Noch Hauptgruppen.

1. Def: $\mathfrak{g}^S = \bigcap N_S\, \mathfrak{a}$ für die $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$, $\binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}} \leq \rho+1$

2. Es ist $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \triangleright \mathfrak{g}^1 \triangleright \dots \triangleright \mathfrak{g}^{a-1} = \mathfrak{h} \gneq E$ $a = \max\binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}}$

$\boxed{\mathfrak{z}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}}$

3. $\binom{\mathfrak{h}'\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} \leq \binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}} - \rho$

Bew: $\binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}} = \alpha$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\alpha \triangleleft \mathfrak{a}_{\alpha-1} \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{a}_{\rho+1} \triangleleft \mathfrak{a}_\rho \dots$

$(\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g})$

Frage: Haben $\to \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\alpha \triangleleft \mathfrak{a}_{\alpha-1} \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{a}_{\rho+1} \triangleleft \mathfrak{h}^\rho \mathfrak{a}_{\rho+1}$

im Fall $4\mathfrak{g} = 1$ die subn. subn Ugr von $\mathfrak{g}$ besondere Normalisator-eigenschaften?

~~4. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \to$ ($N_S\, \mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a}$) $\neq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.~~

~~In diesem Sinn ist Vertauschbarkeit bei subn. inv. Ugr. nahe $\triangleleft$.~~

~~5. Sei $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g} \leftrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{g}} N_S \mathfrak{a}$~~

5a) s. u.

~~Hiermit folgt 6: [Bew 5b: $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{g}} N_S\, \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}^{\mathfrak{g}}}$]~~

~~6. Sei $\mathfrak{p}$ eine „Projektion", d.h. $= \mathfrak{P} \cap \mathfrak{a}$ wo $\mathfrak{P}$ Syl, $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$.~~

~~Dann gilt $\bar{\mathfrak{p}} \triangleleft \mathfrak{g} \leftrightarrow \mathfrak{p} \triangleleft \mathfrak{n}$, wo $\mathfrak{n} = N_S\, \mathfrak{p}^*$, wo~~

~~$\mathfrak{p}^* =$ inv. Abschl. von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}$.~~

~~5a). Wenn $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$ ... , $\mathfrak{P}$ eine Sylowgr $\mathfrak{a}$, so $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g} \leftrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{g}} N_S \mathfrak{P}$.~~

7. Frage: Bei p-Gruppen $\mathfrak{g}$ muss es einen Zusammenhang zwischen Klasse $\mathfrak{g}$ und $\max\limits_{\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}} \binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}}$ geben ($p > 2$).

 Sylowgr & Kompositionsreihen

$\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{g}$,

1. Sei $\mathfrak{g} < \mathfrak{P} = \mathrm{Syl}\, \mathfrak{G}$, dann gilt: § 31

$$\mathfrak{g} \triangleleft \mathfrak{G} \Leftrightarrow [\mathfrak{g} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{g} \triangleleft N\mathfrak{P}_1]$$

$\Leftrightarrow \mathfrak{g}$ schwach abgeschl in $\mathfrak{P}$

s. auch 151/6

2. R. Brauer wies darauf hin: Wenn Burnsides Vermutung stimmt, dass jede ungerade Gruppe auflösbar, dann genügt für Gruppen ohne zyklische Kompfaktoren die Projektion in die 2-Sylowgruppe, gibt isomorphes Bild des Kompos-Verbandes v. $\mathfrak{G}$.

3. „Ausreichend" heisse eine Menge von Primzahlen $\{p_\rho\}$, wenn jeder Komp-Faktor von $\mathfrak{G}$ durch ein p_ρ teilbar ist. Dann gilt: Es genügt Projektion in eine „ausreichende" Menge von Sylowgruppen.

4. Wenn z.B. „ausreichend" viele Sylowgr. $z\{p_\rho\}$ zyklisch sind, gilt: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\{p_\rho\}$-Teil $|\mathfrak{a}| = \{p_\rho\}$-Teil $|\mathfrak{b}| \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.
Ist $\mathfrak{b}$ nicht $\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, so folgt wenigstens, dass das Erzeugnis aller $\{p_\rho\}$-Sylowgr von $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a}$ enthalten ist

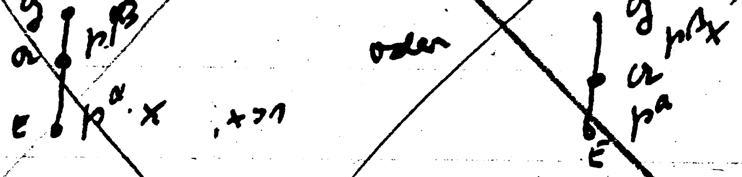
1. Ist $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} < \mathfrak{G}$, so ist trivial:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \cap \mathfrak{P} < \mathfrak{b} \cap \mathfrak{P} \text{ für } \underline{\text{jede}} \text{ Syl } \mathfrak{P} \text{ von } \mathfrak{G}$$

!

2. Ist ~~die~~ eine p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$ zyklisch, so ist $\mathfrak{G}$ p-einfach, d. h. entweder nur ein Kompfaktor von $\mathfrak{G}$ teilbar durch p, oder $\mathfrak{G}$ ist p-auflösbar von der p-Länge 1.

Bew: Sonst sei OBdA



In beiden Fällen Widerspruch erzielbar durch Betrachtg des p-Sylow-Normalisators (in $\mathfrak{G}$) der einfachen Kompfakt-gr $\mathfrak{a}$ bzw $\mathfrak{G}/\mathfrak{a}$.

3. Genau dann ergibt sich bei der Projektion von $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ in eine Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ $\underline{\text{ganz}}$ $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$, wenn entweder $p \nmid g$ oder $\mathfrak{G}$ p-auflösbar mit p-Länge 1. Bew: 2

4. Sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, so tritt bei der Proj. von $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \oplus \mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ genau dann $\mathfrak{P} \oplus E$ auf, wenn $q \nmid |\mathfrak{P}|$. mindest. $\le |\mathfrak{P}|$.

Sind $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ ausreichend, $\mathfrak{N}_i$ die Proj von $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{P}_i$, so ist $\underline{\text{genau dann}}$ $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}) \sim \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{N}_r$, wenn $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_r$ (wobei $p_2 \dots p_r \nmid |\mathfrak{P}_1|$ usw.)

1. Satz von Feit [Th. 3.2 in PAMS 7, 777-778: On a conjecture of Frobenius, 1956]:

zu S. 92.

Sei $|\mathfrak{G}| = mq$, $(q, m) = 1$. Sei $M \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow M^m = E$.

Sei $|\mathfrak{M}| = m$. Es existiere $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, so dass $|\mathfrak{H}| = qs$, $(s, \frac{m}{s}) = 1$ &

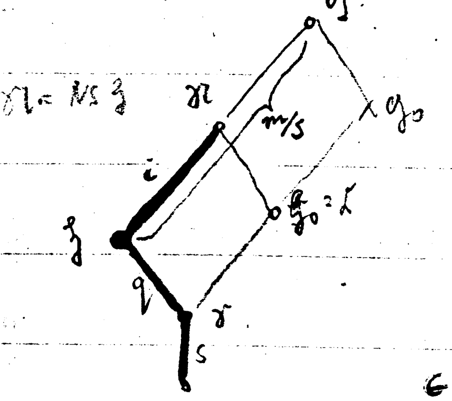
(I) es gibt $\mathfrak{r} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, $|\mathfrak{r}| = s$

(II) $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G$ entw. $= \mathfrak{H}$ oder $\le \mathfrak{r}$.

Dann ist $\mathfrak{M}$ eine Gruppe (und dann $\mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{G}$).

Bew mit Brauers Charakterisierung d. Charaktere

Frage: Wie hängt das mit S. 92 zusammen?



$(q, s) = (q, \frac{m}{s}) = (s, \frac{m}{s}) = 1$

Sei $N \in \mathfrak{N} - \mathfrak{r}$

$N^G \in \mathfrak{N} \Rightarrow N^{iG} \in \mathfrak{H} \Rightarrow G \in \mathfrak{N}$ oder

$N^i, N^{iG} \in \mathfrak{r} \Rightarrow N^{is} = E$. Satz von Feit scheint tief zu liegen: Es gibt wohl eine Vertretergr. $\mathfrak{L}/\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$, doch sehe ich nicht, wie aus der Vor. $|\mathfrak{M}| = m$ die Normalheit von $\mathfrak{L}/\mathfrak{r}$ folgt, die man zwecks Anwendung meiner S. 92 kennen müsste. Man müsste zeigen (das ist nicht!), dass in $\mathfrak{N}$ genau is Lösungen von $N^{is} = E$ existieren. Ausreichend wäre der Beweis der

2. Vermutung: Ist $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ und gibt es $\mathfrak{H}_0 < \mathfrak{H}$, so dass zu jedem $\mathfrak{D} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \neq \mathfrak{H}$ ein H existiert mit $\mathfrak{D}^H < \mathfrak{H}_0$, so gibt es $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0$.

Fortsetzg. Verhalten von Indizes bei Durchschnittsbildung. von S. 147

1. Sei $\mathfrak{b} < \mathfrak{a} < \mathfrak{g}$, $\mathfrak{c} < \mathfrak{g}$. Es gebe Kette

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_k < \mathfrak{b}_{k-1} < \dots < \mathfrak{b}_1 < \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a} \text{ derart, dass}$$

$$\mathfrak{b}_i \cap \mathfrak{c} \vee \mathfrak{b}_{i+1} \qquad (i = 0, \dots, k-1)$$

Dann ist $|\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} : \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}| \;\Big|\; |\mathfrak{a} : \mathfrak{b}|$.

Bew. Induktion mit 147, (3a).

2. Dieser Satz enthält ~~auch~~ den Satz 147 (6) sowie (3a).

3. $\mathfrak{b}_i < \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \to$

$$|\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2| \;\Big|\; \prod_{i=1}^{2} |\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}_i| .$$

Ist unsymmetrische Voraus: trotz symm. Beh.!

Andre Fassung: Es gebe Restvertreter R_ν zu $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{H} R_\nu$, sodass Erzeugnis $\bigcup_{\nu > 1} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^{R_\nu}) = \mathfrak{H}_0 \stackrel{\leq}{\neq} \mathfrak{G}$. Dann gibts $\mathfrak{G}_0$, ...

Man muss die Perm. an $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_0$ ergänzen zu einer (Perm.-)Darst. von $\mathfrak{G}_0$ (von selben Grade).

Der Satz, daß $\mathfrak{G}$ p-nilpotent ist, wenn

a) die p-Sylowgr. $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ zyklisch ist und

b) die Untergr. der Ord. p $1-\mathfrak{P}$ im Zentrum von $N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ liegt,

scheint bei Zassenhaus zu stehen: The Theory of groups, Chelsea 1949. (aber nicht in der deutschen Ausgabe)

Nilpotenz der Gr. $\mathfrak{A}$ mit reg. Autom. σ könnte vielleicht so bewiesen werden, daß man eine monomiale Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Einbettung in $\mathfrak{A}\sigma$ konstruiert.

Natürlicher Beweisansatz für die Burnside-Vermutung im Fall pq (wenn p, q bekannt): F_n sei freie Gr.; man berechnet zunächst eine obere Schranke für die Stufe s (Kommutatorlänge) von F/F^p; dann zeigt man, daß der allgemeinste Kommutator dieser Stufe [bei $s=2$ wäre das $((x_1,x_2),(x_3,x_4))$] $\in F(x_1 \dots x_4)^{pq}$; d.h. es genügt also eine Identität zu finden.

Verfeinerung der Verlegerung.

Sei $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}$.

Sei $\mathfrak{P}/\bar{\mathfrak{P}}$ abspaltbar von $\mathfrak{K}$ und von $\mathfrak{L}$. Wann von $\mathfrak{G}$?

Zur Untersuchung kann man ~~vielleicht~~ die verallg. monom. Darst. $\cancel{K}_{\mathfrak{K}|\bar{\mathfrak{K}}}(G) \equiv P_{\mathfrak{K}|\bar{\mathfrak{K}}}(G)$ (wegen $K = P(\bar{\mathfrak{K}})$)

und

$$L_{\mathfrak{L}|\bar{\mathfrak{L}}}(G) = P_{\mathfrak{L}|\bar{\mathfrak{L}}}(G)$$

bilden; mod $\bar{\mathfrak{P}}$ ~~sind sie~~ haben sie abelsche Koeff., also kann man ihr Kroneckersches Produkt bilden. Davon dann Det. untersuchen.

Zur Rechnung, die auf $\mathfrak{G} = \Sigma\, \mathfrak{K} G_\alpha \mathfrak{L} = \Sigma\, \mathfrak{P} G_\alpha \mathfrak{P}\ (\bar{\mathfrak{K}}, \bar{\mathfrak{L}})$ basieren muss, kann man auch noch eine normierte Zerleg. von $\mathfrak{G}$ heranziehen; allgemeiner, vor Übergg. zu $\mathfrak{K}$, lautet die so:

Setze $\mathfrak{K}_\alpha G_\alpha \cap G_\alpha \mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{D}_\alpha$ und wähle Vertreter so daß

$$\mathfrak{K} = \sum_\beta K_{\alpha\beta}\,(\mathfrak{K} \cap G_\alpha \mathfrak{L}_\alpha G_\alpha^{-1})\ \cancel{\ldots}, \quad \mathfrak{L} = \sum_\gamma (\mathfrak{K}_\alpha^{G_\alpha} \cap \mathfrak{L})\, L_{\alpha\gamma}.$$

Dann ist eindeutig $\mathfrak{G} = \Sigma\, K_{\alpha\beta} D_{\alpha\delta} L_{\alpha\gamma}$ mit $\mathfrak{D} = \Sigma\, D_{\alpha\delta}$

und $\mathfrak{G} = \Sigma\, \mathfrak{K} G_\alpha L_{\alpha\gamma} = \Sigma\, K_{\alpha\beta} G_\alpha \mathfrak{L}$

Schreiben: Über Normalisatoren nach Untergr.

158 Literatur zu Permgr. vom Grad p^2

Geometrisches:

W. S. Connor, Biometrica 9, 127-140 (1953)

" Can. J. Math 6, 35-41 (1954)

" Ann Math Stat 23, 57-71, 602-609 (1952)

H B Mann, Analysis and design of experiments N.Y., Dover 1949

Separata Barlotti

Benj. Segre Lezioni di geometria moderna I, 1948

$\triangleleft\triangleleft$ im Sinne von Kurosch.

1. $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ auflösb., $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ $\to$ $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$.

Bew. $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{B}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{B}_k = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$\mathfrak{B}_k/\mathfrak{B}_{k-1}$ wird durch $\mathfrak{A}$ gedeckt, ist also auflösbar,

also $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{[n]} < \mathfrak{B}$ für ein n ([ ]: Kommutatorgr.)

1) wegen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ ist $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]^{[n]} = \mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

2. Vermutung: a) Wenn Minbedg für nachinv. Ugrp gilt,

ist Sockel $< \bigcap N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$. Ans. z. Bew: 4. Voller Bew: 160,1

b) Vielleicht genügt Minbedg für Normalteiler.

c) Bekannt ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{M} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ und einfach. $\mathfrak{S}_5$.

3. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufl. $\to$ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aufl. Bem. 1.

4. Sei $|\mathfrak{N}| = p^{\alpha}$, $\mathfrak{N}$ min NT, (Minbedg für nachinv. Ugr.), ~~Minbed für nach~~ $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$,

~~[illegible]~~ Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A}$. Bew: OBdA $\mathfrak{A}$ 1-p-kompl.

Bew. $\mathfrak{g}$ sei Sylowgr. der endl. Autom.gr. $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{N}$ unter

$E \neq P \in \mathfrak{N}$ sei fest unter $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{G}$ induziert. Wenn $A \to a_\infty = 1$, ist $[\mathfrak{A}, \mathfrak{N}] = 1$, fertig; sonst wähle

$P_1 \in \mathfrak{A}$ mit $[P_1, {}^{n}\mathfrak{N}] = 1$ und $\mathfrak{A} = \{P_1\}$. Wegen $[P_1, P] = 1$ ist

$P \in N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$. Ebenso $P^G \in N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$ f. jedes $G \in \mathfrak{G}$ $\to$ $\mathfrak{N} < N_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}$.

160 $\triangleleft\triangleleft$ $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\underset{min}{\triangleleft}$

1. Gilt MinBedg für nacheinander Ngr von $\mathfrak{g}$, so ist ~~…~~ (= Sockel, erstengrad d. norm. NT) $< N\mathfrak{a} = \mathfrak{N}$]

$\mathfrak{M} < N_1\mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$.

Zum Bew: ~~…~~ 2–4

2. ist $\mathfrak{M} \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{M} \triangleleft \mathfrak{g}_1 \triangleleft \mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{M} < S\mathfrak{g}_1$

denn wähle $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{g}_1$. dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^{\mathfrak{g}} < S\mathfrak{g}_1$

3. ist $\mathfrak{r} < S\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r} < \mathfrak{g}_1 \triangleleft \mathfrak{g}$, so $\mathfrak{r} < S\mathfrak{g}_1$.

4. ist ~~…~~ $\mathfrak{r}$ ~~…~~ $\triangleleft \mathfrak{g}_1 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$, so $\mathfrak{r}$ ~~…~~ $< S\mathfrak{g}_1$

~~…~~ $\mathfrak{r} < S\mathfrak{g}$ Indukt nach $n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1)$

5. $\mathfrak{M}_1 \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$ → $\mathfrak{M}_1 < S\mathfrak{M}_1\mathfrak{a}$ vollständ.

Nun Bew. 1: indirekt. Kürzer 161.1 $\mathfrak{r} \underset{m}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{r} < \mathfrak{g}_1 \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$ → $\mathfrak{r} \underset{m}{\triangleleft} \mathfrak{g}_1$ besser … minimaler NT! Wertestelle $\mathfrak{r} \underset{m}{\triangleleft} \mathfrak{g}$

Sonst gibts $\mathfrak{M}_1 \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{M}_1 \not< \mathfrak{N}$, ~~…~~ nach 5 ist

$\mathfrak{M}_1 < S\mathfrak{M}_1\mathfrak{a} \not< \mathfrak{N}$, also

$\exists$ $\mathfrak{M}_2 \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{M}_1\mathfrak{a}$, $\mathfrak{M}_2 \not< \mathfrak{N}$, aber ~~gilts~~ ist

nach 5 $\mathfrak{M}_2 < S\mathfrak{M}_2\mathfrak{a} \not< \mathfrak{N}$, aber gibts

$\mathfrak{M}_3 \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{M}_2\mathfrak{a}$, $\mathfrak{M}_3 \not< \mathfrak{N}$ usw.

Wegen Minbedg gibt das Ende $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{k-1}$:

$$\mathfrak{M}^* \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{M}^*\mathfrak{a}, \quad \underline{\mathfrak{M}^* \not< \mathfrak{N}}$$

Aber $\mathfrak{a} < \mathfrak{M}^{**}\mathfrak{a} \underset{\neq}{\triangleleft} \mathfrak{M}^*\mathfrak{a}$ $\mathfrak{M}^{**}\mathfrak{a}, \mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}^*_1$

$\mathfrak{M}^{**} = 1$

$\underline{\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{M}^*\mathfrak{a}}$ Wid.

1. Kürzerer Beweis für 160.1:

$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}$] Sei $\mathfrak{h}$ eine minimale nach innen Ugr von $\mathfrak{g}$ ~~mit~~ bezgl der Eigenschaft: $\mathfrak{a} < \mathfrak{h}$, $S\mathfrak{h} \not< N\mathfrak{a}$.

Dann gibt es $\mathfrak{M} \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{h}$, $\mathfrak{M} \not< N\mathfrak{a}$.

Es ist $\mathfrak{M} < S(\mathfrak{M}\mathfrak{a})$; wäre $\overset{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\text{das}} \neq \mathfrak{h}$, so Wid.; gegen Minimalg. also

$\mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{M}\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \underset{\neq}{\triangleright} \mathfrak{M}^*\mathfrak{a} \geq \mathfrak{a}$ $\quad \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*\mathfrak{a} = 1$

$\mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{M}^* = 1$, $\mathfrak{M}\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \triangleright \mathfrak{a}$, $\mathfrak{M} < N\mathfrak{a}$

Besser S. 170 – 171 (4)

2. Ebenso: Ist $\mathfrak{M} \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$ und erfüllen die nach innen Ugr von $\mathfrak{M}$ die Minimalbedg., so ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{a}$. z.B. wenn $\mathfrak{M}$ endlich.

! Bew: Unter den nach inn. Ugr ~~von~~ $\mathfrak{M}$, welche

a) nicht in $\mathfrak{N} = N\mathfrak{a}$ liegen

b) minimale NT einer nach inn. ~~...~~ $\mathfrak{a}$ enthaltenden Ugr. $\mathfrak{H}$ sind: $\mathfrak{K} \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{H} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{H}$

sei $\mathfrak{K}$ eine schlechthin minimale. Dann ~~ist setze~~ ist

$\mathfrak{K}\mathfrak{a} = \mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{L}_1$ ~~es ist $\mathfrak{K} < S\mathfrak{L}$~~, $\ldots \triangleleft \mathfrak{L}_0 \triangleleft \mathfrak{h}$

Sei $\mathfrak{K} \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{L}_r$, $\mathfrak{K} \underset{min}{\not\triangleleft} \mathfrak{L}_{r+1}$. Dann wähle $\mathfrak{K}_0 \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{L}_{r+1}$ und $\mathfrak{K}_0$

$\mathfrak{a}^*$ dann alle $\mathfrak{K}_0^{\mathfrak{L}_r} \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{K} \in \mathfrak{N}$: geht nicht. Also $\mathfrak{K} \underset{min}{\triangleleft} \mathfrak{K}\mathfrak{a}$.

1 $\mathfrak{K}\mathfrak{a} \underset{\neq}{\triangleright} \mathfrak{K}^*\mathfrak{a} > \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{K}^* = 1 \Rightarrow \mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{K}\mathfrak{a}$.

id. Schärfer s. kürzer: S.

$\Delta\Delta$

1. $\mathfrak{a} \Delta\Delta\, g$ min, $\mathfrak{a}$ einfach, mitkahvariant, $\mathfrak{a}^g \Delta\, g$ min

(Bew: Induktion nach $(g, \mathfrak{a})$).

2. Sei T-Gruppe eine ~~endl~~ Gruppe mit endl Kompreihe, in der jede nachinvariante Untergruppe normal ist.

Sei S-Gruppe eine Gr m. endl Kompreihe, in der jeder Kompfaktor & Schwester eine auflösbare äussere Autom.gr. hat.

Dann gilt:

3. Jede perfekte ST-Gruppe hat ihre Mauer (= $\wedge$ max NT) im Zentrum.

Denn jeder Kompfakt = Hauptfaktor unterhält die Mauer elementweise zentralisiert von g.

4. Jede ST-Gr besteht aus dem grössten perfekten NT $\hat{g}$, darauf eine auflösbare ST-Gr als Faktorgr gesetzt. $\hat{g}$ zentralisiert den grössten aufl NT g_a.

4. Ergibt wohl: $\mathfrak{h} \Delta g \Rightarrow \mathfrak{h} \cap Sg \leq S\mathfrak{h}$ S = Sockel

wenn Min Bed für die NT von g (Bew $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h} \cdot Sg$)

Aus 2. Bew.: $\mathfrak{N}$ sei Erzeugung endl. vieler max NT von g. Insbesondere $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{N} \leq Sg$. Induktion nach Anzahl. Nimm $\mathfrak{h}$ = kleinstes Gegenbeispiel!

5. Der Min.Begr. f. nachinv. Ugr. gilt $a \triangleleft g \Rightarrow a \triangleleft s g \triangleleft s a$

6. Transfinite aufsteigende Sockelreihen betrachten – ebenso wie als Haupt-Normalisatoren reihen ...
Hirsch–Baer–Specht: „Normalfolgen“.

7. Bilden die im Sinne von Specht nachnormalen Untergr. einen Verband?

8. Bei Min.Bed. für nachinv. Ugr. ist wohl jeder min. NT direktes Produkt von <u>endl.</u> vielen einfachen Gruppen.

Aufgabe: Zur Theorie der Permutationsgruppen
Das Neue aus der Vorlesgs-Ausarb. veröffentlichen!

Erzeugen die p-Sylowfaktoren immer etwas von der p-Länge 1?

„Invariantengruppe“ Specht 8 Z 348

Überdeckungen und Normalteiler.

1. Sei $\mathfrak{h} < \mathfrak{Z}_i < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_i \cap \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{h}$ für $i \neq j$, $\bigcup \mathfrak{Z}_i = \mathfrak{G}$.

dann folgt aus $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^G$, $G \notin \mathfrak{h}$ dass $H \in \mathfrak{h}^K$ für jedes $K \in \mathfrak{G}$.

Bew: a) $G = Z_i \in \mathfrak{Z}_i$, $K \in \mathfrak{Z}_j$, $j \neq i$. $K^{-1} G K = Z_m^K$; $m \neq j$, $G = Z_m K$

$$H \in \mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{h}^{Z_m K} \subset \mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{Z}_m^K = (\mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{Z}_m)^K = \mathfrak{h}^K.$$

b) $K \in \mathfrak{Z}_i$: wähle $L \in \mathfrak{Z}_j$, $j \neq i$ und wende zu a) an.

Siehe dazu Randbemerkung zu Magnus Buch S. 87

2. Also unter Vor. 1 gibt es Frobenius-NT $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G} / \mathrm{Kern}\, \mathfrak{h}$. Übrigens muss dieser eine ~~besondere~~ Gestalt haben (falls $\mathrm{Kern}\, \mathfrak{h} = \mathfrak{E}$): $\mathfrak{F} = \sum \mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_i$ zulässig bei der reg. Autom. gr. $\mathfrak{h}$.

1a. Statt Vor. 1,1: Es gibt einen „Partition" von $\mathfrak{G} : \mathfrak{h}$. Dies André §2

3. Es muss schon genügen, wenn fast ganz $\mathfrak{G}$ in $\bigcup \mathfrak{Z}_i$ liegt. [Siehe Magnus Buch §39.] Vielleicht genügt „die gute Hälfte" von $\mathfrak{G}$; s. 6.

4. Man kann wohl auch noch abschwächen zu

$\mathfrak{h} < \mathfrak{Z}_i \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{Z}_j$ oder ähnlich, siehe Beweis 1.

5. Aufgabe: Einen möglichst umfassenden Überdeckungssatz (mit Impr.-Systemen) aufstellen, der Minimalgrad $\geq n-1$ zur Folge hat oder auf meine Erweiterg des Satzes von Frobenius führt.

Nachsehen, ob das auf unendliche Gruppen passt.

6. Ist $\mathfrak{G}$ transitiv und folgt aus Grad $G \leq n-2$ stets $\mathrm{Gr}\, G < \frac{n}{2}$, so ist $\mathrm{Min\,Gr}\, \mathfrak{G} \geq n-1$.

Denn sei er $= m = \mathrm{Gr}\, M$, dann folgt, wenn M^T mit M eine Ziffer gemeinsam bewegt, dass M^T und M die gleichen Ziffern bewegen. Diese bilden also einen Block von $\mathfrak{G}$, Länge $< \frac{n}{2}$, $\leq \frac{n}{3}$, dann gibt es $M \cdot M^T$ vom Grade $2m \leq n-m \leq n-2$, geht nicht.

7. Aufgabe: Struktur von $\mathfrak{G}$ untersuchen wenn die <u>minimalen</u> Obergruppen von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{G}$ (fast) ganz $\mathfrak{G}$ überdecken.

Permutationsgruppen.

1. ~~Gibt es für $k \geq 3$ eine k-fach transitive Gruppe mit einem nichtreg. NT, der nicht $(k-1)$-fach primitiv ist?~~ ~~(für $k = 2$ ja)~~
$k \geq 3$ nein nach Hô

2. Sei G 3-tra, reg $\neq N \trianglelefteq G$
dann N $\frac{5}{2}$ tra
Läßt $H < G$ mind. 3 Ziffern fest, so ist
$3H \cap N$ 2-tra auf den bei H festen Ziffern
$\rightarrow$ N_H ist scharf 3-tra — — — G_{123} " "
N_1 ist Frobeniusgr mit elem abelschem Fro-Kern
Man muß die nichtreg Normalteiler der scharf 3-tra Gruppen kennen, um weiterzukommen

3. Aufgabe: Sätze über transitive Konstituenten von G_1 bei primitivem G erweitern auf Doppelmodul zerlegen nach zwei (maximalen) Untergruppen !

Tschunikhin [18]

betrachtet Π-permutable Untergruppen $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$:

$\mathfrak{H} \vee \mathfrak{P}$ für jede p-Sylowgr. $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$ mit $p \in \Pi$;

$\mathfrak{H}$ heißt Π-semi-invariant in $\mathfrak{G}$, wenn 1) $\mathfrak{H}$ π-permutabel

2) $\mathfrak{H}^{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{H}$ für jede q-Sylowgr. $\mathfrak{Q} < \mathfrak{G}$ mit $q \notin \Pi$.

---

2. Gruppenoperatoren, die mit ~~Isomorphismen~~ Auto- Untergruppen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, sollte man als Linksop. schreiben, die ~~Isom.~~ Autom. rechtsoben; das erspart Klammern

$G \in \nu\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{H}^G = \mathfrak{H}$

$\in \sigma\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{U} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{U}^G = \mathfrak{U}$

$\in \gamma\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{U} \leq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{U}^G = \mathfrak{U}$

$\in \varepsilon\mathfrak{H} \leftrightarrow H \in \mathfrak{H} \rightarrow H^G = H$

$\kappa\mathfrak{H}$ = Kern von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G} = \bigcap \mathfrak{H}^G$?

Zur Theorie der p-Gruppen $\mathfrak{G}$.

1. Def.: $\mathfrak{G}$ singulär, wenn die monomiale Gr. der Ord. p^{p+1} vom Grade p Teil von $\mathfrak{G}$ ist.

$\mathfrak{G}$ vollregulär, wenn aus $\mathfrak{G} \times \mathfrak{g}$ sing. folgt: $\mathfrak{g}$ sing.

#2. Unter-, Faktorgruppen und direkte Produkte vollreg. Gr. sd. vollreg.

2. Für $p=2$ ist nichtsing. nur die Quaternionengr., minimal sing. ist die Diedergr. D_8.

$\mathfrak{G}$ nichtsing. $\leftrightarrow$ $G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \rightarrow (G_1 G_2)^2 = \underset{\text{Wort}}{W}[G_1^{2X_i}, G_2^{2Y_i}]$

mit $X_i, Y_i \in \{G_1, G_2\}$.

3. Vermutung:

#1: vollreg. für $p=2$ sind (wenigstens) alle abelschen Gr. $\mathfrak{A}$:

$$(A_1 B_1 \cdot A_2 B_2)^2 = \cancel{(A_1 A_2)^2 \times (B_1 B_2)^2}$$

Vermutg. ist falsch: Für $p=2$

$$= (A_1 A_2)^2 \times \prod B_1^{2X_i} B_2^{2Y_i}, \quad X_i, Y_i \in \{B_1, B_2\}$$

$$= \cancel{(A_1 A_2)^2 \times W[B_1^{2X_i}, B_2^{2Y_i}]}$$

ist schon die zykl. Gr. der Ord. 4 nicht vollreg.! Nimm $\mathfrak{g}$ = Quaternionengr.! $A_1 = A_2$ = Erzeugende von $\mathfrak{A}$.

4. Frage: Ist "Eigenschaft R" äq. damit, dass in jedem Ausschnitt von $\mathfrak{G}$ die Elemente der Ordnung p eine Gruppe bilden (R')? Bei $p=2$ ja.

Klar ist $R' \rightarrow R$.

1. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{A}^{G_0} \neq \mathfrak{A}$; ~~aber $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}$~~, so gibt es

a) einen Kopf von $\mathfrak{A}$ unter den KFG von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{G_0}\}$ bis $\mathfrak{A}$

b) " Hut von $\mathfrak{A}$ " " " " $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{A}^{G_0} \cap \mathfrak{A}$

Folge:

2. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{A}$, so gibt es

a) einen Kopf von $\mathfrak{A}$ in einem echten NT von $\mathfrak{H}$ über $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{A}$

b) einen Hut von $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ unter den KFG von $\mathfrak{A}$ bis $\cap \mathfrak{A}^H$

↑ besser " Kopf ~~Fuss~~ von $\mathfrak{H} : (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H})$?

3. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ und ist keine KFG von $\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ zu einem Kopf oder einem Huf von $\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ isomorph, so sind $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Bew: Es ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ wegen der Kopfbedgg und ~~...~~ wegen der Hufe. Ferner ist $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach 2b, und $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach 2a.

Symmetrische Bedingung suchen!

Normalisator-Eigenschaft des Sockels.

1. Sei $\mathfrak{M}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. ~~mit für die Normalteiler von $\mathfrak{N}$ gelte die Min-Bedg.~~

Sei $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}_1 \triangleleft \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.

Bew. a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1 = 1 \leadsto [\mathfrak{M}, \mathfrak{A}] = 1$, $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.

b) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1 \neq 1$. ~~Wähle $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1$ so, daß $\mathfrak{M}_1$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$ ist. Dann ist $\mathfrak{G}_1 < N\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}_1 < N\mathfrak{A}$~~ Wegen Minimalität von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{G}_1$, also $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$

2. Sei $\mathfrak{M}$ min NT von $\mathfrak{G}$; für die NT von $\mathfrak{M}$ gelte Min Bedg.

Sei $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}_2 \triangleleft \mathfrak{G}_1 \triangleleft \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.

Bew. a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1 = 1 \leadsto [\mathfrak{M}, \mathfrak{A}] = 1 \leadsto \mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$

b) $\quad \ldots \quad \neq 1$

Sei $\mathfrak{M}_1$ ein min NT von $\mathfrak{G}_1$; $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}$.

Nach 1 ist $\mathfrak{M}_1^{\mathfrak{G}} \leq N\mathfrak{A}$; also $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_1^{\mathfrak{G}} \leq N\mathfrak{A}$

usw. (?) g

Allgemein:

3. Sei $\mathfrak{M} \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, $m(\mathfrak{G},\mathfrak{A}) = r \geq 2$. Gilt dann für die $\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{M}$, $m(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) \leq r-2$ die Min Bedg., so ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$. Bezeichnung besser: $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^*$
$r^* \geq r-1$
Besser Stern unten!

Bew: ~~[illegible]~~

$r \geq 2$: a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_*^* = 1$ fertig: $[\mathfrak{M}, \mathfrak{G}_*^*] = 1$

b) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_*^* \neq 1$, dann $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}^* = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} < \mathfrak{G}^*$; $r = 2$ fertig

$r > 2$: Wähle $\mathfrak{M}_*^* < \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_*^* \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}_*^*$; $\mathfrak{M}_*^* \triangleleft \mathfrak{M}$

In $s\mathfrak{M}_*^{G}$ gilt Min Bed für die $\mathfrak{N}$ mit $m(\mathfrak{M}_*^G, \mathfrak{N}) \leq r_* - 2$

Induktion: also $\mathfrak{M}_*^G < N\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{M} = \cup \mathfrak{M}_*^G < N\mathfrak{A}$.

4. Gilt in dem min NT $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ die Min Bedg (* 2.51) für die Subnorm Ugr, so ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$.

Bew: Klar nach 3.

5. Ist $\mathfrak{M} \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$, so ist die Min Bedg in $s\mathfrak{M}$ gleichbed. der in $n\mathfrak{M}$. Genauer: Gilt Min Bed in $s\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{L} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{M}$.

S. 39_2

Max Bed in $n\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G} \Rightarrow j(\mathfrak{M})$ endlich

Liegt jede subnorm Ugr $\mathfrak{N}$ der Ord p, für die $\mathfrak{N}^{\mathfrak{G}} \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$ ist, in $N\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$?

172

29.11.57

1. Ist P abel. p-Gruppe ~~nicht zyklisch~~ mit ≥ 2 Ugr der Ord p, so ist $s\,P$ einfach.

Fortb. 175

~~NB: Bei $p=2$~~ ($p>2$) ~~hätten mindestens nicht die vollst. Quaternionengruppe~~ diesmal 1 Ugr durch P ~~2 haben (Jacobson)~~,

Bew: a) P abelsch vom Typ (p,p) $\quad p \geq 2$

$\varphi(P_i) = 1, \quad \varphi(1) = 0$

α) Ist $\varphi(P_1) = \varphi(P_2) = p$ ~~...~~, so $\varphi(P) = \varphi(1) = p$.

β) Ist $\varphi(P) = \varphi(P_1) = 1$, so ~~$\varphi(P_2), \ldots \neq 1$ nach α), also~~

$0 = \varphi(P_1 P_2) = \varphi(P_1) \cdot \varphi(P_2) = \varphi(P_2) = \varphi(P_3)$ geht nicht nach α)

b) P abelsch: Induktion nach $|P|$

Bew 173

Sei $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$ $\quad P_2$ minimal

Ist $P_2 = 1$, so $\varphi(P_1) = 0$, also nach a)

$\varphi(P'_1) = 0$ für $|P'_1| = p$; ist P nicht zykl., so

sei P^* die Ugr vom Exp p: $|P^*| \geq p^2$. Jede Gr. der Ord p in P hat dann eine zykl. Faktorgr.

Dann ist aber P vom Typ (p,p): a)

Ist aber $P_2 \neq 1$, so ist P_1 zykl., da unten algebr. (im gemeinsam P und)

Ist $P'_1 < P_1$, $|P'_1| = 1$, so wird P/P'_1 unten alg., also P/P'_1 zykl. , P Typ (p^n, p).

Ähnlich: Ist $P_1 = P$, so $\varphi(P) = \varphi(P')$ für jede maximale $P' < P$.

b) Sei $\mathfrak{P} = P_\delta$ abelsch, nicht zykl. ; $p \geq 2$

$\alpha \leq \beta$, $P_\alpha \sim P_\beta$ ($\sim$ heißt: $\varphi(P_\alpha) = \varphi(P_\beta)$).

P · P_β · P_α · P_0

Beh: $P \sim P_0$

Bew: I. $\alpha = 0$: $P_0 \sim P_1$

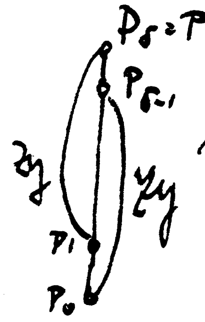
Nach a) ist $P_0 \sim P_1'$ f. alle $|P_1'| = p$.

Also gibt es $P_2 \sim P_1' \sim P_0$.

demnach (Indukt.) $P \sim P_0$ oder P/P_1' zy, dann Typ $P = (1, p)$ a)

II. $\beta = \delta$: wie eben, dual

III. $\alpha > 0$ und $\beta < \delta$: Wähle $P_1 \leq P_\alpha$, dann ist nach Indukt. P/P_1 zykl. Wähle $P_{\delta-1} \geq P_\beta$, dann ist u. u. $P_{\delta-1}$ zykl.



$\rightarrow P$ zy.

[c) ~~$\mathfrak{P}$ beliebig, Bez. wie bei b) α) $P_1 \sim P_0 \rightarrow$ Alle $P_1' \sim P_0$~~

~~OBdA $P_1 \not\leq P \rightarrow P/P_1$ zy $\rightarrow P$ abelsch, b)~~

~~β) $\beta = \delta - 1 \rightarrow$ Alle $P_{\delta-1}' \sim P_\delta$. $P_1 \not\leq P \rightarrow P/P_1$ zy.~~

~~(sonst $P_1 \sim P_\delta$, $P_1' \sim P_0$, $P_1 \sim P_0$) $\rightarrow P$ abelsch. b)~~

~~γ) $\alpha > 0$ und $\beta < \delta$ Wähle $\begin{cases} P_{\delta-1} \geq P_\beta \\ P_1 \leq P_\alpha \end{cases} \rightarrow P_{\delta-1}$ zy $\rightarrow P_1 \triangleleft P$~~

~~$\rightarrow P/P_1$ zy $\rightarrow P$ zy~~]

wenden!

c) $\mathfrak{P}$ beliebig, $\mathfrak{P} \ni P_1, P_1'$ mit Ord p.

Sei $P_\alpha \le P_\delta = \mathfrak{P}$ minimal gewählt mit $P_\alpha \sim P_{\alpha+1}$.

P_δ, $P_{\alpha+1}$, P_α, P_0

α) Dann ist $P_{\alpha+1}$ zyklisch. Denn sonst kann man

$$\begin{cases} P'_{\alpha+1} = \{A\} \text{ wählen mit } P_\alpha \cdot \{A\} = P_{\alpha+1}, \\ P'_\alpha = P_\alpha \cap P'_{\alpha+1} \end{cases}$$

dann wird zu Minimalität von α:

$$P'_{\alpha+1} = P'_{\alpha+1} \cap P_{\alpha+1} \sim P'_{\alpha+1} \cap P_\alpha = P'_\alpha .$$

β) Sei $\alpha > 0$. Dann sei $P_1 \le$ Ztr P. Dann $P_1 \le P_\alpha$, denn sonst hat $s(P_1 P_\alpha)$ einen unteren nicht konst. Homomorphismus, obwohl abelsch und nicht zyklisch, entgegen (α).

Bezeichne die Gr der Ord p^2 in $P_{\alpha+1}$ mit P_2; dann hat P/P_1 die beiden Untergr der Ord p: P_2/P_1 (weil P_2 zykl.) und $P_1 P_1'/P_1$ (vom Typ (p,p)).

Indukt: $s(P/P_1)$ einfach $\Rightarrow P_2 \sim P \Rightarrow P_1' \sim P_1' \cap P_1 = P_0$
$\Rightarrow P_1'' \sim P_0 \Rightarrow P_1 \sim P_0 \Rightarrow P \sim P_0$ entgegen Minimalität von α

~~Also $P \sim P_0$, also P einfach~~

γ) Sei $\alpha = 0$. Dann ist $P_0 \sim P_1' \sim P_1'' \sim P_1$.

P_δ, P_ς, P_2, P_1, P_0

Wähle $P_1 <$ Ztr P, setze $P_2 = P_1 P_1'$.

Es ist $P_2 \sim P_1$;

Hat P/P_1 zwei Ugr der Ord p, dann Indukt: $P_0 \sim P_1 \sim P_\delta$

Hat P/P_1 nur eine Ug der Ord p, so ist dies P_2/P_1. ~~Wähle $A \in P - P_1$. Dann $P_1 \le \{A\}$, sonst hätte die abelsche Gr $P_1\{A\}$ nicht-tr. Homom.~~

Sei P_ϱ maximal mit $P_\varrho \sim P_0$. Annahme: $\varrho < \delta$.

Dann wähle $A \in P_\delta - P_\varrho$.

$P_\mu = \{A\} \cdot P_1$ ist abelsch und hat nicht triv. ~~Autom~~ Homom. von SP_μ, also ist P_μ zyklisch, d.h.

$P_1 < \{A\}$, $|\{A\}| \geq 4$. Die zykl. Gr. der Ord 4 in $\{A\}$ müsste nach S. 174 unten $= P_2$ (Typ (p,p)) sein, geht nicht. Also ist $P_\varrho = P_\delta$, $P_0 \sim P_\delta$, SP einf.

Damit ist bewiesen: (172 (1)) =

(2) Satz von Zappa (Suzuki Ergebnisse 10, S. 71):

Für eine p-Gruppe ist SP <u>nicht einfach</u> genau wenn P zyklisch von der Ord $\geq p^2$ oder verallgemeinerte Quaternionengruppe.

NB: Birkhoff schreibt $\equiv$ statt $\sim$.

Beweise für die Normalität des Oberkerns O und des Unterkerns U bei homom. Abb. des vollen Verbands gG: für $A \in$ A abelsch, dann

(3) $O^a = O^a \cup (O^a \cap A) = O^a \cup (O \cap A)^a = O^a \cup (O \cap A)$
$\equiv O^a \cup A = O \cup A \equiv G \cup A = G$; also $O^a \geq O$; $O^A =$

(4) $U^a = U^a \cap (U \cup A) \equiv U^a \cap A = (U \cap A)^a = U \cap A \equiv 1 \cap A \equiv 1$

also $U^a \leq U$, $U^A = U$.

Da dies für alle abelschen $A \leq G$ gilt, ist $O^G = O$, $U^G = U$.

1. Ist U der untere Kern eines Homomorphismus von sG, und ist ${}_aU$ der grösste ~~auflösbare~~ Normalteiler von U, so ist ${}_aU \triangleleft G$. Ja?

Bew: Es genügt zu zeigen dass gilt:

2. Ist ${}_pU$ der grösste p-Normalteiler von U, so folgt aus ${}_pU \neq 1$, dass ${}_pU = {}_pG$ ist, oder ${}_pG$ verallg. Quatg. ~~zyklisch~~.

Bew 2: Ist ${}_pU \neq 1$ und ${}_pG \neq$ verallg. Quatgr., so wird s_pG unten abgeb., ist einfach, also ${}_pG \equiv 1$.

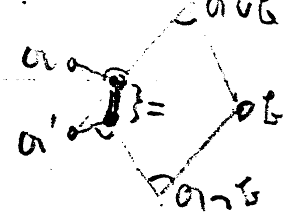
Vertauschbare ~~mbnorm~~ Ugr: Frage:

3. Folgt aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{A}^{1/1} \vee \mathfrak{B}^{1/1}$?

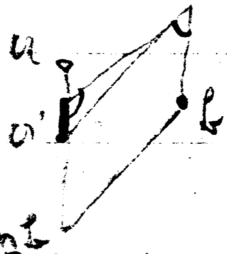
Bemerkg

4: Genau dann ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (beide $\in \mathfrak{I}\mathfrak{G}$!), wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein modulares Paar bilden, dh wenn $j(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) + j(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = j(\mathfrak{A}) + j(\mathfrak{B})$ (Bi s.100 Lemma 1.) [Def von Birkhoff S. 100 nach Wilcox, lautet: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind mod. Paar, wenn $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}') = (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \vee \mathfrak{a}'$.] Äq: dasselbe für $\mathfrak{a}' \geq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$.

Allg:



speziell $\mathfrak{a}' \geq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$:



Stets gilt: $\mathfrak{a}' \leq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a}' \vee (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \leq \mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{a}' \vee \mathfrak{b})$

Was kann man über die Faktoren näher Rechts|Links sagen?

[17] Guttmann, Louis: Some inequalities between latent roots and minimax (maximin) elements of real matrices. Canadian J. 7, 897-902, '57

[18] Tschunikhin: On the conditions of theorems of Sylow's type. Math Rev 11, 321

Sylow properties and semi-invariant subgroups. Math Rev 12, 800.

[19] Tschunikhin: On Π-properties of finite groups. Sbornik 25 (67) 321-346, MR 11, 495.

s. auch Golberg, Doklady 64

[20] Taute: ~~Über~~ Eigenwerte bei nichtsymmetrischen Operatoren. Archiv Math 7 (1956)

Abschätzung von Eigenwerten:

[7] Bodewij, Matrix calculus, 1956

[8] Collar, A.R. Quart J Math appl Math 1 (1948), 145-148

[9] Jahn, H.A. " 131-144

[10] Magnier, C R Ac Paris 226 (1948), 464-465

[11] Turán, Paul: Remark on the zeros of the char. equation Publ. Math. 4 (1956) 406-409

[12] Afriat: Bounds for the char-values of matrix functions. Quart J Math (2) 3 1951, 81-84

[13] Khan, N.A: The char. roots of the product of matrices. Quart J M (2) 7 (1956), 138-143

[14] B. Sz.-Nagy: Remark on Roy's paper. PAMS 7 ('56), 1

[15] Wong, Y.K. Some properties of the proper values of a matrix PAMS 6 '55 891-899

Über Matrizen mit ~~Zahlen~~

[16] L. Mirsky, An introduction to linear algebra and matrix theory Oxford, 1955 328-330

[1] Dunford : Spectral Operators . Pac J Math 4, 321-354
und anschliessende Arbeiten . Zbl 56, 346 ff.

5-148

[2] Karlin-Shapley Memoirs AMS 14 : Moment spaces

[3] Bellmann, R. : On iterative procedure for obtaining
Positive Matrizen the Perron root of a positive Matrix . PAMS 6 719-725

84 [4] Rinehart, R.F. : The equivalence of definitions of
7 Matrix-Funktionen a matrix function . Amer math Monthly 62, 395-414 (1955) . MR 16 p. 1099 37

13 [5] Hall, M. : Determination of Steiner triple systems
Steiner Systeme of order 15 . MTAC 9 (1955), 146-152

1

[6] Dejon, Bruno : Über die stetigen Funktionen eines
normalen Operators. Separat 1955

IX

* Kompositionsfaktoren von G_1 und G_{12} 1 3

" von $a \cup b$ 5

145-148 Primitive Perm.-Gr. 16 27 30 64 166

:4 Perm.-Gruppen ausgezeichneter Grade 27 99 100 110 158
p p^3 p^2 p^4

Verhalten der Indizes 6 10 146 155

60 101 176
Subnormalität u. Vertauschbarkeit 7 12 18 20 37

405 Subnormalverband 0 17 21 32-38 44 48 58 63 162

Verallg. von $A \cup G$ auf unendl. G 48 54 159 163 171

-84, Tiefe $\binom{G}{A}$, $A \circ G$: 148

57, {Verlagerung
Existenz von Normalteilern 87 93 102.. 154 156 164

p*-Länge 71 83

p-auflösbare Gr. 70 81

Faktorisierte Gruppen 109 140

Sylowsätze 26

1 Konjugiertheit von Vertretergruppen 62

Iterierte Kommutierung 59

Darstellungstheorie 14

" auf nichtkomm. „Moduln" 66

p-Gruppen 24 58 100 168 172

Φ-Gruppe 4 45 51

Matrizen 23

T-Funktion 46

[illegible] 65