Prof. Dr. Helmut Wielandt

Tagebücher

D9

September 1955 – November 1957

IX
Sept. 55 - Nov. 57

$\mathcal{N}A$

IX 5
19 *Cunihin*
29
36
43
49
51_5
149
169
= Ergebnisse über den Zusammenhang
Vertb.keit $\leftrightarrow$ Normalität
und Verwandtes

$A, B \in sG$
$|A|, |B|$ mögen höchstens 2 Primt gemeinsam haben, $A = A' \Rightarrow B \leq \mathcal{N}A$.
Bew $\boxed{5}$ 25

$A \in sG$, $A \vee B$, $B \not\leq A \Rightarrow B \cap \mathcal{N}A > B \cap A$ & wenn <u>noch</u> $B \in sG$, so $B \cap \underline{\mathcal{N}A} > B \cap A$.

3. Allgemeinere Fassung des Satzes (2.1). Wir wollen uns von der Beschränkung frei machen, dass $\mathfrak{A}$ einköpfig ist, d.h. nur einen einzigen maximalen Normalteiler enthält.

(3.1) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in s\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \neq 1$. Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{A}$ stimme mit $\mathfrak{A}$ überein. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ sei in dem Durchschnitt $\mathfrak{M}$ aller maximalen Normalteiler von $\mathfrak{A}$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{N}\mathfrak{A}$.
Beweis. Wir bezeichnen die sämtlichen subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{A}$, welche nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten sind und welche ferner mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmen und nur einen einzigen Normalteiler maximalen enthalten, mit $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Da $\mathfrak{A}_v$ nicht in $\mathfrak{M}$ liegt, aber $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ ist, ist $\mathfrak{A}_v$ nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten. Nach Satz 2.1 ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{N}\mathfrak{A}_v$, daher auch $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{N} \bigcup \mathfrak{A}_v$. Es genügt also, zu zeigen, daß $\bigcup \mathfrak{A}_v = \mathfrak{A}$ ist.
Angenommen, es sei $\bigcup \mathfrak{A}_v \neq \mathfrak{A}$. Da $\bigcup \mathfrak{A}_v$ in $\mathfrak{A}$ subnormal ist (2.4), können wir einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\bigcup \mathfrak{A}_v \subseteq \mathfrak{N}$ wählen. Wir wählen ferner eine minimale unter denjenigen subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{A}$, die nicht in $\mathfrak{N}$ liegen (solche gibt es, z.B. $\mathfrak{A}$ selbst); sie heiße $\mathfrak{A}_0$. Wir sind fertig, sobald wir zeigen können, daß $\mathfrak{A}_0$ entgegen der Konstruktion doch in $\mathfrak{N}$ liegt.
$\mathfrak{A}_0$ läßt sich wegen der Minimaleigenschaft nicht als Erzeugnis zweier subnormaler echter Untergruppen darstellen. Daher enthält $\mathfrak{A}_0$ nur einen einzigen maximalen Normalteiler $\mathfrak{N}_0$, ist also einköpfig. Da $\mathfrak{A}_0 \not\subseteq \mathfrak{N}$ ist und $\mathfrak{N}$ ein max Normalteiler von $\mathfrak{A}$ ist, gilt $\mathfrak{N}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0$, ist

$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{N}_0 \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ nicht ablesch. Ferner ist $\mathfrak{A}_0 \not\subseteq \mathfrak{M}$, da $\mathfrak{A}_0 \not\subseteq \mathfrak{N}$ ist. Also stimmt $\mathfrak{A}_0$ nach der Definition von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mit einer von diesen Gruppen überein. $\mathfrak{A}_0$ liegt also in $\mathfrak{M}$ und daher auch in $\mathfrak{N}$.

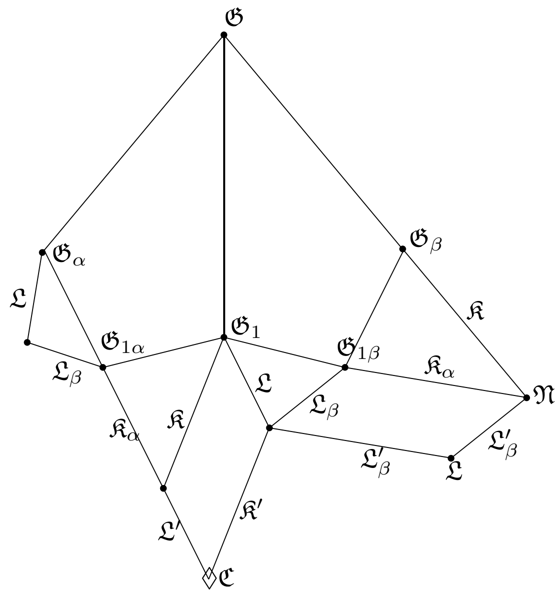
0/1
6.9.55

Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_{12}$.
$\mathfrak{G}$ sei primitiv. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ seien gepaarte Konstituenten von $\mathfrak{G}_1$; es wirke $\mathfrak{K}$ (u.a.) auf α und $\mathfrak{L}$ auf β.

1. Jede Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_{1\alpha}$ ist auch eine von $\mathfrak{K}_\alpha$ oder $\mathfrak{L}_\beta$; zugleich eine von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}_\beta$.

2. Jede Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ ist auch eine von $\mathfrak{K}$ (in derselben Vielfachheit) oder $\mathfrak{L}_\beta$; zugleich eine von $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{K}_\alpha$.
   oder Erweiterung: S.3

Beweise: $S^{-1}\mathfrak{G}_\alpha S = \mathfrak{G}_1$, $S^{-1}\mathfrak{G}_1 S = \mathfrak{G}_\beta$
Genügen schon schwächere Voraussetzungen?



| Faktorgr.
$\mathfrak{K}' =$ Teilmenge der KFG von $\mathfrak{K}$

Bew von

2. $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_\beta$, also $\mathrm{Kfg}(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{B}) = \mathrm{Kfg}(\mathfrak{G}_\beta, \mathfrak{B}) \rightsquigarrow \mathfrak{K} + \mathfrak{L}'_\beta = \mathfrak{L} + \mathfrak{K}'_\alpha \rightsquigarrow$ $\mathfrak{G}_1^{\mathfrak{K}+\mathfrak{L}'_\beta} = \mathfrak{G}_\beta^{\mathfrak{K}+\mathfrak{L}'_\beta}$, also $\lhd \mathfrak{G}$, also $= E \rightsquigarrow \mathfrak{G}_1^{\mathfrak{K}+\mathfrak{L}'_\beta} = E$.

Bew von

1. $\mathfrak{G}_{1\beta}^{\mathfrak{K}_\alpha+\mathfrak{L}'_\beta} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{K}_\alpha+\mathfrak{L}'_\beta} \lhd \mathfrak{G}_\beta$, ebenso $\lhd \mathfrak{G}_1 \rightsquigarrow \mathfrak{G}_{1\beta}^{\mathfrak{K}_\alpha+\mathfrak{L}'_\beta} = E$,
   ebenso $\mathfrak{G}_{1\beta}^{\mathfrak{L}_\beta+\mathfrak{K}'_\alpha} = E$
   NB: Ferner ist $\mathrm{Kfg}(\mathfrak{G}_{1\alpha}, \mathfrak{C}) = \mathrm{Kfg}(\mathfrak{G}_{1\beta}, \mathfrak{C})$, also $\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{K}' + \mathfrak{L}_\beta$
   $\rightsquigarrow \mathfrak{G}_{1\beta}^{\mathfrak{K}'+\mathfrak{L}'_\beta+\mathfrak{L}_\beta} = 1$.

1/2

Frage: Besitzt $\mathfrak{G}_1$ in einer primitiven Gruppe $\mathfrak{G}$ einen transitiven Konstituenten $\mathfrak{K}$ von Primzahlgrad p, so ist $p \top |\mathfrak{G}_1|$. (Zwei Konstituenten v. Grad p sind also stets "gekoppelt", insbesond. isomorph).
Beweis: Die Kfgr. von $\mathfrak{G}_{1\alpha}$ sind Teiler von $(p-1)!$ nach S.1 (1).

Frage: Kann die altern. $\mathfrak{A}_{11}$ als transitiver Konstituent auftreten? Dann sind alle KFG von $\mathfrak{G}_1$ entweder $\mathfrak{A}_{11}$ oder $\mathfrak{A}_{10}$. Dabei $\mathfrak{A}_{11}$ nur einmal (die $\mathfrak{A}_{10}$'s kommen als direktes Produkt vor?)

Bemerkung: Gebraucht wird bei diesen Schlüssen stets $\mathfrak{A}$ max in $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$, und $\mathfrak{A}$ enthält keinen Normalteiler von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{G}$. Manchmal auch $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Vielleicht nützen diese Schlüsse etwas für die Gruppen mit regulärem Automorphismus, etwa in Verbindung mit Burnsides Überlegungen über maximale Sylow-Durchschnitte.
Oder Anwendung auf das Produkt von 2 nilpotenten Gruppen?

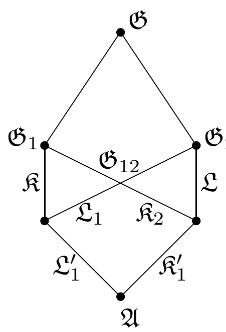
Ist $\mathfrak{G}$ primitiv, ein Konstituent von $\mathfrak{G}_1$ p-auflösbar, so ist $\mathfrak{G}_1$ p-auflösbar.
Steckt in 18.2

2/3

Burnside, on simply transitive groups of prime degree, Quart J Math 37 (1906) [Bb 349] beweist seinen Satz so:
Die mit $\mathfrak{G}$ vertauschbaren Matrizen werden in der Form $\sum_{\alpha \in \mathfrak{H}} P^\alpha = V$ dargestellt; P wird auf Diagonalform transformiert. Es werden die Elemente einer Zeile der reduzierten Matrizengruppe $V^{-1}\mathfrak{G}V$ betrachtet und es wird gezeigt, dass alle ausser einer $= 0$ sind, so dass die Gr $U^{-1}\mathfrak{G}U$ normal ist und daher die Diagonalgruppe P invariant lässt. Der springende Punkt ist das Lemma: Sind $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ eine multipl. Untergr. der Ord $n \mod p$, und gibt $A_0 x + A_1 x^\alpha + A_2 x^{\alpha^2} + \dots + A_{r-1} x^{\alpha^{r-1}}$ $(r < p-1)$ eine Permutation der p p-ten Einheitswurzeln, so sind $r-1$ der A's $= 0$

Gruppenkranz: Polya, kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chem. Verbdgn, Actamath 69 (1937) 145-254

Erweiterung: Die Sätze von S.1 hängen nicht vom Begriff der Paarung ab:



2 kommen in $\mathfrak{G}_1$ in Konst. $\mathfrak{N}$ vor
1 ” $\mathfrak{G}_2$ ” $\mathfrak{H}$ vor

a) KFG ($\mathfrak{G}_1$) $\subseteq \mathfrak{H} + \mathfrak{L}_1' = \mathfrak{L} + \mathfrak{H}_2'$
denn $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$; $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}+\mathfrak{L}_1'} = \mathfrak{G}_2^{\mathfrak{H}+\mathfrak{L}_1'} ? \mathfrak{G}_2$

b) KFG ($\mathfrak{G}_{12}$) $\subseteq \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{L}_1$ $\rightarrow$ hier wird nur $\mathrm{Kern}\, \mathfrak{G}_1 \cap \mathrm{Kern}\, \mathfrak{G}_2 = 1$
$\mathfrak{A}^{\mathfrak{L}_1'+\mathfrak{H}_2'} = \mathfrak{L}^{\mathfrak{L}_1'+\mathfrak{C}_2'} \lhd \mathfrak{G}_1$
$\lhd \mathfrak{G}_2$

3/4

Über die Φ-Gruppe

1. Weder Gaschütz 1953 noch Ore 1939 haben den Satz explizit:
Ist $\mathfrak{N} \triangleq \mathfrak{G}$, so ist $\Phi(\mathfrak{N}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.
Bew.: Satz 5 bei Gaschütz zeigt sogar aus $\Phi(\mathfrak{U}) \lhd \mathfrak{G}$ folgt $\Phi(\mathfrak{U}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$

2. Der Satz von Itô 1955 ist wie folgt zu verschärfen:
Ist $\mathfrak{U} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} \cap \Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ nilpotent, so ist $\mathfrak{U}$ nilpotent. Kurz:
$$\begin{cases} \mathfrak{U} \lhd \lhd \mathfrak{G} \\ \mathfrak{U}^\nu \subseteq \Phi(\mathfrak{G}) \quad \rightsquigarrow \mathfrak{U}^\nu = E \end{cases}$$
Beweis: Sei $\mathfrak{W} = \bigcup_G G^{-1}\mathfrak{U}G$. Dann ist $\mathfrak{W}^\nu = \bigcap_G G^{-1}\mathfrak{U}^\nu G \subseteq \Phi(G)$, also $\mathfrak{W}^\nu = E$ nach Gaschütz Satz 10.

3. Gaschütz' Satz lässt sich so verschärfen:
Ist $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ vertauschbar mit jeder maxim. Ugr. von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H} \subseteq \Phi(\mathfrak{U})$ für ein $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{G}$, sonst $\mathfrak{H} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.
Bew: $\mathfrak{G}_1$ maxim. in $\mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{H} \rightsquigarrow \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_1 \rightsquigarrow \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \rightsquigarrow \mathfrak{U}_1 \supseteq \mathfrak{H} \rightsquigarrow \mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{H}$

4. Aus 1 folgt: Ist $\mathfrak{U} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, so ist $\Phi(\mathfrak{U}) < \Phi(\mathfrak{G})$.

4/5

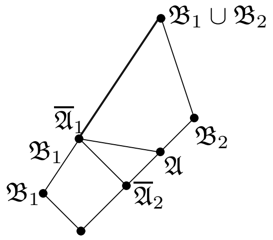
Jordan- und Sylowstruktur: 31.12.55

1. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{B} = p^{\mu})$, $\mathfrak{P}$ $p-$Sylowgr $\mathfrak{A}$ $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{B}$ enthält eine p-Sylowgr von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$
   Bew: Indukt nach $\mathfrak{G} : \mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}^{\mathfrak{P}} \neq \mathfrak{A}$. Ist also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{A}$, so $\mathfrak{A}$ vertb $\mathfrak{P}$: dann VIII S.179 10
   Verschärfung: 6_2 (die Vor $(|\mathfrak{B}| = p^{\mu}$ ist unnötig)

2. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}$ $\rightsquigarrow$ von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$ gibt es nur Kompositionsfaktorgruppen aus $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$ hat nur solche aus $\mathfrak{A}$. Also hat $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ nur solche aus $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$.
   $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1$ $\rightsquigarrow$ $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| \mid |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1||\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|$
   $\equiv$ VIII S.179, Patz(8)

3. Sei $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{B}_i \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Dann ist $|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| \mid |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty}|\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$
   Verschärfung: 6_2.
   Bew: $p \nmid |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1||\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|$ $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{A}_i$ enthält eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{B}_i$ $\rightsquigarrow$

   I. Besser: A_2 für ein $A_2 \in \mathfrak{A}_2$
      $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_i \neq \mathfrak{B}_1$
      $|\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{A}_2}| \mid |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty}$
      $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} \cup \mathfrak{B}_2$ $|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{A}_2} \cup \mathfrak{A}_2| \mid |\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} : \mathfrak{A}_1^{\mathfrak{A}_2}|^{\infty}|\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$
   II. $\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_1$ vtb $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_1$ vtb $\overline{\mathfrak{A}_2}$
      (3) $\rightsquigarrow$ $|\mathfrak{B}_1 \cup \overline{\mathfrak{A}_2} : \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2| \mid |\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{A}_1|^{\infty}|\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$ und $|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{B}_1 \cup \overline{\mathfrak{A}_2}| \mid |\mathfrak{B}_2 : \overline{\mathfrak{A}_2}|^{\infty} \mid |\mathfrak{B}_2 : \mathfrak{A}_2|^{\infty}$



5/6

1. Ist $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{G}$, so ist

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} &= \frac{(\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C})}{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C})} \cdot (\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}} : \mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}) \mid (\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}} : \mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}) \\
&= \frac{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}} : \mathfrak{A}^{\mathfrak{C}})}{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{A}^{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C})}
\end{aligned}
$$

wobei $\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}$ das Erzeugnis aller $\mathfrak{A}$ bedeutet.

Bew:

$$\begin{aligned} '' \quad &= \frac{(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}})(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}})}{(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}})} = \frac{(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})}{(\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}})}(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}) \\ &= \frac{(\mathfrak{C}:\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}\cap\mathfrak{C})}{(\mathfrak{C}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}\cap\mathfrak{B})}\cdot(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}) \end{aligned}$$

Hauptsatz:

2. Ist $\mathfrak{A}\le\mathfrak{B}\triangleleft\triangleleft\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}\le\mathfrak{G}$, so ist $(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}:\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C})\mid(\mathfrak{B}:\mathfrak{A})^\infty$
   Bew: Nach (1) folgt dies aus $(\mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}:\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}})\mid(\mathfrak{B}:\mathfrak{A})^\infty$, dies aus 5_4.

Bemerkung:

3. Ist $\mathfrak{A}_1\le\mathfrak{B}_1\triangleleft\triangleleft\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_2\le\mathfrak{B}_2\le\mathfrak{G}$, so kann $\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2:\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$ andere Primfaktorenm enthalten als $\mathfrak{B}_1:\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_2:\mathfrak{A}_2$, sogar wenn $\mathfrak{A}_2=E$.
   Beispiel: $\mathfrak{B}_1$ = alternierende Gr vom Grad 5, desgl $\mathfrak{B}_1',\dots,\mathfrak{B}_1''''$; $\mathfrak{G}=\underbrace{\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_1'\times\cdots\times\mathfrak{B}_1''''}_{\triangleleft\mathfrak{G}}\cdot\mathfrak{C}$, wo $|\mathfrak{C}=5$, $\mathfrak{C}$ die $\mathfrak{B}_1^{(v)}$ zyklische vertauscht, und
   $\mathfrak{G}$ = Alternierende Gr in $1,\dots,4$; $|\mathfrak{A}_1|=12$, $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{B}_1=\{(12)(34)\}$; $\mathfrak{A}_2=E$, $\mathfrak{B}_2=\{(123)\}$

6/7

1.1.56
Eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ sei mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Dann ist $\mathfrak{A}\triangleleft\triangleleft\mathfrak{G}$, aber nicht stets $\mathfrak{A}\triangleleft\mathfrak{G}$ Verschärfung: S.12
Bew. S.8. Bew. indirekt: Sei (I) ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung und darin (II) $\mathfrak{A}$ von möglichst großer Ordnung. Wähle $B\notin\mathcal{N}sA$. Dann ist nach Indvor. (I) $\mathfrak{A}\{B\}=\mathfrak{G}$.
Sei $B^{pq}\in\mathfrak{A}$, aber $B^q\notin\mathfrak{A}$ (p Primzahl, $q=p^\alpha$). Dann ist $(\underbrace{\mathfrak{A}\{B^q\}}_{\mathfrak{N}}:\mathfrak{A})=p$.

$\mathfrak{N}$ ist mit jeder Ugr $\mathfrak{C}\le\mathfrak{G}$ vertauschbar. Dann $\mathfrak{N}\mathfrak{C}=\mathfrak{N}\mathfrak{A}\mathfrak{C}=\mathfrak{N}=\{B^m\}\Phi=\mathfrak{A}\{B^q\}\mathfrak{A}\{B^m\}=\{B^q\}\{B^m\}\mathfrak{A}=\{B^m\}\{B^q\}\mathfrak{A}=\{B^m\}\mathfrak{A}\{B^q\}\mathfrak{A}=\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Nach IndVor II ist $\mathfrak{N}\triangleleft\mathfrak{G}$. $(\mathfrak{G}:\mathfrak{N})=p^\alpha$. $\mathfrak{A}$ enthält keinen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ ($\neq E$), sonst $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ betrachten statt $\mathfrak{G}$. Also ist $\bigcap_G\mathfrak{A}^G=E$; daher wegen $|\mathfrak{N}/\mathfrak{A}|=p$ $\mathfrak{N}$ elementar abelsch. Ferner ist $\mathfrak{A}\triangleleft\mathfrak{N}$, denn sonst gäbe es $N\in\mathfrak{N}$ mit $N^{-1}\mathfrak{A}N\neq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}N^{-1}\mathfrak{A}N=\mathfrak{N}$, $N=AN^{-1}A_1N$, $E=AN^{-1}A_1$, $N\in\mathfrak{A}$, $\downarrow$ geht nicht. Wegen $(\mathfrak{N}:\mathfrak{A})=p$ ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ abelsch, also $\underline{\mathfrak{N}\text{ (elementar) abelsch}}$ wegen $\bigcap G^{-1}\mathfrak{A}G=E$, $\mathfrak{N}/G^{-1}\mathfrak{A}\,G$ abel. Daher $(\mathfrak{G})=p^\gamma$. Es ist $\{B^q\}=\mathfrak{N}\cap\text{Ztr }\mathfrak{G}$. Demm $B^q\in\mathfrak{N}$, also $\in$ Ztrsator $\mathfrak{A}$, und $\in$ Ztra B, also $\in$ Ztr $\mathfrak{G}$; und wäre $(\mathfrak{N}\cap\text{Ztr }\mathfrak{G})>p$, so wäre $\mathfrak{A}\cap\text{Ztr }\mathfrak{G}\neq E$, obwohl $\mathfrak{A}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthält. (Es ist also auch $B^{pq}=E$). Die $(NB)^qB^{-q}=N^{E+B+\cdots+B^{q-1}}$ bilden einen Normalteiler $\mathfrak{C}\triangleleft\mathfrak{G}$ (wenn N ganz $\mathfrak{N}$ durchläuft). Denn

7/8

$(N^{E+\cdots+B^{q-1}})^G=N^{\sum B^\nu G}=N^{G\sum B^\nu}=N_1^{\sum B^\nu}$, da $B^\nu GB^{-\nu}G^{-1}\in\mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{N}$ zentralisiert. Es ist $\mathfrak{C}\triangleleft\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}<\mathfrak{N}$.

α) Ist $\mathfrak{C} \neq E$, dann enthält $\mathfrak{C}$ etwas vom Zentrum von $\mathfrak{G}$, da $(\mathfrak{G}) = p^\gamma$. Also ist dann $B^{-q} \in \mathfrak{C}$, $B^{-q} = (NB)^q B^{-q}$, $(NB)^q = E$, $\mathfrak{A}\{NB\} \neq \mathfrak{G}$, nach I $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}\{NB\}$, $\mathfrak{A}$ normal bei NB und daher bei B entgegen Definition von B.

β) Sei $S = E$, also stets
Beweis: Inudktion nach $(\mathfrak{G})$. Es sei $\mathfrak{M}$ eine möglichst große Ugr von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M}$ und mfM mit allen Konjugierten $G^{-1}\mathfrak{M}G = \mathfrak{G}$, $G = MG^{-1}M_1G$, $G \in \mathfrak{M}$, $G^{-1}\mathfrak{M}G = \mathfrak{M}$.
Ferner ist nach Induktvor. $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Dass nicht stets $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$ ist, zeigt das Beispiel **???** : Gruppen $\mathfrak{G}$ der Ord p^3 $(p < 2)$, die nicht nur Elem. der Ord p enthalten; sei $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{A}) = p$. Dann ist $\mathfrak{A}$ mit jeder Untergr $\mathfrak{C}$ der Ord p vertuschbar, denn die Lösungen von $X^p = E$ bilden eine abelsche Gruppe vom Typ (p, p). Von Natur ist aber $\mathfrak{A}$ mit jeder Ugr $\mathfrak{C}$ mit $(\mathfrak{C}) \geq p^2$ vertauschbar, denn diese $\mathfrak{C} \lhd \mathfrak{G}$.

8/9

Kommutierende Untergruppen [= quasinormal : Ore 1938] 1.1.50
$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}$ hisse kommutierend in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}\mathfrak{A}$ für jede Untergruppe $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$. Sei $(\mathfrak{G}) \leq \infty$. Schreibe $\mathfrak{A}\mathrm{k}\mathfrak{G}$.

1. $\mathfrak{A}$ komm in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}'$ komm in $\mathfrak{G}'$. Dann $\mathfrak{H}' \leq \mathfrak{G}' \rightsquigarrow \mathfrak{A}\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'\mathfrak{A}$. Vergleiche die El. $\in \mathfrak{G}'$: $\mathfrak{A}'\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'\mathfrak{A}'$.
2. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ komm in $\mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ komm in $\mathfrak{G}$.
3. $\underline{\mathfrak{A}}$ komm in $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ ablesch $\rightsquigarrow$ jedes $\overline{mfA\mathfrak{H}} = \overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{A}\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\overline{\mathfrak{B}}}\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{H}\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{H}\overline{\mathfrak{A}}$.
4. $\mathfrak{A}$ komm in $\mathfrak{G}$, $(\mathfrak{G} : \mathfrak{A}) < \infty \rightsquigarrow \mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ (S7). "Kommutabilität" steht also zwischen Invarianz und Nachinvarianz. $\mathfrak{A}$ heisse nachkommutierend in $\mathfrak{G}$ (schreib $\mathfrak{A}\mathrm{kk}\mathfrak{G}$), wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_r \mathrm{k} \mathfrak{A}_{r-1} \mathrm{k} - \mathrm{k} \mathfrak{A}_1 \mathrm{k} \mathfrak{G}$.
5. Hat $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe, so ist $\mathfrak{A}\mathrm{kk}\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.
Bew: Sei $\mathfrak{B}$ maximal $\geq \mathfrak{A}$ und $\mathrm{k}\mathfrak{G}$. Dann $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{G}$ wie auf S.8. Induktion.

9/10

Fragen:

1. Ist stets $\mathfrak{A}\mathrm{kk}\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$?
2. Folgt aus $\substack{\mathfrak{A}\\\mathfrak{B}}\mathrm{kk}\mathfrak{G}$ auch $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}\mathrm{kk}\mathfrak{G}$?
NB: Dass aus $\mathfrak{A}\mathrm{kk}\mathfrak{G}$ stets $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}'\mathrm{kk}\mathfrak{G}'$ folgt, stimmt, daher gibt $\substack{\mathfrak{A}\\\mathfrak{B}}\mathrm{kk}\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\mathrm{kk}\mathfrak{G}$.
3. Gilt für nicht mehr zu verfeinernde Ketten von kk Ugr ein Verfeinerungssatz?

4. Ist $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \leq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, so ist
$$\frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|}{|(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})|} = \frac{|\mathfrak{A}||\mathfrak{B}||\mathfrak{C}| \cdot \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}||\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|}$$
symmetrisch.
Bew: $|\mathfrak{A}||\mathfrak{B}||\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \cdot \mathfrak{C} = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}||\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}||\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|$
$\frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|}{|(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})|} = \frac{|\mathfrak{A}||\mathfrak{B}||\mathfrak{C}||\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}||\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}||\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|}$

5. Ist $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \leq \mathfrak{G}$ und je zwei von ihnen vertsuchbar, so ist $\frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|}{|(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})|}$ invariant gegen Vertauschung der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. (hierzu Remak 1931 für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \lhd \mathfrak{G}$
Verweis durch Pfeil auf nächste Seite

6. Frage: Ist stets $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ vertauschbar? Oder ist diese Eigensch invar gegen Permut $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$?

10/11

Kompositionsreihen und Sylowgruppen.

1. Sei $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ Sylowgr von $\mathfrak{N}$. Dann ist die nachinvariante Hülle $\overline{\mathfrak{S}}$ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ invariant gegenüber $\mathfrak{H}$: $\overline{\mathfrak{S}}\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{S}}$. Allg bei Autom α von $\mathfrak{G}$: $\alpha \underset{\pi}{<} \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}^\alpha \sigma \overline{\mathfrak{S}} = \overline{\mathfrak{S}}^\alpha$.
Beweis: Sei $\mathfrak{S}^*$ die nachinvar Hülle von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}} \leq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}^* \lhd \mathfrak{N}$, daher $\mathfrak{S}^* \lhd \mathfrak{H}$, und $\overline{\mathfrak{S}^*}$ invar bei $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{S}^*$ = Erzeuger aller p-Sylowgr von $\mathfrak{N}$. Aber ist andererseits $\mathfrak{S}^* \leq \overline{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{H}$, also $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{S}^* \leq \overline{\mathfrak{S}}$, $\overline{\mathfrak{S}^*} = \overline{\mathfrak{S}}$

2. Insbesondere: Ist $\mathfrak{S}$ eine Sylowgr (oder Halbgruppe) von $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$, so ist $\overline{\mathfrak{S}}\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{S}}$.

3. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \leq \mathfrak{g}$ paarweise vertsuchbar, und ist $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$, also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ vertauschbar.
Bew: $|\mathfrak{A}||\mathfrak{C}||\mathfrak{B}||\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{A}\mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B}\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}||\mathfrak{C}|$
$|\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{A}||\mathfrak{B}||\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{A}\mathfrak{B}||\mathfrak{C}| \rightsquigarrow |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}||\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}| = |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}||\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}| = |(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})||\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}|$

11/12

Vertauschbarkeit und Nachinvarianz. (Noch nicht bei Ore 1938)

1. Sei $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{G} : \mathfrak{A}) < \infty$ und $\mathfrak{A}$ mit allen seinen Konjugierten vertauschbar. Dann ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.
Bew: Indukt nach $(\mathfrak{G} : \mathfrak{A})$.
NB: Der Satz ist stärker als der von S.9. In $p\Box p$ ist $|p$ mit seinen Konjkl
???
Sei $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}$ ein möglichst grosses Erzeugnis (= Produkt) von $\mathfrak{A}$ und geeigneten Konjugierten: $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{G_2} \dots \mathfrak{A}^{G_r}$. Dann ist $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$, denn sonst wäre für ein T $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^T = \mathfrak{G}$ wegen Maximalität, $T = MT^{-1}M_1T$, $T \in \mathfrak{M}$, geht nicht.
Also $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$ und nach Induktion $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{M}$, daher $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.

Der Kern davon steht schon bei Ore 1983 (**???** 5; vgl insbe S.431)

2. $\mathfrak{G}$ ist nie das Produkt von zwei vertauschbaren konjugierten Untergruppen (= Ore 1938, S.434)
   Verallg auf mehr Fakt. S.37

3. Ist $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{F}$ einfach und $\mathfrak{F}$ nichabelsch ider k ein Kopf von $\mathfrak{B}$ (d.h. $\mathfrak{F}$ kein Primkopf von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1$. Denn $\mathfrak{A}^{\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{B}$, und $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^{\mathfrak{F}} \cdot \mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ Erzeugnis ein-$\mathfrak{F}$-köpfiger nachinvar Ugr, also $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{B}$ ist.
   Allgemeiner:

12/13

1. Ist $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}^*$ derart, dass $\mathfrak{A}^*$ alle abelschen Kompfaktorgruppen von $\mathfrak{A}$ enthält, die Köpfe von $\mathfrak{B}$ sind, so ist $\mathfrak{A}^* \cup \mathfrak{B}$. Denn von $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{A}^*$ sind alle Kfgr nichtabelsch: wende 12_3 an.

2. Ist $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, so ist für die Nebenklassenmultigruppen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ die Zuordnung $A\mathfrak{B} \leftrightarrow A\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$) eineindeutig, aber nicht immer ein Isomorphismus.
   Bew: $A_1\mathfrak{B} = A_2\mathfrak{B} \leftrightarrow A_1\mathfrak{D} = A_2\mathfrak{D}$, also zuerst ein-eindeutig. Isomorphie besteht i.a. nicht, sonst müsste aus $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}$ folgen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, was z.B. bei $\mathfrak{A}\mathfrak{B} =$ Ikosaedergr. nicht stimmt ($|\mathfrak{A}| = 12$).

13/14

Beweis des Burnsideschen Kriteriums (vermutlich im Wesentlichen wie Schur):

a) Sei $\mathfrak{G}$ ein Halbgr von Matrizen G über einem Körper (beliebig) K; $\mathfrak{G}$ sei irred : K. Sei $\mathfrak{M}$ ein minimaler Modul von Matrizen : K mit $mfG\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \neq 0$. Dann tritt jede bel Spalte u als erste Spalte von einer Matrix aus $\mathfrak{M}$ auf (es sei denn alle 1. Spa. sind 0), und die i-te Spalte von einer Matrix aus M ist $P_i\mathfrak{A}$ wenn $\mathfrak{A}$ die erste ist. Dabei ist $P_iG = GP$; f alle G.
   Bew: $\mathrm{Rg}\{\mathfrak{A}\} = n$ wegen Irred von $\mathfrak{G}$; $m_2 = P_2\mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{a} = 0 \rightsquigarrow m_2 = 0$. $P_2 \cup G$ wegen $G(\mathfrak{a}m_2\dots) = (GuGPu\dots) = \{GuPGu\dots\}$.

b) Ist nun K alg. abgeschl., so ist $P_i = \lambda_i E$, also mit $l = |\lambda_1 - \lambda_n$: $M = \mathfrak{a}l$, l unabh. **???**

c) Wähle nun, wenn $\mathrm{Rg}\,\mathfrak{G} < n^2$ und $\mathfrak{G}$ irred : K, K alg. abg., für $\mathfrak{M}$ einen minimalen Modul **???**mit $\mathrm{Sp}\,GM = 0$ f alle G. Dann besteht $\mathfrak{M}$ aus allen $\mathfrak{a}l$ (l fest $\neq 0$, $\mathfrak{a}$ beliebig) nach (b). $0 = \mathrm{Sp}\,G\mathfrak{a}l = \mathrm{Sp}\,\mathfrak{a}lG \rightsquigarrow 0 = lG$. Ergänte l zu $\mathfrak{L} = (l\dots)$, $|\mathfrak{L}| \neq 0$. Dann $LG = \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix}$, $LGL^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$ reduzibel.

Folge aus Burnside: $\mathfrak{G}$ irred : alg abg $K \rightsquigarrow$ $\mathfrak{G}$ irred : jedem Erweiterungskörper.

14/15

Nach Lektüre von Hupperts Habilschrift bemerkt:

1. Ist $\mathfrak{G}$ eine auflösbare absolut irreduzible Matrizengruppe (über belieb. Charakteristik) vom Grade p (= Primzahl) (belieb. Ordnung $\leq \infty$), so ist $\mathfrak{G}$ <u>monomial</u> zu machen.
   falsch: s.u.
   Bew: Induktion nach Stufe. Indirekt: Sei $\mathfrak{G}$ primitiv. Dann jeder reduzible Normalt. $\leq$ Ztr. $\mathfrak{G}$.

   (a) $\mathfrak{G}'$ reduzibel: Dann alle Bestandteile v $\mathfrak{G}'$ gleich, und da $\mathfrak{G}'$ voll reduzibel, ist $\mathfrak{G}' = \lambda \cdot E$, $\mathfrak{G}' \leq$ Zentrum $\mathfrak{G}$. Beh: $\mathfrak{G}$ abelsch. Bew: Wähle H beliebig. Dann $\{\mathfrak{G}', M\} \lhd \mathfrak{G}$ und abelsch, also red., also $\subseteq$ Ztr $\mathfrak{G}$, $H \in$ Ztr $\mathfrak{G}$

   (b) $\mathfrak{G}'$ irreduzibel. Indukt: $\mathfrak{G}'$ monomial; $\mathfrak{P}$ sei die zugehörige Permgr des Grades p. $\mathfrak{P}$ ist transitiv, da $\mathfrak{G}'$ irreduzibel. Als trans aufl Permgr des Grades p hat $\mathfrak{P}$ eine einzige p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$; die zugehörigen Matrizen bilden Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$; es ist $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{D}, P\}$, wo $\mathfrak{D}$ die Diagon.elm, $P^p \in \mathfrak{D}$, $P \notin \mathfrak{D}$, ist $\mathfrak{N}$ abelsch, $\mathfrak{N} \subseteq$ Ztr $\mathfrak{G}$, P diagonal; Wid:
   Gegenbeispiel (laut Huppert schon bei Burnside:)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & p & \\ & & p^2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (p^3-1), V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 \\ 1 & \rho^2 & \rho \end{pmatrix} \cdot c \cdot 1,$$
   $|V| = 1$
   $BV = VA$, $AV = VB^{-1}$
   Es ist $\mathfrak{G} = \{ABV\}$ nicht monomial, da schon $\{AB\}$ irreduzibel und in jeder monomialen, zu $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gr enthalten ist.

15/16

Über primitive Permgr mit einem Trans Konst. $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}_1$ des Grades 3: (Gr $G = n$).

Ist $\mathfrak{C}$ selbstgepaart, so hat (wenn 2 von $\mathfrak{C}$ betroffen) $\mathcal{N}_1\mathfrak{G}_{12}$ ein Element, das $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{G}_2$ vertrauscht, daher ist $2|\mathfrak{G}_{12}| \mid |\mathfrak{G}|$, also $2 \mid n$. Daher ist die Anzahl der selbstgepparten Konst. des Grades 3 von $\mathfrak{G}_1$ stets 0 oder ungerade. - Ohne Vor über Selbstpaarung gilt: Der Normalisator von $\mathfrak{G}_{12}$ ist transitiv auf den von $\mathfrak{G}_{12}$ festgelassenen Ziffern. Denn da alle trans Konst des Grades 3 gekoppelt sind, sind alle Untergruppen von $\mathfrak{G}_1$ vom Index 3 und Grad $\leq n-2$ schon in $\mathfrak{G}_1$ konjugiert (es gibt genau 3 solche in $\mathfrak{G}_{12}$).
NB: hat $\mathfrak{G}_1$ mehr als 2 trans Konst $\mathfrak{D}$ des Grades 3, so ist die Anzahl der Konjugierten von $\mathfrak{G}_{12} < n$; gibt Darst von $\mathfrak{G}$ des Grades $< n$.

Frage: Was für endliche Gruppen können in einem Schiefkörper eingebettet werden? Notwendig ist jede abelsche Untergr. zyklisch, also $\mathfrak{G}$ zweistufig, falls von ungerader Ordnung. Rg des kleinsten Einbettungskörpers K über Primkörper K_0 ist $< \infty$. Gibts Darstellg ohne EW 1? Ja, die reguläre, d.h. von K_n, über K_0. Offen bleibt, ob jede Gr ohne EW 1 sich in einen Körper einbetten lässt.

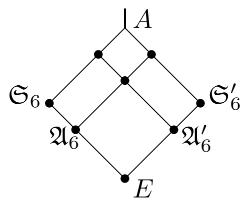
16/17

25.1.56

$\boxed{\mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}}$, für $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ endl. Kompreihe (**???** $\mathfrak{A}$).

Def: Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ eine Menge von einfachen abstrakten Gruppen, so sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}$ die umfassenste nachinvariante Untergr von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{B}^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{A}$. Entsprechend $\mathfrak{A}^{\frac{1}{\alpha}}$, wenn α Verbandsoperator.
Existenz: Ist $\mathfrak{B}_i^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{A}$, so ist $(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2)^{\mathfrak{F}} = \mathfrak{B}_1^{\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{B}_2^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{A}$.
Rechenregel: $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{B}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}$.
Bew: $\mathfrak{C} \leq (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{C}^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{B}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}$
$\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{B}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{C}^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{C} \leq (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}$.
Ferner gilt stets $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \geq \mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \cup \mathfrak{B}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}$; $(\mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}})^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{A}$, $(mfA^{\mathfrak{F}})^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \geq \mathfrak{A}$.

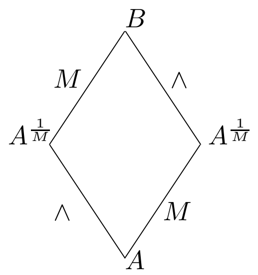
<u>Nicht</u> gilt i.a.: $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}} \cup \mathfrak{B}^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}$. Gegenbeispiel: Sei $\mathfrak{S}_6$ die symmetr. Gr der Ord 6! und α ein <u>äusserer</u> Automorph. der Ord 2 von $\mathfrak{S}_6$. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_6 \times \mathfrak{S}_6'$ erweitert mit einem Element A, das sowohl auf $\mathfrak{S}_6$ wie auf dem zweiten Exemplar $\mathfrak{S}_6'$ den Automorph α macht. Dann ist $\mathfrak{A}_6^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{A}_6'^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}_6'$ und $(\mathfrak{A}_6 \times \mathfrak{A}_6')^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{G}$.



Beweis für $\mathfrak{A}_6^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}_6$: Sonst wäre, da $\mathfrak{A}_6 \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_6^{\frac{1}{2}} \lhd \mathfrak{G}$, und von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}_6^{\frac{1}{2}}$ gäbe es an Kompfaktorgr höchstens eine 2, sowie eine $\mathfrak{A}_6$. Daher enthielte $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_6^{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{A}_6'^{\frac{1}{2}}$ die KFGr 2 mindestens einmal. Nun ist $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}_6 \cap \mathfrak{A}_6')^{\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}}$, enth. <u>nur</u> KFGr 2, ist also $\mathfrak{D} \leq$ Zentralisator $\mathfrak{A}_6$; aber dieser ist nur $= E$, da er nicht α macht, also in $\mathfrak{S}_6$ liegt, dort aber ist er E.

17/18

1. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \ntriangleleft \mathfrak{G} \ \rightsquigarrow\ $ es gibt $\mathfrak{A}' = G^{-1}\mathfrak{A}G$ mit $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$
   Anmerkung: sogar $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$ Bew: Nimm $\mathfrak{G}'$ min $\lhd \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \ntriangleleft \mathfrak{G}'$
   Sei α Verbandsop. auf $\mathfrak{G}$. Dann gilt:
2. $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{B} \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{A}^{\alpha} \curlyvee \mathfrak{B}^{\frac{1}{\alpha}}$. Denn $\mathfrak{A}^{\alpha} \curlyvee \mathfrak{B}^{\alpha} = (\mathfrak{B}^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}$
3. $A \leq B \ \rightsquigarrow\ A^{\frac{1}{\alpha}} \leq B^{\frac{1}{\alpha}}$
4. Sind Λ, M Mengen einfacher Gruppen, $\Lambda \cap M = \emptyset$, so ist $A^{\frac{1}{\Lambda}} \curlyvee A^{\frac{1}{M}}$.
   Bew: $B = A^{\frac{1}{\Lambda}} \cup A^{\frac{1}{M}}$



Nach Jordan-Hölder ist $|B/A^{\frac{1}{\wedge}}| = |A^{\frac{1}{M}}/A|$

18/19

0. Aufgabe: Gruppen untersuchen, in denen je zwei nachinvariante Untergruppen vertauschbar sin. (Verallgemeinerung des Falls von Taussky-Best) d.h. Verband modular.

1' Aufgabe: Haben in einer auflösb Gr. $\mathfrak{G}$ diejenigen $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ besondere Eigenschaften, die **???**allen **???** eines Sylowsystems vertauschbar sind?

2. Ist $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{P}| = p^\alpha$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{A}^p = (\mathfrak{A}\mathfrak{P})^p \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{P}$.
   Denn $\mathfrak{A}^p \lhd\lhd \mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{P}/\mathfrak{A}^p| = p^?$**???** , $(\mathfrak{A}^p)^p = \mathfrak{A}^p$

(2') $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^M \leq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^M = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^M \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$
???(Kurzschrift)
Aufgabe: einen "symmetrichen" Obersatz suchen!

3. $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, zu jedem $p \mid |\mathfrak{B}|$ gebe es eine Sylowgr $\mathfrak{B}_p$ mit $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{B}_p$.
   Dann ist $\mathfrak{A}^\pi \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{A}^\pi$ min mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^\pi$ aufl.
   Bew: $\mathfrak{A}^p \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}_p$ nach (2)
   $\mathfrak{A}^\pi = \mathfrak{A}^{p\pi} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}_p$, $\mathfrak{A}^\alpha \lhd \bigcup_p \mathfrak{A}\mathfrak{B}_p = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$
   ✓ α "auflösbar" $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{G}^\alpha$ größter perfekter Normalteiler
   Cunihin? s.S.167

4. $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{G}_p$ für jede Sylowgr $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$ $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{A}\mathfrak{G}^\alpha$
   Bew: Sei $\mathfrak{F}$ ein Kopf von $\mathfrak{G}^\alpha$ und $\mathfrak{M}$ einköpf nachinvar. in $\mathfrak{G}^\pi$, so dass $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{M}$ gedeckt wird. Dann ist für $p, q \mid |\mathfrak{F}|$ $\mathfrak{A}^p$ normal bei $(\mathfrak{G}^\pi p)^{\mathfrak{G}^\pi}$, also bei $\mathfrak{M}$, ebenso $\mathfrak{A}^q$ normal bei $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^p\mathfrak{A}^q$ normal bei $\mathfrak{M}$. Dies gilt für alle $\mathfrak{M}$, also für $\{\mathfrak{M}\} = \mathfrak{G}^\pi$.

19/20

Falsch ist die Vermutung:
Ist $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ rein p-köpfig, so ist $\mathfrak{A}$ mit jeder p-Sylowgr $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Dann müsste nämlich $\mathfrak{A}^p \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{P}$ sein, und das stimmt nicht für den folgenden Fall:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{array}{cccc} {}^2I & I^2 & & I^2 \\ \mathfrak{A}\Big| & \Big|\mathfrak{A} & \dots & \Big|\mathfrak{A} \end{array}}^{\mathfrak{A}}}_{\text{5 Stück}}$$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_\xi$
Hier ist ξ**???**$\mathfrak{A}$ nicht inv bei $\mathfrak{G}$, also auch nicht bei allen 2-Sylowgruppen $\mathfrak{G}$.

20/21

Der Satz, dass es zu einem nichtableschen Kopf $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ nur eine einköpfige nachinv **???**gruppe $\mathfrak{A}$ gibt, ist durch Induktion leicht zu beweisen; wenn man zeigt, dass <u>jede</u> einköpf **???**$\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$ normal ist (betrachte $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^G\} = \mathfrak{G}_1$, hätte zwei **???** $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^G$). Nun für zwei Defgr. $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ (= Komm.) betrachten. Vielleicht ähnlich wie bei Ore?

21/22

Frage: Was bedeutet die Zerlegung von $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, ($a_i$ ganz) mod pq für die Galoisgruppe?

Kann man ein Kriterium für "zweifache" Irreduzibilität angeben entsprechend dem von Eisenstein für einfache? Vielleicht mit Sätzen von Ore?

22/23

<u>Zur "Schiefe" nilpotenter Matrizen:</u>
Dass es eine Schranke $m > 0$ gibt derart dass aus A nilpotent, $\|A\| = 1$ folgt $\|A - A^*\| \geq m$, kann man vielleicht so zeigen: nimm Folge A_n an, A_n nilpot., $\|A_n - A_n^*\| \to 0$, $\|A_n\| = 1$, und kette sie in die ∞-reihigen Matrizen derart ein, dass $A_n \to A_\infty$ mit A_∞ nilpotent, $|A_\infty| = 1$, $\|A_\infty - A_\infty^*\| = 0$. (Man kann dabei die A_n unitär ähnlich transformieren und hiermit vielleicht die Konvergenz herbeiführen.)

<u>Gewöhnlicher Wertevorrat und Norm:</u>
Ist $|\mu^* A \mu| \leq 1$ f alle $|\mu| = 1$, so ist $\|A\| \leq 2$, und die Grenze wird erreicht z.B. für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Dass aus $|\mu^* A \mu| \leq 1$ f alle μ folgt: $|\mu^* A^2 \mu \leq 1$, ergibt sich, wenn man das Entsprechende für hermitesche A weiss, so:
$A^2 = G^2 - H^2 + i(GH + HG)$, wenn $A = G + iH$, hier $-1 \leq G^2 - H^2 \leq 1$, da $G^2 \leq 1$, $H^2 \leq 1$.

23/24

Zu Knoche: In einer p-Gruppe zentralisiert jedes Element der Breite ≤ 1 die Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$. Daher erzeugen alle Elemente der Breite ≤ 1 eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Klasse ≤ 2 (sogar mit $\Phi(\mathfrak{G}) <$ Ztr $\mathfrak{G}$).
Frage: Erzeugen die Elemente der Breite $\leq r$ eine Gruppe der Klasse $\leq r + 1$? Bei der Untersuchung nützt die Formel $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}\mathfrak{C} < \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A} \circ \mathfrak{C} + \mathfrak{C} \circ \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ (Bei Zassenhaus) wo $+ =$ Gruppen-Verknüpfg, $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ gesetzt ist.

Ebenso $\mathfrak{ABCD} = \mathfrak{ABCD} + \mathfrak{ABDC}$
(gewinnt $\downarrow$ $= [(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}) \circ \mathfrak{C}] \circ \mathfrak{D}$)

Ist die Breite von $\mathfrak{G} = \beta(\mathfrak{G}) \leq p$, so ist die Ordnung der Kommutatorgr $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ höchstens etwa p^{β^2}. Denn man kann, von unten anfangend, eine Kette $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} < \mathfrak{H}_1 < \cdots < \mathfrak{H}_m = \mathfrak{G}$ konstruieren derart dass $\mathfrak{H}_\mu \triangleq \mathfrak{G}$, $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_\mu] \neq [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mu+1}]$, $|[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_\mu]/[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mu-1}]| \leq p^\beta$. Wie bei meinem alten Satz $c \leq \beta + 1$ für $\beta \leq p$ folgt, dass $m \leq \beta$, daher $|\mathfrak{G}' : E| \leq (p^\beta)^\beta$.

24/25

Frage: Wenn man eine endliche Gruppe (mit Zentrum möglicherweise) zu ihrem Holomorph erweitert, diese wieder, usw., bekommt man dann schließlich eine Gruppe ohne Zentrum? Oder spaltet sich wenigstens einmal alles Hinzukommende direkt ab?

25/26

Verallgemeinerung der Hallschen Theorie der Sylow-Systeme auf nicht auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ geht vielleicht mit passender Definition der $\underline{\mathfrak{F}}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ (wo $\mathfrak{F}$ eine beliebige einfache Gruppe ist). Etwa so: $\overline{\mathfrak{S}_\mathfrak{F}}$ minimal, alle Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ deckend, die direkteq Produkte von $\mathfrak{F}_1'$ sind; oder: $\underline{\mathfrak{S}}_\mathfrak{F}$ maximal, alle anderen Hauptfaktoren meidend. Stets ist $|\overline{\mathfrak{S}_\mathfrak{F}}| \geq |\underline{\mathfrak{S}}_\mathfrak{F}|$. Ähnlich $\overline{\mathfrak{S}_\Lambda}$, $\underline{\mathfrak{S}}_\Lambda$
Zushg mit **???**

26/27

Fragen von Itô (13.3.57)

1. Ist eine nicht auflösbare Permutationsgruppe von Primzahlgrad der Form $p = 2^m + 1$ stets 3-fach transitiv? $p = 17$?

2. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei vertauschbare p-Gruppen. Gibt es dann in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ je ein Zentrumselement $\neq E$, die vertauschbar sind?

27/28

1. Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{P}$ mit jeder Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Dann ist die nachinvariante Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ vertauschbar mit jeder nachinv. Ugr $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$.
Bew: Jede ein-p-köpfige nachinvariante Ugr $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ hat die Gestalt $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{B}}$, wo $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{P}$.

2. $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$ Π-Halbgruppe von $\mathfrak{G}$ $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ Π-Halbgr $\mathfrak{A}$
$\downarrow$ vertauschbar

Folge:

3. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ Π-Halbgr von $\mathfrak{G}$ $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ Π-Halbgr von $\mathfrak{A}$

4. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ vertauschbare Halbgruppen von $\mathfrak{G}$
$\rightsquigarrow$ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}_2$ " " " $\mathfrak{A}$.
Bew: Indukt $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$

5. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ Hallgr $\mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H} \curlyvee \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$
   Frage: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ Hallgr $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1 \curlyvee \mathfrak{H}_2 \rightsquigarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}_1 \curlyvee$

6. Nein $\mathfrak{G} = \underset{2\,2\,2}{\overset{3}{\overline{|\,|\,|}}}$ $\mathfrak{A} = 1, \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1 = |\,|\,|$, $\mathfrak{H}_2 = \underline{\qquad}$. $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}_2$?

28/29

1. $\mathfrak{P} \curlyvee \mathfrak{Q}$ Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{P}$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{Q} \rightsquigarrow (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}) \curlyvee \mathfrak{Q}$
   Bew: $|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{Q}| = p^\rho q^\sigma$, daher $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Q})$, und mit $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ gilt $\mathfrak{A}^* \curlyvee \mathfrak{Q}$, denn aus $A^*Q = Q_1 A_1$ folgt $A_1 = Q_1^{-1} A^* Q \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, also $\in \mathfrak{A}^*$.
   Also Gruppe $\mathfrak{A}^*\mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Q})\mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})\mathfrak{Q}$

2. Analog für Hallgruppen statt Sylowgruppen.

3. $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{B}| = p^\alpha \rightsquigarrow \mathfrak{A}^p \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

3a. Sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, dann $(\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} : \mathfrak{A}) = p^\alpha \leftrightarrow (\mathfrak{A}^p)^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}^p$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{B} = p^\rho$.

4. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$. Es gebe keinen Primkopf, der sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ auftritt. Dann gilt für die nachinvarianten Hüllen: $\overline{\mathfrak{A}} \curlyvee \overline{\mathfrak{B}}$.
   Bew:

5. In $\overline{\mathfrak{A}}$ treten höchstens dieselben Primköpfe wie in $\mathfrak{A}$ auf, da $\overline{\mathfrak{A}} = \{G_i^{-1} \mathfrak{A} G_i\}$ für gewisse i, nämlich $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^{\overline{\mathfrak{A}}}$

29/30

Aufgaben:

1. Permutationsgruppen des Grades $2p^\alpha$ mit einem Doppelzyklus der Ord p^α untersuchen.

2. Satz von Frame auf monomiale Gr. übertragen

3. Schurs Methode " " " ", nach ursprünglichem Ansatz von Schur.

4. Liegt die Aufspaltung der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}_C$ (wenn man von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}_C$ übergeht)?

5. Bestimmung aller (auflösbaren) endl. Gruppen, in denen jede nachinv. Ugr normal ist. Dazu Best-Taussky 1942 und Blork "Nachinavar. Ugr." Nr.(64).
   Gaschütz

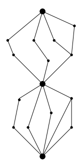
30/31

Zur Frage der Symmetrisierung von Schurs Methode:
Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so braucht der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ mit einer Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{G}$ nicht vertauschbar zu sein mit $\mathfrak{B}$. D.h. es keine Stammring-Eigenschaft

für die $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C} \curlyvee \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \curlyvee \mathfrak{B}$.
Gegenbeispiel mit $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) = 1$: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_7$, $\mathfrak{A} = \{(12\dots67)\}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}_1$.
Hieraus folgt: Nichteinmal bei $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) = 1$ braucht die Vermutung zu stimmen: Ist $\sum A_i B_i = \mathfrak{C}$ vertauschabr mit $\mathfrak{A}$ und mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und ist $\mathfrak{A}^*$ der primäre Komplex, der A_1 enthält, und $\mathfrak{B}^*$ der primäre Komplex, der B_1 enthält, so tritt in $\mathfrak{C}$ jedes $A_i \in \mathfrak{A}^*$ mit gleich vielen $B_j \in \mathfrak{B}^*$ multipliziert auf. (Sonst würde gleich ganz $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ in $\mathfrak{C}$ auftreten, und es gäbe doch Stammring-Eigenschaft.)

31/32

1. Über "Knoten".
   In der monomialen Gr $\mathfrak{S}$ der Grades p der Ord p^{p+1} ist jeder Normalteiler entweder in $\Phi(\mathfrak{S})$ oder enthält $\Phi(\mathfrak{S})$, d.h. er ist mit $\Phi(\mathfrak{S})$ vergleichbar in der Halbordnung der Normalteiler. Nenne $\Phi(\mathfrak{S})$ daher (Graph!) einen Knoten von $\mathfrak{S}$. Weitere Knoten sind in diesem Fall alle $\mathfrak{G}$-Normalteiler in $\Phi(\mathfrak{S})$. Stets sind Knoten $E, \mathfrak{G}$ der Fuss einer einfüssigen und der Rumpf einer einköpfigen Gruppe.

   Knoten 

2. "Einköpfig" = join irreducible s. Birkhoff S.139 Lem.1, S.142 Lem.1
   Gegenstück: 33.3
   Anmerkung: wenn endl Kompreihe

3. Aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rhd\rhd \mathfrak{G}$ folgt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \rhd\rhd \mathfrak{G}$.
   Bew: Kommutator $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

32/33

Gruppen mit distributivem Nachinvarianzverband.

1. Notw u hinreichend ist: keine Kom.Teile vom Typ (p, p) treten auf; oder: je zwei $1-p$-köpfige Untergr. sind vergleichbar. Daher: jede $1-p$-köpf. Ugr ist normal.

2. Frage: Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ distributive Nachinvarianzverbände haben u beide in $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ nachinvariant sind: Hat dann $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ einen modularen Nachinv-Verband? (Bei p-Gruppen stimmt das nach Huppert ($p > 2$!)). Genügt bei einem Faktor auchh schon Modularität?

2a. Nach Best-Taussky 1942 sind in einer Gr mit lauter zyklischen Sylowgr. alle nachinvar. Ugr sogar invariant. Folgt aus 1. Eine Kennzeichnung aller Gr mit nachinvariant = normal steht noch aus. Eine solche Gr enth. zu jeder Ord höchstens eine nachinv Ugr, diese sind also stark charakteristisch. Z.B. sind sie schwach abgeschl. in $\mathfrak{G}$ bezügl. jeder Obergruppe von $\mathfrak{G}$.

3. Ein Gegenstück zu den einköpfigen nachinvarianten Untergruppen bilden die meet-irreducible (mi) nachinvar. Ugr., die nicht als Durchschnitte grösserer dargestellt werden können ("einhütig").

4. Zu einem mi $\mathfrak{A}$ gibt es genau ein $\mathfrak{A}^*$ mit $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{A}$ einfach. Ist $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{A}$ nichtabelsch und $\mathfrak{B}$ die einköpfige nachinv. Deckgruppe, so gilt für jedes $\mathfrak{C} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$ entweder $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B}$. Folglich ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt.

33/34

Die Gruppen, in denen jede einköpfige nachinv. Untergruppe minimal 8einfach ist), sind die gleichen wie die, in denen jede inv. Gruppe (33.3) maximal ist, nämlich die direkten Produkte von einfachen Gruppen.
falsch: v Gruppen mit $X^p = 1$!
Veralggemeinerung auf Jordanlänge der einlöpfigen $\leqq k$?

Def: Tiefe $t(\mathfrak{A})$ [$:= m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ früher] einer nachinv. Ugr $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$ sei die Schrittzahl der kürzesten Normalkette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$; also $t(\mathfrak{G}) = 0$, $t(\mathfrak{A}) = 1 \leftrightarrow \mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{G}$ habe endl Kompreihe (Abschwächung?). Dann hat jede ein-dick-köpfige Untergr $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$ eine Tiefe $t(\mathfrak{A}) \leq 2$.
   Bew: Dann $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$.

2. Ist $\mathfrak{M}$ eine Mene ein-dick-köpfiger Ugr von $\mathfrak{G}$, und kommen in $\mathfrak{M}$ s verschiedene Jordanlängen vor, so ist $t(\{A_i\}_m) \leq s + 1$.
   Bew: sei $\mathfrak{M} = \bigcup_{\sigma=1}^{s} \mathfrak{M}_\sigma$, in $\mathfrak{M}_\sigma$ alle $\mathfrak{A}_i$ die Jordanlänge l_i, $l_1 < l_2 < \cdots < l_s$. Dann ist für $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A} - i\}$:
   $$\mathfrak{A}\{\mathfrak{A}_i\}'^{\mathfrak{G}}_{j(\mathfrak{A}_i) \leq l_\sigma} \triangleleft \mathfrak{A}\{\mathfrak{A}\}'^{\mathfrak{G}}_{j(\mathfrak{A}_i) \leq l_{\sigma+1}}$$

NB: Es ist sogar $t(\mathfrak{A}) \leq 1 + S$, wo S die Maximallänge einer Kette $\mathfrak{A}_1^{G_1} < \mathfrak{A}_2^{G_2} < \cdots < \mathfrak{A}_S^{G_S}$ ist.

34/35

Sylow- und Jordanstruktur:

1. Sei $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, jeder Kopf von $\mathfrak{A}$ habe eine durch p teilbare Ordnung ($\mathfrak{A} = p$-köpfig). $\mathfrak{S}$ sei p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{P}$. Dann besteht eine 1-1-Abbildung zwischen den konjugierten $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ und den in $\mathfrak{S}$ gelegenen konjugierten $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}_j$, und zwar ist $\mathfrak{A}_i$ die nachinv. Hülle von $\mathfrak{P}_i$, $\forall i = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}_i$. s. auch S. 49-51
   Bew: setze $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i = G\mathfrak{A}G^{-1}$. Dann ist $\mathfrak{P}_i$ ebenso wie $G^{-1}\mathfrak{P}G$ eine Sylowgr von $G^{-1}\mathfrak{A}G$, also konjugiert zu $G^{-1}\mathfrak{P}G$ und damit zu $\mathfrak{P}$. Wegen Vor über $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}_i$ = Hülle $\mathfrak{P}_i$. Ist schliesslich $H \in \mathfrak{G}$ beliebig, $H'\mathfrak{P}H = \mathfrak{P}' \leq \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{P}' = H'\mathfrak{A}H \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{A}_\cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_j$.

2. Sei $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$ eine p-Gruppe die normal ist in jeder sie enthaltenden p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$. Dann ist die ni Hülle $\overline{\mathfrak{P}}$ normal unter jeder " von

$\mathfrak{G}$, und es ist $t(\overline{\mathfrak{P}}) \leq 2$.
Bew: Sei $\mathfrak{S}$ p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{P}}$. Für ein $G \in \overline{\mathfrak{P}}$ ist $\mathfrak{P} \leq G^{-1}\mathfrak{Q}G \leq G^{-1}\mathfrak{S}G$, also $\mathfrak{P} \lhd G^{-1}\mathfrak{S}G$, $\overline{\mathfrak{P}}$ inv bei $G^{-1}\mathfrak{S}G$, und wegen $G \in \overline{\mathfrak{P}}$ auch $\overline{\mathfrak{P}}$ inv bnei $\mathfrak{S}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{P}}$ inv bei jeder p-Gruppe und daher auch bei allen Konjugierten von $\overline{\mathfrak{P}}$.

35/36

1. Ist eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ abelsch (oder hamiltonsch), so hat die nachinv Hülle jeder p-Untergr. von $\mathfrak{G}$ höchstens die Tiefe 2.
   Bew: 35,2.

2. Falsch ist die Vermutung:
   Ist $\mathfrak{S}$ Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{S}$, $\mathfrak{P} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$.
   z.B. $p = 3$, $\mathfrak{G} = \overline{\underset{3}{|}\,\underset{3}{|}\,\underset{3}{|}\,\underset{3}{|}\,\underset{3}{|}}^{\mathfrak{S}_5}$, $\mathfrak{S} = \overline{|\,|\,|}^{3}\,|\,|$, $\mathfrak{P} = \ldots 1$.
   Daher:

3. Falsch ist daher die Vermutung:
   Ist $\mathfrak{S}$ Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}) \lhd (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B})$, $\overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B}$.
   Daher:

4. Falsch ist:
   Aus $\mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{P}_2$ (p-Gruppen) folgt $\overline{\mathfrak{P}_1} \lhd \overline{\mathfrak{P}_2}$. Vielleicht, wenn $\mathfrak{P}_i$ “voll“ in $\mathfrak{G}_p$?
   Die entsprechende Vermutung für $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ ist dagegen bekanntlich richtig.

5. Falsch ist:
   Sei $\substack{\mathfrak{B}\\ \mathfrak{A}} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Dann $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{B} \cap \mathfrak{P}$ f alle Sylowgr $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$.
   Gegenbeispiel: $\mathfrak{G} = \overline{\underset{2}{|}\,\underset{2}{|}\,\underset{2}{|}}^{3} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} = 1$.

36/37

1. Mitteilung von Elliott Wall, Newcastle 31.8.55:
   Die Automorphismengruppe der alternierenden Gruppe A_6 zerfällt <u>nicht</u> über der Gruppe der inneren Automorph.

2. Der Satz von Ore: $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^G = \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ folgt aus dem allgemeineren (auch bei Ore):

2a: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A}\mathfrak{B}^G = \mathfrak{G}$
   Bew 2a: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{BA} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^A = \mathfrak{A}^A\mathfrak{B}^A = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^A = \mathfrak{G}$

3. Verallgemeinerung des Satzes von Ore:
   Sind $\mathfrak{A}^{G_1}, \ldots, \mathfrak{A}^{G_S}$ paarweise als Ganze vertauschbar, so ist $\prod_{\sigma=1}^{S} \mathfrak{A}^{G_\sigma} \neq \mathfrak{G}$. Verschärfung s.u.
   Bew: Sonst wähle S minimal, setze $\prod_1^{S-1} \mathfrak{A}^{G_\sigma} = \mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{G_{S-1}^{-1}G_S} \geq \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{G_S} = \mathfrak{G}$, entgegen Ore.

4. Verschärfung von 3: Es genügt schon die Vor: $\prod_{\rho<1}^{r} \mathfrak{A}^{G_\rho} = \mathfrak{B}_\rho$ ist Gruppe für $r = 1, 2, \ldots, s$. Dann gilt schon $\mathfrak{B}_r \neq \mathfrak{G}$.

37/38

1. Eine Gruppe, in der die Minimalbedingung für nachinvariante Untergr. gilt, ist das Erzeugnis ihrer einköpfigen nachinvar. Untergruppen.
   Bew: Ein Gegenbeispiel ("schlechte Gruppe") wäre das Erzeugnis aller ihrer echten Normalteiler, und mindestens einer von diesen wäre wieder schlecht. Gibt absteigende unendl Kette.

2. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$ einköpfig, so gibt es genau einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M}$. Nämlich $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$. Rumpf $\mathfrak{B}$.

3. Eine Gruppe braucht keinen max Normalteiler zu enthalten. Z.B. $\mathfrak{G}$ addit. Gruppe der $\frac{n}{2^\alpha} \mod 1$.

4. Ist $\mathfrak{M}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. einköpfig, $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$

38/39

Ein den Eindeutigkeitssatz für perfekte einköpf. Deckgruppen.

Ist $\mathfrak{M}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nichtabelsch, und sind $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ beide nicht in $\mathfrak{M}$ und beide einköpfig, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ *Anmerkung: [* Siehe dazu Ore Strukturen II, Th 9: Als Gegenstück: 42.1: dort folgt 39.1 erst wenn man 39.2 kennt. *]*
Bew:

A. Sei $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{b}$. Dann $*$ s.u.!

B. Indukt nach $\max(m(g, \mathfrak{a}), m(g, \mathfrak{b})) = \max(\alpha, \beta)$.

   I. $\max = 1 \rightsquigarrow \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow$ A. Ist $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ wegen Einköpf. von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}} \leq \mathfrak{M}$. Ist keins der Fall, so $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$

   II. $\max = \mu > 1$. Sei $B \in \mathfrak{B}$ beliebig; $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$; es ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{M}' \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ einfach, ferner $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{A}^B \not\leq \mathfrak{M}'$, $\left.\begin{matrix} m(\mathfrak{G}', \mathfrak{A}) \\ m(\mathfrak{G}'\mathfrak{A}^B)) \end{matrix}\right\} \leq$

   $m(\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}, \mathfrak{A}) \leq \mu - 1$. $\left\{\begin{matrix} \text{Nach Indukt ist } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B, \text{also } \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \\ \text{Ebenso } \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B} \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow$

   A.

2. Folge: $\mathfrak{A}$ perfekt einköpfig, $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{B} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$.
   Bew: 38.2 $\rightsquigarrow \exists\, \mathfrak{M}$ max Normalt in $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{B}$.

$*$ Wäre $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, so nicht $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \underset{\text{mod}}{=} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, etwa $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \neq \mathfrak{A}$;
dann $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \rightsquigarrow \leq \mathfrak{M} \underset{38.4}{\rightsquigarrow} \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ abelsch

3. Folge: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, einfach, nichtabelsch, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A} < \mathcal{N} \lhd \mathfrak{B}$; $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = 2$; $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^G] = 1 \to \mathfrak{A}^G$ min. NT von $\mathfrak{G}$. Forts. 28.9.57

39/40

1. Sei $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ eine Menge nachinvar. Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die durch $\subseteq$ vollständig geordnet ist. Dann ist $\mathfrak{W} = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda$ auch Vereinigung einer abzählbaren aufsteigenden Folge von nachinvarianten Untergruppen $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{G}$.
   Bew. mit

2. Sind die $m(\mathfrak{G}; \mathfrak{A}_\lambda) \leq k$ beschrkt, so ist $\mathfrak{W} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{W}) \leq k$.
   Bew 2: Sei $\mathfrak{A}_\lambda^{(k)}$ das k-te Glied der kanonischen Normalreihe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}_\lambda$ ($\mathfrak{A}_\lambda^{(0)} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_\lambda^{(k)} = \mathfrak{A}_\lambda$). Sei $\mathfrak{N}_k = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{(k)}$. Dann ist $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{W}$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{W}^{\mathfrak{G}}$, s.u.!
   $*$ $\mathfrak{W} \leq \mathfrak{N}_k$ f alle k, $\mathfrak{W}^{\mathfrak{N}_1} = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{\mathfrak{N}_1} \leq \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{\mathfrak{A}_\lambda^{(1)}} = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda^{(2)} = \mathfrak{N}_2$, ebenso $\mathfrak{W}^{\mathfrak{N}_i} \leq \mathfrak{N}_{i+1}$

   Bew 1: Setze $\mathfrak{B}_n = \bigcup_{m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_\lambda) \leq n} \mathfrak{A}_\lambda$; nach (1) ist $\mathfrak{B}_n \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) \leq n$. Ferner $\bigcup_n \mathfrak{B}_n = \bigcup_\lambda \mathfrak{A}_\lambda$.

   $*$ ———— Beh: $\mathfrak{N}_{k+1} \lhd \mathfrak{N}_k$.
   Bew: Sei $A \in \mathfrak{N}_{k+1}$, $B \in \mathfrak{N}_k$. Dann $A \in \mathfrak{A}_\lambda^{(k+1)}$, $B \in \mathfrak{A}_\mu^{(k)}$ für zwei k, λ; also wegen Ordnung $A \in \mathfrak{A}_\rho^{(k+1)}$, $B \in \mathfrak{A}_\rho^{(k)}$ für $\rho = \max(\mu, \lambda)$. Dann $A^B \in [\mathfrak{A}_\rho^{(k+1)}] = \mathfrak{A}_\rho^{(k+1)} \leq \mathfrak{N}_{k+1}$.

40/41

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \not\leq \mathfrak{n} \rightsquigarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ Faktgr eines max NT, abstrakt

$\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{A}_\lambda \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow$ Jeder Kopf von $\mathfrak{G}$ ist Kopf eines $\mathfrak{A}_\lambda$. Def.: Nenne $\mathfrak{G}$ M-köpfig (M eine Menge abstrakt. Gr.) wenn jeder Kopf von $\mathfrak{G} \in M$. $\mathfrak{A}_\lambda$ alle $\mathfrak{A}_\lambda$ M-köpfig $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{G}$ M-köpfig.

41/41A

1. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und ein-dick-köpfig. Seien $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ nachinvariante Untergr von $\mathfrak{G}$ derart, dass $\mathfrak{A} \subseteq \underbrace{\bigcup_\lambda \mathfrak{B}_\lambda}_{\text{(Erzeugnis)}}$. Dann ist für einen Index μ $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}_\lambda$.
   Bew: OBdA sei $\bigcup_\lambda \mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{G}$. Bew indirekt: Wäre stets $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{B}_\lambda$, so nach 39.2 $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}_\lambda} = \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}$. Sei $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ der max. Normalteiler von $\mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A} \not< \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}_\lambda$, für jedes λ (denn sonst $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}_\lambda$). Also genügt es zu betrachten $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. D.h. oBdA sei $\mathfrak{A}$ einfach. Dann ist aber $\mathfrak{B}_\lambda \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda$, denn $\mathfrak{B}_\lambda \overset{\leq}{=} \mathfrak{C} \overset{\lhd}{\neq} \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\lambda$. $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \neq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = E$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\lambda$. Also $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_\lambda] = 1$, $\mathfrak{A} <$ Zentrum $\mathfrak{G}$; Wid.

2. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}_\lambda \lhd \lhd \mathfrak{G}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\lambda) \leq 2$. Sei $\mathfrak{W} =$ Erzeugnis der $\mathfrak{B}_\lambda$ mit $\mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{W} = \sum$ nachinvarianter Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Denn das Erzeugnis endlich vieler $\mathfrak{B}_\lambda$ mit $\mathfrak{A}$ ist $\lhd \lhd \mathfrak{G}$.

3. Ist außerdem Λ abzählbar, so ist $\mathfrak{W}$ $\sum$ einer aufsteigenden Folge nachinvar. Untergrupen. Dann setze $\mathfrak{W}_{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{A}, \cup_{\lambda \leq n} \mathfrak{B}_\lambda\}$.

41A/42

$\mathfrak{G}$ beliebig.

1. Zu jeder perfekten einköpfigen nachinvarianten Untergr $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ gibt es höchstens einen in $\mathfrak{G}$ maximalen Normalteiler $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$, der $\mathfrak{A}$ nicht enthält.
   Schärfer: 4
   Denn wenn $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, betrachte $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{D}$; Es ist $\mathfrak{D}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{A}$ einköpfig. Also $\mathfrak{D}\mathfrak{A} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{smallmatrix} \right.$.

2. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ $\rightsquigarrow$ $K(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = K(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})$ mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

3. Ist für eine Menge Λ von einf. Gr. $\mathfrak{B}^\Lambda < \mathfrak{A}$, und $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A}^\Lambda \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, da $\mathfrak{A}^\Lambda = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\Lambda$.

4. Vermutung. $\mathfrak{G}$ beliebig: Zu jeder einköpfigen perfekten nachinvar. Ugr $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es (genau) eine umfassendste nachinvar. Ugr $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{A}$ nicht enthält.
   Bew: Setze $\mathfrak{B} = \bigcup_{\substack{\mathfrak{C} \lhd \lhd \mathfrak{G} \\ \mathfrak{A} \not< \mathfrak{C}}} \mathfrak{C}$. Es fehlt dann der Beweis für $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Richtig ist 4. also jedenfalls, wenn in $\mathfrak{G}$ die Maximalbedgg gilt.

42/43

Endl. Gruppe $\mathfrak{G}$.

1. Ist eine p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$ von der Klasse c, so gilt für jede nachinvar. Ugr. $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$, deren Kopfordnungen alle durch p **???** teilbar sind (kurz: für jede px-köpfige Gruppe) : $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \leq c + 1$.
   Aufgabe: Erweiterung auf Hall-Gruppen
   Bew:
   (a) $c = 1$, d.h. $\mathfrak{P}' = E$: siehe 36.1
   (b) Sei $\mathfrak{Z} = \text{Ztr } \mathfrak{P}$. Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{Z}'} = \mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}^G$. Denn es ist $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{U}}$ mit $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{P}^G$. Sei $\bigcup_G \mathfrak{Z}^G = \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist die Klasse der p-Sylowgr $\leq c - 1$, nach Indukt. also $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}\mathfrak{N}) \leq c$. Ferner ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{N}$.

   Endl. Kompreihe von $\mathfrak{G}$

2. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, perfekt einköpfig, so gibt es $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \neq E$, das $\mathfrak{A}$ zentralisiert, es sei denn, $\mathfrak{A}$ enthält einen Normalteiler $\neq E$ von $\mathfrak{G}$.
   Bew: Entweder ist $\bigcap \mathfrak{A}^G \neq E$ oder $= E$. Im zweiten Fall gibt es $G_1, \ldots, G_k$, so daß $\bigcap_k \mathfrak{A}^{G_k} = \mathfrak{B} \neq E$. Es ist $\mathfrak{A}^{G_k}$ normal bei $\mathfrak{A}$ und umgekehrt, also $\mathfrak{B}$ normal bei $\mathfrak{A}$ und umgekehrt: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = E$.

43/44

$\mathfrak{F}$-Rümpfe bei Gruppen mit endl. Kompreihe.

1. Def: Der $\mathfrak{F}$-Rumpf $\mathfrak{A}^{*\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{F}$ eine einfache Gruppe zusammengesetzter Ord ist, sei der Durchschnitt aller Normalteiler von $\mathfrak{A}$, deren Faktorgruppe $\sim \mathfrak{F}$ ist.

2. $\mathfrak{A}^{*\mathfrak{F}}$ ist das Erzeugnis aller einköpfigen nachinvar. Ugr von $\mathfrak{A}$, deren Köpfe $\not\sim \mathfrak{F}$ sind, mit den Rümpfen aller ein-$\mathfrak{F}$-köpfigen;

2b) oder auch = Erzeugnis von $\mathfrak{A}^{\mathfrak{F}}$ mit den Rümpfen der 1-$\mathfrak{F}$-köpfigen.

3. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A}^{*\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{G}^{*\mathfrak{F}}$.

4. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightarrow (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})^{*\mathfrak{F}} = \mathfrak{A}^{*\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{B}^{*\mathfrak{F}}$.
   Bew: 2b) und 41.1

4' Dh: $*\mathfrak{F}$ ist ein Nachinvarianz-Operator. [Für $|\mathfrak{F}| = p$ würde das nicht gelten.] Für Vertauschbarkeitsfragen bringt der Op $*\mathfrak{F}$ natürlich nicht mehr als $\mathfrak{F}$.

44/45

1. Ist jede nachinv Ugr einer endl Gr die nachinv. Hülle einer auflösbaren Untergr.?
   Ja: Wähle in jedem einfachen Faktor F_i von $A|$Rumpf A eine auflösb. Gr $A_i \neq 1$, und setze $U =$ kleinste auf $\prod A_i$ abgebildete Gruppe.

2. Frage: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} < \Phi(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A} < \Phi(\mathfrak{G})$?C

45/46

Γ-Funktion:

Integriert man Ψ über eine Quadratfläche der Seitenlänge 1 mit Mittelpkt z, so bekommt man mittels Taylor-Entwicklg um z und mittels

$$\int\int_{\square\frac{1-i}{2}}^{\frac{1+i}{2}} z^n dxdy = \begin{cases} 2^{1-\frac{n}{2}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{4}}}{(n+1)\cdot(n+2)} & 4 \mid n \\ 0 & 4 \nmid n \end{cases}$$

die Formel (vgl Burnsidesche Reihe 36 auf S.57 bei Lösch-**???**). Für $|z+n| > \frac{1}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{1}{2}\log\left[(z-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\right] - i(z-\frac{1}{2})\log\frac{z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{z-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} - 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \cdot \frac{2\zeta(z, 4k+1)^*}{4k+1\cdot 4k+2} \\ &= \frac{1}{2}\log\left[(z-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\right] \\ &\quad + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\left\{\frac{2\zeta(z, 4k+1)}{4k+1\cdot 4k+2} + \frac{1}{(2k+1)(z-\frac{1}{2})}2k\right\} \end{aligned}$$

Das ist um ebensoviel besser wie 36.57 bei Lösch, also diese besser wie 32.55.

Für $x > 0$ wird

$$\Psi(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\log(x^2+\frac{1}{4}) + 2x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2x} - 1 + \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k}\frac{2\zeta^*(x+\frac{1}{2}, 4k+1)}{(4k+1)\cdot(4k+2)}$$

$*$ Dabei $\zeta(z,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)}k = (-1)^{k-1}\frac{\Psi^{(k-1)i}(z)}{(k-1)!} = \zeta(z+1,k)$ in Löschs Bezeichnung.

46/47

Frage: Ergibt sich vielleicht für $\Gamma(z+\frac{1}{2})$ und $\Psi(z+\frac{1}{2})$ eine asymptotische Entwicklung nach Pot. von $\frac{1}{(z^2+\frac{1}{4})^2}$, indem man $\int_\square$ partiell nach x und y integriert, nach Bernoulli-Polynom-Methode? Und sind nicht schon die Koeff der asymptotischen Entwickelg von $\Psi(z+\frac{1}{4})$ nach $\frac{1}{z^2}$ kleiner als die von $\Psi(z)$? Diese Koeffizienten sind Bernoulli-Polynome $Bn(\frac{1}{2})$. Lösch S. 29 u
ja: s. Whittaker - Watson

NB: wie dort (oder genau daraus durch $\frac{d^2}{dz^2}$) ergibt sich

$$* \qquad \zeta(z,3) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\zeta(z, 4k+3)$$

Durch Einsetzen der Def von ζ rechts und Vertauschung der Summanden gibt das

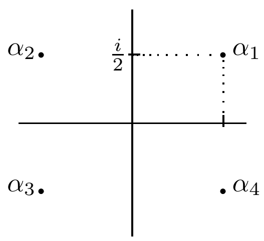
$$\sum_0^\infty \frac{1}{(n+z)^3} = \zeta(z,3) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{4(z+n)^4+1} \cdot \frac{1}{(z+n)^3}$$

$z = 1 \ \rightsquigarrow$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = s_3 = 1 + \sum_1^\infty \frac{(``)^{k-1}}{4^k} \cdot s_{4k+3} = 1 + \frac{s_7}{4} - \frac{s_{11}}{4^2} + \frac{s_{15}}{4^3} - \dots$$

$*$ ist gleichwertig der Laurant-Entwicklung von

$$\Delta \frac{1}{z^2-z+\frac{1}{2}} = \mathrm{i}\left\{\frac{1}{z-\alpha_1} - \frac{1}{z-\alpha_2} + \frac{1}{z-\alpha_3} - \frac{1}{z-\alpha_4}\right\}_{???z=0}$$



47/48

Distributive Gruppen
(D.h. mit distrib. Verband der nachinv. Ugr.)

1. Perfekte distr. Gruppen: In ihnen ist jeder auflösbare Hauptfaktor zentral, daher auch zyklisch.
   Bew: Normalisator einer Sylowgr des Hauptfaktors.

2. Beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$: Verallgemeinerung von $\triangleleft\triangleleft$. Man könnte für $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$ die nachinvar. Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ definieren durch $\overline{\mathfrak{A}}$ = umfassenste Gruppe $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$. Gilt in $\mathfrak{G}$ die Minimalbedgg für nachinvar. Ugr, so stimmt diese Def mit meiner alten überein, da dann die absteig. Normenkette abbricht. Demnach hiesse $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$, wenn aus $\mathfrak{A} \subsetneqq \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{H}$; kürzer:

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \mathfrak{A} \neq \mathfrak{H} & \rightsquigarrow & \mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{H} \\ \text{oder:} & \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} & \rightsquigarrow & \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \\ \text{oder:} & \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} & \rightsquigarrow & \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A} \end{array}}$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G} \ \rightsquigarrow \ \mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$$

Ferner:

$$\mathfrak{A} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{H}$$

"   :

$$\mathfrak{A}_\lambda \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \bigcap_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G}$$

"   :

$$\mathfrak{A} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{B} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G}$$

Offene Frage: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A}\mathfrak{N} \lhd \lhd \lhd \mathfrak{G}$?
Fortsetzg: 54.1

48/49

1. Sei $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{P}$ = Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ schwach abgeschlossen in $\mathfrak{P}$; sei $\overline{\mathfrak{U}}$ die nachinvar. Hülle von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{U}} \lhd \mathfrak{G}$. s. auch 53.1.
Denn $G \in \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{W} = \overline{\mathfrak{U}}^G \cap \mathfrak{P}$ ist zu $\mathfrak{U}^G$ ähnlich, also $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}$, $\overline{\mathfrak{U}}^G = \overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{U}}$ (siehe 3). Verschärfg 4.

2. Insbes. (Taussky-Best): Sind <u>alle</u> Sylowgr. von $\mathfrak{G}$ zyklisch, so ist jede nachinv. Ugr normal.
NB: Mein Schluß zeigt: Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ **???** $\overline{\mathfrak{A}}$, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
Bew: Ergänze die Sy-Gr von $\mathfrak{B}$ zu solchen von $\mathfrak{G}$, schneide mit $\mathfrak{A}$.

3. Genau dann ist eine nachinv Ugr $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ die nachinv Hülle einer p-Gr, wenn jeder Kopf von $\mathfrak{A}$ durch p teilbar ist. Und dann ist $\mathfrak{A}$ die nachinv Hülle jeder p-Sylowgr von $\mathfrak{A}$.

4. Sei $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{P}$ = Sylowgr von $\mathfrak{G}$; sei $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ transitiv auf den in $\mathfrak{P}$ gelegenen Konjugierten von $\mathfrak{U}$; d.h. $\mathfrak{U}^G \leq mfP \rightsquigarrow \mathfrak{U}^G = \mathfrak{U}^H$ für ein $H \in \mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{H}$ transitiv auf <u>allen</u> Konjugierten zu $\overline{\mathfrak{U}}$.
Bew: $\mathfrak{W} = \overline{\mathfrak{U}}^G \cap \mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{W} = \mathfrak{U}^H \rightsquigarrow \overline{\mathfrak{U}}^G = \overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{U}^H} = \overline{\mathfrak{U}}^H$.
NB: Hieraus 1 durch Spezialisierung $\mathfrak{H} = E$.

5a) $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ = schwache Abschliessg von $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$.

5. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Genau dann ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$, wenn für ein vollst. System von Sylowgr $\mathfrak{P}, \ldots$, gilt: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ schwach abg in $\mathfrak{P}$. Notw ist sogar: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ stark abg. in $\mathfrak{P}$. s. 51.5

49/50

1. Sei $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{P}$ = Sylowgr von $\mathfrak{G}$; $\overline{\mathfrak{U}}$ = nachinv. Hülle von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$. Dann gibt es zu $\overline{\mathfrak{U}}$ in $\mathfrak{G}$ genauso viele Konjugierten als $\mathfrak{P}$ Untergruppen enthält, die zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ konj. sind.
Bew: $\overline{\mathfrak{U}}^G = \overline{\mathfrak{U}}^H \leftrightarrow \overline{\mathfrak{U}}^G \cap \mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{U}}^H \cap \mathfrak{P}$; diese Durchschnitte sind zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. s. auch 5

2. Hat z.B. $\mathfrak{P}$ 2 Erzeugende, so gibt es zu den mit $|\mathfrak{P}:\mathfrak{U}| = p$ insgesamt höchstens $p+1$ verschiedene $\overline{\mathfrak{U}}$. Also hat die Autom-gr $\mathfrak{G}$ eine Darstellg des Grads $\leq p+1$ als Perm.-Gr. Und:

3. Zwei $\overline{\mathfrak{U}}$ { zu den $\mathfrak{U}$ mit $|\mathfrak{P}:\mathfrak{U}| = p$ }, die unter $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, sind schon unter dem Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{P}$ konjugiert.
Bew: Zwei solche $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{P}$, die in $\mathfrak{G}$ konjug sind, sind schon unter $\mathfrak{N}$ konjugiert. Ebenso:

4. Sei $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W} \lhd \mathfrak{P}$. Dann gilt: $\overline{\mathfrak{U}}$ konj zu $\overline{\mathfrak{W}}$ in $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{U}$ konj zu $\mathfrak{W}$ unter Normal. $\mathfrak{P}$
$\leftrightarrow \overline{\mathfrak{U}}$ " $\overline{\mathfrak{W}}$ "
s. S.35!

5. Seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{W} \overset{\text{voll}}{<} \mathfrak{P}$. Dann gilt: $\overline{\mathfrak{U}}$ konj. zu $\overline{\mathfrak{W}}$ in $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{U}$ konj zu $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{G}$.

50/51

1. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, jedes $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ sei sogar $\lhd \mathfrak{G}$. Dann ist jede Sylowgr von $\mathfrak{G}$ hamiltonsch, die ungeraden also abelsch.
Bew: Nach Block $\lhd\lhd$ hat jede Ugr von $\mathfrak{G}$ die gleiche Eigensch, insbesondere jede Sylowgr.
Aufgabe: Sehen, ob Best.Taussky <u>alle</u> solchen Gr. gefunden haben.

2. Sei $|\mathfrak{P}| = p^\alpha$, $\mathfrak{P} \vee \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{A}$ eine Sylowgr von $\mathfrak{A}$.
(Sonderfall meines Satzes über Sylowgruppen von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$).

3. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^{\nu^k} < \Phi(g) \to \mathfrak{A}^{\nu^k} = E$

4. Bezeichnet $\Psi(g)$ den Durchschnitt aller Normalisatoren von nachinvarianten Untergruppen in $\mathfrak{G}$, so gilt: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \Psi(g) \to \mathfrak{A} \lhd \Psi(g)$.

5. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$. Dann $\overline{\mathfrak{p}} \lhd \mathfrak{G} \leftrightarrow [\mathfrak{p} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \to \mathfrak{p} \lhd \mathcal{N} \cap \mathfrak{P}_1]$.
Bew: In $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{A}_0 \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{A}_r = \mathfrak{G}$ die $\mathcal{N} \lhd \underbrace{\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}_i}$ **???**
= Verschärfg von 49.5

51/52

1. Die Sylowgr. $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$ sei fest gegeben. Dann ist für die px-köpfigen $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ die Abb. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ eineindeutig, die $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ sind die „vollen" Ugr von $\mathfrak{P}$, dh. $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{P}$. Die Abb. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}^G \cap \mathfrak{P}$ ist eineindeutig auf dem Verband der vollen Ugr von $\mathfrak{P}$, und sei enthält $\bigcup$, also auch die Ordnungsrelation, also auch $\bigcap$: Verbandsisomorph. Es ist $\mathfrak{B}_{GM} = (\mathfrak{B}_G)_H$; $\mathfrak{B}_G = \mathfrak{B}_H \leftrightarrow \overline{\mathfrak{B}}^G = \overline{\mathfrak{B}}^H$. $\mathfrak{B}_G = \mathfrak{B}^G \leftrightarrow \mathfrak{B}^G < \mathfrak{P}$. $\mathfrak{B}_G = \mathfrak{B}^{\overline{B}G}$ mit einem $\overline{B} \in \overline{\mathfrak{B}}$.

2. Ist ω ein Nachinvarianz-Op., so ist $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}^\omega) \leq m(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$.

3. Stets ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. (Für Einzelelemente ist auch **???**$= A[A, B]$)

4. $\mathfrak{G}$ habe einie zykl. Sylowgr., gehörig zu $p_1, \ldots, p_k$. Sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und Indikator $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$. Dann ist $p_k \nmid |\mathfrak{A} : \mathfrak{J}|$. Denn jede p_k-Sylowgr von $\mathfrak{A}$ tritt auch in $\mathfrak{A}^G$ auf, also in $\mathfrak{J}$.
   Verallgem: 53.1

52/53

Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, eine p-Gruppe $\mathfrak{A}_*$ von $\mathfrak{A}$ schwach abeschl. in einer p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$. Dann ist $(\mathfrak{A}_*)^{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}$. Denn $\mathfrak{A}_p < \mathfrak{A}^G$, da $\mathfrak{A}_p = (\mathfrak{A}^G \cap \mathfrak{P})^H$.
Anderer Beweis: $\mathfrak{A} > \overline{\mathfrak{A}_*}$, $\overline{\mathfrak{A}_*} \lhd \mathfrak{G}$. 49.1

Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{P} = p$-Sylowgr $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{U}^G \lhd \mathfrak{P}$, wenn $< \mathfrak{P}$. Dan ist $\overline{\mathfrak{U}\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{U}}$.

53/55

Fortsetzg.

1. Ist Maxbedgg für die nachinv. Ugr von $\mathfrak{G}$ erfüllt, so gilt: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A} \lhd \lhd_4 \mathfrak{G}$.
   Bew mittels $\underline{\underline{\mathfrak{M}}}$, wo $\mathfrak{M}$ eine max. zu g fremde Ugr ist.

2. Ist $\mathfrak{G}$ endlich, so ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd_4 \mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.

3. $\mathfrak{A}_\lambda \lhd \lhd_4 \mathfrak{G} \rightarrow \bigcup \mathfrak{A}_\lambda \lhd \lhd_4 \mathfrak{G}$.

4. Die $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \lhd \lhd_0 \mathfrak{G}$ dürften die Enden der transfiniten Normenketten sein; allg. $\overline{\mathfrak{B}}$ = Ende der transf Normenkette von

5. Achtung: Die Vereinigung $\mathfrak{S}$ einer aufsteigenden Folge nachinvarianter Untergruppen von $\mathfrak{G}$ kann die Norm $\mathfrak{S}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ haben.
   Beispiel: $\mathfrak{G}$ = endl. Permutationen von $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ folgender ist (2-Sylowgr. von $\mathfrak{S}_\infty$)
   $\mathfrak{G} = {}_{1\,2\;\,3\,4\;\,5\,6\;\,7\,8} \ldots$ $\qquad$ $\mathfrak{S} = {}_{(1)\,(2)} = \mathfrak{G}_1$.

6. Also können die Def: $\lhd\lhd_0$ und $\lhd\lhd_4$ nichtäq. sein.

55/56

1. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ von 55.5 besitzt keinen maximalen Normalteiler, ist aber eine 2-Gruppe (unendlicher Ordnung).

2. Wenn es Gruppen $\mathfrak{G}_i$ mit $\mathfrak{G}_i \lhd \lhd \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{G}_i \lhd \lhd \mathfrak{B}_i$, $a = m(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{A}_i)$, $(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{B}_i) = b$ und $m(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{A}_i \cup \mathfrak{B}_i) \rightarrow \infty$ gibt, dann gibt es ein $\mathfrak{G}$ (nämlich $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots$) und $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ (nämlich $\mathfrak{A} = \prod_x \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B} = \prod_x \mathfrak{B}_i$) mit $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = a$, $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) = b$ und $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.

3. Es gibt 2-Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 1$, $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = a + b - 1$, wo $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = a$ usw.
   Bew: In $\ldots$ usw. hat eine Ugr, die aus $a - 1$ "Stufen´´ besteht

(im Beispiel $a-1=2$) die Tiefe a. Nimmt man $\mathfrak{A}$ mit $a-1$ Stufen und $\mathfrak{B}$ mit $b-1$ dazu fremden, durchweg höheren Stufen, so besteht $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ aus $a+b-2$ Stufen, hat also Tiefe $a+b-1$.

56/57

1. Sei $\mathfrak{B}$ "voll" in einer p-Sylowgr $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ (dh $\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{B}}\cap\mathfrak{P}$), und $A\in\mathfrak{P}$ lasse jede in $\mathfrak{P}$ gelegene Konjugierte $\mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{B}$ fest: $\mathfrak{B}'^A=\mathfrak{B}'$. Dann normalisiert jede Konjugierte A^G jede Konjugierte $\overline{\mathfrak{B}}^H$.
   Denn A mach unter den $\overline{\mathfrak{B}'}$ die gleiche Perm wie unter den $\mathfrak{B}'$, also die identische. Und die $\overline{\mathfrak{B}'}$ erleiden unter $\mathfrak{G}$ eine Permgr., die $\mathfrak{G}$ darstellt.
2. Insbesondere: Lässt $A\in\mathfrak{P}$ jede volle Ugr von $\mathfrak{P}$ fest, so lässt $\{A^{\mathfrak{G}}\}$ jede px-köpf. nachinv Ugr von $\mathfrak{G}$ fest.
3. Sonderfall: Ist $\mathfrak{Z}=$ Ztr $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Z}=$ Kern $\mathfrak{P}$ (im Sinn •• Baer), so lässt $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{G}}$ jede px-köpf nachinv Ugr $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ fest. Ist also k die Länge der aufsteigenden Kernreihe von $\mathfrak{P}$, so ist $m(\mathfrak{G},\mathfrak{A})\le k+1$.
   "Kern": Siehe separat Baer: Almost hamiltonian groups & CompMath 1(1934), 4(1936), 2(1935), 6(1939)

57/58

Nach Blackburn bilden die p-Gruppen, für die $\mathfrak{A}=\cup\{A\}\to\cup\{A^p\}=\mathfrak{A}^p$ [$=mho_1(\mathfrak{A})$ im Sinn v Hall] ein Operator ist, keine Klasse zu je zwei Gr das direkte Produkt enthält. - Man kann fragen, für welche $\mathfrak{P}$ $\mho_i$, Ω_i, ϕ_1 **???** Operatoren sind.

Die Bestimmung aller auflösb Gruppen mit $\lhd\lhd\;\equiv\;\lhd$ von Zacher ergibt sich leicht aus meiner Theorie: s. separat Zacher S.291 (t-gruppi finiti resulubili, 1952). Die Bedgg von Zacher läuft im wes. darauf hinaus: In einem Sylowsystem $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2,\dots,\mathfrak{P}_n$ mit $p_1>p_2>\dots>p_k$ ist jede Ugr von $\mathfrak{P}_i$ normal unter $\mathfrak{P}_{i+\lambda}$, $\lambda\ge 0$.

Bemerkg von Itô:
Ist $\mathfrak{G}\lhd\mathfrak{A}_1\lhd\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}\lhd\mathfrak{B}_1\lhd\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{G}\lhd\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\lhd(\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{B}_1)\mathfrak{A}\mathfrak{B}\lhd\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

58/59

1. Itererierte Kommutatoren mit $[AB]=A^{-1}B^{-1}AB$, $A^B=A[AB]$, $[ABC]=[CABC]$ gilt:
$$A,B,C\in\mathfrak{G}\;\rightsquigarrow\;[CAB]^{-1}\,[[CA][CB]]\,[CBA]=[BAC_0]^{-1}$$
   mit $C_0=C^{AB}$, dh.
$$[[CA][CB]]=[CAB][BAC_0]^{-1}[CBA]^{-1}$$
2. $[X,AB]=[X,B][X,A][X,A,B]$
   $[X,ABC]=[X,C][X,B][X,B,C][X,A][X,A,C][X,A,B][X,A,B,C]$

$\vdots$

$[X, A_1 A_2 \dots A_k] \in \{[X, A_\alpha, A_\beta, \dots, A_\rho]\}_{1 \le \alpha < \beta < \dots < \rho \le k}$

3. Genau dann ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \le \alpha$, wenn $[\mathfrak{G}, \overbrace{\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{A}}^{\alpha}] \le \mathfrak{A}$. Das legt den Verusch nahe, die

   Vermutung: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] < \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \rightsquigarrow m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) \le m(\mathfrak{G}\mathfrak{A}) + m(\mathfrak{G}\mathfrak{B}) - 1$ durch Kommutator-Identitäten zu beweisen.

59/60

1. $\mathfrak{G}$ habe zyklische Sylowgr zu den $p > 2$, und die Quat.-gruppe als 2-Sylowgr. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$. Dann ist entweder $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, oder es ist $2^2 \top |\mathfrak{A}|$, und es gibt genau 3 $\mathfrak{B}$; diese sind zu $\mathfrak{A}$ konjugiert.
2. Folgt aus $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{G}| < \infty$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \dots \lhd \mathfrak{G}$ die Normenkette von $\mathfrak{A}$ ist? OBdA: $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$.
3. Folgt aus $\mathfrak{B} < \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 < \mathfrak{A}_1 < \dots < \mathfrak{A}_r = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}_\rho = \mathfrak{C}_\rho$, $\mathfrak{C}_\rho \vee \mathfrak{A}_{\rho-1}$, $p \big| |\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}|$ stets auch $p \mid |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$?
   OBdA ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}$; zunächst $r = 2$ untersuchen!

60/61

Satz von Dietzmann (Kurosh 2. Aufl.):
Ein endlicher, invarianter Komplex $\mathfrak{K}$ von El. endl. Ordnung $\in \mathfrak{G}$ erzeugt einen endl. Normalteiler von $\mathfrak{G}$.
Bew: OBdA: $\{\mathfrak{K}\} = \mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{Z} = $ Ztr $\mathfrak{G}$; dann $(\mathfrak{G} : \mathfrak{Z}) = n < \infty$. Stelle $\mathfrak{G}$ monomial nach $\mathfrak{Z}$ dar. Die Erzeugenden aus $\mathfrak{K}$ haben endl. Ord., also auch ihre Determinanten in der Darstellg, also alle Determinanten endl. Ordnung. Also jedes $Z \in \mathfrak{Z}$ endl. Ordnung. Ferner hat $\mathfrak{Z}$ nach Reidemeister nur endl viele Erzeugenden, also $(\mathfrak{Z} : E) < \infty$. Folgt $(\mathfrak{G} : E) < \infty$.
NB: Also ist die Ord von $\{\mathfrak{H}\}$ beschränkt durch $|\mathfrak{H}|$ und die Max-Ord der El. aus $\mathfrak{K}$.

Bew einfacher: In jeder unverkürzbaren Darstellung $x = K_1^{\alpha_1} \dots K_r^{\alpha_r}$, $K_\rho \in \mathfrak{K}$, sind alle K_ρ verschieden, und wenn $\mathfrak{H} = \{L_1, \dots, L_n\}$ durchnummeriert ist, kann man $x = L_1^{\beta_1} \dots L_n^{\beta_n}$ ersehen. Also $|\langle \mathfrak{K} \rangle| \in \prod_{\nu=1}^n |\langle L_\nu \rangle|$

61/62

Über Konjugiertheit der Vertretergruppen im teilerfremden Fall.
Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{N} = \mathfrak{B}\mathfrak{N}$ minimal mit zwei Vertretergr $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{N}$, die nicht konjugiert sind. $(|\mathfrak{A}, |\mathfrak{N}|) = 1$.

1. $\mathfrak{A}$ ist einfach.
2. $\mathfrak{N}$ " "
3. Gibt es ein p derart, dass sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{B}$ je eine p-Sylowgr von $\mathfrak{N}$ fest lässt, dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^N$.

4. Lässt $\mathfrak{A}$ eine p-Gr in $\mathfrak{N}$ fest ($\neq E$), so auch eine p-Sylowgr

5. Lässt $\mathfrak{A}$ eine Gruppe $\mathfrak{N}'$ mit $p \mid |\mathfrak{N}'|$ fest, so auch eine p-Sylowgr

6. Die Primteiler von $|\mathfrak{N}|$ zerfallen in paarweise fremde Mengen $p_1, \ldots, p_k$; $q_1, \ldots, q_l, \cdots$ derart: Jede Vertretergr $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ bestimmt genau eine dieser Mengen, derart dass genau Sylowgruppen zu diesen Primzahlen unter $\mathfrak{W}$ invariant sind.

62/63

1. Man sollte Konjugiertheitssätze bekommen für Komplemente regulärer Untergruppen von zweifach trans Permgruppen, wie im Fall des Grades p.

2. In einer auflösbaren Gruppe gibt es höchstens ein p so, dass die p-Sylowgr ihr eigener Normalisator ist. Denn der Sylow-System-Normalisator ist $\neq E$; also wenn $\mathcal{N}\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_p$, dann $|\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'| = p^\nu$.

3. Die nachinvariante Hülle einer zyklischen Gruppe hat zu <u>jeder</u> Primzahl p <u>höchstens einen</u> p-Kopf. Denn sie wird von den Konjugierten <u>eines</u> Elements erzeugt.

4. Verallgemeinerung: Die nachinv. Hülle einer Gr mit k Erzeugenden hat höchstens k p-Köpfe, dh $|\overline{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}^p\mathfrak{A}'| \leq p^k$.

63/64

1. Eine minimale nachinv. Ugr $\mathfrak{A}$ einer primären Permugr hat <u>entweder</u> die Ord p; dann ist sie halbregulär, da das Ztrum von $\mathfrak{A}^{\mathfrak{P}}$ transitiv ist, <u>oder</u> sie hat zusammengesetzte Ordnung, dann ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$, daher sind alle Konstituenten treu. Folge:

2. Eine minimale nachinv. Ugr $\mathfrak{A}$ einer primitiven Permgr $\mathfrak{G}$ hat nur treue Konstituenten. Folge:

3. Eine nachinvar. Ugr $\mathfrak{A} \neq E$ einer primitiven PermuGruppe lässt keine Ziffer fest. Dh:

4. Ist $\mathfrak{G}$ endlich, $\mathfrak{A} \underset{\max}{<} \mathfrak{G}$, so ist $\underline{\mathfrak{A}} \lhd \mathfrak{G}$
   $\uparrow$ nachinv. Kern

5. Frage: Sei $\mathfrak{A} \underset{\max}{<} \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$. Ist dann $\underline{\mathfrak{A}} \lhd \underline{\mathfrak{B}}$, vielleicht sogar $\underline{\mathfrak{A}} \lhd \mathfrak{B}$?

   Frage: Pri monomiale Gr statt PerGr

64/65

Herrn Aavatkumovic gesagt 28.6.57:

Sind $\phi_n(x)$ die EFu einer Gl. $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$, so ist vielleicht
$\frac{1}{n}\sum_{\lambda_n \leq t} \operatorname{sgn} \phi_n(x)\phi_n(y) \to G(x,y) =$ GrenzFkt. wo $\frac{1}{n}$ Anzahl Zeichenwechsel

$\to G(xy)$.
NB: Vielleicht für pos def Kerne K so zu verallgemeinern: $\frac{1}{n}$ Anzahl Zeichenwechsel $\to \lim_{\varepsilon\to 0} K^{(\varepsilon)}(xy)$ wo K^ε die Iterierte der Ord ε (reell > 0).

Frage: Die Distanz von drei nachinv. Ugr $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ kann definiert werden als $d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = j\{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{A}\} + j\{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{B}\}$, oder mit m statt j. Gilt dann die Dreiecksungleichung?

65/66

Zur Darstellung von Gruppen $\mathfrak{A}$ durch Automorphismen einer p-Gruppe $\mathfrak{P}$, wo $(p, |\mathfrak{A}|) = 1$.

1. Satz. $\mathfrak{P}$ besitze genau einen minimalen $\mathfrak{A}$-Normalteiler $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ besitze lauter Primzahlen alles $\mathfrak{A}$-Haupt-Faktoren. Dann ist auch $|\mathfrak{N}| = p$.
   Bew: Sei $\mathfrak{N} \lhd_p \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}$.
   Dann ist $\mathfrak{B}$ abelsch wegen $\mathfrak{N} <$ Ztr $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ zykl ist $\mathfrak{B}^p \neq 1$, so $|\mathfrak{B}^p| = p$, $\mathfrak{B}^p = \mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{B}^p = 1$, so

   (a) $p > 2$: Es ist $\mathfrak{N} <$ Ztr $\mathfrak{P}$ wegen Minimalität

      α) Ist auch $\mathfrak{B} <$ Ztr $\mathfrak{P}$, so ist im Fall $\mathfrak{B} \overset{\neq}{p} 1$ $\mathfrak{B}^p = \mathfrak{N}$, $|\mathfrak{N}| = |\mathfrak{B}^p| = p$; und ist $\mathfrak{B}^p = 1$, so nach Maschke $\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{H}$ wo $\mathfrak{H}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{H}$ entgegen Einzigkeit von $\mathfrak{N}$.

      β) Ist $\mathfrak{B} \not< $ Ztr $\mathfrak{P}$, so wähle in einer $\mathfrak{A}$-Reihe von $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{B} \lhd \cdots \lhd \mathfrak{R} \lhd \mathfrak{S} \lhd \dots$ derart, dass $\mathfrak{L} <$ Ztr $\mathfrak{R}$, aber $\mathfrak{L} \not<$ Ztr $\mathfrak{S}$. Dann ist für $L \in \mathfrak{L} - \mathfrak{N}$, $S \in \mathfrak{S} - \mathfrak{R}$, $C = [L, S] \neq E$, $C^\alpha = [L^\alpha, S^\alpha] = [L^m N, S^n, R] = C^{mn}$ da $\{L, S\}$ die Klasse 2 hat und $p > 2$.

66/67

   (b) $p = 2$: Wähle l, S wie eben, dann $C = [L, S]$, hier ist $C^\alpha = [L^\alpha, S^\alpha] = [LN, SR] = [L, S] = C$; $\mathfrak{N} = \{2\}$.
   NB: Hiermit folgt. $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ überaufl. $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{G}$ überaufl. [mittels Sylowturm]

2. Die Darstellungen, die eine p'-Gruppe $\mathfrak{A}$ auf einer p-Gr $\mathfrak{P}$ bewirkt, seien alle vom Grade 1 bis auf eine (dh alle $\mathfrak{A}$-Hauptfaktoren von $\mathfrak{P}$ $d = p$ bis auf einen). Dann kann man diese eine ganz nach oben schicken, dh es gibt eine $\mathfrak{A}$-Hauptreihe $1 = \mathfrak{P}_0 \lhd \mathfrak{P}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{P}_r \lhd \mathfrak{P}$ mit $|\mathfrak{P}_\rho/\mathfrak{P}_{\rho-1}| = p$ $(\rho = 1 \dots r)$.
   Bew: 66.1 auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$ anwenden, wo $\mathfrak{Q}$ maximaler $\mathfrak{A}$-Normalteiler von $\mathfrak{P}$ derart, dass auf $\mathfrak{A}$ nur Darstellgn des Grades 1 eintreten. Nach 66.1 ist dann schon $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_r$.

3. Unter der Vor. von 66.1 ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{P}_r$ mit $\mathfrak{P}_r$ wie in 67.2. Denn $\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_r = 1$, da $\mathfrak{N}$ keinen $\mathfrak{A}$-Hauptfaktor wie $\mathfrak{P}_r$ gemeinsam hat.

4. Verallg von 66.1 wohl auf solche $\mathfrak{N}$ möglich, die Darstellungen erleiden, die nicht in den Kronecker Produkten der daarüberliegenden enthalten sind.

Aufgabe: Erst Theorie der Darst. bei Charakteristik 0, dann Modulare Theorie von R. Brauer auf Darstellungen durch Automorphismen von p-Gruppen übertrag.

67/68

Forts von 67
Ist $\mathfrak{P}$ abelsch und unzerfällbar unter $\mathfrak{A}$ (dh $\neq \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2$), so durfte $\mathfrak{P}$ homogen sein (dh lauter gleiche Invar. haben). Ist $\mathfrak{P}$ abelsch, so dürften die Darstellungen von $\mathfrak{A}$ im Sockel und in der Rumpf-Faktorgruppe äq. sein. Daraus folgt dann durch Anwendung auf geeignete Faktorgruppe: $\mathfrak{P}$ enthält keine andere Darst von $\mathfrak{A}$, als der Sockel von $\mathfrak{P}$ enthält; [Bei nichtabelschen $\mathfrak{p}$ gilt das nicht: $|\mathfrak{P}| = p^3$]. Allgemein dürfte $\mathfrak{P}$ nur Darst enthalten, die aus denen das Rumpf-Faktors durch Produktbildung von $\leq c$ Faktoren entstehen, wo $c =$ Klasse $\mathfrak{P}$. Beweis direkter ab 66.1: In absteig. Zentrum $\mathfrak{Z}_c$ treten nur Produkte von Darst. aus $\mathfrak{Z}_{c-1}/\mathfrak{Z}_c$ mit solchen aus $\mathfrak{Z}_1/\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ auf ($p \geq 2$).

5. Bei der Darstellg von $\mathfrak{A}$ durch Autom einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{M}$ dürfte es stark auf die Struktur der Sylowgruppen von $\mathfrak{M}$ ankommen; es ist nach Huppert MZ 60, 427 der Grad jeder in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Darst. von $\mathfrak{G} \leq r$, wenn dies im Sockel von $\mathfrak{A}$ zutrifft, vorausgesetzt, dass alle Sylowgruppen von $\mathfrak{M}$ abelsch sind.

68/69

6. Ist der “Darstellungsmodul” $\mathfrak{M}$ auflösbar, so treten in ihm unter $\mathfrak{A}$ mit $(|\mathfrak{A}||\mathfrak{M}|) = 1$ keine anderen Darstellungen von $\mathfrak{A}$ auf als in den Sylowgruppen eines Sylowsystems von $\mathfrak{M}$, das bei $\mathfrak{A}$ invariant ist.

69/70

1. In einer px-köpfigen Gruppe mit ableschen p-Sylowgruppen ist jede (ein r) px-köpf. nachinv Ugr normal, dh jeder px-Hauptfaktor einfach.

2. Allg: Unter dem Erzeugnis der p-Sylowzentren ist jede nachinv. px-köpf. Gruppe normal.

3. In einer p-auflösbaren Gruppe [ohne p'-Normalteiler] erzeugen die p-Sylowzentren eine nilpotente p-Gruppe.
Bew der urspüngl Fassg: der grösste p-Normalteiler des Erzeugnisses $\mathfrak{Y}$ liegt im Zentrum von $\mathfrak{Y}$. 3 steht vielleicht bei Hall-Higman implizit?

70/71

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe minimaler Ordnung, die lauter abelsche p-Sylowgruppen hat und doch eine px-Länge ≥ 2 hat. *Anmerkung: [* Oder sollte man **???**≥ 2 voraussetzen?*]*

1. $\mathfrak{G}$ wird von einer p-Sylowgruppe erzeugt.

2. $\mathfrak{G}$ hat keinen p-freien Normalteiler.

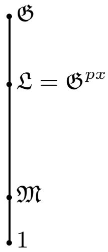
3. $\mathfrak{M} = (\mathfrak{G}^{px})^{p'}$ ist $\neq 1$ und minimaler Normalteiler. Daher bedeutet px die Menge der einf. Gr. mit $p \mid$ Ord.

4. $\mathfrak{M}$ ist einfach (70.2), aber zusammengesetzte Ord.

4a'. $\mathfrak{M}$ ist der einzige minimale Normalteiler, weil

5. Zs$(\mathfrak{M} < \mathfrak{G}) = 1$

6. $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$, $1 \neq \mathfrak{H}' \lhd \lhd \mathfrak{H} \rightsquigarrow \mathfrak{M} \leq \mathfrak{H}'$. Denn wähle $\mathfrak{H}'$ einfach, dann somit $[\mathfrak{H}', \mathfrak{M}] = 1$.



7. $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{H} < \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{H}^{p'}$ ist px-Gruppe (mit Indukt.Vor.), denn es hat keinen p-freien Normalteiler (6)

71/72

8. Jedes p-Element A in $\mathfrak{G}$, das mit $\mathfrak{L}$ zusammen <u>nicht</u> ganz $\mathfrak{G}$ erzeugt, zentralisiert $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$.

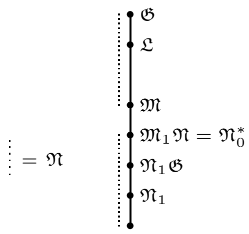
9. Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ nicht eine zyklische p-Gruppe, so ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$.

10. $\mathfrak{G}$ ist einköpfig. Denn $\subset$ Erzeugnis der px-einköpfigen nachinv.

11. Ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ keine q-Gruppe, so ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ im Zentrum $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$. Denn wähle in $\mathfrak{T}^1$ $\mathfrak{H}/\mathfrak{M} =$ Sylowgr von $\mathfrak{L}$. p-Sylowgr $\mathfrak{G}$ **???**

12. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist q-Gruppe oder abelsch, also nilpotent

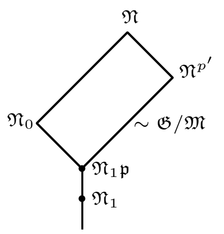
13. Sei $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ eine p-Sylowgr von $\mathfrak{N}$). Sei $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$ der größte p-freie Normalteiler von $\mathfrak{N}_0$. $\mathfrak{N}$ deckt $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{N}^{p'}$. Dies liegt in $Zs\mathfrak{G}$, da von den p-Sylowgr das $\mathfrak{N}$ erzeugt. Nun ist $\mathcal{Z}s(\mathfrak{N}_1\mathfrak{G}/\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1\mathfrak{G}$; denn sonst



72/73

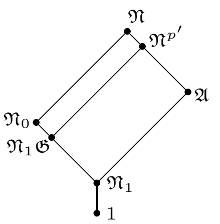
könnte man noch ein Stück von $\mathfrak{N}_o/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}$ nach untern durchschieben, gegen Def von $\mathfrak{N}_1$. Also ist $\mathfrak{N}^{p'} \cap \mathfrak{N}_0 = 1 \mod \mathfrak{N}_1\mathfrak{G}$, dh $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{N}^{p'}$ mod $\mathfrak{N}_1\mathfrak{G}$.

14. Es ist $\mathfrak{N}_0 \neq \mathfrak{N}_1\mathfrak{p}$, sonst Verlagerung $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{N}$ nicht einfach.



15. $\mathfrak{N}^{p'} <$ Zs$\mathfrak{p}$, da von p-Sylowgr erzeugt.

16. Ist der Kopf von $\mathfrak{G}$ nichtabelsch, so deckt der Zentralisator von $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1$ ganz $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$. Denn jede minim. nachinvar, Deckgruppe des Kopfes in $\mathfrak{N}^{p'}$ zentralisiert $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_1$, da sie $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ zentralisiert und keine p-Faktorgruppe besitzt. $\mathfrak{A} =$ Zs$\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$. Also ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{A} \mod \mathfrak{N}_1$. ($\mathfrak{A} =$ Zs$\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$ ist sogar normal in $\mathfrak{N}$.)



17. Die p-Sylowgr $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ ist nicht zyklisch, denn $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{p}$ zentralisiert den Kopf einer $\mathfrak{S}$, aber nicht das $\mathfrak{Z}$ um $\mathfrak{p}$.

73/74

18. Es ist <u>$\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ eine kleinste auf Kopf $\mathfrak{p}$ abgebildete Gruppe</u>. Denn sonst verschiebe den Rumpf von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ nach unten (auf $\mathfrak{M}$), und dergleichen eine kleinste auf Kopf $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ abgebildete Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$, und setze diese auf die erste verschobene Gruppe auf; das Produkt ist normal unter $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, gibt $\mathfrak{G}^{p'} \neq \mathfrak{G}$.

74/75

<u>Vor:</u> $\mathfrak{G}$ sei eine p-auflösbare, (rein) p-füssige Gruppe mit metableschen p-Sylowgruppe. $\mathfrak{G}^*$ bezeichne allgemein das Erzeugnis der Kommutatorgruppen aller p-Sylowgrupen von $\mathfrak{G}$. Für jede solche Gruppe von kleinerer Ordnung gelte $|\mathfrak{G}^*| = p^\alpha$, aber nicht für $\mathfrak{G}$.

1. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{A}$ p-füssig

2. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ p-füssig

3. $\mathfrak{N} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{N}| = p^{\cdot\cdot} \rightsquigarrow \mathfrak{N}' \leq \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^*$

4. $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{N}| = p^{\cdot\cdot} \rightsquigarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nicht rein p-füssig, sonst $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{N}$ p-Gruppe.

5. Es gibt <u>nur einen</u> minimalen Normalteiler $\mathfrak{M}$. Sonst seien $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ solche; seien $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ die max. NT von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{N}_i$ p-frei. Dann ist $\mathfrak{G}^*$ eine p-Gruppe $\mod \mathfrak{L}_i$, also $\mod \mathfrak{D} = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$. Sei $\mathfrak{N}_3$ ein min $\mathfrak{G}$-NT in $\mathfrak{D}$. Dann ist $|\mathfrak{N}_3| = p^{\cdot\cdot}$, daher $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2$.

75/76

6. $\mathrm{Zs}\overline{\mathfrak{M}} = 1$ wenn $|\overline{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}| > 1$, nicht rein p-füssig. Denn sonst $\mathfrak{M} < \mathrm{Ztr}\overline{\mathfrak{M}}$ gegen 2. Solche $\overline{\mathfrak{M}}$ gibts nach 4.

7. Der maximale p-Normalteiler $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ ist abelsch. Sonst $\mathfrak{M} < \mathfrak{F}' < \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^*$; $\mathfrak{G}^*$ ist nicht rein p-füssig (8), nach 6 wäre $\mathfrak{M} = 1$.

8. $\mathfrak{M}$ ist der max. p-Normalteiler $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$. Denn sei $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ p-frei. $\mod \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{F}$ fremd zu $\mathfrak{L}$, also $[\mathfrak{F}, \mathfrak{L}] < \mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{W}$ Vertretergr. von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, so deckt der $N_1\mathfrak{W}$ ganz $\mathfrak{F}/\mathfrak{M}$; $N_1\mathfrak{W}$ zentralisiert $\mathfrak{L}$; nach 6 ist $\mathcal{N}_1\mathfrak{W} = 1$, also $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

9. $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} < \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{H}$ p-füssig. Denn ein p-Fuss würde $\mathfrak{M}$ zentralisieren.

76/77

10. $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} \lneqq \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{H}^*$ p-Gruppe. (Induktionsvor.)

11. $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} \underset{\neq}{\lhd\lhd} \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{H}^* < \mathfrak{M}$. (8)

12. $\mathfrak{G}$ ist p-köpfig. Sonst $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ p'-Gruppe $\rightsquigarrow \mathfrak{H}^* = \mathfrak{G}^* = p$-Gr.

13. Ist <u>$\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ der max p-freie</u> NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$, so enthält $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ seinen Zentralisator $\mathfrak{Z}$. Sonst einen p-Fuss von $\mathfrak{Z}/\mathfrak{M}$ nehmen, kann nach unten geschoben werden bis auf $\mathfrak{M}$, entgegen 8.

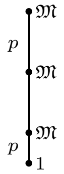
14. Ist $\mathfrak{p}$ eine p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{S}$, so $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$.
Bew: $\mathfrak{H}$ p-füssig wenn $\neq \mathfrak{G}$, ist nach Ind $\mathfrak{G}^*$ eine nachinv p-Gr in $\mathfrak{H}$, zentralisiert also $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, daher $\mathfrak{H}^* < \mathfrak{M}$, dh. $\mathfrak{S}' < \mathfrak{M}$ f. alle $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{G}^*| = p$.

77/78

15. Jeder NT $\mathfrak{T} \lneqq \mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M} < \mathfrak{T}$ ist $\mod \mathfrak{M}$ abelsch. Denn $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{T}$ gesetzt gibt $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}^*$ p-Gruppe., $\mathfrak{H}^* < \mathfrak{M}$ nach 11.

16. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist ein <u>minimaler</u> NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ bezüglich der Eigenschaft von keinem p-Element von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ zentralisiert zu werden. Sonst setze $\mathfrak{S}$ auf einen minimalen.

17. In $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}$ sind je zwei Konjugierte vertauschbar. Denn sie liegen in einem echten max NT, **???**



18. Es ist $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{L}\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}' \not< \mathfrak{M}$, sonst $= \mathfrak{L}_1\mathfrak{S}'$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{S}$ gesetzt gibt $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{M}\mathfrak{S}'$ normal bei $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{S}'$ zentralisiert $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}/\mathfrak{M} \times \mathfrak{S}^*\mathfrak{M}/\mathfrak{M}$ gibt p-Normalteiler über $\mathfrak{M}$ gegen (8).

78/79

19. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ besitzt nur einen $\mathfrak{G}$-Kopf, der Rumpf ist $= \mathrm{Ztr}(\mathfrak{G}^*/\mathfrak{M})$. Bew wie 18 mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{S} = \max \mathrm{NT}$.

20. Ist $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}| \neq q^\beta$, so gibt es zu jeder Sylowgr $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{L}$ eine p-Sylowgr $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$, so dass $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{S}'$ mod $\mathfrak{M}$ zentralisiert wird.

21. Ist $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}| \neq q^\beta$, so gibt es zu jedem Primteiler q von $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}|$ und jeder p-Sylowgr $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ eine p-Sylowgr $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, die mod $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}'$ zentralisiert wird. Dann $\mathfrak{S}$ ähnlich denn $\mathfrak{S}$ von 20.

22. Es ist $|\mathfrak{L}/\mathfrak{M}| = q^\beta$. Sonst zentralisiert $\mathfrak{S}'$ $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ in 21. Dann $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^*$ (16).

79/80

Anmerkung: Seite 80 leer

80/81

Sei $\mathfrak{G}$ eine p-aufl. Gr. der p-Länge l, von der jeder echte NT und jede echte Faktorgr eine kleinere p-Länge hat (= '"Minimalgruppe"'). Dann gilt:

1. $\mathfrak{G}$ ist ein-p-köpfig und ein-p-füssig. Der Fuss $\mathfrak{M}$ ist der maximale p-Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und sein eigener Zentralisator. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ ist p'-füssig. Bew wie auf 75 ff.

2. Jede Gr. $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ ist p-füssig. (**???** Zs$\mathfrak{M}$)

3. Jedes p-Sylow-Zentrum einer Obergr. von $\mathfrak{M}$ liegt in $\mathfrak{M}$.

4. Hat sogar jede echte Untergr von $\mathfrak{G}$ p-Länge $< l$, so ist der max p-freie NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ eine q-Gruppe; Denn sonst lässt jede p-Sylowgr von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ von jeder Primzahl q eine q-Sylowgr von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ elementweise fest, zentralisiert also $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \rightsquigarrow \mathfrak{L}/\mathfrak{M} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$, geht nicht.

81/82

5. Die q-Sylowgr $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{G}^{(pp^*)^{l-1}}/\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$ ist sehr speziell gebaut: der max $\mathfrak{p}$-NT von $\mathfrak{C}$ ist = Zentrum von $\mathfrak{C}$ und zyklisch. Wenn $q < 2$, ist $\exp \mathfrak{Q} = q$

6. Jeder echte $\mathfrak{G}$-Normalteiler in $\mathfrak{G}^p/\mathfrak{M}$ liegt im Zentrum.
   Bew: Er $\left\{\begin{smallmatrix}\text{normalisiert}\\ \text{zentralisiert}\end{smallmatrix}\right.$ nach Induktion jede p-Sylowgr, also deren Erzeugnis $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$.

82/83

$\mathfrak{G}$ sei von grösserer px-Länge l als seine Ugr und Fgr.

1. $\mathfrak{G}$ ist ein-px-köpfig und -füssig. Sei $\mathfrak{M}$ der min NT.
2. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ hat mind einen p'-Fuss $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$.
3. Wenn $|\mathfrak{M}| = p^{\cdot\cdot}$, so ist $\mathfrak{M}$ der max p-NT von $\mathfrak{G}$.
4. $\mathfrak{M}^p \neq 1 \rightsquigarrow \mathrm{Zs}\mathfrak{M} = 1$
5. $\mathfrak{M}^p \neq 1$, $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} < \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{M}$ einziger Fuss von $\mathfrak{H}$.
6. $\mathfrak{M}^p \neq 1$, $\mathfrak{M} < \mathfrak{H} \neq \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{H}^{(p'p)^{l-1}} = 1$, $\mathfrak{H}^{(p'p)^{l-2}p'} = px$-Gr
7. $\mathfrak{G}^{(pp')^{l-2}} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^n = \mathfrak{L}$, gesetzt gibt $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ p-frei, ± 1.
   Dann ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ eine q-Gruppe. Wird jede Sylowgr von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ zentralisiert von $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$, gibt $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$.
8. $\mathfrak{L}$ ist „speziell“ unter $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{L}$ hat mod $\mathfrak{M}$ zykl Ztr $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{l}/\mathfrak{Z}$ ist min NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$.

83/84

Anmerkung: Seite 84 leer, Seiten 85 und 86 fehlen

84/87

Notwenig für die Existenz eines zu $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ genau komplementären Normalteilers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ ist: Für $\mathfrak{U} < \mathfrak{H}$ bedeute $\mathfrak{T}$ den „Transformator“, d.h. $\mathfrak{T} = \{T \mid T^{-1}\mathfrak{U}T < \mathfrak{K}\}$. Dann muss $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}\mathfrak{H}$ sein mit $\mathfrak{H} = 1$, $[\mathfrak{Z}, \mathfrak{U}] = 1$, $\mathfrak{Z} < \mathfrak{G}$ (nämlich wenn $\mathfrak{K}$ der NT in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{T}$.)

Transformatoren $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})$

1. Es ist $\mathfrak{T}(\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2) = \mathfrak{T}(\mathfrak{U}_1) \cap \mathfrak{T}(\mathfrak{U}_2)$.

2'. Also ist die Bedgg. 1 zu schreiben: $H \in \mathfrak{H} \rightsquigarrow \mathfrak{T}(H) = \mathfrak{Z}(H) \circ \mathfrak{H}$ mit $\circ =$ Produkt mit Durchschni E; $\mathfrak{Z} < \mathrm{Zs}H$. (NB: 3 ist vielleicht schwächer)

2. Stets ist $\mathcal{N}s(\mathfrak{U})\mathfrak{T}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})\mathfrak{H} = \mathfrak{T}(\mathfrak{U})$.

3. Notw. ist nach 1: $\mathcal{N}s(\mathfrak{U} < \mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z} \circ \mathcal{N}s(\mathfrak{U} < \mathfrak{H})$. Es ist bei $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{H}$: $\mathcal{N}s(\mathfrak{U} < \mathfrak{G}) = \mathfrak{Z} \circ \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{H}} = \mathfrak{Z}$.

87/88

Notwendig für Existenz eines NT $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{G} = 1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ ist:

4. $\mathcal{N}s\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{Z}$ (mit $\mathfrak{Z} = \mathcal{N}s\mathfrak{H} \cap \mathfrak{C} = \mathrm{Zs}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{C}$).

5. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{H}$, $\mathcal{N}s(\mathfrak{U} < \mathfrak{H} = \mathfrak{U}$, so ist $\mathcal{N}\int(\mathfrak{U} < \mathfrak{G}) = \mathfrak{U} \times \mathfrak{Z}$.
6. $\mathfrak{U} < \mathfrak{H}$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{Zs}\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G} \rightsquigarrow$ die $\mathfrak{H}^T \geq \mathfrak{U}$ werden unter $\mathfrak{Z}$ transitiv perm.
   Frage: Sind diese Bedggen auch hinreichend für die Existenz eines kompl NT? Denn siehe S.88. Vor. sind die Zerfalls-Bedingungen.

Frage: Gibt es genauso viele $\mathfrak{G}_0 \lhd \mathfrak{G}$ mit $\left\{ \substack{\mathfrak{G}_0\mathfrak{H}=\mathfrak{G} \\ \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0} \right.$, wie es Möglichkeiten gibt, die Charakt. von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_0$ auf $\mathfrak{G}$ fortzusetzen?
Frage: Folgt aus $\mathfrak{A}_i \lhd \lhd \mathfrak{G}_{(i=1,2,3)}, \mathfrak{A}_i \cup \mathfrak{A}_j$ auch $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \vee \mathfrak{A}_3$? Brauchte nur für p-Gruppen $\mathfrak{G}$ ersichtlich zu werden. Antwort: Nein.
Gegenbeispiel: $\mathfrak{G}$ = Gruppe der Ord p^{p+1}, mnomial vom Grade p; $|\mathfrak{C}| = p^2$, $\mathfrak{C}$ nicht diagonal. $\mathfrak{A}$ = diagonal, $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, $\mathfrak{B}$ diagonal, $B = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & b & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$.

88/89

Fortsetzung von S.87:
Ist $\mathfrak{T}(H) = \mathfrak{Z}(H) \circ \mathfrak{H}$ für jedes $H \neq E$, $H \in \mathfrak{H}$, mit einem $\mathfrak{Z}(H) < \mathrm{Zs}(H)$ (dh. $H^G < \mathfrak{H} \rightsquigarrow H^G = H^H$ f. ein $H_1 \in \mathfrak{H}$), so kann man ein Restsystem $R_1 \ldots R_n$ so wählen dass $R_iH = H'R_i \rightsquigarrow H' = H$. Man kann danach die R_i so ändern*, dass sogar

1. $R_iH = H'R_j \rightsquigarrow H' = H$,

dh in der monomialen Darst. von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ sind die Matrizen für $\mathfrak{H} : D(H) = H \cdot P(H)$, $P(H)$ = Premut.
$*$ unter Festhaltung von einem R_i in jedem Trasit.-Syst; die anderen sind durch das eine bestimmt, man kann also R_2 durch $R_2^* = Z_2R_2$ ersetzen, wenn nur $R_2H = HR_2 \rightsquigarrow Z_2 \cup H$; und dann setze $R_j^* = Z_jR_j$ mit $Z_j^* = H_j^{-1}Z_2H_j$ (wobei $R_2H_j = H_jR_j$ gewählt ist).

89/90

Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $H_1^G = H_2 \rightsquigarrow \bigvee_H H_1^H = H_2$

1. Sei χ ein (eig. od. uneig.) Charakter von $\mathfrak{H}$, π der von der ident. Darst. von $\mathfrak{H}$ erzeugte (Permutations)Char. von $\mathfrak{G}$, ψ der von χ induzierte Char von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\psi(G) = \begin{cases} \chi(H)\pi(H) & G = H \in \mathfrak{H} \\ 0 & G \notin \cup\mathfrak{H}^T \end{cases}$.
   Daher ist mit $g = |\mathfrak{G}|$, $h = |\mathfrak{H}|$ (durchordnen nach den $\mathfrak{G}^{R_2}$):
2. Für jeden Char Φ von $\mathfrak{G} : \frac{1}{g}\sum_g \Phi(H)\psi(G) = \frac{1}{h}\sum_h \Phi(H)\chi(H)$
3. Für je zwei Char. χ_1, χ_2 von $\mathfrak{H} : \frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{G}} \psi_1\psi_2 = \frac{1}{h}\sum_{\mathfrak{H}} \chi_1\chi_2\pi$

90/91

<u>Z.Satz von Frobenius:</u> (Eine Verallg siehe S.92)

Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \neq 1 \rightsquigarrow \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^G$; $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\mathfrak{H}$, $(|\mathfrak{N} : \mathfrak{H}|, |\mathfrak{H}|) = 1$. Dann ist notw. u hinr. für die Existenz eines NT $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, $K \cap A = 1 = E$: Es ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{C}$ mit passendem $\mathfrak{C}$.
Bew:

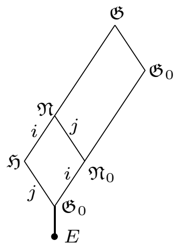
1. Notw. klar: $\mathfrak{C} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{N}$
2. Hinr.: Aus $N^G \leq \mathfrak{N}$, $N \notin \mathfrak{C}$ folgt $N = HC$, $H \neq E$, $c = |E|$, $(HC)^G \in \mathfrak{N}$, $(H^c C^c)^G \in \mathfrak{N}$, $H^{c^G} \in \mathfrak{N}$, $H^G \in \mathfrak{N}$, $H^G \in \mathfrak{H}$ (wegen Ordnung); also $G \in \mathfrak{N}$.
   Also $N^G \in \mathfrak{N} \rightsquigarrow G \in \mathfrak{N}$ oder $N \in \mathfrak{C}$.
   Nach 84 ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{C}$
   $= \mathfrak{K}\mathfrak{C}\mathfrak{H} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$; $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H} = E$.

Andere Formulierung: Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \neq 1 \rightsquigarrow \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^G$, $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\mathfrak{H}$, $(|\mathfrak{N} : \mathfrak{G}|, |\mathfrak{H}|) = 1$. Notwendig u hinr dafür, dass $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$ ein normales Komplement (im engeren Sinn) enthält, ist dass $\mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{G}$ " ".

91/92

Notw Beddgg. für norm. Komplement.

1. Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$. Gibt es zu $\mathfrak{H}$ ein normales Komplement $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K} < \mathfrak{G} - \bigcup_{E \notin \prod H_i^{\mathfrak{H}}} \prod H_i^{\mathfrak{G}}$.
   Bew: $K = \prod H_i^{K_i H_i^*}$ gibt $\mod \mathfrak{K}$ (und $\mod \mathfrak{H}$) $E \equiv \prod H_i^{H_i^*}$, also $E = \prod H_i^{H_i^*}$.
2. <u>Satz von Frobenius.</u> s. S.154 [Satz von Feit PAMS 7, 179]
   Sei $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{K} < \mathfrak{H} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \begin{cases} = \mathfrak{H} \text{ oder} \\ < \mathfrak{K} \end{cases}$. Sei $(|\mathfrak{N} : \mathfrak{H}|, |\mathfrak{H} : \mathfrak{K}|) = 1$. Notw u hinr f Existenz eines $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{L} \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{K}$ ist die Bedgg:
   Es gibt $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{C} \lhd \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{H}\mathfrak{C} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{K}$. $\mathfrak{G}_0$ ist dann <u>eindeutig</u> bestimmt.

   Bew: Notw: $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \bigcup_G (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_0)^G$. $\mathfrak{N}_0$ ist wegen Ord eind. bestimmt. hinr.: Es ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{C} \lhd \mathfrak{N}$;

Eind Bew **???** für $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}/\mathfrak{H} \sim \underbrace{\mathfrak{C}/\mathfrak{K}}_{\text{Ord fremd zu } |\mathfrak{H}:\mathfrak{K}|}$.

$N^\sigma \in \mathfrak{N} \rightsquigarrow \left.\begin{smallmatrix} N^{iG} \\ N^i \end{smallmatrix}\right\} \in \mathfrak{G} \rightsquigarrow G \leq \mathfrak{N}$
$\vee\ N^i \in \mathfrak{H}_0 \rightsquigarrow N \in \mathfrak{N}_0$.

Aus $N^G = (HC)^G = H_1C_1$ folgt wegen Ord: $\mathfrak{H} \ni (KH)^G = K_1H_1$ für geeign. $K_i \in \mathfrak{K}$. Also entw. $K_1H_1 \in \mathfrak{K}$ oder $G \in \mathfrak{N}$. Dann $\downarrow H_1C_1\ \mathfrak{K}$, $H_1C_1 \in \mathfrak{C}$. Also $N^G \in \mathfrak{N} \rightsquigarrow N^G \in \mathfrak{C}$ oder $G \in \mathfrak{N}$.

Folgt: exist. nach S.85 $\mathfrak{L} \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{C}\mathfrak{H} = \mathfrak{L} = \mathfrak{G}$.

92/93

s. D.G. Higman, Focal series!

1. p-nilpotente Gruppen. s. hierzu MS Hall, in Handexempl.
   Def $\mathfrak{G}$ p-nilp $\leftrightarrow \exists \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P} = p$-Sylowgr. *Anmerkung:[* p-Sylowgr u p-Faktorgr. *]*, dh. wenn $\mathfrak{G} \overset{\rightarrow}{\varphi} \mathfrak{P}$; $\varphi\big|P = \mathrm{id}_P$.
   Satz: Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr.; genau dann ist $\mathfrak{G}$ p-nilpotent, wenn $P_1^G \in \mathfrak{P} \wedge P_1 \in \mathfrak{P} \rightsquigarrow P_1^G = P_1^P$ f ein $P \in \mathfrak{P}$, dh $\mathfrak{P}$-transitiv auf $\mathfrak{P} \cap A^{\mathfrak{G}}$ leichte Verallg.: 94,95
   Bew:
   (a) Notw: $\mathfrak{G} \overset{\rightarrow}{\sim} l(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}$; $P_1^G = P_2 \rightsquigarrow P_1^{\phi(p)} = P_2$.
   (b) hinr:
   2. Hilfssatz. Sei $E < \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$ mit $p \nmid |\mathfrak{G} : \mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{B} : \mathfrak{A}| = p^{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{C} : \mathfrak{A}$ abelsch, $B^G \in \mathfrak{B} \rightsquigarrow B^G \equiv B(\mathfrak{A})$. Dann gibts $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{a}$. (Verlagerg $\mathfrak{G} \to \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$).
   Hilfssatz 2. nicht in Buch
   Burnside, aber in M. Hall.
   Damit Bew 1: Sei $\mathfrak{P} \overset{p^{\mathfrak{S}_1}}{\lhd} \mathfrak{P}_1 \overset{p^{\mathfrak{S}_2}}{\lhd} \mathfrak{P}_2 \overset{p^{\mathfrak{S}_1}}{\lhd} \cdots \lhd \mathfrak{P}_c = E$ die abst. Zentralreihe. Nach 2 ($\leftarrow$ angew auf $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$) gibt es $\mathfrak{G}_1 \underset{p^{\mathfrak{S}_1}}{\lhd} \mathfrak{G}$,
   $\left\{\begin{smallmatrix} \mathfrak{G}_1\mathfrak{P} = \mathfrak{G} \\ \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1 \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1 \end{smallmatrix}\right.$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 =$ Sylowgr von $\mathfrak{G}_1$.
   Wende 2 auf $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ an: $P_1^{G_1} \in \mathfrak{P}_1 \rightsquigarrow P_1^{G_1} = P_1^P \equiv P_1$ (mod $\mathfrak{P}_2$). Es gibt $\mathfrak{G}_2 \overset{p^{\mathfrak{S}_2}}{\lhd} \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$.
   usw $\mathfrak{G} \overset{p^{\mathfrak{S}_1}}{\lhd} \mathfrak{G}_1 \overset{p^{\mathfrak{S}_2}}{\lhd} \mathfrak{G}_2 \overset{p^{\mathfrak{S}_3}}{\lhd} \cdots \overset{p^{\mathfrak{S}_c}}{\lhd} \mathfrak{G}_c$; $\mathfrak{G}_c \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_c = p^\alpha = (\mathfrak{P})$.
   Sei $\mathfrak{H}$ π-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, Erzeugn $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G) \neq \mathfrak{H} \rightsquigarrow \mathfrak{G}$ hat π-Faktorgr $\in \mathfrak{C}\mathcal{N}s\mathfrak{H}$.
   <u>Anderer Beweis</u> 94 Versuch

93/94

1. Anderer Beweis für die Kennzeichnung der p-nilpotenten Gr. s. (92):
   Sei $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{P}$. *Anmerkung: [* Stimmt nicht *]*
   $\mathfrak{Z}^G < \mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^G < \mathfrak{Z}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{Z} \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^G = \mathfrak{Z}$.
   $\mathfrak{Z} < \mathfrak{P}^G \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^{G^{-1}} < \mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^{G^{-1}} = \mathfrak{Z} \rightsquigarrow \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^G = \mathrm{Ztr}\mathfrak{P}^G$.
   $\mathfrak{G}$ ist p-normal i.S. von Grün . Sei $\mathfrak{G}_1$ der $\mathcal{N}s$ von $\mathfrak{Z}$.

   (a) $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}$. Dann Ind: $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ erf. Vor., p-nilpot., $1 <_{p\nmid} \mathfrak{Z} <_{p\nmid} \mathfrak{G}_2 \lhd_p \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{Z} = p$-Sylowgr im $\mathrm{Ztr}\mathfrak{G}_2$, ist $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{Z} \times \mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_3$ **???** .
   $1 <_{p\nmid} \mathfrak{G}_3 \lhd_p \mathfrak{G}_2 \lhd_p \mathfrak{G}$, fertig.

   (b) $\mathfrak{G}_1 \lneqq \mathfrak{G}$: Dann Ind: $1 <_{p\nmid} \mathfrak{G}_2 \lhd_p \mathfrak{G}_1 <_{p\nmid} \mathfrak{G}$ nach Grün ist die max abelsche p-Faktorgr von $\mathfrak{G}$ isomorph zu der von $\mathfrak{G}_1$, also gibts $\mathfrak{G}_0 \lhd_p \mathfrak{G}$. Indukt: $\mathfrak{G}_0$ <u>erfüllt</u>? Vor mit $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_0$.

94/95

<u>p-Nilpotenz, p-Faktorgruppen</u>

1. Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}$. Es gebe eine Kette $\mathfrak{P}_0 \lhd \mathfrak{P}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$, so dass $P,\ P^G \in \mathfrak{P}_i \rightsquigarrow P \equiv P^G \mod \mathfrak{P}_{i-1}$. Dann gibt es $\mathfrak{G}_0 \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$.
   Bew: 92_2. Indukt. OBdA sei $|\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i-1}| = p$

2. Zusatz: Ist $\mathfrak{P}_0 \lhd \mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{G}_0 \lhd \mathfrak{G}$.
   Bew: Sei $\mathfrak{D} = \bigcap_{P\in\mathfrak{P}} \mathfrak{G}_0 \overset{=}{P} \bigcap_{G\in\mathfrak{Q}} \mathfrak{G}_0^G$. Dann ist wegen $\mathfrak{G}_0 \lhd \lhd \mathfrak{G}$ $|\mathfrak{G} : \mathfrak{D}| = p^\mu$, also $\mathfrak{D}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$, $|\mathfrak{G}/\mathfrak{V}| = |\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0| = |\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0|$, $|\mathfrak{G}_0 : \mathfrak{D}| = 1$.

   Der Schluss zeigt allgemeiner:

3. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{G} : \mathfrak{A}| = p^\rho$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, ferner $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$ $\leftrightarrow \mathfrak{P} \cap \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{P}$; allg: $\mathfrak{G}/\cap \mathfrak{A}^G \simeq \mathfrak{P} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P})^P$. Hieraus folgt z.B: $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}$. $(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{A})^{\mathfrak{P}}$.
   dann mit $\mathfrak{D} = \bigcap_{\mathfrak{G}} \mathfrak{A}^G$ wird $\mathfrak{A}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{P}$, $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \cap \bigcap \mathfrak{A}^P = \bigcap (\mathfrak{P} \cap \mathfrak{A})^P$.

95/96

<u>p-Faktorgr.</u>

1. Sei $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}$ (bzw. $\mathfrak{P}_0 \lhd \mathfrak{P}$). Genau dan gibt es $\mathfrak{G}_0 \lhd \lhd \mathfrak{G}$ (bzw $\mathfrak{G}_0 \lhd \lhd \mathfrak{G}$) mit $\mathfrak{G}_0\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$, wenn es eine Kette $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}_1 < \cdots < \mathfrak{P}$ gibt, so dass $P, P^G \in \mathfrak{P}_i \rightsquigarrow P \equiv P^G \pmod{\mathfrak{P}_{i-1}}$
   Bew: Dann $= 94_1$, nur dann klar. Hieraus folgt 92_1 und allgemeiner:

2. Sei $\mathfrak{P}_0 \lhd \mathfrak{P} = p$-Sgr von $\mathfrak{G}$. Genau dann gibt es $\mathfrak{G}_0 \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}_0$, wenn $P^G \in \mathfrak{P} \rightsquigarrow P^G \equiv P^{P_1} \pmod{\mathfrak{P}_0}$ für pass. $P_1 \in \mathfrak{P}$.
   Bew: $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_0 =$ Zentralreihe von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$ wählen, dann 1. (Man braucht also Verlag nur mit p-ten EW)
   folgt wohl auch aus p-Sylowgr zu p-Faktorgr, Satz 9.
   ebenso:

3. Sei $E < \mathfrak{A} \lhd \lhd_{p^\rho} \mathfrak{B} <_{p\nmid} \mathfrak{G}$. Genau dann gibt es $\mathfrak{N} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, wenn $B, B^G \in \mathfrak{B} \rightsquigarrow B^G \equiv B^{B_1} \mod \mathfrak{A}$; dh $B^{G-B_1} \in \mathfrak{A}$. $\mathfrak{N}$ ist (durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) eindeutig bestimmt; $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$.

96/97

p-nilpotente Gr.

1. Sei $\mathfrak{G}$ p-auflösbar, $\mathfrak{N} \lhd_{p^\rho} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leq \Phi(\mathfrak{P})$. Dann ist $\mathfrak{G}$ p-nilpotent. Bew: Induktion.

2. Frage: Ist die Vorauss. der p-Auflösbarkeit entbehrlich? [Ja, Tate!]

2a. " von Huppert: Folgt aus $\mathfrak{g} \lhd \mathfrak{G}$, p-Syl $\mathfrak{p} < \Phi\mathfrak{P}$ stets $\mathfrak{p}$ p-nilpotent?

3. Es gilt wohl: Ist $E < \mathfrak{A}_1 \lhd \lhd_p \mathfrak{A} <_{p\nmid} \mathfrak{G}$ und gibt es zu jedem A_1^G mit $A, A^G \in \mathfrak{P}$ ein P derart, dass $A^G A^{-P} \in \mathfrak{A}_1$, so gibt es $\mathfrak{G}_1 \lhd \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$.

4. Sei $E < \mathfrak{A}_1 \lhd \lhd_p \mathfrak{A} <_{p\nmid} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr. $\mathfrak{G}$. Die Vor. 3 sei erfüllt, und $\Phi(\mathfrak{P}) < \mathfrak{A}_1$. Dann ist $\mathfrak{G}$ p-nilpotent.
Bew: nach 3 ist $\mathfrak{G}_1 \lhd \lhd_p \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{P} < \Phi(\mathfrak{P})$, nun 1.

97/98

1. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{G} : \mathfrak{A}| = p^\alpha$, $\mathfrak{B}$ enthalte eine p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$ $\rightsquigarrow$ die Ugr zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ entsprechen <u>eineindeut.</u> denen zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$; dh. jedes $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{C} < \mathfrak{B}$ ist mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar.
Bew: $\mathfrak{A}^p = \mathfrak{G}^p$, $\mathfrak{A}^p\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^p\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$ wegen Index $\mathfrak{A}^p\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

"Stämme": Man müsste Erweiterung des natürlichen Koeffizientenbereichs eines Rechtsrings, etwa durch Körper, untersuchen.

98/99

Permutationsgruppen vom Grade p.

1. Ist p eine Primzahle der Form $p = q^{m\alpha} + q^{(m-1)\alpha} + \cdots + q^\alpha + 1$, q Primzahl, so gibt es nichtauflösbare Gruppe G des Grades p, für welche $\mathfrak{G}_1$ imprimitiv ist (auf $2, \ldots, p$).
Bew: $\mathfrak{G}$ = Kollineationsgruppe des m-dim. projektiven Raums über $\mathrm{GF}(q^n)$. $\mathfrak{G}$, lasse 0 fest. Dann sind die Geraden durch 0 konjugierte Blöcke für $\mathfrak{G}_1$.

2. Nach Itô ist eine nicht auflösb. Gr. vom Grade p, in der die Ord eines Sylow-Normalisators $2p$ ist, 3fach transitiv. Bew mit Brauers Theorie. Vielleicht kan man das direkt beweisen mit klassischer Darst.-Theorie, etwa indem man für zwei einfache Char. χ_1, χ_2 von $\mathfrak{G}$ betrachtet $\sum_G |f_1\chi_2 - f_2\chi_1|^2$, und nach Sylowgr ordnet; oder $\sum |\chi|^2 = g$: Vielleicht geht Entsprechendes für Ord $\mathcal{N}s = 3p$.

1. Frage: Bilden in einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ diejenigen Elemente A, für welche $\{A\}$ mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, eine Gruppe? Wenn ja, dürfte es in beliebigen $\mathfrak{G}$ stets eine grösste nachinv. Ugr $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft geben: $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\rightsquigarrow \mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}$.

2. Aufgabe: Die Permgr vom Grade p^3 (mit Ugr vom Typ (p, p^2)) wirklich aufstellen unter der Vor., dass geeignete 2-fach transitive Gr. als bekannte gelten. Analog (p^α, p^β), $\alpha > \beta$.

3. Sind die 2-tra Gruppen der Grade p^μ die einfachen Bestandteile aller tra. Gruppen der Grade p^λ? Kühne Vermutung: Eine einfache Permgr. des Grades p^μ ist stets zweifach transitiv.

100/101

1. Nachinvariante Hüllen: $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightsquigarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

    (a) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien p-Gruppen. Dann ist $\overline{\mathfrak{A}}^p \vee \overline{\mathfrak{B}}$, da $\overline{\mathfrak{A}}^p$ keinen p-Kopf hat und $\overline{\mathfrak{B}}$ keine anderen abelschen Köpfe als p-Köpfe. Also $\{\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}\}^p = \overline{\mathfrak{A}}^p \cdot \overline{\mathfrak{B}} \lhd \{\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}\}$. OBdA sei $\overline{\mathfrak{A}}^p \overline{\mathfrak{B}}^p = E$. Dann also ist $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ eine p-Gruppe, also $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

    (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich. Zu jedem p gibt es eine p-Sylowgr $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{B}_p$ mit $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_p = \mathfrak{A}_p\mathfrak{B}_p$. Also $\overline{\mathfrak{A}}_p \vee \overline{\mathfrak{B}}_p$. Ferner ist $\overline{\mathfrak{A}}_p \vee \overline{\mathfrak{B}}_q$ für $q \neq q$. Also $\overline{\mathfrak{A}} = \bigcup \overline{\mathfrak{A}}_p \vee \bigcup \overline{\mathfrak{B}}_q = \overline{\mathfrak{B}}$.

3. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \leftrightarrow {}_p\mathfrak{A} \vee {}_p\mathfrak{B}$ f alle p. Daher bedeutet ${}_p\mathfrak{A}$ die p-Komponente von $\mathfrak{A}$, dh. das Erzeugnis aller p-köpfigen nachinv. Ugr von $\mathfrak{A}$, dh. ${}_p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{p'}$.

4. Folge: $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{G}_p \cap {}_p\mathfrak{A} \vee \mathfrak{G}_p \cap {}_p\mathfrak{B}$ f alle p.

101/102

Schwache Abgeschlossenheit.

1. Sei $\mathfrak{p} < \mathfrak{P} = \mathrm{Syl}\mathfrak{G}$. Dann: $\mathfrak{G}$ schwach abg. in $\mathfrak{P} \rightsquigarrow [\mathfrak{p} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{p} \lhd \mathcal{N}s\mathfrak{P}_1]$.
   Bew $\rightarrow$ klar. $\leftarrow$?: ist $\mathfrak{P}_1$ die schwache Abschliessg, so ist $\mathfrak{P}_1$ die grösste p-Gruppe der Form $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^G, \dots\}$. Also $* \ \mathfrak{p}^G = \mathfrak{p}^H$ mit $H \in \mathcal{N}s\mathfrak{P}_1$; $\mathfrak{p}^G = \mathfrak{p}$.
   Anmerkung: [Frage noch offen! *]*

   Folge: ?

2. Ist für jedes $\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{G} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$ eine charakteristische Ugr von $\mathfrak{P}_1$, so ist $\mathfrak{G}$ schwach abegeschlossen.

3. Wenn $*$ stimmt, ist jede Gr mit reg Autom- α nilpotent! Denn dann ist das Zentrum einer bei α festen Sylowgr schwach abgeschl., + Satz von Grün.

Seiten 103 und 104 fehlen!

[1. Verlagerung (allgemein): Ist $\mathfrak{P}$ Sylowgr $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Z}$ schwach abg in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\mathfrak{Z}$ und hat $\mathfrak{N}$ eine p-Faktorgr, so auch $\mathfrak{G}$.
Bew: p-Sylowgr & p-Faktorgr S.188, Satz 3.]

1. Ist $A \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{N}sA_1 \not\leq \mathfrak{A}$, so ist $A_1 \in \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{A}^{*^A}$.

2'. ebenso: " $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}$, $\mathcal{N}s\mathfrak{U} \not< \mathfrak{A}$, so $\exists H \in (\mathcal{N}s\mathfrak{A} - \mathfrak{A})$, $\mathfrak{U}^H = \mathfrak{U}$.

Bew: Sei $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{A}$, und $G \in \mathcal{N}sA_1 = \mathfrak{N}$, $G \notin \mathfrak{A}$. Dann enthält nach 104_1 $\mathfrak{N}$ ein H mit $\mathfrak{A}^H = \mathfrak{A}$, $H \notin \mathfrak{A}$. Also ist $H \in \mathfrak{B}^{*M_1}$ $(M_1 \in \mathfrak{A})$. Da H A_1 zentralisiert, liegt A_1 nach viii86, 3' in $(\mathcal{N}s\mathfrak{B}^M) \cap \mathfrak{A}$, also mit $M = A_s$: $A_1 \in \mathfrak{A}^{*A_2}$.

3 Hieraus folgt, dass alle Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ord weder $\mid a$ noch $\mid b$ ist, in den $(\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*)^G$ enthalten sind.
Bew: Sei $G = AB$, $A = G^\alpha$, $B = G^\beta$, $|A| \mid a$, $|B| \mid b$. Dann ist $A \in \mathfrak{A}^{L^{-1}}$, $B \in \mathfrak{B}^{L^{-1}}$, also $A^L \in \mathfrak{A}$, $B^L \in \mathfrak{B}$. OBdA sei schon $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Da $A \in \mathfrak{A}^{*1\overline{A}}$ liegt A nur in einer einzigen Konjugierten zu $\mathfrak{A}$ (nach viii86_4), dh. nur in $\mathfrak{A}$; andererseits auch in $\mathfrak{A}^B$; $\rightsquigarrow B \in {}^*$, ebenso $A \in \mathfrak{A}^*$.

noch Produkte nilpotenter Gr, $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) = 1$

1. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}$, $|\mathrm{Zs}\mathfrak{U}| \nmid a$, so ist $< \mathfrak{A}^{*A}$ f ein $A \in \mathfrak{A}$.
   Bew wie 105_2.

2. $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^G \neq \mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{D} < \mathfrak{A}^{*A}$. Denn $|\mathrm{Zs}\mathfrak{D}| \nmid a$ wegen $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}^G < \mathrm{Zs}\mathfrak{G} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{A}$.

3. *Anmerkung: [* unnötig: gleich 6,7 *]*
   Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{U} \not< \mathfrak{A}^{*A}$, so ist $\mathcal{N}\!\int\!\mathfrak{U} < \mathcal{N}\!\int\!\mathfrak{A}$.
   Bew: $N \in \mathcal{N}\!\int\!\mathfrak{U} \rightsquigarrow \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^N < \mathfrak{A}^N \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}^{*A}$.

4. Sei $E \neq \mathfrak{U} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{U}^G < \mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{A}^G = \mathfrak{A}$.
   Bew:

   (a) $\mathfrak{U} \not< \mathfrak{A} \not< A$: 4

   (b) $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}^{*A}$: $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}^{A^{-1}} < \mathfrak{A}^*$

$$\mathfrak{W}^{AG} < \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{W} < \mathfrak{A}^{G^{-1}A^{-1}}$$
$$\text{Nach viii folgt} \rightsquigarrow \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{G^{-1}A^{-1}} \rightsquigarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^G$$

5. $\mathfrak{A}^G \neq \mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^G \cap \mathfrak{A} = E$. Denn sei $\mathfrak{A}^G \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{D} \neq E$, so $\mathfrak{D} < \mathfrak{A}^{*^A}$, aber diese Gr ist nur in <u>einer</u> Konjugierten u $\mathfrak{A}$ enthalten viii 86_4.

6. Sei $|\mathfrak{A}| > |\mathfrak{B}|$. Dann ist $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^G) \neq E$. Wid.

14.8.57

106/107

$\lhd\lhd$

1. Hat $\mathfrak{G}$ endl. Kompositonsreihe, so ist Sockel $\mathfrak{G} < \mathcal{N}s\mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.
   (a) $\mathfrak{N} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, einfach, nichtabelsch: klar
   (b) $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ minimal, $|\mathfrak{N}| = p^\alpha$: Sei $\mathfrak{A}^p = \mathfrak{B}$, mod $\mathfrak{B}^\mathfrak{G} = \mathfrak{A}^{p\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}p}$ ist $\mathfrak{N}$ noch minimal normal: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{N}] < \mathfrak{B}^\mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{B}^\mathfrak{G} \cap \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ also $[\mathfrak{A}, \mathfrak{N}] < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$.

2. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, so ist $[\underbrace{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}}_{=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}}] \lhd \lhd \mathfrak{G}$, ebenso $\mathfrak{A}^\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Denn $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd \mathfrak{A}^\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}} \lhd \mathfrak{A}^{\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.

3. Mit 2 sollte man alle Sätze neu formulieren, wo von einer <u>subnorm.</u> u einer <u>beliebigen</u> Ugr und von $\mathfrak{G}$ die Rede ist; [Man braucht vielleicht als Vor. dann nur: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \lhd \lhd \mathfrak{G}$.]

107/108

Allgemeines über "einzige´´ Unter- u. Obergr. (Forts. v viii 91)

Def: a. Sei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ fest). $\mathfrak{A}$ heisst einzig in $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}^G < \mathfrak{B} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^G = \mathfrak{A}$.
   (a) $\mathfrak{B}$ heisst einzig über $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}^G > \mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{B}^G = \mathfrak{B}$.

2. Sei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C} < \mathfrak{G}$. Dann gilt: $\mathfrak{C}$ einzig über $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{C}$ einzig über $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ einzig über $\mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{A}$ einzig zu $\mathfrak{B}$.

3. Alle Gruppen, in denen $\mathfrak{A}$ einzig ist, erhält man in den Untergr der maximalen Gr., in denen $\mathfrak{A}$ einzig ist. und dual: Alle Gr, über denen $\mathfrak{C}$ einzig ist, sind die Obergr der minimalen.

4. Sei $\mathfrak{P}$ Sylowgr von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ einzig über $\mathfrak{g}$. Dann folgt aus $\mathfrak{g} < \mathfrak{A}$ stets: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$ ist Sylowgr von $\mathfrak{A}$.
   Bew: $\mathfrak{g} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P}^G$ nach Sylow, wo $\mathfrak{P}_1$ *durchgestrichen: [* eine Sylowgr von *]* $\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{P}^G = \mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{p} \rightsquigarrow \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}$.

108/109

5. $\mathfrak{P}$ Sylowgr $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ einzig über $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{P}$ einzig über $\mathfrak{g}$. $\mapsto$ Der Verband der Gruppen $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ wird durch $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ homomorph in den Verband der Gr zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{P}$ abgebildet.
   Bew: $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{P} \geq (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}) \cup (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{P})$, $\mathfrak{g} < \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{g} < \mathfrak{A}_2$, *]* $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightsquigarrow \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{P} = (\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{P})(\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{P})$
   Bew 108.4

6. Aufgabe: Die in den bisherigen Faktorisierungsarbeiten angewandten Schlussweisen sammeln und verallgemeinern. Zusammen mit viii 91 in eine Arbeit '"Zur Theorie der Faktorisierung von Gruppen". Hierzu gehört

7. Sei $\mathfrak{G}$ faktorisiert, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Jede faktorisierte (bezgl. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$!) echte Untergr von $\mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann ist auch jede echte Untergr $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ auflösbar welche die Gestalt $\mathfrak{H} = \{\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{B}}\}$ hat, wo $\tilde{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \tilde{\mathfrak{B}}$. ($\mathcal{N}s\mathfrak{H}$ ist faktorisiert). (Es sei denn: $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{G}$!)

8. Der Durchschnitt von 2 faktorisierten Ugruppen einer Faktorgr. $\mathfrak{G}$ ist selbst faktorisiert.

109/110

$n = p^2$

Permutationsgruppen vom Grade p^2 [Auch Allgemeineres]
mit einer transitiven Ugr $\mathfrak{P}$ vom Typ (p, p) fasst man zweckmässig als Abbildungen der affinen Ebene über GF(p) auf sich auf; $\mathfrak{P}$ ist die Gruppe der Translationen; identifizeire nach Auswahl eines Pkts 0 den Pkt P mit der Tansl. $OP^{\rightarrow}$ (als Rechtsoperator geschrieben). Also $\mathfrak{K}_p = \mathfrak{K}P$ ($P \in \mathfrak{P}$).

1. Ist $O = E$ ein fester Punkt und $\mathfrak{K}$ ein Transitivitsätsgebiet von $\mathfrak{G}_E$, ferner P ein bel. Pkt , so gilt für jedes $G \in \mathfrak{G}$ mit $E_G = P$:

$$\mathfrak{K}_G = \mathfrak{K}P$$

kurz: $\mathfrak{K}_G = \mathfrak{K}E_G$. Denn $G = G_e \cdot P$, dh. der '"Stern´´' $\mathfrak{K}$ um O wird von jedem G "mit O mitgenommen" vermöge der Translation von O nach P.

2. Allgemein: $(\mathfrak{K}P)_G = \mathfrak{K} \cdot P_G$; denn $G = P^{-1}G_E P_G$.

3. Ist $\mathfrak{F}$ irgendeine '"Figur´´', dh. P Menge mit Vfheiten, und $\mathfrak{K}\mathfrak{F}$ (für einen Hauptkomplex $\mathfrak{K}$) $= \sum KF$, so gilt $(\mathfrak{K}\mathfrak{F})_G = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{F}_G$.

4. Ist $\mathfrak{T}$ inver $=$ '"Fastblock´´' bei $\mathfrak{U} < \mathfrak{g}$ (dh $\sum$ von Transpositionen), so auch $\mathfrak{K}\mathfrak{T}$. Daher bilden die Transs. von $\mathfrak{G}_E$ Ring.
bis hierher ähnlich für bel. $\mathfrak{G}$ mit reg. Ugr $\mathfrak{H}$.

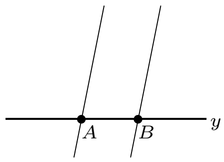
110/111

5. Im Fall $n = p^2$ und rationaler primärer Komplexe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{(\alpha)}$ (mit $(\alpha, p) = 1$) sind durch $\mathfrak{K}$ gewisse Geraden durch E ausgezeichnet (nämlich $\mathfrak{K} + \mathfrak{E}$); nennt man Q von P aus sichtbar, wenn $Q \in \mathfrak{K}P$, so gilt: G führt die von P aus sichtbaren Pkte in die von P_G aus sichtbaren über ("Sehsterne").

6. Lässt $\mathfrak{U}$ $\mathfrak{T}_i$ fest ($i = 1, 2$), und bilden die Pkte von $\mathfrak{T}_i$, von denen aus man genau l Pkte von $\mathfrak{T}_2$ '"sehen´´' kann, die Teilmenge $\mathfrak{T}'_1$, so ist auf $\mathfrak{T}'_2$ fest bei $\mathfrak{U}$.

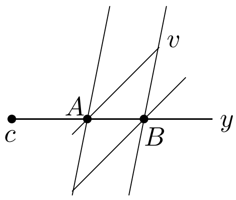
7. Nun p^2: $\mathfrak{G}_E$ habe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{(\alpha)}$ mit genau k Geraden.
$k = 1$ klar. dh. $E + \mathfrak{K} = \sum_{i=1}^{k} \{P_i\}$. Beh: $k \leq 4 \rightsquigarrow$ lässt G zwei

voneinander sichtbare Pkte fest, so auch ihre Verbdgsgerade.
$k = 2$:



Aus $A_G = A$, $B_G = B$ folgt (Durchschnitt der beiden Sterne) $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}$.

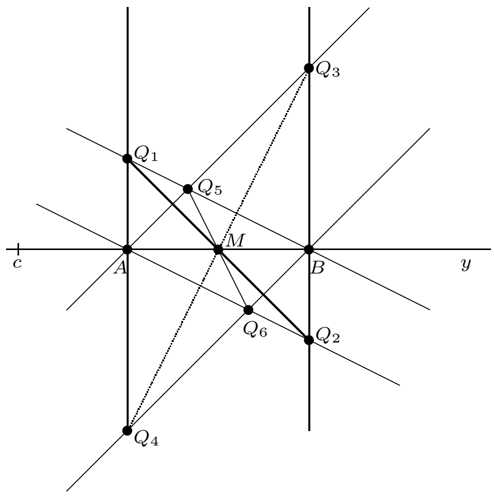
$k = 3$:



Von C aus sind mind. p Pkte von $\mathfrak{g} + U + V$ sichtbar, von U, V aus nur je drei, also $\mathfrak{g}$ fest wenn $p > 3$. Bei $p = 1$ gibt es ein $\mathfrak{K}^*$ mit $k^* \leq 1$.
Achtung: Ist Inzidenzstruktur im Sinn von Buch *unleserlich H. Pickert* , Arbeiten André

111/112

8. $k = 4$:



$\underline{n = p^2}$ $\quad \mathfrak{L} = y + \sum_1^G Q_i$ ist fest bei G, wenn $A_G = A_1 B_G = B$, $\mathfrak{Q} = \sum Q_i$
$\underline{p \geq 11}$: von Q_i aus $\leq 6 + 3$ Pkte von $\mathfrak{L}$ sichtbar, von C aus ≥ 11 Pkte ($\mathfrak{G}$) sichtbar, also $g_G = g$.
$p = 7$: Vom "Mittelpkt´´ M aus (Spiegelung an ihm führt $\mathfrak{L}$ in sich über) sieht man vermöge $\mathfrak{K}$ 0 oder 2 Pkte von $\mathfrak{Q}$; denn wenn 4 oder 6, sieht man

von M aus 11 oder 13 Pkte von $\mathfrak{Q}$; von keinem Q_i sieht man o viel, also bleibt M auf $\mathfrak{G}$: $M_G \in \mathfrak{G}$. Also wenn 4 Pkte (allg: k) einer Sichtgeraden auf dieser bleiben, bleibt die ganze Gerade fest.
Vermöge des komplementären Sehsterns $\mathfrak{K}^*$ (auch $k^* = q$) sieht man also von M aus 4 oder 6 Punkte von $\mathfrak{Q}$ und damit von $\mathfrak{L}$. Vonjedem Q_i aus aber sieht man genau 4 Pkte von $\mathfrak{g}$. Folglich sieht man oBdA von M aus auch genau 4 vermöge $\mathfrak{K}^*$, dh genau 2 vermöge $\mathfrak{K}$. Von M aus also 9 Pkte von $\mathfrak{L}$ sichtbar, etwa Q_1, Q_2, y.

112/113

$\underline{n = p^2}$

Allg: Kann man von Q_1 aus Q_2 sehen, so ist $\overline{Q_1Q_2} \| \overline{AQ_3}$ (wegen $k = 4$), also kann man von Q_1 nicht Q_3 sehen. Man kann also von jedem Q_i aus höchstens 5 Q_j's sehen, insgesamt ≤ 8 von $\mathfrak{L}$. <u>Wenn</u> man also von M aus <u>2 Qs</u> sieht, so bleibt M auf y und dann bleibt y fest, oder $M_G = M$, dh. die Fixgruppe $\mathfrak{U}_{A.B} = \mathfrak{U}_y + \mathfrak{U}_M$, folglich $\mathfrak{U}_{A,B}$ oder $= \mathfrak{U}_M$, da keine Gruppe die Vereinigg von 2 echten Untergr ist.
Also <u>wenn</u> man von M aus ≥ 1 Pkt von $\mathfrak{Q}$ aus sieht, so ≥ 2, und $\underline{M_G = M}$;
Aus $M_G = M$ folgt wegen 2-Tra der Kollineationen auf y: Lässt G 2 Pkte A, B auf y fest (oder vertauscht G sie), so bleibt der Mittelpkt von AB bei G fest. Def von M,wenn $0 \in y$: $A = P^\alpha$, $B = P^\beta$, $\alpha, \beta \neq 0$, $(BM^{-1}) = MA^{-1}$, $\underline{M^2 = AB}$, $M(E, 2) = Q^{\frac{1}{2}}$.

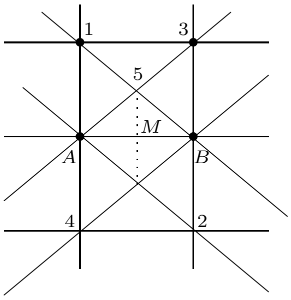
113/114

$\underline{n = p^2}$

9. Wie sieht in der "Geraden" $\mathfrak{P}$ mit p Pkten eine Pktmenge aus, die neben P, Q auch stets $(PQ)^{\frac{1}{2}}$ enthält? Mit E, P enthält sie alle P^λ, wo $\lambda = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$, also alle $\lambda = \frac{2k+1}{2^m}$. Wähle $m:\ 2^m \equiv 1 \pmod p$, dann alle $\lambda = 2k + 1 \mod p$, dh. alle $\underline{\lambda \mod p}$.

10. Also wenn man im Fall $p = 7$ einem Pkt Q_i von M aus sieht, bleibt y fest bei jedem $G \in \mathfrak{U}_{A,B}$. Weiter sehe man von M aus <u>keine</u> Q.

    Kann man von einem Q, etwa Q_1, 7 Pkte aus $\mathfrak{L}$ sehen (kurz: $\sigma(Q_1) = 7$), so kann man Q_6 od. Q_3 sehen, etwa Q_3 und $Q_1Q_3 || \mathfrak{q}$. Die Fig sieht dann so aus:



Wenn aber $A1^{\rightarrow} = P^{\rightarrow} = 8$, $AB^{\rightarrow} = Q^{\rightarrow} = q$, ist $A3^{\rightarrow} = \mathfrak{G} + \mathfrak{Q}$, $B1 = \mathfrak{G} - \mathfrak{Q}$, $A5 = \frac{1}{2}(\mathfrak{G} + \mathfrak{Q})$ $(= \mathfrak{Q} + \lambda(\mathfrak{G} - \mathfrak{Q}) = \mu(\mathfrak{G} + \mathfrak{Q})$). Ebenso $A6 = \frac{1}{2}(-\mathfrak{G} + \mathfrak{Q})$, $\frac{g+2}{2} \pm \frac{g}{2} = m$, $5 - m = \frac{g}{2}$, also könnte man 5 von m aus sehen.

114/115

11. Zusammenfassg: Ist $k \leq 4$ und lässt G zwei Pkte auf einer Geraden $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{K}$ fest, so auch $\mathfrak{g}$.

12. Nun sei allg. vorausgesetzt: Jedes $G \in \mathfrak{G}$, das $A \neq B$ fest lässt, läßt die Gerade AB fest. Dann führt jedes G, das zwei zu $AB\|$ Pkte in ebensolche überführt, die Gerade durch diese beiden Pkte in die Gerade durch die Bildpkte über. Denn die Gr. $\mathfrak{S}$ der „Streckungen" in $\mathfrak{G}$ ist tra auf den $\|$ Punktepaaren.

13. Ist $k \leq 3$, so kann man annehmen, dass die Kollin.gr. $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{G}$ auf den k Geraden von $\mathfrak{K}$ transitiv ist. Dann permutiert nach 12 $\mathfrak{G}_0$ die die k Geraden durch 0 nur untereinander, und $\mathfrak{G}$ führt jede zu $\mathfrak{K}$ $\|$ Gerade in eine ebensolche über. $\mathfrak{G}$ enthält also NT, der alle k Richtungen einzeln fest lässt. Dieser ist bei $k = 2$ direktes

115/116

Produkt von zwei Gruppen des Grades p. Bei $k = 3$ besteht er nur aus den Streckungen, dann ist $\mathfrak{G}$ eine affine Gruppe, dh. $= \mathcal{N}s$ der Translationsgruppe $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$.

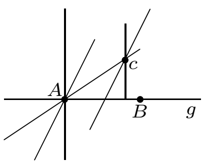
14. Bei $k = 4$, $p \geq 11$, bewirkt die Gr., die $y \in \mathfrak{K}$ fest lässt, auf y nur die Streckgruppe. Denn sonst wäre sie auf $\mathfrak{g}$ 3-transitiv (da sie die volle p-Hülle der Ord $p(p-1)$ enthält). Aber auf $\mathfrak{g}$ gibt es ≤ 6 Pkte ausser A, B, von denen aus man etwas von $\mathfrak{Q}$ sieht, die müssten untereinander permut. werden.

15. Bei $k = 4$, $p = 7$ müsste, wenn $\mathfrak{G}_{AB}$ auf $\mathfrak{G} - A - B = \mathfrak{H}$ noch tra, $\mathfrak{G}_y$ eine 3-tra Gruppe $\mathfrak{G}^*$ auf y, also vom Grade 7, bewirken. Dann ist aber $\mathfrak{G}^* \geq \mathfrak{A}_7$ (denn der gerade Teil von $\mathfrak{G}^*$ hat Ord $\geq 7.6.5.2$, gibt Darst des Grades ≤ 6 von der $\mathfrak{A}_7$, also Darst vom Grade 1). Also $\mathfrak{A}^* \geq \mathfrak{A}_5$. Ist $\mathfrak{H}^*$ trans auf $\mathfrak{Q}$, so sieht man von jedem Q aus gleich viel der 5 Pkte von $\mathfrak{G} - A - B = \mathfrak{H}$.

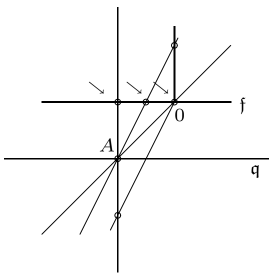
und umgekehrt: Anzahl der Paare HQ (sichtbar voneinander) ist $\equiv 0 \pmod 5$ und $\equiv 0 \pmod 6$, also 30: Man sieht von Q qus ganz y, geht nicht. Also hat $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{Q}$ ein Transsystem $\mathfrak{T}$ einer Länge $l \leq 3$. Sei etwa $Q_1 \in \mathfrak{T}$: Dann ist $y^*_{Q_1}$ noch tra auf $\mathfrak{H}$, da $\mathfrak{A}_5$ keine Ugr vom Index 3 hat; also sieht man von Q_1 aus ganz $\mathfrak{g}$, geht nicht.

16. Aus 14,15 folgt: bei $k = 4$ lässt stets $\mathfrak{G}_{AB}$ die Gerade $y = AB$ <u>punktweise</u> fest, wenn $y \| \mathfrak{K}$.

17. Ist $k = 4$, $p \geq 11$, so führt ein G, das A fest lässt, jede der 4 Geraden durch A ganz in eine von ihnen über. Denn die $p - 1$ Bilder von $y - A$ verteilen sich sonst auf 2 od 3 Geraden. Ist $B_G = C$, so enthält also eine geeignete (die dichtestbelegte) Gerade $\neq AC$ durch A mindestens $\frac{p-1}{3}$ Bilder von $y - A$. Andererseits liegen diese alle auf dem Stern um C, also ist ihre Zahl ≤ 3. Gibt $p \leq 7$.



18. Auch bei $k = 4$, $p = 7$ werden die Geraden durch A nur permutiert unter $\mathfrak{G}_A$.
Bew: Sonst ist das Bild von $\mathfrak{g} - A$ zu je zwei Punkten auf die drei anderen Geraden verteilt nach dem Bew von 17. Also enthält es mit C die drei einezeichneten Punkte; geht nicht, da dann $\mathfrak{g}_G = f$ wäre $\not< $ Stern A.



Man braucht hierzu nicht ganz 11 sondern nur dies: bleiben 3 Pkte auf $\mathfrak{g}$, so $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

19. Also bei $k = 4$ werden die vier Geraden als Ganze permutiert bei $\mathfrak{G}_A$. Daher werden die vier Parallelenscharen permutiert. Es gibt NT vom Index $|24$, dieser ist = Steckungen. Da er die Transl. $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{T}$ als chr. Ugr enthält, ist $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{G}$. Dito bei $k = 3$.

$n = p^2$

20. Der Schluss von 18-19 zeigt bei beliebigem k:
Verteilt sich das Bild einer Sehgeraden auf y auf $s < 1$ Sehgeraden, so enthält die reichste mindestens $\frac{p-1}{s}$ und höchstens $k-2$ Bilder von $y-A$, also ist $\frac{p-1}{5} \leq k-2 \rightsquigarrow p \leq sk - 2s + 1$; $s \leq k$, $p \leq (k-1)^2$, $k > 17\sqrt{p}$.

21. Nach dem gleichen Verfahren sieht man unmittelbar ein, dass bei $k = 2, 3$ die Geraden von $\mathfrak{K}$ permutiert weden.

22. Allgemein: Für reguläre Untergr vom Typ des $\mathcal{N}\!\int$ einer Gr der Ord p (und seiner Ugruppen) wird man eine "rechteckige affine Geometrie´´ betrachten müssen; allgemeiner bei Frobeniusgruppen. Hier gibt es wenige lange Geraden und viele kurze. Nicht je zwei Geraden verschiedener $\|$-Scharen schneiden sich, da gibt es stets höchstens einen Schnittpunkt.

$n = p^2$

23. In dem allein offenen Fall, daß die Translat.Gr. $\mathfrak{P}$ der Ord p^2 zu ihren Konj. fremd ist, ist jedes mit einer Transaltion vertauschbare $G \in \mathfrak{G}$ selbst Translation $*$. Daher sind in $\mathfrak{G}$ alle Klassenlängen $\equiv 0 \pmod{p^2}$ ausser den Translationen; diese $= \mathfrak{G}/p^2$. Ist $cp^2 = \mathrm{Ord}\,\mathcal{N}\!\int\mathfrak{P} =$ Ord der Kollineationsgr $\mathfrak{G}^*$ in $\mathfrak{G}$, so gibt es $\frac{p^2-1}{c}$ Klassen von El. der Ord p. Die Faktorgr $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{P} = \mathfrak{C}$ der Ord c wird auf $\mathfrak{P}$ ohne EW $= 1$ dargestellt und enthält die Elemente $\begin{pmatrix} a // & a \end{pmatrix}$ mod pm $a \not\equiv 0$. Man könnte über $\mathfrak{C}$ etwas aus den Aufzählungen der binären Gruppen entnehmen. Es gibt für $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{P}$ genau p^2 Vertretergruppen, alle konjugiert, jede durch ihren Fixpkt gekennzeichnet.
$*$ Es sei denn, G von der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

24. Allgemeines. Gegeben seien $s < p$ Sehrichtungen und auf einer dazu nicht parallelen Geraden $\mathfrak{G}$ s Punkte $\{\mathfrak{G}\}$, die von einem Punkt außerhalb sichtbar sind. Sei $\mathfrak{A}$ die größte Gruppe affiner Abb. von $\mathfrak{g}$ auf sich, die $\{\mathfrak{g}\}$ fest lässt.

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Streckgen von einem Punkt a von y aus, es gibt genau $|\mathfrak{A}|$ Pkte P ausserhalb $\mathfrak{G}$, von denen aus $\{\mathfrak{g}\}$ ganz sichtbar ist, und sie liegen auf einer Geraden durch a und entstehen aus a durch die Strckungsgruppe $\mathfrak{A}$ (die durch Ausdehnung der alten auf die Ebene erklärt ist). Führt $A \in \mathfrak{A}$ $\mathfrak{g}_i$ in $\mathfrak{g}_i^*$ über, und hält man einen Pkt P fest, so läßt sich $P g_i \to P g_i^*$ zu einer affinen Abb der Ebene mit Fixpkt P erweitern; diese vertauscht die s Sehstrecken $P g_i$ nur unter sich und lässt g fest.
Wenn es also zu einem Pkt $P \notin y$ genau α affine Abb der Ebene mit Fixpkt P gibt, die die s Sehrichtungen nur untereinander vertauschen und g fest

lassen, so gibt es genau α Punkte, von denen aus die von P aus sichtbaren Pkte von g sichtbar sind. Sie liegen auf einer y schneidenden Geraden.

25. Ein geordnetes n-Tupel von Punkten $\{P_1 \dots P_n\} = n$ besitzt, wenn Transitivitätssystem (= Sehsterne) $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \neq 0$

121/122

von $\mathfrak{G}_0$ gegeben sind und die Translationsgr. additiv geschrieben wird, für jede geordnete Auswahl $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, $1 \leq \sigma_r \leq t$, die Invariante $\sigma(n) =$ Anzahl der Punkte der Ebene, von denen aus P_ν mit einer Richtg aus σ_ν sichtbar ist, dh. $\sigma(n) = |\bigcap_{P_\nu \in n}(P_\nu + A_{\sigma_\nu})| = |\bigcap_{\nu=1}^{n}(P_\nu + A_{\sigma_\nu})|$, dh es ist $\sigma(n) = \sigma(n_G)$ für alle $G \in \mathfrak{G}$.

26. <u>Punktetripel</u>, kollineare. Geg 3 versch Richtgen $y_1 y_2 y_3$, 3 kollineare Pkte P_ν auf der Geraden g sind genau dann von geeignetem Pkt P aus unter den Richtgen $y_1 y_2 y_3$ sichtbar, wenn $g \not\parallel g_\nu$ und sie durch eine affine Transformation von g in den Schnitt $\{Q_1 Q_2 Q_3\}$, $Q_\nu = P_0 + g_0 \cap y$ (P_0 bel. fest $\neq g$) überführt werden können.
Berechng von $\sigma\{P_1 P_2 P_3\}$: Wähle $P_0 \notin \mathfrak{G}$ fest. Schneide $P_0 + A_\tau$ mit y, gebe die Menge $\mathfrak{Q}_\tau$; es ist $|\mathfrak{Q}_\tau| = \begin{cases} |A_\tau - 1 & \text{wenn } y \| A_\tau \\ |A_\tau| & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $\sigma\{P_1 P_2 P_3\}$ die Anzahl der affinen Abb —α von g in sich, für welche

122/123

$P_{1\alpha} \in \mathfrak{Q}_{\sigma_1}$, $P_{2\alpha} \in \mathfrak{Q}_{\sigma_2}$, $P_{3\alpha} \in \mathfrak{Q}\sigma_3$ ist.

Nun sind zwei Tripel von g genau dann affin äq., wenn sie das gleiche Teilverhältnis haben: $\mathfrak{D}(P_1 P_2 P_3) = \mathfrak{D}$ heisst $P_1 - P_2) = (P_1 - P_3)\mathfrak{D}$. Es ist $\mathfrak{D} \mod p$, $\mathfrak{D} \not\equiv 0, 1$. Es gibt also $p - 2$ nicht äq. Tripel. Für $n = P_1 P_2 P_3$ gilt also: Also ist $\sigma(n) =$ Anzahl der Tripel $Q_{\sigma_1} Q_{\sigma_2} Q_{\sigma_3}$ mit $Q_\tau \in \mathfrak{Q}_\tau$, $\mathfrak{D}(Q_{\sigma_1} Q_{\sigma_2} Q_{\sigma_3}) = \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(P_1 P_2 P_3)$.

27. Sei $\mathfrak{G}$ auf g 3-transitiv. Dann ist $\sigma(n) = \sigma(m)$ für je zwei Tripel n, m von y; daher gibt es zu jedem $\mathfrak{D}_0 = 1, 2, \dots,\ p - 2$ gleich viele Tripel Q_{σ_r} mit $\mathfrak{D}(Q_{\sigma_1} Q_{\sigma_2} Q_{\sigma_3}) = \mathfrak{D}_0$. Insbesondere ist die Gesamtzahl <u>aller</u> Tripel $Q_{\sigma_1} \dots Q_{\sigma_\lambda}$ teilbar durch $p - 2$: $\prod_{\nu=1}^{3*} |\mathfrak{Q}_{\sigma_\nu}| \equiv 0 \pmod{p-2}$. Daher bedeutet $\prod^*$: weiderholt sich ein σ_1, etwa $\sigma_1 = \sigma_3$, so ist der zweite Faktor um 1, (der er. dritte gleich um 2) zu vermindern.

123/124

Ausführlich:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 = \sigma_1 \quad &\rightsquigarrow \quad |\mathfrak{Q}_{\sigma_1}||\mathfrak{Q}_{\sigma_2}||\mathfrak{Q}_{\sigma_3}| \equiv 0 \pmod{p-2} \\ \sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \quad &\rightsquigarrow \quad |\mathfrak{Q}_{\sigma_1}|(|\mathfrak{Q}_{\sigma_1}| - 1)|\mathfrak{Q}_{\sigma_3}| \equiv 0 \pmod{p-2} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad &\rightsquigarrow \quad |\mathfrak{Q}_{\sigma_1}|(|\mathfrak{Q}_{\sigma_1}| - 1)(|\mathfrak{Q}_{\sigma_1}| - 2) \equiv 0 \pmod{p-2} \end{aligned}$$

Besitzt also (im Fall 3-facher Z'Trans von $\mathfrak{G}$ auf g) $\mathfrak{G}$ einen (nicht notw. primitiven) Sehstern von k Geraden, so ist für $g \| \sigma_1$ (mit σ_1 k Geraden,

σ_2 restl. $p+1-k=l$ Ger.)

$$\begin{aligned}(k-1)(k-2)(k-3)&\equiv 0\\(k-1)(k-2)l&\equiv 0\\(k-1)l(l-1)&\equiv 0\\l(l-1)(l-2)&\equiv 0\end{aligned}$$

wegen $k-1\equiv l$ heißt das

$$\begin{aligned}(k-1)(k-2)(k-3)&\equiv 0 &&\equiv k^3-6k^2+11k-6\\(k-1)^2(k-2)&\equiv 0 &&\equiv k^3-4k^2+5k-2\\(k-1)^2k&\equiv 0 &&\equiv k^3-2k^2+k\\(k+1)k(k-1)&\equiv 0 &&\rightsquigarrow k^3\equiv k\end{aligned}$$

Das gibt

$$\begin{array}{rcl}-6k^2+12k-6&\equiv&0\\-4k^2+6k-2&\equiv&0\\-2k^2+2k&\equiv&0\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}1&5\\&1\\-3&-2\end{array}$$

124/125

weiter $6k-6\equiv 0$, $\underline{2k-2\equiv 0}$. Also $p-1\mid 2k-2$. Es ist $k\le\frac{p+1}{2}$, also $2k-2\le p-1$; folglich muss $\underline{k=\frac{p+1}{2}\text{ sein bei 2-Tra auf }y}$.

Ist also g 3-tra auf y (oder führt $\mathfrak{G}$ nur ein Tripel von y in $p-1$ nicht-affin-äq. Tripel über), so hat g_0 nur Trans. der Länge 1, dh. Lgen $=1,\frac{p^2-1}{2},\frac{p^2-1}{2}$.

Ist ferner $p\equiv 1 \pmod 3$, so gibt es Tripel $P_1P_2P_3$ affin zu $P_2P_3P_1\sim P_3P_1P_2$. Die Anzahl der hierzu äquivalenten in $\mathfrak{Q}_1$ (wo $g\|P_1$) ist also durch 3 teilbar; also $\frac{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{2}}\frac{p-s}{2}p-1\equiv 0 \pmod 3$ *leadsto* $p-5\equiv 0 \pmod 3$ geht nicht. Folglich ist unter Vor 27 dh bei 3-Tra auf g $\underline{p\equiv -1 \pmod 3}$.

Ist also g 3-tra auf $\mathfrak{G}$ und ist $g\|\sigma_1$ mit $\sigma_1=k$ Geraden, so ist

$p-2\mid(k-1)(k-2)(k-3)$; $\qquad$ $p-2$ ist ung.; daher: ung. Teil von $k-\nu$ nehmen

$k=4\rightsquigarrow$	$p-2\mid 3$	$p=3,5$		geht nicht
$5\rightsquigarrow$	$p-2\mid 1.3.1.$	"		"
$6,7\rightsquigarrow$	$p-2\mid 5.3$	$\rightsquigarrow p=5,7,17$	$\rightsquigarrow p=17$	
$8\rightsquigarrow$	$p-2\mid 7.3.5$	$\rightsquigarrow p=17\ 23\ 37$		
$9\rightsquigarrow$	$p-2\mid 7\ 3$	$\rightsquigarrow p=23$		

125/126

Sei $\mathfrak{G}$ 3-tra auf $g \| \sigma_1$ (σ_1 k Geraden). Ist $p \equiv 1 \pmod 3$, so ist $3 \mid \frac{(k1)(k-2)(k-3)}{p-2}$. Stimmt sowieso.

28. Die Punkte, von denen aus man die Ecken eines gegeb. Dreiecks in 3 vorgegebenen, nicht seitenparallelen Richtungen sieht, liegen auf einer Geraden. Ihre Anzahl ist 1, 2 oder 3. Sie gehen durch die Gruppe affiner „Streckungen“ der Ebene auseinander hervor,die das Dreieck gestattet. „Streckg.“ = richtungserhaltende affine Abb.

29. Bei einer trans. Permugr des Grades p^2 mit einer trans. Ugr vom Typ (p,p) sind die Grade der iired. Bestandteile 1, $f_i = k_i(p-1)$, wenn die Transsysteme von $\mathfrak{G}_i$ die Grade $1, t_i = k_i(p-1)$ haben; dh. bei passender Nummerierung sind die $f_i = t_i$. Die Eigenwerttafel der Matrizen V_i sieht so aus: s. auch 40, S.138

$$\begin{array}{r|lcccc}
\text{Grad } 1 & 1 & k_1(p-1) & k_2(p-1) & \cdots & k_t(p-1) \\
f_1 = k_1(p-1) & 1 & p-k_1 & -k_2 & \cdots & -k_t \\
f_2 = k_2(p-1) & 1 & -k_1 & p-k_2 & \cdots & -k_t \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
f_t = k_t(p-1) & 1 & -k_1 & -k_2 & \cdots & p-k_t
\end{array}$$

Anmerkung: Reduktion verfolgen!

126/127

p^2

30. Frage: Gilt die Aussage $f_i = t_i$ vielleicht stets, wenn die Permgr. $\mathfrak{G}$ eine reg. abelsche Ugr enthält?

31. Seien g, f Sehgeraden. Ein $G \in \mathfrak{G}$ führe l Punkte $\mathfrak{S}_\lambda$ von y nach f über. Dann gilt: $(P \neq 2)$

    (a) $l = k \rightsquigarrow y^G = f$.

    (b) $\left.\begin{array}{l} k \leq \frac{p+1}{2} \\ l = l-1 \end{array}\right\} \rightsquigarrow g^G = f$.

    Bew:

    (a) y bestehe aus allen Pkten der Ebene, von denen aus alle k $\mathfrak{S}_\lambda$ sichtbar sind. „Aussen“ Entspr. f für die $\mathfrak{S}_\lambda^G$.

    (b) Es gibt höchstens $k-1$ Punkte $\notin y$, von denen aus alle $\mathfrak{S}_1$ sichtbar sind. Wenn G kein weiteres $\mathfrak{S}$ nach f bringt, bringt es alle $p-(k-1)$ Pkte von $y - \{\mathfrak{S}_1\}$ in die $\leq k-1$ Aussenpkte von f, [Also $p - (k-1) = k-l$]. Diese liegen auf einer Geraden σ durch ein $\eta_0 \in f$. Da $p-(k-1) \geq 2$, ist σ Sehgerade. Von η_0 aus sieht man also $p-(k-1)+p = p+k-2$ Pkte von $f + f^*$. Also $\eta_0 \in y^G$, denn von einem Aussenpkt g aus sieht man höchstens die $\leq k-1$ Aussenpkte $+k-1$ Pkte von y, also $2k-2$ Pkte, und ist $2k-2 < p+k-2$.

127/128

Also ist η_0 oBdA ains der $\mathfrak{S}_\lambda$, etwa $\eta_0 = \mathfrak{S}_l$. Die Streckungen, die die gemeinsamen Sehzentren von $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_l$ ineinander überführen, lassen also $\eta_0 = \mathfrak{S}_l$ fest, Ord $\leq l-1$, also gibt es nur $\leq l-1$ Sehzentren, dh. Anzahl d Aussenpkte ist $\leq k-2$, also $= k-2$. G führt also die $p-(k-1)$ Pkte von $g - \{\mathfrak{S}_\lambda\}$ über in die $k-2$ Aussenpkte aus f^*, $p-(k-1) \leq k-2$, $p \leq 2k-3$ entgegen $p = 2k-1$.

32. Kurzer Beweis dafür, daß bei $\begin{cases} k = 4 \\ p \geq 7 \end{cases}$ G_0 jede Sehgerade in eine Sehg. überführt.
y hat ≥ 6 Pkte $\neq 0$. Es gibt einen Sehstrahl f durch 0, der ≥ 2 Bilder enthält, mit 0 zusammen also ≥ 3. Nach 31 ist $y^G = f$.

32 a. Frage: Sind die Obergruppen der vollen affinen Gruppe der Grades 2 über GF(p) alle auf Ω_{p^2} 3-tra?

128/129

33. Bei $k = 5$, $p \geq 11$, geht jeder Sehstrahl in Sehstrahl über.
Bew: $p \overset{=}{>} 13$: Dann verteilen sich sie ≥ 12 Bildpkte von $g-0$ auf s Geraden, eine enthält ≥ 3 Bilder, mit 0 zusammen also 4, denn $y^G = f$ nach 31.
Kürzer: 36. $p = 11$: G bringe 3 pkte $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$ von g nach f.

α) Bleiben die die $\mathfrak{S}_i$ bei keiner aff. Abb. von $\mathfrak{G}$ fest, so gibt es höchstens $k-104$ Sehzentren für sie, ebenso für die $\mathfrak{S}_i^G$. Also $(y - \{t_i\})^G \subset$ Sehzentren für $\mathfrak{S}^G$, $p-3 \leq 4$ geht nicht.

β) Bleiben die $\mathfrak{S}_i^G$ bei 3 affinen Abb. fest, si verteilen sich die Sehzentren der $\mathfrak{S}_i^G$ auf ≤ 4 Geraden $\neq \mathfrak{H}$ durch ein $\eta_0 \in \mathfrak{H}$, und es gibt mindestens 8. Liegen 3 davon auf einer Geraden durch η_0, so ist diese das Bild von y (wohl für $l = 4$ schon bekannt, 31). Also liegen je zwei auf einer Geraden durch η_0; also sind das 4 Sehgeraden, von η_0 aus auch, folglich $\eta_0^{G^{-1}} \in y$; da $\eta_0 \neq \mathfrak{S}_i$, liegt Fall $l = 4$ vor.

γ) Also bleiben die $\mathfrak{S}_i$ bei zwei aff. Abb. fest, und man kann dieses Tripel auf 8 Arten affin

129/130

in die 4 Schnitte ζ des Sterns durch ein $\eta* \notin y$ mit y einbetten; jedes Bildtripel gestattet t Autom, besteht also aus zwei Pkten mit Mittelpkt.
OBdA sind 3 Pkte ζ_ν gleich $0, 1, -1\zeta_4 \pm \zeta$.
Dann ist wegen $(0\ 1\ \zeta)$ $\zeta = 2$ oder $= \frac{1}{2}$ und " $(-1\ 0\ \zeta)$ $\zeta = -2$ oder $-\frac{1}{2}$ aber $2, \frac{1}{2} \neq -2, -\frac{1}{2}$ (mod 11). Wid!

34. Schränkt man die $k(p-1)$ Funktionen, die auf jeweils einer der $p-1$ Parallelen (eigentlicher) zu einem Sehstrahl 1, sonst 0 sind, auf die $k(p-1)$ vom Zentrum verschiedenen Pkte des Sehsterns ein, so haben die Fuktionswerte

bei natürlicher Nummerierung der Pkte u. Funktionen die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & D(m_2-m_1) & D(m_3-m_1) & \cdots & D(m_k-m_1) \\ D(m_1-m_2) & 0 & D(m_3-m_2) & \cdots & D(m_k-m_2) \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \end{vmatrix}$$

130/131

Dabei bedeutet $D(a)$ die Permutationsmatrix, für die bei $a \not\equiv 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p-1 \end{pmatrix} \cdot a \equiv D(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p-1 \end{pmatrix} \mod p$$

und $D(0) = 0$.
Wenn $\Delta \neq 0$, kann man den transitiven Konstituenten von $\mathfrak{G}_2$, der den Grad $k(p-1)$ hat, zu einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{G}$ erweitern. Nunist $\Delta = 0$, wenn $2 \nmid k$, da ür einen “primitiven´´ EW von den $D(\alpha)$ die Det schiefsymmetrisch, also $= 0$ ausfällt. Ferner ist bei $k = 4$

$$\Delta = 0 \longleftrightarrow p \equiv 1 \pmod 3$$

Denn Rechng ergibt

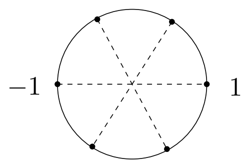
$$\Delta = \det\big((\eta, 1)^2 - 2D(\eta - 1) \cdots (0\ 1)\big)$$

mit $(a\ b) = D(a-b) - D(a) + D(b)$, und passendem η. Ist nun $\eta = \zeta^l$, $\eta - 1 \equiv \zeta^f \pmod p$, ζ Primitivwurzel, und $D(\zeta) = Z$, so ist $(\eta\ 1) = Z^f - Z^l + E$, $D(\eta - 1) = Z^f$, $(0\ 1) = E + Z^{\frac{p-1}{2}}$. Es wird also $\Delta = 0$ genau wenn für einen passenden EW ε von Z gilt: $(\varepsilon^f - \varepsilon^l + 1)^2 = \varepsilon^f(1 + \varepsilon^{\frac{p-1}{2}})^2$; dh.

131/132

α) Wenn $\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = -1$: $\Delta = 0 \leftrightarrow (\varepsilon^f - \varepsilon^l + 1)^2 = 0$, $\varepsilon^f - \varepsilon^l + 1 = 0$

Also ε^f primitive 3te EWurzel.
ε^l “ 6te “.
Daher $p \equiv 1 \pmod 3$. Umgekehrt ist bei $p \equiv 1 \pmod 3$ ε primitiv, $f = \frac{p-1}{3}$, $e = \frac{p-1}{6}$ wählbar, gibt $\Delta = 0$.



(a) Wenn $\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = +1$: $\Delta = 0 \leftrightarrow (\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1) = \varepsilon^f \cdot 4$

$$\varepsilon^f - \varepsilon^e + 1 = -\varepsilon^{\frac{f}{2}} \cdot 2$$

$$(\varepsilon^{\frac{f}{2}} + 1)^2 = \varepsilon^e$$

$$\varepsilon^{\frac{f}{2}} - \varepsilon^{\frac{e}{2}} + 1 = 0$$

Dann $\varepsilon^{\frac{f}{2}}$ primitive 3. EW, also $p \equiv 1 \pmod 3$.
Umgekehrt kann man $\varepsilon =$ (primitive $(p-1)$-te EW$)^2$ nehmen, e und f wie oben.
Also bei $k = 4$, $p \equiv 1 \pmod 3$ ist $\Delta = 0$
„ , $p \equiv 1 \pmod 3$ „ $\Delta \neq 0$.

NB: Übergruppen vom Grad p^2 siehe vii[67]

132/133

p^2

35. Wenn aber k gerade und $p = 2^\alpha + 1$, so ist $\Delta \neq 0$. Denn dann ist für jede $(p-1)$-te Einh.wu. ε $\varepsilon \equiv 1 \pmod q$, $q \mid 2$, also

$$\Delta_\varepsilon \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \end{pmatrix} \right| = (k-1)(-1)^{k-1} \not\equiv 0 \pmod q$$

$\rightsquigarrow \Delta = \prod_\varepsilon \Delta_\varepsilon \neq 0$. Dagegen bei k ungerade ist stets $\Delta = 0$, da ein $\Delta_\varepsilon = 0$ (ε primitiv)

36. Bei $k = 5$, $p = 1$, lässt $G \in g$ von jeder Geraden g mindestens 4 Pkte kollinear.
Bew: Ann: ≤ 3. Von den $11 \cdot \frac{10}{2} = 55$ Paaren (γ^G, η^G) mit $\gamma, \eta \in y$ müssen $\geq \frac{55}{5} = 11$ auf die gleiche der 5 Sehrichtungen fallen. Gibt es in den zugehörigen Parallelenschar x_i Geraden mit jeweils i Bildpunkten von g, so ist

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$x_2 + 3x_3 \geq 11 \quad \leftarrow \text{Anzahl der Paare dieser Richtung}$$

also $x_1 + x_2 \leq 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $3x_3 = 11$, geht nicht. Ebenso:

37. Bei $k < \frac{p+1}{2}$ lässt G von jeder Geraden g mindestens 4 Pkte kollinear. Denn sonst ist $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = p$, $x_2 + 3x_3 \geq \frac{p(p-1)}{2k}$, $1 \leq x_1 + x_2 \leq p - \frac{p(p-1)}{2k}$, $2k \geq p$.

133/134

p^2

38. Bei $k = 5$, $p \geq 11$ ist G affin.
Bew: Nach 37 führ G von jeder Gerade y 4 Pkte in kollineare über. Diese haben höchstens 4 Sehzentren, also gehen von den (≥ 7) anderen Pkten von y mindestens 3 noch in die Gerade durch die 4 koll. Bildpkte über, insgesamt also 7. Deren gemeinsame Sehzentren sind nur die betr. Geraden.

39. Bei $k = 6$, $p \geq 11$ lässt G von jeder Geraden g vier Punkte kollinear.
$p = 11$: Sonst enthalten die 6 Parallelenscharen, nach fallender Anzahl der

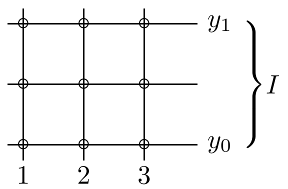
Bildpaare (aus y^G) geordnet, die folgenden Parallelenzahlen: (55 Paare sinds insgesamt)

		Paare	Dreiergeraden	Zweiergeraden
$\frac{55}{6}$	i:	10	$\boxed{3}$	1
$\frac{45}{4}$	ii	≥ 9	3	0 od 1
$\frac{35}{4}$	iii	≥ 9	3	0 od 1
$\frac{35}{3}$	iv	≥ 9	3	0 od 1
$\frac{15}{2}$	v	≥ 8		
$\frac{5}{1}$	vi	≥ 5		

134/135

p^2

Nun ist der Schnitt von zwei Dreiergeraden stets in g^G, da nur von g aus 6 Pkte von y sichtbar sind. Also je zwei Dreierbündel schneiden sich in 9 Pkten, und zwar gehen alle Dreierbündel II, III, IV, durch die 9 Pkte in $\square$.



Projiziert man y_0 mittels II auf g_1 und mittels II, III, IV, zurück auf g_0, so erleidet y_0 <u>drei</u> affine Abbildgen, die $1, 2, 3$ nur untereinander vertauschen: Gibt $3 \mid p-1$, $3 \mid 10$, geht nicht.
$p \geq 13$: (37)

40. Bei $\begin{cases} k = 6 \\ p \geq 11 \end{cases}$ ist $\mathfrak{G}$ affin.

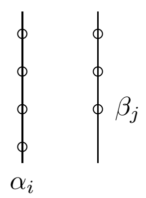
Bew:

135/136

$k = 6 \qquad p^2$

(a) Lässt G 5 Pkte von g kollinear, so y^G gerade nach 31.

(b) G lasse nur 4 Pkte von y kollinear (nach 39. In einer Parallelenschar möge es zwei Geraden geben, von denen eine 4 Bildpkte α_i von g enthält, die andere ≥ 3: β_j.



Von den 6 Geraden $\alpha_1\beta_j$, $\alpha \sim \beta_\sigma$ müssen zwei parallel sein (da es nur 5 nichtsenkrechte Sehrichtungen gibt), also kommt die Koordinatendifferenz $\alpha_1 - \alpha_2$ unter den $\beta_j - \beta_l$ vor: *nachträglich eingefügt: [* ebenso jede Diff. $\beta_i - \beta_j$ unter $\alpha_i - \alpha_j$ $(i, j \neq 1$ & $5)$ *]* Es gibt also nur ≤ 6 Differenzen $\alpha_i - \alpha_j$, da es ≤ 6 Dfferenzen $\beta_i - \beta_j$ gibt.

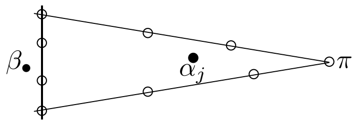
[Nun gibt es nur ein Tripel (bis auf Traslation u. Spiegelung), dessen Differenzen unter 6 gegebenen Werten enthalten sind [zum Bew. nimm ein Tripel als $-1, 1, a$ an]] Bemerkung:unnötig.

Dann kommt unter den 12 Differenzen entweder eine (etwa 1) dreimal vor, oder jede zweimal. Im ersten Fall gibts nur 0 1 2 3, im zweiten 0 1 a $a+1$ mit $a+1 = \pm 1, \pm a, \pm(a-1)$ und das gibt nur -2 -1 0 1 oder $\frac{1}{2}$ $0\frac{1}{2}$ 1. In jedem Fall also bis auf Affinität 0 1 2 3. Daher gibts unter den β_i <u>nur</u> $\pm 1, \pm 2$ als Diff (wegen $a_j = 0\ 1\ 2$), also auch ± 3 (wegen $\alpha_j = 0, 1, 3$), geht nicht.

(c) Weiter

136/137

(c) gebe es in y^G <u>keinen</u> Vierer mit parallelem Dreier. Dann gibt es ausserhalb einen Vierer β_ν noch $p-4 \geq 7$, einen davon π isoliert zu seiner $\|$ zum Vierer; die $p-5 \geq 6$ Geraden $\pi\alpha_j$



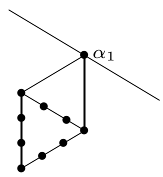
verteilen sich auf 4 Richtgen $\pi\beta_\nu$, zwei sind doppelt besetzt: Gibt zwei neue Vierer. Keine ist 3-fach besetzt, also ist $p-5 \leq 8$, $p = 11$ oder 13.

α) $p = 13$: Nun gibt es noch mindestens $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_4$ ausserhalb der Dreiecksseiten. Das gibt $\overline{\alpha_i\alpha_j}\|$ zu einer Dreiecksseite, dann gibt es $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ auf einer Geraden, gegen Vor. b.

β) $p = 11$: Seine Parallele zu α_1, die noch einen Pkt enth., enth. <u>entweder</u> **???** 2, nämlich die Schnittpkte mit den nicht $\|$ Dreiecksseiten: geht nicht nach Vor. c); oder sie geht durch die der ersten Seite gegenüberliegende Ecke.

α) Wenn α_1 auf keiner $\|$ durch eine Ecke liegt, dann sieht man auf den 3 seitlichen Geraden durch $\alpha_1 \geq 10$ weitere Pkte $\neq \alpha_1$, also auf einer 4, insgesamt <u>mit</u> α_1 5, geht nicht.

β) Wenn α_1 auf zwei $\|$ durch Ecken liegt:



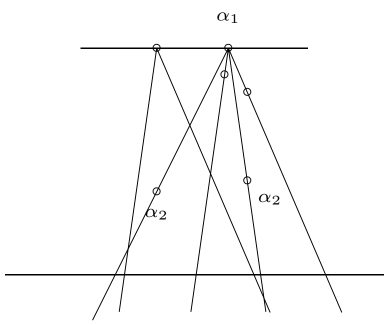
Die 8 übrigen liegen auf 3 Geraden durch α_1, von diesen sind also zwei 3-fach besetzt, müssten beide α_2 enthalten, geht nicht.

138/139

p^2

Zwei von den drei übrigen Geraden durch α_1 enthalten jede 0 oder 3 Pkte $\neq \alpha_1$, da sie alle 3 Dreieckseiten schneiden. Die drittqe enthält dann nur 2, denn Gesamtzahl = 11. Alle diese 8 Pkte liegen also auf den Dreiecksseiten, und α_2 sollte dies <u>nicht</u> tun:

γ) Wenn α_1 auf genau einer Parallelen durch eine Ecke liegt, liegen auf dieser $\|$ 2, auf den beiden anderen Seitenparallelen durch α_1 je 0, also auf den 3 weiteren Sehgeraden durch α_1 zusammen 9, also je 3; hiernach liegt α_2 auf beiden Geraden, die α_1 mit einer der beiden unbenutzten Ecken verbinden, gäbe $\alpha_2 = \alpha_1$.



Lit. zu p^2 auf S.158

40. Die Elemente der p-Sylowgr haben folgende Charaktere:

	E	$P \in \mathfrak{K}$	$P \in \mathfrak{L}\ldots$	
Grad $f_1 =$	1	1	1	1
$f_2 = k(p-1)$	$k(p-1)$	$p-k$	$-k$	$-k$
$f_3 = l(p-1)$	$l(p-1)$	$-l$	$p-l$	$-l$
$m(p-1)$	$m(p-1)$	$-m$	$-m$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	1	Anzahl $k(p-1)$	$l(p-1)$	$\ldots$

40a. Es genügt nachzuweisen, dass eine ganze Klasse konjugierter Elemente affin ist: Die p-Sylowgr des von ihr erzeugten Normalteilers ist dann normal ist g, g affin.

138/139

p^2

41.* Folglich ist, wenn die Sylowgr. elementefremd und $k > 2$, $k^2(p-1)^2 + s\left[k(p-1)\cdot(p-k)^2 + (p+1-k)(p-1)k^2\right] \le \sum|\chi_2|^2 = g$, $k-1 \ge n_{\sigma 1} = \frac{g}{sp^2(p-1)} \ge \frac{k^2}{sp}(1-\frac{1}{p}) + k(n-\frac{k}{p})^2 + (p+1-k)\frac{k^2}{p^2}$

Ord der affinen Gr in $\mathfrak{G}$, die zwei Pkte $0, 1$ fest lässt
$*$, da man von 1 aus nur $k-1$ von 0 verschiedene
Pkte <u>der</u> Geraden g durch 0 sehen kann die bei $\mathfrak{N}_{01}$
ausser $\overline{0\ 1}$ noch fest bleibt. Es ist

$$\mathfrak{N}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

in passenden Koordin.. $\mathfrak{N}_{01}$ ist halbregulär auf g.

Also z.B. $k-1 \ge n_{01} > k - \frac{2k^2}{p} + (p+1) = \frac{k^2}{p^2} = k - \frac{k^2}{p} + \frac{k^2}{p^2}$, also $\frac{k^2}{p} - \frac{k^2}{p^2} - 1 > 0$, $k^2 > \frac{p}{1-\frac{1}{p}}$

$*$ Achtung: Hier ist vorausgesetzt, daß es ein $P \in \mathfrak{P}$ gibt, das unter $\mathcal{N}s\mathfrak{P}$ nur in Potenzen von sich übergeht. Dh. $\mathcal{N}s\mathfrak{P}$ reduzibel, abelsch über $\mathfrak{P}$.

42.* Ebenso ist, wenn $2 < k \leq l$, $(k^2 + l^2)g = \sum_g |l_{\chi_2} - k_{\chi_3}|^2 \geq s \sum_{\mathfrak{P}} = s\left[k(p-1)l^2p^2 + l(p-1)k^2p^2\right]$, $k - 1 \geq n_{01}^* = \frac{g}{p^2(p-1)s} \geq \frac{kl^2+lk^2}{l^2+k^2} \geq k$. Wegen $k < 2$ sieht man von 1 aus noch einen Pkt $\neq 0$ von g, also sieht man n_{01} Pkte $\neq 0$, also $n_{01} \leq k - 1$. Fortsetzg XI 241

139/140

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ nilpotent, minimal unauflösbar.

Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1 \times \ldots$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2 \times \ldots$ mit $\mathfrak{P}_i$ zu p, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ist Sylwogr $\mathfrak{G}$.

a) Es ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = E$. Bew: viii90

1. Jeder eig. NT $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ macht $\mathfrak{A}\mathfrak{N} = \mathfrak{B}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$.

2. Für jede faktorisierte echte Ugr $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}^*$ aufl., $\mathfrak{P}^* \vee \mathfrak{Q}^* \vee \mathfrak{R}^* \vee \ldots$ Bew: [31] Satz 4.

2a. $\{\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_2\}$ ist entweder $= \mathfrak{G}$ oder pq-Gruppe

3. Jede Obergr. $\neq \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ ist fremd zu Ztr $\mathfrak{B}$ (enth also keinen NT von $\mathfrak{B}$). Sonst $\mathfrak{A} < \mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{H}^G = \bigcap \mathfrak{H}^B \neq E$ & $\mathfrak{A}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$. Wid. zu 0

4. Für jede echte faktorisierte Ugr $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{G}$ ist nach 2 auch $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2$; $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{R}_1 \vee \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2 \times \mathfrak{R}_2, \ldots$
   Bew da $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2| = |\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$, ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$.

5. Um weiter zu kommen, sollte man vielleicht im Fall, dass $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|) \neq 1$ ist, mehr behaupten als blosse Auflösbarkeit von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Dann hätte man stärkere Inklusionshilfmittel. Man müsste diese Untersuchung, was man behaupten kann, eröffnen mit dem Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_2$; dann $(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2)$

140/141

1. $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q})\mathfrak{P}_2$ besitzt, wenn $\mathfrak{P}_1 \neq E$, stets einen Normalteiler der Ord p^r. genauer: 2
   Bew: Sonst sei $\mathfrak{N}$ der maximale $\mathfrak{Q}$-NT. Dann ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{Q}$. Also $\mathfrak{P}_1 < \mathrm{Zs}\mathfrak{N}$; Ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ min NT von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}^* \times \mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}^* \lhd \mathfrak{G}$. Genauer:

2. $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q})\mathfrak{P}_2 \rightsquigarrow \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{P}} < \mathfrak{P}$.

3. In $(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2)$ ist $\mathfrak{G}^* = \mathcal{N}s\mathfrak{P} \cap \mathcal{N}s\mathfrak{Q}$ nilpotent. Denn $\mathcal{N}s\mathfrak{P}$ ist faktorisiert, ebenso $\mathcal{N}s\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{P}^*\mathfrak{Q}^*$, $\mathfrak{P}* < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}^* < \mathfrak{Q}$, $[\mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*] < \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} = E$. [$\mathfrak{G}^*$ ist ein Sylow-System-Normalisator.]
   Fortsetzung von S.140 4:

4. Ist $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{P}$, so ist $\mathcal{N}s\mathfrak{Z}$ faktorisiert.
   Bew: $\mathfrak{Z}$ ist eine im Zentrum von $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}^{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{Z}^{\mathfrak{B}}$ liegende Sylowgr von $\mathfrak{G}_1$, also einzig in $\mathfrak{H}$. Nach VII ist $\mathcal{N}s\mathfrak{Z}$ faktorisiert. [Es ist $\mathfrak{H} < \mathrm{Zs}\mathfrak{P}_1$ da $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{A}} < \mathrm{Zs}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{B}} < \mathrm{Zs}\mathfrak{P}_2$].

141/142

Forts. von S. 140/1

1. $E \neq Z_1 \in \mathfrak{A}$, $E \neq Z_2 \in \mathfrak{B} \rightsquigarrow [Z_1, Z_2] \neq E$. Sonst zentral- $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{A}, Z_2\}$ das Z_1.

2. $\mathfrak{Y} = \mathrm{Zs}\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{Y}^{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{Y}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Y}$.
   dann zentr. $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$

3. $\mathcal{N}s\mathrm{Zs}\mathfrak{P}$ ist faktorisiert. Bew. 2.

4. $\mathfrak{Z}_i = \mathrm{Ztr}\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{U} = \mathrm{Zs}\{\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2\} \rightsquigarrow \{\mathfrak{A}, \mathfrak{U}\} \cap \{\mathfrak{B}, \mathfrak{U}\} = \mathfrak{U}$ ist fakt. $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{U}\}$ zentr $\mathfrak{Z}_1$, $\{\mathfrak{B}\mathfrak{U}\}$ zentr $\mathfrak{Z}_2$.

5. $\mathfrak{B} \cap \mathrm{Zs}\mathfrak{A} = E$ (wenn $|\mathfrak{B}| \neq p^2$).
   Untersuchen: Sonderfall $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{R})$. Hier: $\{\mathfrak{P}, Z_2\} = \mathfrak{G}$ wenn $Z \in \mathrm{Ztr}\mathfrak{Q}_2$.

142/143

Faktorisierung

1. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{Z}_2 = \ldots$. Dann ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2$ abelsch.
   Bew:
   $\mathfrak{Z}_1$ abelsch, denn $Z = Z_1Z_2$, $Y = Y_1Y_2 \in \mathfrak{Z} \rightsquigarrow ZY = Z_1Y_1Y_2Z_2 \rightsquigarrow (ZY)_1 = Z_1Y_1 \rightsquigarrow \mathfrak{Z}_1$ abelsch. Ferner $ZY = Z_1Y_1Y_2Z_2 = Z_1Y_1Z_2Y_2$ und $= Z_1Z_2Y_1Y_2$, also $Z_2 \cup Y_1$.
   Bew: $\overline{\mathfrak{Z}}' \leq (\mathfrak{Z}\mathfrak{G}_2)' = \mathfrak{G}_2' \leq \mathfrak{G}_2$; ebenso $\leq \mathfrak{G}_1$; $= 1$.

2. Aufgabe: Gruppen $\mathfrak{G}$ der Ord $p^\alpha q^\beta$ untersuchen, allg. Struktur, reg. Faktorisierungen $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1)(\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2)$, ob z.B. $\mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{Q}_2$ ist. Die minimalen Gegenbeispiele gegen diese oder jene Vermutung genau aufstellen. F

3. Aufgabe: Die Gruppen $\mathfrak{G}$ kennzeichnen, die eine Klasse $\mathfrak{K}$ konj. Elemente der Ord q mit $|K| = p^\alpha$ enthalten. $\alpha = 1$?

143/144

Saubere Faktorisierung von p-Gruppen

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = E$, $|\mathfrak{G}| = p^{\cdot\cdot}$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{G}$ minimal ($\downarrow$ Bezgl. Untergr. u. Fak torgr.) $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2$ ($\mathfrak{Z}_i$ wie auf S. 143). Vermutung: „Zentrum einer sauber fakt. p-Gr ist fakt.“ ist falsch.

1. Es ist nicht $\mathfrak{A}\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}$ <u>und</u> $\mathfrak{B}\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}$. Sonst $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{B}\mathfrak{Z} = \mathfrak{G} = \mathfrak{Z}$ abelsch nach 143_1.

2. Es ist nicht $\mathfrak{A}\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{G}$ <u>und</u> $\mathfrak{B}\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{G}$. Sonst $\mathfrak{A}\mathfrak{Z} < \mathfrak{G}^* \lhd_p \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} < {}^*\mathfrak{G} \lhd_p \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Z} = \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^* \cap \mathrm{Ztr}^*\mathfrak{G}$.
   Beide Zentren $\nwarrow \nearrow$ zerfallen nach IndVor, also auch $\mathfrak{Z}$.

3. Weiter sei etwa $\mathfrak{A}\mathfrak{Z} < \mathfrak{G}^* \lhd_p \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$, also <u>$\mathfrak{A}$ abelsch</u>.

4. $\mathrm{Zs}\mathfrak{G}^* = \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^*$. Denn $H \in \mathrm{Zs}\mathfrak{G}^*$, $H \not\ni \mathfrak{G}^* \rightsquigarrow H \in \mathrm{Zs}\{\mathfrak{G}^*, H\} = \mathfrak{Z} < \mathfrak{G}^*$.

5. Ist $B \in \mathfrak{B}$, $B \notin \mathfrak{G}^*$, so ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^* \cap \mathcal{N} \int B$, wo $\mathfrak{Z}^* = \mathrm{Ztr}\mathfrak{G}^*$- Den $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}^*\{B\}$.

6. Ist $G_0 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{G}^*$, so ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^* \cap \mathcal{N}sG_0$. Denn $= \mathrm{Zs}\mathfrak{G}^* \cap \mathcal{N}sG_0$.

144/145

7. Die weitere Betrachtung ergibt folgenden Bau von $\mathfrak{G}$: Man nehme eine nichtablesche Gr A, B der Ord p^3 vom Exp p, multipl. mit zykl. Gr $\{Z\}$ der Ord $p^{\alpha+1}$ $(\alpha \geq 1)$ direkt und identifiziere $\mathrm{Ztr}\{A, B\}$ mir $\{Z^{p^\alpha}\}$. Also def. Relationen: $A^p = B^p = Z^{p^{\alpha+1}} = E$, $[AZ] = [BZ] = 1$, $[AB] = Z^{p^\alpha}$. Eine solche Gr. steckt also als Teil in $\mathfrak{G}$.
   Diese Grupen besitzen tatsächlich eine Faktorisierung, in der das Zentrum <u>nicht</u> faktorisiert ist, nämlich $\mathfrak{A} = \{A\}$, $\mathfrak{B} = \{B, AZ\}$. Wegen $\mathfrak{G}' = \{Z^{p^\alpha} < \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{G}$, ferner $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \{A, B, AZ\}$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Und $\mathrm{Ztr}\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}$ ist <u>zyklisch,</u> $= \{Z\}$, und $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{A} = E$, $\mathfrak{Z} \not< \mathfrak{B}$, also $\mathfrak{Z}$ nicht faktorisiert.

   Man kann also bestenfalls noch hoffen, dass bei jeder sauberen Faktorisierung einer p-Gr <u>mindestens ein Faktor</u> ein Zentrumselement enthält. Versuch:

8. Wenn in einer p-Gr $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathrm{Ztr}\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}$ gibt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z} = 1$, so ist $\mathrm{Zs}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 1$. Denn $B \in \mathrm{Zs}\mathfrak{A} \rightsquigarrow Z \in B^{\mathfrak{G}} = B^{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}$.

145/146

Verhalten von Indizes beim Durchschnitt u Kompos.
"Wirkung von Erzeugnis- und Durchschnittsbildung auf Gruppen-Indizes"

1. $\mathfrak{B} < \mathfrak{A} \rightsquigarrow |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}| \leq |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. OBdA $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}$, $|\mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}| \leq |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$ klar da $\mathfrak{B}C = \mathfrak{B}C' \leftrightarrow \mathfrak{D}C = \mathfrak{D}C'$, wenn $\mathfrak{D} = (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$.

2. $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $|\mathfrak{A} : \mathfrak{B}| = i > 1$, $|\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}| = k > 1 \rightsquigarrow k \geq p$, wo p der kleinste Primteiler von i.
   Bew: Nach 1 ist $j = |\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})| = |\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}) : \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})| \leq |\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}| = k^*$ und $k = |\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})| \mid |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ wegen $\mathfrak{B} < \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})$. Ist nun $k > 1$, so $\mathfrak{A} \cap |\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}| \neq \mathfrak{A}$, also $j \neq 1$ Teiler von i, und nach $*$ ist $j \leq k$.

3. Unter der Vorauss. von 2 kann nicht mehr behauptet werden.
   Bew: Seien geg. $i, k \geq$ min PT von i, $i, k > 1$. Sei $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der 2 symmetr Gruppen $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ auf bezw den Ziffern $a_1, \ldots, a_k$ und b_1. Sei $\mathfrak{A}_2 < \mathfrak{T}$ beliebig mit $|\mathfrak{A}_2| = \frac{i}{p}$.

146/147

   Sei $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_p) \leftarrow$ symmetrisch.
   Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}(a_2, \ldots, a_p)$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}(a_p, a_p p+1, \ldots, a_k) \times \mathfrak{T}$ ($\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = E$, wenn $p = k$). Dann $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{T} \times \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k)$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{T} \times \mathfrak{S}(a_2, \ldots, a_k)$, $|\mathfrak{B} : \mathfrak{A}| = p|\mathfrak{A}_2| = i$, $|\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}| = k$.

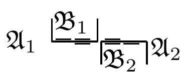
3a) $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1 \curlyvee \mathfrak{C} \rightsquigarrow |\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}| \mid |\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{B}_1|$. Denn OBdA $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}_1$, denn $|\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}| = |\mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{C}| = \frac{|\mathfrak{C}||\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{C}||\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|} = \frac{|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{B}_1|}$.

4. Bessere Anordnung:

   (a) Sind (i_1, k_1) und (i_2, k_2) "möglich´´, so auch $(i_1 i_2, k_1 k_2)$.

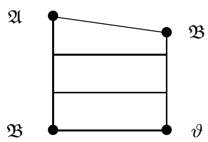
   (b) $(\frac{i}{p}, 1)$ und $(1, k)$ mit $k \geq p$ *Rest durchgestrichen*
   Überhaupt mit Durchschnitt beginnen.

5. Falsch ist die aus 31 nahegelegte Vermutung: $\mathfrak{B}_i < \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_1 \curlyvee \mathfrak{B}_2 \rightsquigarrow \rho = |\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2| \mid |\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{B}_1| \cdot \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_2| = \sigma$. Gegenbeispiel in der $\mathfrak{S}_7$: $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{S}(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{S}(3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{S}(1\ 2\ 3)$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{S}(5\ 6\ 7)$.

   Hier $\rho = 3!$, $\sigma = (5 \cdot 4)^2$. Einfacher: 

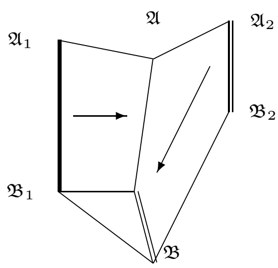
   in der $\mathfrak{S}_4$: $\rho = 2$, $\sigma = 3^2$.

6. Es gilt: $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} < \mathfrak{G} \rightsquigarrow |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} : \underbrace{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{C}}_{???}| \Big| |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$.



   Bew: OBdA $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}$. Von Normalkette $\mathfrak{A} \cdots \mathfrak{B}$ wird jeder Index in Teiler abgebildet.

7. Folge: $\mathfrak{B}_i \lhd \lhd \mathfrak{A}_i \rightsquigarrow |\overbrace{\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{A}} : \overbrace{\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2}^{\mathfrak{B}}| \mid |\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{B}_1||\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_2|$.
   Gilt auch für $i = 1, 2, \ldots, k$. Dann $\rightsquigarrow \mathfrak{B} : 1 \cap \mathfrak{B}_2 \lhd$
   $\lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \mathfrak{A}_2$. Bew:
   Fortsetzg S.155 $\downarrow$ Komp.Faktorgr. unters.!



147/148
$\lhd\lhd$

1. Sind alle Sylowgruppen $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ von $\mathfrak{G}$ abelsch ($s =$ Anz. d. Primfakt von g), so ist $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} \leq s$ für jedes $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Dabei bedeutet $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ die Schrittzahl der Normenkette von $\mathfrak{A}$.
   Bew: Mit $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_1$ gilt bekanntlich: $\overline{\mathfrak{A}}_\rho^{\overline{\mathfrak{P}}_\rho} = \overline{\mathfrak{A}}_\rho$, $\overline{\mathfrak{A}}_\rho =$ nachinv. Hülle von $\mathfrak{A}_\rho$
   (a) Daher ist mit $\mathfrak{D} = \bigcap \overline{\mathfrak{P}_1} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{D}$.
   (b) <u>Wenn</u> der Durchschnitt von je k verschiedenen $\overline{\mathfrak{P}}_\rho = E$ ist, <u>dann</u> liegt der Durchschnitt von je $k-1$ verschiedenen $\overline{\mathfrak{P}}_\rho$ in $\mathcal{N}s\mathfrak{A}$.
   Bew: $\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{P}}_1 \cap \cdots \cap \overline{\mathfrak{P}}_{k-1} < \mathcal{N}s\overline{\mathfrak{A}}_\kappa$, $k = 1, \dots, k-1$; und für $\kappa \geq k$ ist $\overline{\mathfrak{A}}_\kappa < \overline{\mathfrak{P}}_\kappa$, und $[\overline{\mathfrak{P}}_\kappa, \mathfrak{D}] = E$ wegen $\overline{\mathfrak{P}}_\rho \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D} \cap \overline{\mathfrak{P}}_\kappa = E$: Also $[\overline{\mathfrak{A}}_\kappa, \mathfrak{D}] = E$ $(\kappa \geq k)$.
   (c) Es bedeute $\mathfrak{G}^{(m)}$ das Erzeugnis der Durchschnitte von je m der $\overline{\mathfrak{P}}_1, \dots, \overline{\mathfrak{P}}_s$. Dann ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(s)}\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(s-1)}\mathfrak{A} \lhd \cdots \lhd \mathfrak{G}^{(1)}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ für jedes $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$.
   Bew: $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(s)}\mathfrak{A}$ ist a); $\mathfrak{G}^{(k)}\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}^{(k-1)}\mathfrak{A}$ ist b).

   Bemerkenswert, dass die $\mathfrak{G}^{(\sigma)}$ einheitlich für alle $\mathfrak{A}$ gelten! Gibt es so etwas immer? Ist $\bigcap\limits_{\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}} \mathcal{N}s\mathfrak{A} \neq E$? Ja! *Verweis auf nächste Seite*

148/149

<u>Haupt-Untergruppen</u> ("Haupt-Normalisator" <u>von</u> $\mathfrak{G}$?)

1. Def: $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) = \bigcap\limits_{\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}} \mathcal{N}s\mathfrak{A} \quad \downarrow$

2. $\mathfrak{A}$ min. nachinv., zusammengesetzte Ord $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{H}$. Denn $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ einfach.

3. $\mathfrak{P}_0 \lhd \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{P}_0| = p^\alpha$, α maximal, $\mathfrak{P}$ p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}_0 \cap \mathrm{Ztr}\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{Z} < \mathfrak{H}$.
   Bew: Sei $\mathfrak{A}$ einköpfig $\lhd \lhd \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{A}$ px-köpfig, so $\mathfrak{Z} < \mathrm{Ztr}\mathfrak{P} < \mathcal{N}s\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}$ p'-köpfig, so $\mathfrak{Z} < \mathfrak{P}_0 < \mathcal{N}s\mathfrak{A}$.

4. $\mathfrak{G} \neq E \rightsquigarrow \mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \neq E$.
   Bew: $\mathfrak{G}$ besitzt min nachinv. Ugr $\mathfrak{C}$: entweder $|\mathfrak{C}|$ zusammengesetzt, dann 2). Oder $|\mathfrak{C}|$ Primzahl, dann 3).
   Gilt wohl schon wenn $j(\mathfrak{G}E) < \infty$, aber $|\mathfrak{G}| = \infty$.

5. Die aufsteigende Haupt-Normalisatoren-Reihe
   $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_{i+1} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_i)$ fällt bei nilp. Gr. Verallgem. d. Zentralreihe auf beliebiges endl. $\mathfrak{G}'$.
   $*$ Nein! $|\mathfrak{G}| = p^3$, Typ (p^2, p), nicht abelsch, Hier $\mathfrak{H} =$ Gruppe der Elemente der Ord p, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$!

149/150

$\lhd\lhd$
Noch Hauptgruppe.

1. $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{H} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

2. Frage: Ist die Länge h der aufsteig. Hauptnorm-Reihe $E = \mathfrak{H}_0$ gleich dem maximalen $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} \leq h$? Ist sie = d Lge der absteig. *[* siehe 4 *]*? Klar ist: $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{H}_1 \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{H}_2 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{H}_h = \mathfrak{G}$, also $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} \leq h$.

3. $\mathfrak{H}$ ist die Max Ugr von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow [\mathfrak{A}, \mathfrak{H}] < \mathfrak{A}$.

4. Eine absteigende Haupt-Norm-Reihe scheint schwer zu definieren. Wenn in $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ jede nachinv Ugr inv ist, so braucht das nicht in $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ einzutreten. Beispiel: $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_3 \times \{W\}$, $W^3 = E$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B} = \{W\}$.

5. Der nilpotente Teil $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ $(= \mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ hat die Eigenschaft: $E \neq \mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ $\rightsquigarrow [\mathfrak{A}, \mathfrak{F}] \lneqq \mathfrak{A}$. Denn $[\ ] < \mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$; wenn $= \mathfrak{A}$, so $\mathfrak{A} < \mathfrak{F}$, dann $[\mathfrak{F}, \mathfrak{A}] \neq \mathfrak{A}$.

6. Das $\mathfrak{Z}$ von 149_3 hat sogar die Eig: $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} \rightsquigarrow [[\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}]\mathfrak{Z}] = E$.

7. Der <u>ungerade</u> Teil von $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ ist abelsch, da hamiltonsch.

8. Frage: Führen Hauptgr. zu einem Abbrechen der Autom.-gr-turms?

150/151

$\lhd\lhd$

Noch Hauptgruppen.

1. Def: $\mathfrak{H}^\rho = \bigcap \mathcal{N}s\mathfrak{A}$ für die $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} \leq \rho + 1$.

2. Es ist $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{G} \lhd \mathfrak{H}^1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{H}^{a-1} = \mathfrak{H} \gneqq E$, $a = \max \binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$.

3. $\binom{\mathfrak{H}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} \leq \binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} - \rho$. Bew: $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} = \alpha$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\alpha \lhd \mathfrak{A}_{\alpha-1} \lhd \cdots \lhd \mathfrak{A}_{\rho+1} \lhd \mathfrak{A}_\rho \lhd \cdots \lhd \mathfrak{A}_S$ $(\mathfrak{A}_S = \mathfrak{G}) \rightsquigarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\alpha \lhd \mathfrak{A}_{\alpha+1} \lhd \cdots \lhd \mathfrak{A}_{\rho+1} \lhd \mathfrak{H}^\rho \mathfrak{A}_{\rho+1}$

   Frage: Haben im Fall $\Phi\mathfrak{G} = 1$ die min. subn. Ugrn. von $\mathfrak{G}$ besondere Normalisatoreigenschaften?

4. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \rightsquigarrow (\underline{\mathcal{N}s\mathfrak{B} \text{ in } \mathfrak{A}}) \neq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. In diesem Sinn ist die Vertauschbarkeit bei nachinv. Ugr nahe $\lhd$.

5. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \mathcal{N}s\mathfrak{A}$. Hiermit folgt 6: [Bew 5 $\leftarrow$: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \mathcal{N}s\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}}$]

6. Sei $\mathfrak{p}$ ein "Projektion´´, dh. $= \mathfrak{P} \cap \mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{P}$ Syl, $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$. Dann gilt $\overline{\mathfrak{p}} \lhd \mathfrak{G} \leftrightarrow g \lhd \mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{N} = \mathcal{N}s\mathfrak{p}^*$, wo $g^* =$ schw. Abschl. von $\mathfrak{p}^*$ in $\mathfrak{P}$.

5a) Wenn $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ px-köpfig, $\mathfrak{P}$ eine Sylowgr $\mathfrak{A}$, so $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{A}^g \mathcal{N}s\mathfrak{P}$.

7. Frage: Bei p-Gruppen $\mathfrak{G}$ muss es einen Zusammenhang zwischen Klasse $\mathfrak{G}$ und $\max\limits_{\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}} \binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ geben $(p > 2)$.

151/152

<u>Sylowgr. Kompositionsreihen</u>

1. Sei $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} < \mathfrak{P} = \mathrm{Syl}\mathfrak{G}$. Dann gilt: Es ist $\overline{\mathfrak{p}} \lhd \mathfrak{G} \leftrightarrow [\mathfrak{p} < \mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{p} \lhd \mathcal{N}s\mathfrak{P}_1] \leftrightarrow \mathfrak{p}$ schwach abgeschl. in $\mathfrak{P}$. s. auch 151_6

2. R. Brauer wies darauf hin: Wenn Burnsides Vermutung stimmt, dass jede ungerade Gruppe auflösbar, dann genügt für Gruppen ohne zyklische Kompfaktoren die Projektion in die 2-Sylowgruppe, gibt isomorphes Bild des Kompos-Verbands von $\mathfrak{G}$.

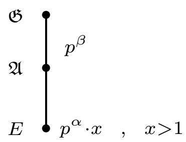
3. „Ausreichend“ heisse eine Menge von Primzahlen $\{p_\rho\}$, wenn jeder Komp-Faktor von $\mathfrak{G}$ durch ein p_ρ teilbar ist. Dann gilt: Es genügt Projektion in eine „ausreichende“ Menge von Sylowgruppen.

4. Wenn z.B. „ausreichend“ viele Sylowgr. zu $\{p_\rho\}$ zyklisch sind, gilt: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\{p_\rho\}$-Teil $|\mathfrak{A}| = \{p_\rho\}$-Teil $|\mathfrak{B}| \rightsquigarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{B}$ nicht $\lhd \lhd \mathfrak{G}$, so folgt wenigstens, dass das Erzeugnis aller $\{p_\rho\}$-Sylowgr von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

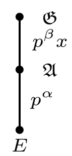
152/153

1. Ist $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} < \mathfrak{G}$, so ist trivial: $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P} < \mathfrak{B} \cap \mathfrak{P}$ für jede Syl $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$.

2. Ist eine p-Sylowgr von $\mathfrak{G}$ zyklisch, so ist entweder $\mathfrak{G}$ p-einfach, dh. nur ein Kompfaktor von $\mathfrak{G}$ teilbar durch p, oder $\mathfrak{G}$ ist p-auflösbar von der p-Länge 1.
Bew: Sonst sei oBdA



oder



In beiden Fällen Widerspruch erzielbar durch Betrachtg des p-Sylow-Normaß-lisators (in $\mathfrak{G}$) der einfachen KompFaktGr $\mathfrak{A}$ bezw $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

3. Genau dann ergibt sich bei der Projektion von $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ in eine Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ ganz $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$, wenn entweder $p \top g$ oder $\mathfrak{G}$ $p-$auflösbar mit p-Länge 1. Bew: 2.

4. Sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zwei Sylowgr von $\mathfrak{G}$, so tritt bei der Proj. von $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \oplus \mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ genau dann $\mathfrak{P} \oplus E$ auf, wenn $q \nmid |\overline{\mathfrak{P}}|$. Sind $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r$ die Proj von $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{P}_\rho$, $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ „ausreichend“, so ist genau dann $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}) \sim \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_r$, wenn $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{P}}_1 \times \overline{\mathfrak{P}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{P}}_r$ (wobei $p_2 \ldots p_r \nmid |\overline{\mathfrak{P}}_1|$ usw.)

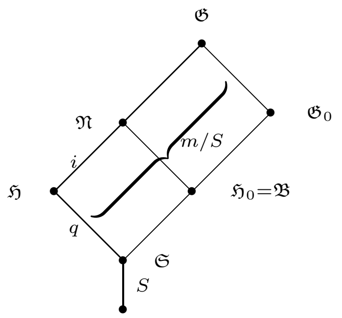
153/154

1. Satz von Feit [Th 3.2 in PAMS 7, 177-178: On a conjecture of Frobenius, 1956]: zu S. 92
   Se $|\mathfrak{G}| = mq$, $(q,m) = 1$. Sei $M \in \mathfrak{M} \leftrightarrow M^m = E$. Sei $|\mathfrak{M}| = m$. Es existiere $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$, so dass $|\mathfrak{H} = qs$, $(s, \frac{m}{s}) = 1$ &

   (i) es gibt $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{H}$, $|\mathfrak{S}| = s$

   (ii) $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G$ entw. $= \mathfrak{H}$ oder $\leq \mathfrak{S}$.

   Dann ist $\mathfrak{M}$ eine Gruppe (und dann $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$). Frage: Wie hängt das mit S.92 zusammen? $\boxed{\text{Bew mit Brauers Charakteris. d. Charaktere}}$



   $(q,s) = (q, \frac{m}{s}) = (s, \frac{m}{s}) = 1$. Es ist $Ns\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$.

   $N^G \in \mathfrak{N} \rightsquigarrow \left.\begin{matrix} N^i \\ N^{iG} \end{matrix}\right\} \in \mathfrak{H} \rightsquigarrow G \in \mathfrak{N}$ oder $N^i, N^{iG} \in \mathfrak{S} \rightsquigarrow N^{iS} = E$. Satz von Feit scheint tief zu liegen: Es gibt wohl eine Vertretergr $\mathfrak{C}/\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$, doch sehe ich nicht, wie aus der Vor. $|\mathfrak{M}| = m$ die Normalität von $\mathfrak{C}/\mathfrak{S}$ folgt, die man zwecks Anwendung meiner S. 92 kennen müsste. Man müsste zeigen (das ist n & h!), dass in $\mathfrak{N}$ nur is Lösungen von $N^{is} = E$ existieren. Ausreichend wäre der Beweis der

2. Vermutung: Ist $\mathfrak{H} = \mathcal{N}s\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ und gibt es $\mathfrak{H}_0 < \mathfrak{H}$ so, dass zu jedem $\mathfrak{D} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G \neq \mathfrak{H}$ ein H existiert mit $\mathfrak{D}^H < \mathfrak{H}_0$, so gibt es $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_0$

154/155

Forsetzg: Verhalten von Indizes bei Durchschnittsbildung von S.147.

1. Sei $\mathfrak{B} < \mathfrak{A} < \mathfrak{G}, \mathfrak{C} < \mathfrak{G}$. Es gebe Kette $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_k < \mathfrak{B}_{k-1} < \cdots < \mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$ derart, dass $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$. Dann ist $|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} : \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}| \mid |\mathfrak{A} : \mathfrak{B}|$. Bew Induktion mit 147, (3a).

2. Dieser Satz enthält den Satz 147 (b) sowie (3a).

3. $\mathfrak{B}_i < \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \rightsquigarrow |\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2| \mid \prod_{i=1}^{2} |\mathfrak{A}_i : \mathfrak{B}_i|$. Ist unsymmetrische Vorauss. trotz symm. Beh.!

Andere Fassung: Es gebe Restvertreter R_v zu $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{H} R_v$, so dass Erzeugnis $\bigcup_{v>1}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^{R_v}) = \mathfrak{H}_0 \underset{\neq}{<} \mathfrak{H}$. Dann gibts $\mathfrak{G}_0, \ldots$. Man muss die Perm von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{H}_0$ ergänzen zu einer (Perm-)Darst von $\mathfrak{G}$ (vom selben Grade).

155/156

Den Satz, dass $\mathfrak{G}$ p-nilpot ist, wenn

a) die p-Sylowgr $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ zyklisch ist und

b) die Untergr. der Ord p in $\mathfrak{P}$ im Zentrum von $Ns\mathfrak{P}$ liegt,

scheint bei Zassenhaus zu stehen: The Theory of groups, Chelsea 1949 (aber nicht in der deutschen Ausgabe).

Nilpotenz der Gr $\mathfrak{N}$ mit reg Autom $\mathfrak{Q}$ könnte vielleicht so bewiesen werden, dass man eine monomiale Darstellung von $\mathfrak{N}$ durch Einbettung in $\mathfrak{N}\mathfrak{Q}$ konstruiert.

Natürlicher Beweisansatz für die Burnside-Vermutung im Fall pq (wenn p, q bekannt): $\mathfrak{F}_n$ sei freie Gr., man bestimme zunächst eine obere Schranke für die Stufe s (Kommutatorfolge) von $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}^p$, dann zeigt man, dass der allgemeinste Kommutator dieser Stufe [bei $s = 2$ wäre das $((x_1x_2),(x_3x_4))] \in \mathfrak{F}(x_1 \ldots x_4)^{pq}$; es genügt also <u>eine</u> Indentität zu finden.

156/157

Verfeinerung der Verlagerung.
Sei $\mathfrak{P}_{\triangleleft}\mathfrak{P} = p$-Sylowgr von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}$. Sei $\mathfrak{P}/\overline{\mathfrak{P}}$ abspalten von $\mathfrak{K}$ und von $\mathfrak{L}$. Wann von $\mathfrak{G}$? Zur Untersuchung kann man die verallg. monom. Darst $X_{\mathfrak{K}/\overline{\mathfrak{K}}}(G) \equiv P_{\mathfrak{K}/\overline{\mathfrak{K}}}(G)$ (wegen $K \equiv P(\mathfrak{K})$ und $L_{\mathfrak{L}/\overline{\mathfrak{L}}}(G) = P_{\mathfrak{L}/\overline{\mathfrak{L}}}(G)$ bilden; mod $\overline{\mathfrak{P}}$ haben sie abelsche Koeff., also kann man ihr Kroneckersches Produkt bilden. Davon dann Det. untersuchen. Zur Rechnung, die auf $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{K} G_\alpha \mathfrak{L} \equiv \sum \mathfrak{P} G_\alpha \mathfrak{P} \pmod{\overline{\mathfrak{K}}}, \overline{\mathfrak{L}}$ basieren muss, kann man auch noch eine normierte Zerlegg von $\mathfrak{G}$ heranziehen; allgemein: vor Übergg zu $\mathfrak{P}$ lautet sie so:
Setze $\mathfrak{K}_\alpha G_\alpha \cap G_\alpha \mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{D}_\alpha$ und wähle Vertreter so def $\mathfrak{K} = \sum_\beta K_{\alpha\beta}$ (mod $\mathfrak{K} \cap G_\alpha \mathfrak{L}_\alpha G_\alpha^{-1}$), $\mathfrak{L} = \sum_\gamma (\mathfrak{K}_\alpha^{G_\alpha} \cap \mathfrak{L}) L_{\alpha\gamma}$. Dann ist <u>eindeutig $\mathfrak{G} = \sum K_{\alpha\beta} D_{\alpha\delta} L_{\alpha\gamma}$</u> mit $\mathfrak{D} = \sum D_{\alpha\delta}$ und $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{K} G_\alpha L_{\alpha\gamma} = \sum K_{\alpha\beta} \overline{G_\alpha \mathfrak{L}}$.
Schreiben: Über Normalisatoren nachinv. Untergr.

157/158

Literatur zu Permgr vom Grad p^2

Geometrisches:
W.S.Connor, Biometrica <u>9</u>, 127-140 (1953)
" Can. J Math <u>6</u>, 35-41 (1954)
" Ann. Math. Stat. <u>23</u>, 57-71, 602-609 (1952)

H. B. Mann, Analysis and design of experiments, N.Y., Dover 1949

Separate Barlotti
Buch Segre Le zioni di geometria moderna I, 1948

$\triangleleft\triangleleft$

1. $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ auflösb. im Sinn von Kurosh , $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \rightsquigarrow \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$.
   Bew: $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{B}_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \mathfrak{B}_k = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}_\rho, \mathfrak{B}_{\rho-1}$ wird durch $\mathfrak{A}$ gedeckt, ist also auflösbar, also $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{[n]} < \mathfrak{B}$ für ein n ([] = Kommutatorgr.) wegen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ ist $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]^[n] = \mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

2. Vermutung:

   a) Wenn Minbedg für nachinv Ugr gilt, ist Sockel $S\mathfrak{G} < \bigcap \mathcal{N}s\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$. Anm. z. Bew: 4. Voller Bew: 160,1.

   b) Vielleicht genügt Minbedg für Normalteiler

   c) Bekannt ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{M} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$ und einfach. 51_5.

3. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auflö. $\rightsquigarrow \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aufl. Bew 1.

4. Sei $|\mathfrak{N}| = p^\alpha$, $\mathfrak{N}$ kein NT, Minbedgg für nachinv. Ugr, $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A}$.
   Bew: OBdA $\mathfrak{A}$ 1-p-köpfig. Bew: $\mathfrak{g}$ sei Sylowgr der endl. AutomGr $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{N}$ unter $\mathfrak{G}$ erleidet, $E \neq P \in \mathfrak{N}$ sei fest unter $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{A} \to \mathfrak{a} = 1$, ist $[\mathfrak{A}, \mathfrak{N}] = 1$, fertig; sonst wähle $P_1 \in \mathfrak{A}$ mit $[P_1^{p^\infty}, \mathfrak{N}] = 1$ und $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{P}_1\}$: wegen $[P_1, P] = 1$ ist $P \in N_1\mathfrak{A}$. Ebenso $P^G \in \mathcal{N}s\mathfrak{A}$ f. jedes $G \in \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{N} < \mathcal{N}s\mathfrak{A}$.

$\triangleleft\triangleleft$

1. Gilt MinBedg für nachinv Ugr von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$, so ist $S\mathfrak{G}$ (= Sockel, Erzeugnis min NT) $< N\mathfrak{A} = \mathfrak{N}]$ $\mathfrak{M} < N \cap \mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$. zum Bew: 2-4

2. Ist $\mathfrak{M} \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{M} \triangleleft \mathfrak{G}_1 \triangleleft \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{M} \subset S\mathfrak{G}_1$. Denn wähle $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}_1$. Dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^{\mathfrak{G}} < S\mathfrak{G}_1$.

3. Ist $\mathfrak{S} < S\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S} < \mathfrak{G}_1 \triangleleft \mathfrak{G}$, so $\mathfrak{S} < S\mathfrak{G}_1$.

4. Ist $\mathfrak{S} < S\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S} \triangleleft \mathfrak{G}_1 \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G}$, so $\mathfrak{S} < S\mathfrak{G}_1$. Indukt nach $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1)$.

5. $\mathfrak{M}_1 \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{M}_1 < S\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}$.
   Nun Bew 1: indirekt kürzer 161.1. Sonst gibts $\mathfrak{M}_1 \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}_1 \not< \mathfrak{N}$, nach 5 ist $\mathfrak{M}_1 < S\mathfrak{M}_1\mathfrak{A} \not< \mathfrak{N}$, also $\exists\, \mathfrak{M}_2 < S\mathfrak{M}_2\mathfrak{A} \not< \mathfrak{N}$, also gibts $\mathfrak{M}_3 \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{M}_2\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}_3 \not< \mathfrak{N}$ uw. Wegen Minbedg gibt das einmal $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_{k-1}$: $\mathfrak{M}^* \underset{\min}{\triangleleft} \mathfrak{M}^*\mathfrak{A}$, $\underline{\mathfrak{M}^*} \not< \mathfrak{N}$. Aber $\mathfrak{A} < \mathfrak{M}^{**}\mathfrak{A} \underset{\neq}{\triangleleft} \mathfrak{M}^*\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}^{**}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}^* = {}^{\mathfrak{M}^*}_{1}$, $\mathfrak{M}^{**} = 1$, $\underline{\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{M}^*\mathfrak{A}^*}$, Wid.

1. Kürzerer Beweis für 160.1:
   Sei $\mathfrak{H}$ eine minimale nachinv Ugr von $\mathfrak{G}$ bezgl der Eigenschaft: $\mathfrak{A} < \mathfrak{H}$, $S\mathfrak{H} \not< N\mathfrak{A}$. Dann gibt es $\mathfrak{M} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M} \not< N\mathfrak{A}$. Es ist $\mathfrak{M} < S(\mathfrak{M}\mathfrak{A})$; wäre $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{H}$, so Wid gegen Mineig; also $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{H} \underset{\neq}{\lhd} \mathfrak{M}^*\mathfrak{A} \underset{=}{>} \mathfrak{A}$. $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^*\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{M}^* = 1$, $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{H} \lhd \mathfrak{A}$, $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$. *Anmerkung: [* Besser S.170-171 (4) *]*

2. Ebenso: Ist $\mathfrak{M} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und erfüllen die nachinv. Ugr von $\mathfrak{M}$ die Minimalbedg, so ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$. Z.B. wenn $\mathfrak{M}$ endlich.
   Bew: Unter den nachinv. Ugr $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{M}$, welche

   (a) nicht in $\mathfrak{N} = N\mathfrak{A}$ liegen

   (b) minimale NT einer nachinv, $\mathfrak{A}$ enthaltenden Gr. $\mathfrak{H}$ sind: $\mathfrak{K} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{H} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{H}$

   sei $\mathfrak{K}$ eine schlechthin minimale. Dann ist $\mathfrak{K}\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \lhd \mathfrak{L}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{L}_p \lhd \mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{K} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{L}_r$, $\mathfrak{K} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{L}_{r-1}$. Dann wähle $\mathfrak{K}_0 \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{L}_{r-1}$, $\mathfrak{K}_0$ in $\mathfrak{K}$. Dann alle $\mathfrak{K}_0^{L_r} \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{K} \in \mathfrak{N}$: geht nicht. Also $\mathfrak{k} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{K}\mathfrak{A}$. $\mathfrak{K}\mathfrak{A} \underset{\neq}{\lhd} \mathfrak{K}^*\mathfrak{A} > \mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{K}^* = 1 \rightsquigarrow \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{K}\mathfrak{A}$.
   Anmerkung: [Schärfer & kürzer: S. *]*

1. $\mathfrak{A} \underset{\min}{\lhd\lhd} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ einfach, nichtabelsch $\rightsquigarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G}$. Bew: Indukt $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$.

2. Sei T-Gruppe eine Gruppe mit endl Kompreihe, in der jede nachinvariante Untergruppe normal ist. Sei (schärfer $\longleftarrow$) S-Gruppe eine Gr m endl Kompreihe, in der jeder Kompfaktor eine auflösbare äussere Automgr hat. Dann gilt:

3. Jede perfekte ST-Gruppe hat ihre Mauer ($= \bigcap$max NT) im Zentrum. Denn jeder Kompfakt = Hauptfaktor unterhalb der Mauer wird zentralisiert von $\mathfrak{G}$.

4. Jede ST-Gr besteht aus dem grössten perfekten NT $\mathfrak{G}^{\alpha}$, darauf eine auflösbare ST-Gr als Faktorgr gesetzt. $\mathfrak{G}^{\alpha}$ zentralisiert den grössten aufl NT ${}^{\square}\mathfrak{G}_{\alpha}$.

4. Es gilt wohl $\mathfrak{H} \underset{=}{\lhd} \mathfrak{G} \rightsquigarrow \mathfrak{H} \cap S\mathfrak{G} \leq S\mathfrak{H}$, S = Sockel, wenn MinBed für die NT von $\mathfrak{G}$. OBdA $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot S\mathfrak{G}$?
   Aus **???**Bew: $\mathfrak{N}$ sei Erzeignis endl vieler min NT von $\mathfrak{G}$. Zu zeigen ist $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} < S\mathfrak{G}$. Indukt nach Anzahl $\downarrow$. Nimm $\mathfrak{G}$ = min Gegenbeispiel!

5. Bei MinBedg f. nachinv. Ugr gilt $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cap S\mathfrak{G} < S\mathfrak{A}$.

6. Transfinite aufsteigende Sockelreihen betrachten - brechen wohl ab.
   “ Haupt-Normalisatoren-reihen “ .

7. Bilden die im Sinn von Gaschütz nachnormalen Untergr. einen Verband?

8. Bei MinBed für nachinv. Ugr ist wohl jeder min NT direktes Produkt von endl vielen einfachen Gruppen.

Aufgabe: Zur Theorie der Permutationsgruppen. Das Neue aus der Vorlesgs-Ausarb. veröffentlichen!
Erzeugen die p-Sylowzentren immer etwas von der px-Länge 1?
“Invarianzgruppe” Specht 87, 348

163/164

Überdeckungen und Normalteiler.

1. Sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{Z}_i < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_i \cap \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{H}$ für $i \neq j$, $\bigcup \mathfrak{Z}_i = \mathfrak{G}$. Dann folgt aus $H \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^G$, $G \notin \mathfrak{H}$ stets $H \in \mathfrak{H}^K$ für jedes $K \in \mathfrak{G}$. Bew:
   (a) $G = Z_i \in \mathfrak{Z}_i$, $K \in \mathfrak{Z}_j$, $j \neq i$. $K^{-1}G = Z_m^K$, $m \neq j$, $G = Z_m K$; $H \in \mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{H}^{Z_m K} < \mathfrak{Z}_i \cap \mathfrak{Z}_m^K = (\mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{Z}_m)^K = \mathfrak{H}^K$.
   (b) $K \in \mathfrak{Z}_i \rightsquigarrow$ wähle $L \in \mathfrak{Z}_i$, $j \neq i$ und wende $2\times$ a) an.

   Siehe dazu Randbemerkung zu Manning Buch S.87

2. Also unter Vor.1 gibt es Frobenius-NT $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{g}/\operatorname{Kern}\mathfrak{H}$. Übrigens muss dieser eine besondere Gestalt haben (Sei $\operatorname{Kern}\mathfrak{H} = E$): $\mathfrak{F} = \sum \mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = E$. $\mathfrak{F}_i$ zulässig bei der reg AutomGr $\mathfrak{H}$.

1a. Die Vor. ist: Es gibt eine “Partition” von $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$. Diss André §2

3. Es muss schon genügen, wenn fast ganz $\mathfrak{G}$ in $\bigcup \mathfrak{Z}_i$ liegt. [siehe Manning Buch §39] Vielleicht genügt “die gute Hälfte” von $\mathfrak{G}$, s. 6.

4. Man kann wohl auch noch abschwächen zu $\mathfrak{G} < \mathfrak{Z}_i \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{Z}$; oder ähnlich, siehe Beweis 1.

164/165

5. Aufgabe: Einen möglichst umfassenden Überdeckungssatz (mit Impr.-Systemen) aufstellen, der Minimalgrad $\geq n-1$ zur Folge hat oder auf meine Erweiterg des Satzes von Frobenius führt. Nachsehen, ob das auf unendliche Gruppen passt.

6. Ist $\mathfrak{G}$ transitiv und folgt aus Grad $G \leq n-2$ stets Gr $G < \frac{n}{2}$, so ist Min Gr $\mathfrak{G} \geq n-1$. Denn sei er $= m =$ Gr M, dann folgt, wenn M^T mit M eine Ziffer gemeinsam bewegt, dass M^T und M die gleichen Ziffern bewegen. Diese bilden also einen Block von $\mathfrak{G}$, Länge $< \frac{n}{2}$, $\leqq \frac{n}{3}$. Dann gibt es $M \cdot M^T$ vom Grade $2m \leq n-m \leq n-2$, geht nicht.

7. Aufgabe: Struktur von $\mathfrak{G}$ untersuchen, wenn die <u>minimalen</u> Obergruppen von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ (fast) ganz $\mathfrak{G}$ überdecken.

165/166

Permutationsgruppen

1. *Unterpunkt durchgestrichen*
   Gibt es für $k \geq 3$ eine k-fach transitive Gruppe mit einem nichtreg. NT, der nicht $(k-1)$-fach primitiv ist? (für $k = 2$ ja) *Anmerkung: [* $k \geq 3$ nein nach Itô *]*

2. Sei $\mathfrak{G}$ 3-tra, reg $\neq \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$. Dann $\mathfrak{N}$ $\frac{5}{2}$ tra. Lässt $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ mind. 3 Ziffern fest, so ist $S\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}$ 2-tra auf den bei $\mathfrak{H}$ festen Ziffern $\to \nu\mathfrak{H}$ ist scharf 3-tra
   " " $\mathfrak{G}_{1\ 2\ 3}$ " .
   $\mathfrak{N}_1$ ist Frobeniusgr mit elem abelschem Fro.Kern. Man muss die nichtreg Normalteiler der scharf 3-tra Gruppen kennen, um weiter zu kommen.

3. Aufgabe: Sätze über transitive Konstituenten von $\mathfrak{G}_1$ bei primitivem $\mathfrak{G}$ erweitern auf Doppelmodul zerlegen nach zwei (maximalen) Untergruppen!

166/167

Tschunikhin [18] betrachtet Π-permutable Untergruppen $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$: $\mathfrak{H} \vee \mathfrak{P}$ für jede p-Sylowgr $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$ mit $p \in \Pi$; $\mathfrak{H}$ heißt Π-semi-invariant in $\mathfrak{G}$, wenn

1. $\mathfrak{H}$ Π-permutabel
2. $\mathfrak{H}^{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{H}$ für jede q-Sylowgr $\mathfrak{Q} < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{q} \notin \Pi$.
2. Unter Gruppenoperatoren, die mit Automorphismen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, sollte man als Linksop. schreiben, die Autom. rechts oben, das spart Klammern.

$$\begin{array}{rccccc} G \in \nu\mathfrak{H} & \leftrightarrow & \mathfrak{H}^G = \mathfrak{H} & & \\ \in \sigma\mathfrak{H} & \leftrightarrow & \mathfrak{U} \lhd \lhd \mathfrak{H} & \rightsquigarrow & \mathfrak{U}^G = \mathfrak{U} \\ \in \gamma\mathfrak{H} & \rightsquigarrow & \mathfrak{U} \leq \mathfrak{H} & \rightsquigarrow & \mathfrak{U}^G = \mathfrak{U} \\ \varepsilon\mathfrak{H} & \rightsquigarrow & H \in \mathfrak{H} & \rightsquigarrow & H^G = H \end{array}$$
$$\kappa\mathfrak{H} = \text{Kern von } \mathfrak{H} \text{ in } \mathfrak{G} = \bigcap \mathfrak{H}^G?$$

167/168

Zur Theorie der p-Gruppen $\mathfrak{G}$.

1. Def: $\mathfrak{G}$ singulär, wenn die monomiale Gr der Ord p^{p+1} vom Grade p Teil von $\mathfrak{G}$ ist.
   $\mathfrak{G}$ vollregulär, wenn aus $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ sing folgt: $\mathfrak{H}$ sing.

#2. Unter-, Faktorgruppen und direkte Produkte vollreg. Gr sd vollrg.

2. Für $p = 2$ ist nichtsing z.B. die Quaternionengr., minimal sing ist die Diedergr. $\mathfrak{D}_8$. $\mathfrak{G}$ nichtsing $\leftrightarrow G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \rightsquigarrow (\mathfrak{A}, G_2)^2 = \mathrm{W}[G_1^{2X_i}, G_2^{2Y_i}]$ mit $X_i, Y_i \in \{G_1, G_2\}$. $\uparrow$ Wort

3. Vermutung: vollreg. für $p = 2$ sind wenigstens alle abelschen Gr $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1 \cdot A_2 \times B_2)^2 &= (A_1A_2)^2 \times (B_1B_2)^2 \\ &= (A_1A_2)^2 \times \prod B_1^{2X_i} B_2^{2Y_i} \\ &= (A_1A_2)^2 \times \mathrm{W}(B_1^{2X_i}, B_2^{2Y_i})\end{aligned}$$

$X_i, Y_i \in \{B_1B_2\}$

Verweis von der Überschrift Vermutung ist falsch: Für $p = 2$ ist schon die zykl Gr ν der Ord u <u>nicht</u> vollreg! nimm $\mathfrak{G}$ = Quaternionengr! $A_1 = A_2 =$ Erzeugende von $\mathfrak{V}$.

4. Frage: Ist „Eigenschaft R" äq. damit, dass in jedem Ausschnitt von $\mathfrak{G}$ die Elemente der Ordnung p eine Gruppe bilden ($\mathfrak{K}'$)? Bei $p = 2$ ja. Klar ist $R' \to R$.

168/169

$\lhd\lhd \to \lhd$

1. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{A}^{G_0} \neq \mathfrak{A}$, so gibt es
   (a) einen Kopf von $\mathfrak{A}$ unter der KFg von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{G_0}\}$ bis $\mathfrak{A}$
   (b) " Hut von $\mathfrak{A}$ " $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{A}^{G_0} \cap \mathfrak{A}$.

   Folge:

2. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{A}$, so gibt es
   (a) einen Kopf von $\mathfrak{A}$ in einem <u>echten</u> NT von $\mathfrak{H}$ über $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}$
   (b) einen Hut von $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ unter den KFG von $\mathfrak{A}$ bis $\bigcap_H \mathfrak{A}^H$
   $\uparrow$ besser Huf von $\mathfrak{H} : (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H})$?

3. Ist $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{G}$ und ist keine KFG von $\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ zu einem Kopf oder einem Hut von $\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ isomorph, so sind $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.
   Bew: Es ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ wegen der Kopfbedgg und wegen der Hufe. Ferner ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach 2b, und $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach 2a.
   Symmetrische Bedingung suchen!

169/170

<u>Normalisator-Eigenschaft des Sockels.</u>

1. Sei $\mathfrak{M}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_0$ Sei $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}_1 \lhd \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{A}$, dh $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.
   Bew:
   (a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1 = 1 \rightsquigarrow [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] = 1$, $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.
   (b) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1 \neq 1$. Wegen Minimalität von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{G}_1$, also $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.

2. Sei $\mathfrak{M}$ min NT von $\mathfrak{G}$; für die NT von $\mathfrak{M}$ gelte MinBedg. Sei $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}_2 \lhd \mathfrak{G}_1 \lhd \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$.
   Bew.

   (a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_1 = 1 \rightsquigarrow [\mathfrak{M}, \mathfrak{A}] = 1 \rightsquigarrow \mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$

   (b) $\quad \dots \quad \neq 1$

   Sei $\mathfrak{M}_1$ ein min MT von $\mathfrak{G}_1$; $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}$. Nach 1 ist $\mathfrak{M}_1^G \leq N\mathfrak{A}$; also $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_1^G \leq N\mathfrak{A}$.

   Kommentar: unnötig

170/171

Allgemein

3. Sei $\mathfrak{M} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \lhd \lhd \mathfrak{G}$, $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = r \geq 2$. Gilt dann für die $\mathfrak{N} \lhd \lhd \mathfrak{M}$, $m(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \leq r-2$ die MinBedgg, so ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$. *Anmerkung:* Bezeichnung besser: $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^*$. Besser Stern unten! $r^* = r - 1$
   Bew:

$r \geq 2$: a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}^* = 1$ fertig: $[\mathfrak{M}, \mathfrak{G}^*] = 1$

   (a) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}^* \neq 1$; dann $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}^* = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} < \mathfrak{G}^*$, $r = 2$: fertig.
   $r > 2$: Wähle $\mathfrak{M}^* < \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^* \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{M}^* \lhd \mathfrak{M}$. In $s\mathfrak{M}_1^{*G}$ gilt MinBed für die $\mathfrak{N}$ mit $m(\mathfrak{M}_*^G, \mathfrak{N}) \leq r_*2$. Indukt: also $\mathfrak{M}_*^G < N\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_*^G < N\mathfrak{A}$.

4. Gilt in den min. NT $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ die MinBedgg ($*$ 5.5!) für die subnorm Ugr, so ist $\mathfrak{M} < N\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$. Bew: Klar nach 3.

5. Ist $\mathfrak{M} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G}$, so ist die MinBedgg in $s\mathfrak{M}$ gleichbedeutend der in $n\mathfrak{M}$. Genauer: Gilt MinBed in $s\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{B} \lhd \lhd \mathfrak{M} \rightsquigarrow \mathfrak{B} \lhd \mathfrak{B}$. S.$39_2$
   MaxBed in $n\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G} \rightsquigarrow j(\mathfrak{M})$ endlich. Liegt jede subnorm Ugr $\mathfrak{N}$ der Ord p. für die $\mathfrak{N}^{\mathfrak{G}} \underset{\min}{\lhd} \mathfrak{G}$ ist, in $N\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$?

171/172

29.11.57

1. Forts. 175 *durchgestrichen: [* Ist $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe mit ≥ 2 Ugr der Ord p, nicht zyklisch, so ist $s\mathfrak{P}$ einfach. NB: Bei $p = 2$ ($p > 2$) fallen mindestens noch die verallg. Quaternionengr weg, die nur 1 Ugr der Ord 2 haben (Zassenhaus) *]*
   Bew:

   (a) $\mathfrak{P}$ abelsch vom Tyo (p, p) $p \geq 2$, $\varphi(\mathfrak{P}_E) = 1$, $\varphi(1) = 0$

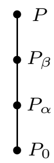
      α) Ist $\varphi(\mathfrak{P}_1) = \varphi(\mathfrak{P}_2) = p$, so $\varphi(\mathfrak{P} = \varphi(1) = p$

      β) Ist $\varphi(\mathfrak{P}) = \varphi(\mathfrak{P}_1) = 1$, so $0 = \varphi(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) = \varphi(\mathfrak{P}_1) \cap \varphi(\mathfrak{P}_2) = \varphi(\mathfrak{P}_2) = \varphi(\mathfrak{P}_3)$, geht nicht nach α)

b) $\mathfrak{P}$ abelsch: Indukt nach $(\mathfrak{P})$. Bew 173
Sei $\varphi(\mathfrak{P}_1) = \varphi(\mathfrak{P}_2)$, $\mathfrak{P}_2$ minimal. Ist $\mathfrak{P}_2 = 1$, so $\varphi(\mathfrak{P}_1) = 0$, also nach a) $\varphi(\mathfrak{P}_1') = 0$ für $|\mathfrak{P}_1'| = p$; ist $\mathfrak{P}$ nicht zykl. so sei $\mathfrak{P}^*$ die Ugr vom Exp p: $|\mathfrak{P}^*| \geq p^2$. Jede Gr. der Ord p in $\mathfrak{P}$ hat dann eine zykl. Faktorgr. Dann ist aber $\mathfrak{P}$ vom Typ (p,p): a).
Ist aber $\mathfrak{P}_2 \neq 1$, so ist jede Gr zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ zykl. da untreu abgeb. Ist $\mathfrak{P}_1' < \mathfrak{P}_1$, $|\mathfrak{P}_1'| = 1$, so wird $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1'$ untreu abg., also $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1'$ zykl, $\mathfrak{P}$ Typ (p^α, p).
Ähnlich: Ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, so $\varphi(\mathfrak{P}) = \varphi(\mathfrak{P}')$ für jede max Ugr $\mathfrak{P}' < \mathfrak{P}$.

172/173

b) Sei $\mathfrak{P} = P_\delta$ abelsch, nicht zykl, $\alpha < \beta$, $P_\alpha \sim P_\beta$ ($\sim$ heißt: $\varphi(P_\alpha) = \varphi(P_\beta)$). Beh: $P \sim P_0$.

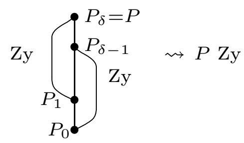


Bew:

I $\alpha = 0$: $P_0 \sim P_1$. Nach a) ist $P_0 \sim P_1'$ f alle $|P_1'| = p$. Also gibt es $P_2 \sim P_1' \sim P_0$. Dann ist (Indukt) $P \sim P_0$ oder P/P_1' zy, dann Typ $P = (p,p)$, a).

II $\beta = \delta$: wie eben, dual

III $\alpha > 0$ und $\beta < \delta$:
Wähle $P_1 \leq P_\alpha$, dann ist nach Indukt P/P_1 zykl.
Wähle $P_{\delta-1} \geq P_\beta$, dann ist " $P_{\delta-1}$ zykl.



c) *Unterpunkt durchgestrichen*
$\mathfrak{P}$ beliebig, Bez. wie bei b).

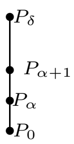
α) $P_1 \sim P_0 \rightsquigarrow$ Alle $P_1' \sim P_0$. OBdA $P_1 < \mathrm{Ztr} P \rightsquigarrow P/P_1$ zy $\rightsquigarrow P$ abelsch, b)

β) $\beta = \delta - 1 \rightsquigarrow$ Alle $P_{\delta-1}' \sim P_\delta$. $P_1 < \mathrm{Ztr} P \rightsquigarrow P/P_1$ zy (sonst $P_1 \sim P_\delta$, $P_1' \sim P_0$, $P_1 \sim P_0$) $\rightsquigarrow P$ abelsch. b)

γ) $\alpha > 0$ und $\beta < \delta$. Wähle $\begin{cases} P_{\delta-1} \geq P_\beta \\ P_1 \leq P_\alpha \end{cases} \rightsquigarrow P_{\delta-1}$ zy $\rightsquigarrow P_1 \lhd P \rightsquigarrow$ P/P_1 zy $\rightsquigarrow P$ zy *Anmerkung:* Wenden!

173/174

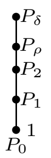
c) $\mathfrak{P}$ beliebig, $\mathfrak{P} \geq P_1, P_1'$ mit Ord P. Sei $\mathfrak{P}_\alpha \leq P_\delta = \mathfrak{P}$ minimal gewählt mit $P_\alpha \sim P_{\alpha+1}$



α) Dann ist $P_{\alpha+1}$ zyklisch. Denn sonst kann man $P_{\alpha+1}' = \{A\}$ wählen mit $P_\alpha \cdot \{A\} = P_{\alpha+1}$, $P_\alpha' = P_\alpha \cap P_{\alpha+1}'$, dann Wid zu Mineig von α: $P_{\alpha+1}' = P_{\alpha+1}' \cap P_{\alpha+1} \sim P_{\alpha+1}' \cap P_\alpha = P_\alpha'$.

β) Sei $\alpha > 0$. Sei $P_1 \leq \mathrm{Ztr}P$. Dann $P_1 \leq P_\alpha$, denn sonst hat $s(P_1P_\alpha)$ einen untreuen nicht konst. Homomorphismus, obwohl abelsch und nicht zyklisch, entgegen b). Bezeichne die Gr der Ord p^2 in $P_{\alpha+1}$ mit P_2; dann hat P/P_1 die <u>beiden</u> Untergr der Ord p : P_2/P_1 (mit P_2 zykl.) und P_1P_1'/P_1 (vom Typ (p,p)). Indukt: $s(P/P_1)$ einfach $\rightsquigarrow$ $P_1 \sim P \rightsquigarrow P_1' \sim P_1' \cap P_1 = P_0 \rightsquigarrow P_1'' \sim P_0 \rightsquigarrow P_1 \sim P_0 \rightsquigarrow P \sim P_0$ entgegen Mineig von α.

γ) Sei $\alpha = 0$. Dann ist $P_0 \sim P_1' \sim P_1'' \sim P_1$.



Wähle $P_1 < \mathrm{Ztr}P$; setze $P_2 = P_1P_1'$. Es ist $P_2 \sim P_1$. Hat P/P_1 zwei Ugr der Ord p, dann Indukt: $P_0 \sim P_1 \sim P_\delta$. Hat P/P_1 nur eine Ugr der Ord p, so ist das P_2/P_1.

174/175

Sei P_ρ maximal mit $P_\rho \sim P_0$. Annahme: $\rho < \delta$. Dann wähle $A \in P_\delta - P_\rho$. $P_\mu = \{A\} \cdot P_1$ ist ablesch und hat nichttriv. Homom. von SP_μ, also ist P_μ zyklisch, dh $P_1 < \{A\}$. $|\{A\}| \geq 4$. Die zykl Gr der Ord 4 in $\{A\}$ müsste nach S.174 unten $= P_2$ (Typ (p,p)) sein, geht nicht. Also ist $P_\rho = P_\delta$, $P_0 \sim P_\delta$, sP einf. Damit ist bewiesen: (172 (1)) =

2. Satz von Zappa (Suzuki Ergebnisse 10, S.71): Für eine p-Gruppe ist sP <u>nicht</u> einfach genau wenn P zyklisch von der Ord $\geq p^2$ oder verallgemeinerte Quaternionengruppe.

   NB: Birkhoff schreibt $\equiv$ statt $\sim$.

Beweise für die Normalität des Oberkerns O und des Unterkerns U bei homom. Abb. des vollen Verbands gG: Sei $a \in A$ abelsch. Dann

3. $O^a = O^a \cup (O^a \cap A) = O^a \cup (O \cap A)^a = O^a \cap (O \cap A) \equiv O^a \cup A = O \cup A \equiv G \cup A = G$; also $O^a \geq O$; $O^A = O$ **???**

4. $U^a = U^a \cap (U \cup A) \equiv U^a \cap A = (U \cap A)^a = U \cap A \equiv 1 \cap A \equiv$ **???**, also $U^a \leq U$, $U^A = U$. Da das für alle abelschen $A \leq G$ gilt, ist $O^G = O$, $U^G = U$.

175/176

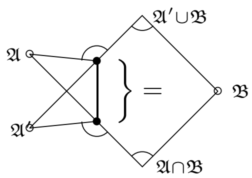
1. Ist U der untere Kern eines Homomorphismus von sG, und ist ${}_\alpha U$ der größte <u>auflösbare</u> Normalteiler von U, so ist ${}_\alpha U \lhd G$. Bew: Es genügt zu zeigen dass gilt:

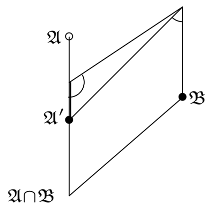
2. Ist ${}_pU$ der größte p-Normalteiler von U, so folgt aus ${}_pU \neq 1$, dass ${}_pU = {}_pG$ ist, oder ${}_pG$ verallg. Quat
   Bew 2: Ist ${}_pU \neq 1$ und ${}_pG \neq$ verallg Quatgr, so wird s_pG unten abgesch., ist einfach, also ${}_pG \equiv 1$.

   Vertauschbare <u>subnorm</u> Ugr: Frage:

3. Folgt aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{A}^{1/\wedge} \vee \mathfrak{B}^{1/\wedge}$?
   Bemerkg

4. Genau dann ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (beide $\in s\mathfrak{G}!$), wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein modulares Paar bilden, dh mit $j(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) + j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = j(\mathfrak{A}) + j(\mathfrak{B})$ (Bi S.100) Lemma 1. (Def von Birkhoff S.100 nach Wilcox lautet: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind mod. Paar, wenn $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{A}' \rightsquigarrow \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}') = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \cup \mathfrak{A}'$) Äq. das gleiche für $\mathfrak{A}' \geq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

Allg: 

Speziell $\mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{B}$: 

   Stets gilt: $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A}' \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) =\leq \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{B})$. Was kann man über die Faktorstruktur Rechts:Links sagen?

176/177

[17] Suttmann, Louis: Some inequalities between latent roots and minimax (maximin) elements of real matrices.
Canad. J.7, 807-902. 15

[18] Tschunikhin: On the conditions of theorems of Sylow's type. Math Rev 11, 321
Sylow properties and semi-invariant subgroups. MathRev 12, 800.

[19] Tschunikhin: On $\prod$-properties of finite groups.
Sobornik 25 (67) 321-346; MR 11, 495. S. auch Golberg, Doklady 64

[20] Tautz: Eigenwerte bei nichtsymmetrischen Operatoren.
Archiv Math 7 (1956)

177/178

Abschätzung von Eigenwerten:

[7] Bodewig. Matrix calculus, 1956

[8] Collar, A.R. Quart. J. Math. appl. Math. 1 (1948), 145-148

[9] Jahn, M.A. “ 131-144

[10] Maguier, CR Acad. Paris 226 (1948), 464-465

[11] Turàn, Paul: Remark on the zeros of the char. equation, Publ.Math 4 (1956) 406-409

[12] Afriat: Bounds for the char-values of matrix functions.
Quart. J. Math. (2) 2 (1951), 81-84

[13] Khan, N.A: The char. roots of the product of matrices.
Quart. J. M. (2) 7 (1956), 138-143

[14] Nagy, B. Sz.: Remark on Roy's paper, PAMS 7 ('56), 1

[15] Wong, Y.K. Some properties of the proper values of a matrix
PAMS 6 '55 891-899

Über Matrizen mit Eigenwerten ≥ 0:

[16] L. Mirsky, An introduction to linear algebra and matrix theory, Oxford 1955, 328-330

178/179

[1] Dunford: Spectral Operators. Pac. J. Math. 4, 321-354 und anschliessende Arbeiten Zbl 56, 346 ff.

[2] Karlin-Shapley Memoirs AMS 14: Moment spaces

[3] Bellmann, R.: On iterative procedure for obtaining the Perron root of a positive matrix. PAMS 6, 719-725
Positive Matrizen

[4] Rinehart, R.F.: The equivalence of definitions of a matrix function. Amer. Math. Monthly 62, 395-414(1955). MR 16, 1099
Matrixfunktionen

[5] Hall, M.: Determination of Steiner triple systems Steiner-Systems of order 15. MTAC 9 (1955), 146-152

[6] Dejom Brumo: Über die stetigen Funktionen eines normalen Operators. Separat 1955

179/180

Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_{12}$ 1 3