrak{A}$ p'-köpf., so $\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{P}_0 < N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$.

4. $\mathfrak{G} \neq E \rightarrow \mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \neq E$.

   Bew: $\mathfrak{G}$ besitzt min nachinv Ugr $\mathfrak{A}$: entweder $|\mathfrak{A}|$ zusammengesetzt, dann 2). Oder $|\mathfrak{A}|$ Primzahl, dann 3).

   Gilt wohl schon wenn $j(\mathfrak{G}E) < \infty$, aber $|\mathfrak{G}| = \infty$.

5. Die aufsteigende Haupt-Normalteiler-Reihe

   $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_{i+1} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_i)$

   fällt bei nilpot. Gr. ~~$\mathfrak{G}$ ungerader Ordnung mit der~~ aufst. ~~Zentralreihe~~ Kern! * zusammen, ~~also bricht immer nach endl vielen Schritten mit $\mathfrak{G}$ ab~~: Verallgem. d. Zentralreihe auf beliebige endl. $\mathfrak{G}$!

*Nein! $|\mathfrak{G}| = p^3$, Typ (p,p), enthält charakt. Ugr $\mathfrak{H}$ = Gruppe der Elemente der Ord. p, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$!

Noch Hauptgruppe:

1. $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{H}$ $\to$ $\mathfrak{a} \triangleleft \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$.

2. Frage: Ist die Länge h der aufsteig. Hauptnorm-Reihe $E = \mathfrak{H}_0 < \ldots$ gleich dem maximalen $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{a}}$? Ist sie = der Länge der absteig.?
Klar ist: $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{a}\mathfrak{H}_1 \triangleleft \mathfrak{a}\mathfrak{H}_2 \triangleleft \cdots \triangleleft \mathfrak{a}\mathfrak{H}_h = \mathfrak{G}$, also $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{a}} \leq h$. (siehe 4

3. $\mathfrak{H}$ ist die Max Ugr von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \to [\mathfrak{a}, \mathfrak{H}] < \mathfrak{a}.$$

4. Eine absteigende Haupt-Norm-Reihe scheint schwer zu definieren. Wenn in $\mathfrak{G}/\mathfrak{a}$ und in $\mathfrak{G}/\mathfrak{b}$ jede sukzessiv Ugr invariant ist, so braucht das nicht in $\mathfrak{G}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ einzutreten.

Beispiel: $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_3 \times \{W\}$, $W^3 = E$. $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{b} = \{W\}$.

5. Der nilpotente Teil $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ ($= \mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$) hat die Eigenschaft: $E \neq \mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \to [\mathfrak{a}, \mathfrak{F}] \underset{\neq}{<} \mathfrak{a}$.
denn $[\ ] < \mathfrak{F} \cap \mathfrak{a}$; wenn $= \mathfrak{a}$, so $\mathfrak{a} < \mathfrak{F}$, dann $[\mathfrak{F}, \mathfrak{a}] \neq \mathfrak{a}$.

6. Das $\mathfrak{H}$ von 149_3 hat sogar die Eig.: $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \to [[\mathfrak{a}\mathfrak{H}]\mathfrak{H}] = E$.

7. Der ungerade Teil von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ ist abelsch, da [illegible]

8. Frage: Führen Hauptgr. zu einem neuen Beweis für das Abbrechen des Autom.-gr.-Turms?