Prof. Dr. Helmut Wielandt

Tagebücher

D12

25.01.59 – 27.11.76

Wertevorrat

25.1.59

Schon im Raum $\mathfrak{V}$ der reellen Vektoren x ist, wenn $A' = A$, $B' = B$ reell, der Wertevorrat $\{x'Ax, x'Bx \mid x'x = 1\}$ konvex, falls $\dim \mathfrak{V} \geq 3$. [Bew. genügt für $n = 3$]
Denn die x mit $x'x = 1$, $x'Ax = \text{const}$ bestehen aus einer zusammenhängenden Kurve + Spiegelbild an 0. Das Spiegelbild trägt nichts Neues zum Wertevorrat bei, also ist der Schnitt des WV mit $x_1 = \text{const}$ zusammenhgd.
neueres Zitat S.28

(Tagebuch XII)

1/2

Größter EW hermitescher Matrizen:

Ist $R = \sum_{\oplus}^{k} R_i$ eine Zerlegg des Hilbertraums R in je paarweise orthogonale Teilräume, und ist H ein hermitescher Op auf R, $H = (H_{ij})$, $1 \leq i, j \leq k$, so ist der größte EW von H (d.h. das sup Spektrum) $\leq$ dem größten EW der hermiteschen $k \times k$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1k} \\ & \ddots & \\ \eta_{k1} & \cdots & \eta_{kk} \end{pmatrix}$$

wo $\eta_{ii} = \sup_{x \in R_i} x_i^* H_i x_i$, $\eta_{ij} = \sup_{\substack{x_i \in R_i \\ x_j \in R_j}} |x_i^* H x_j|$, $i \neq j$.

Ist klar wegen $x^* H x = \sum_{i,j} x_i^* H_{ij} x_j$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$.

Für $n = 3$ bei Börsch-Supan, Math Ann 234, 453-457 (1958)
$n = 2$ Weinberger oder schon bei Aronszajn

2/3

Absolut größter Eigenwert reeller $A = -A'$

Der Satz von Pick, nach dem der Betrag der größten Wurzel sich vergrößert wenn man alle a_{ik} mit $i < k$ durch eine feste obere Schranke ersetzt, deutet darauf hin, dass ein allgemeiner Majorantensatz für reelle schiefsymmetrische Matrizen gilt.
Vielleicht braucht man von der Majorante nur zu verlangen, dass für $i < k$ stets a_{ik} monoton fällt als Fkt von i und k; oder $= \varphi(i - k)$?

3/4

Ein Aufbau des Lebesgue-Integrals
5.3.62

(1) Integral stückweise konstanter Funktionen

(2) Für beliebige $f(x)$ (≥ 0),

$$[\text{Besser: } \overline{f} \rightarrow]\ \|f\| = \inf \sum^{\infty} \int e_i$$

$$\text{wo } |f(x)| \leq \sum_{1}^{\infty} e_i(x) \leftarrow [rr \cdot S = \infty \text{ zugelassen}]$$

e_i elementar, $e_i \geq 0$ nur in einem Intervall $\neq 0$

(2a) $\| \sum_1^\infty f_i \| \leq \sum \|f_i\|$

(2b) $0 \leq f \leq g \rightarrow \|f\| \leq \|g\|$

(3) Für Treppenfunktionen $T \geq 0$ ist $\|T\| = \int T$
$T \in \mathfrak{T}$ [Borel]

(4) Df: $f \in \mathcal{L}$ (= Lebesgue-Int.) $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $T \in \mathcal{T}$ mit

$$\|f - T\| < \varepsilon \qquad \text{kurz: } T \rightarrow f$$

4/5

(5) $f \in \mathcal{L} \rightarrow \int f = \lim \int T_n$, $T_n \rightarrow f$

(5a) $0 \leq f \in \mathcal{L} \rightarrow 0 \leq \int f$
Bew: $\big\| |T_n| - f \big\| \leq \|T_n - f\|$

(6) *[Reihenfolge mit Nummer (5b) vertauscht]*
$0 \leq f \in \mathcal{L} \rightarrow \int f = \|f\|$
Bew: $\exists T \geq 0 :$

$$\begin{aligned} \|f - T\| &< \varepsilon \\ \big| \|f\| - \|T\| \big| &< \varepsilon \\ \Big| \|f\| - \int T \Big| &< \varepsilon \\ \Big| \|f\| - \int f \Big| &< \varepsilon + \varepsilon' \end{aligned}$$

(5b) $f, g \in \mathcal{L} \rightarrow |f|, f \pm g \in \mathcal{L} \quad \& \quad \int f \pm g = \int f \pm \int g$

(5c) Rechenregeln ohne Limites
$[f \in \mathcal{L} \rightarrow |f| \in \mathcal{L}]$
$||f||^{2\prime} = ||\ |f|\ || = \int |f|$

<u>Konvergenzsätze</u>

(7) $$0 \leq f_n,\ f = \sum f_n,\ \|\sum_1^N f_n\| < C,\ f_n \in \mathcal{L}$$
$$\to f \in \mathcal{L},\ \sum \int f_n = \int f \qquad \text{(B.Levi)}$$

[s. Riesz-Nagy abgesehen von Vor. der Kgz]

Bew:

$$\sum_1^N f_n \leq f,$$
$$C \geq \|\sum_1^N f_n\| = \int (\sum_1^N f_n) = \sum_1^N \int f_n = \sum_1^N \|f_n\|$$
$$C \geq \sum_1^\infty \|f_n\| \to kgt$$
$$\|f - \underbrace{\sum_1^N f_n}_{S_n}\| = \|f_{N+1} + \ldots\| \overset{2}{\leq} \sum_{N+1}^\infty \|f_n\| \to 0$$
$$\|S_n - s_n\| \to 0 \quad S_n \in \mathcal{T}$$
$$\|f - S_n\| \to 0 \quad f \in \mathcal{L}$$
$$\int f = \lim \int S_n = \lim \|S_n\| = \lim \int S_n \qquad (6)$$
$$= \sum_1^\infty \int f_n$$

(7) besser gleich: $\mathcal{L} \ni f_n \nearrow f$
$\int f_n < C \to \mathcal{L} \ni f,\ \int f = \lim \int f_n$

5/6

(7') $\mathcal{L} \ni f_n \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} f,\ \|f\| < \infty \to \int f_n \to \int f,\ f \in \mathcal{L}$

(8) $\mathcal{L} \ni f_n \searrow 0 \to \int f_n \to 0$

(8a) $f, g \in \mathcal{L} \to \begin{smallmatrix}\min\\ \max\end{smallmatrix}(f(x), g(x)) \in \mathcal{L},\ \sup = g + \frac{1}{2}(f-g) + \frac{1}{2}|f-g|$

(9) $0 \leq f_n(x) \leq g(x)$ alle n, $f_n(x) \in \mathcal{L},\ \|g\| \leq \infty,\ f(x) = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\\ n\end{smallmatrix} f_n(x)$
$\to f \in \mathcal{L},\ \int f \leq \|g\|$

$$\mathcal{L} \ni s_n = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}(f_1, \ldots, f_n) \begin{matrix}\searrow\\ \nearrow\end{matrix} f, \quad (7)$$
$$f \leq g$$

(10) Lebesgue
$0 \le f_n(x) \le g(x)$, $\|g\| < \infty$, $f_n(x) \to f$ (jedes x) $\to f \in \mathcal{L}$ $\int f_n \to \int f$
Bew: $s_n = \sup(f_n, f_{n+1}, \dots) \searrow f$

(11) Translations- und Spiegelinvarianz von $\int f$

(11) *[Punkt durchgestrichen]*
$\mathcal{L} \ni f_n(x) \to f(x)$, $|f_n(x)| \le g(x)$, $\|g\| < \infty \to f \in \mathcal{L}$, $\int f_n \to \int f$
Bew: $n, m \to \infty$, $\int f_n - \int f_m \to 0$

6/7

Lebesguesches Maß

(1) Äuß Maß $= \overline{f_{\mathcal{B}}}$ wo $f_{\mathcal{B}} =$ char Fkt

(2) Maß $\mathcal{B} = \int f_{\mathcal{B}}$ wenn exist.

(2a) $\mathcal{B}$ beschränkt: $\mathcal{B}$ meßbar $\Leftrightarrow \mathcal{B} + \mathcal{R}$ offen, äuß Maß $\mathcal{R} < \varepsilon$.

(3) $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = 0 \to$ Maß $\sum \mathcal{B}_i = \sum$ Maß $\mathcal{B}_i$

(4) Maß translationsinvariant, spiegels in 0 wenn Achsen nicht schief werd.

(5) Drehinvarianz: Wenn Einheits$\square$ Inhalt mit λ mult , so auch achs$||$. Quadr. mit Seite $\frac{1}{2n}$. Durch solche kann man Kreis von innen approx, (3) also auch Kreis mult mit λ; $\lambda = 1$

Df (6) ${}^{\mathfrak{B}}\!\int f = \int f\chi\mathfrak{B}$ wo $f\chi\mathfrak{B} = 0$ auch wenn f nicht def.

(7) $\mathfrak{B}$ abs. beschr, f stet. $\to {}^{\mathfrak{B}}\!\int f$ exist.

(8) $\mathfrak{B}$ offen, beschr, f stet. und beschr $\to {}^{\mathfrak{B}}\!\int f$ ex

(9) $f, g \in \mathcal{L}$, $\|fg\| < \infty \to fg \in \mathcal{L}$ [oBdA $f, g \ge 0$]
Bew:

(a) $f \in \mathfrak{T}$ $\|g - g_n\| \to 0 \to \|fg - fg_n\| \to 0$
(b) $|f| \le C$: nur $n \le x \le n$
(c) f bel: $f_n = \min(f_{nn}) \nearrow f$ $\|g - g_n\| \to 0$

7/8

noch Lebesgue-Integral

(1) Ist $x = \varphi(t)$ verzerrungsbeschränkt, $\nearrow$, $\varphi(x_1)\varphi(x_2) \le \lambda(x_1 - x_2)$, so ist $\int f(\varphi(t)) \le \lambda \int f(x)$ wenn $f \ge 0$
Bew:

$$T_n(\varphi(t)) = s_n(t)$$
$$\|g(\varphi(t))\| \le \lambda \|g\|$$

(2) Affine Transf des 2-dim Inhalts:

  (a) Streckg in Achsenrichtg

  (b) Drehung, Transl.

(3) Wenn $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\|g\| < \infty$, $\int f_n \to 0$, so braucht nirgends $f_n(x) \to 0$ zu gehen.
Beispiel: Nimmm $p_n > 0$, $\sum p_n = \infty$, $f_n = 1$ auf einem Int der Lge p_n, 0 sonst, $\{n_k\}$ so dass

$$f_{n_k+1} + \dots f_{n_{k+1}} \geq e(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(3') Aber wenn $\int f_n = I_n$, $f_n \geq 0$, $\sum I_n < \infty$, so folgt Kgz von $f_n \to 0$ fast überall.
Bew: $g_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \searrow 0$

8/9

(4) $f^2, g^2 \in \mathcal{L} \to (f+g)^2 \in \mathcal{L}$
Bew: In $[a,b]$ $|f|, |g|$ nach unten bei ε abschneiden, $\varepsilon \to 0$. Die (∞, ∞) dann links und rechts abschneiden.

(5) Siehe zur allgemeinen Theorie (über abstrakten Mengen) Riesz-Nagy S. 132

(6) [Will man $\mathcal{L}$ nach Riesz einführen, so braucht man Treppenfkt $T_n \searrow 0$ $\to \int T_n \searrow 0$.
Zum Beweis schneide von jedem Horizontalstück aussen links u. rechts ein Viertel weg, so daß eine abgeschl Strecke übrig bleibt: $\int T_n$ fällt auf die Hälfte. OBdA sei T_n gleich so, dann $\{x \mid T_n \geq \delta\}$ abgeschlossen, monoton fallend, Durchschnitt leer, also für ein n leer, $\exists$ $|T_n| \leq \delta$, $\int T_n \leq \delta_l$]
durchgestrichen mit der Bemerkung:
Stimmt nicht: die neue Folge ist nicht monoton!

9/10

Integral einer stet Fkt f auf komp Gruppe:

(1) $f \neq \text{const} \to \exists g_\nu \in G : \max \frac{1}{n} \sum_1^n f(g_\nu x) < \max f(x)$
Bew: Sonst haben alle $g^{-1}\mathfrak{T}$, wo $\mathfrak{T} = \{x \mid f(x) = \max f\}$ einen nichtleeren Durchschnitt, da endl. viele jeweils einen $\neq \emptyset$ haben $\forall_g x_0 \in g^{-1}\mathfrak{T} \to g x_0 \in \mathfrak{T} \to \mathfrak{T} = \mathcal{G}$

(2) Alle $\varphi = \frac{1}{n} \sum f(g_\nu x)$ sind gleichgradig stet und glm beschränkt in $\mathcal{G}$; desgl die $\psi \in \Psi =$ abg glm Hülle

(3) Sei $\mu = \inf_\psi \max_{\mathcal{G}} \psi(x)$. Dann gibt es Folge $\psi_i \Rightarrow \psi$, $\max_x \psi = \mu$, $\psi =$ abg Hülle, ψ stetig. Nach (9) ist dann $\psi = \text{const}$.

(4) ψ ist durch f eind. bestimmt: sonst $\exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fakt links}}}{\varphi_1} > \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rechts}}}{\varphi_2}$

10/11

$$(1-\Delta)f = f - \frac{1}{2}\sum_1^n f(g_\nu^1 x) < f - \frac{1}{2}\sum_1^n f(g_\nu^2 x) = h$$

$$f = (1+\Delta+\Delta^2+\cdots+)f < \sum_0^\infty p_\rho f(g_\rho x) \qquad \sum p_\rho = 1$$

Also ist links-invar. Integral $\overset{\text{geht nicht}}{=}$ rechts-invar. Integral.

(5) Damit hat man ${}^{\mathcal{G}}\overline{\int} p$ und Lebesgue-Integral.

11/12

25/6/62 Stellungen, Schief

1. Je zwei $X, Y \in \mathcal{R}^n$, $X \neq 0$, ordne zu

$$Y/X = \Big\{ \underbrace{\operatorname{Re}\frac{X^*Y}{X^*X}\ \operatorname{Im}\frac{X^*Y}{X^*X}}_{\mu=\xi+i\eta} \underbrace{\sqrt{Y^*Y-(\mu)^2}}_{\xi} \Big\}$$

2. U unitär $\to UY/UX = Y/X$
3. $\rho \geq 0 \to (\rho Y)/X = \rho(Y/X)$

3'. $|\lambda| = 1 \to \lambda Y/X = (\lambda\mu, \zeta)$, wenn $Y/X = (\mu, \zeta)$

4. $(Y+\lambda X)/X = Y/X + \lambda$ (Translation um λ; $\zeta = \text{const}$)
5. Durchläuft D alle Vektoren mit $|D| = d \cdot |X|$, so durchläuft $(Y+D)/X$ alle Stellungen, die von Y/X den eukl. Abstd $\leq d$ haben.

12/13

Bew: OBdA $X = (1\ 0\ \ldots\ 0)$, und wegen 3, 4 auch $\zeta = 1$, $Y^*X = 0$, also $Y = (0\,1\,0\ \ldots\ 0)$ erreichbar, $D = (a\ b\ c\ 0\ \ldots\ 0)$, $c \geq 0$, $|a|^2+|b|^2+c^2 = d^2$ Abst^2 der Stellungen ist

$$\delta^2 = |a|^2 + (\sqrt{|1+b|^2+c^2} - 1)^2;$$

$$|b|^2 + |c|^2 = d^2 - a^2 = \rho^2, \quad |b| \leq \rho$$

$$|1+b|^2 + c^2 = 1 + 2\operatorname{Re} b + \underbrace{|b|^2+|c|^2}_{\rho^2}$$
$$\leq 1 + 2\rho +$$

andererseits $\quad \geq \begin{cases} 1-2\rho+|b|^2+c^2 & \rho<1 \\ 0 & \rho\geq 1 \end{cases}$

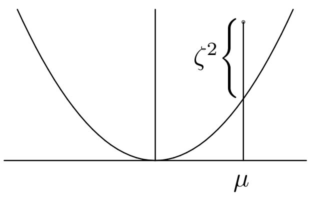
stets also $\quad 1-\rho \leq \sqrt{|1+b|^2+c^2} \leq 1+\rho$

$$|\sqrt{}-1| \leq \rho$$

und alle Werte in diesem Interv. werden angenommen.
$\delta^2 \leq |a|^2+\rho^2 = d^2$ werden angenommen.

13/14

6.



7. Zwei Punkte auf Geraden im Poincaré-Halbraum nehmen, wenn man sie durch gleiche **???** Winkel koppelt, [nehmen] ihren maximalen Abstand an einem Ende an:

$|\mathfrak{e}_i| = 1 \ \mathfrak{e}_i, \mathfrak{a}_i = (\ldots 0)$

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{a}_i + \rho_i \mathfrak{e}_i \cos\varphi + \rho_i \mathfrak{z} \sin\varphi \quad \mathfrak{z} = (001)$$

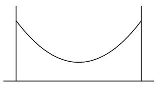
$$\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 + (\rho_1\mathfrak{e}_1 - \rho_2\mathfrak{e}_2)\cos\varphi + (\rho_1-\rho_2)\mathfrak{z}\sin\varphi$$

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)^2 = (\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2)^2 + (\rho_1\mathfrak{e}_1 - \rho_2\mathfrak{e}_2)^2\cos^2\varphi + (\rho_1-\rho_2)^2\sin^2\varphi$$
$$+ 2(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2)(\rho_1\mathfrak{e}_1 - \rho_2\mathfrak{e}_2)\cos\varphi$$

$\cos\varphi = x:$

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)^2 = c_0 + c_1 x + \underbrace{\left((\rho_1\mathfrak{e}_1 - \rho_2\mathfrak{e}_2)^2 - (\rho_1-\rho_2)^2\right)}_{\geq 0,\ \text{da}\ |\rho_1\mathfrak{e}_1 - \rho_2\mathfrak{e}_2| \geq |\rho_1-\rho_2|} x^2$$

$c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ mit $c_2 \geq 0$ nimmt max am Intervallende x an



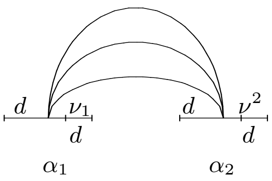
14/15

8. Zweireihige Matrizen:
Zu $A \in \mathbb{C}_{2\times 2}$ gebe es N, D mit $A = N + D$, N normal, $|D| = d$.

Dann gibt es zu jedem $AX/X = s$ ein s' auf der Seele von $\mathfrak{W}_A$ (der Poincaré-Geraden durch die 2 EWe von A) mit $|s-s'| \leq 2d$

siehe S.17

Wenn $\mathfrak{K}_\rho$ eine beliebige "Ebene" durch s bedeutet und $\mathfrak{K}_{\rho+2d}$ die mit gleichem Eukl Mittelpkt auf $i = 0$ und um d größerem Radius, so enthält $\mathfrak{K}_{\rho+2d}$ einen EW von A.
Bew: $s_1 = NX/X \to |s_1 - s| \leq d$ nach 5. Ferner gibts nach 7 ein $s' \in$ Seele $\mathfrak{W}_A$ mit $|s' - s_1| \leq d$, denn an den Enden ist $|\nu_i - \alpha_i| \leq d$ bei passender Numerierung, <u>wenn</u> $|\alpha_1 - \alpha_2| > 2d$;



die Kugel durch s' mit gl. Mittelpkt wie $\mathfrak{K}_\rho$ hat Radius $\leq \rho + 2d$ und enthält ein α_i.
<u>Wenn aber</u> $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 2d$ und ...?

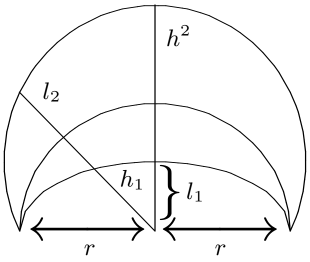
15/16

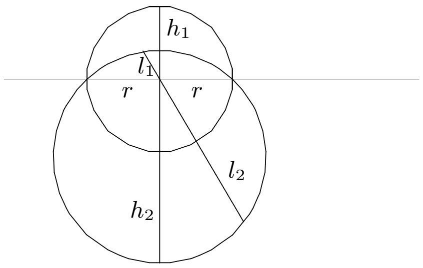
9. Vermutungen über Zykliden (mit Halbkreis-Seele $\perp$ Poincaré-**???** ebene)

   (a) Der Grdriss einer Zyklide mit Spitzen λ_1, λ_2 ist eine Ellipse mit Brennpkten λ_1, λ_2.
   Bew: = Projektion eines Ellipsoids in $\mathfrak{P}$ in einem durch λ_1, λ_2 eindeut. bestimmten Büschel

   (b) Hat der Grdriss einer Zyklide in einem Streifen der Breite $2d$ Platz, so enthält jede Halbkugel, die die Zyklide trifft, nach Vergrößerung des Radius um d eine Spitze
   [Anmerkung:] Stimmt *[Verweis auf Bew 9b]*

   (c)

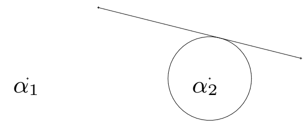




Es ist $h_1 h_2 = r^2$ nach Sehnensatz.
Ebenso $l_1 l_2 = r^2$

16/17

Bew 9b: Ein Breitenkreis $\mathfrak{B}$ der Zyklide $\mathfrak{Z}$ sei ein Kreis, der bei der Inversion, die $\mathfrak{Z}$ in einen Kreiskegel $\mathfrak{K}$ mit Spitze nur v überführt, in einem Breitenkreis $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{K}$ überführt.



Alle Halbkugeln, die $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{B}'$ berühren, umhüllen einen Kreis des konzentrischen Büschels um 0. Daher umhüllen alle Halbkugeln, die $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{B}$ berühren, einen Kreis des Büschels um α_1, α_2.Von innen wächst also der Abstd zudem, bis die Halbkugel in eine senkrechte Ebene ausartet (dann schlägt die Halbkugel nur in eine die ganz $\mathfrak{Z}$ und daher beide α_v enthält). Also der max Abstd von λ wird von einer Tangente an die Grundrisskurve vom Brennpunktpaar geliefert, ist also $\leq d$, wo d die kleine Achse. (Richtigkeit von (a) vorausgesetzt).

17/18

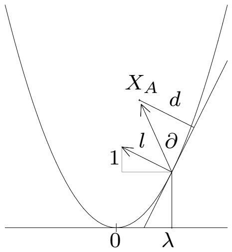
Aus 9b folgt: $A = N + D$, N norm $\lceil D \rceil = d$, beide haben einen Stellgspkt $X_A \in \mathfrak{H}_\rho =$ Halbkugel mit Radius ρ. Dann enthält die konzentrische $\mathfrak{H}_{\rho+d}$ einen EW α_v von A.
Bew: OBdA <u>berührt</u> $\mathfrak{H}_\rho$ die Zyklide. 9b

10. Der 2-dim Wertevorrat von $\begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist die Ellipse mit Brennpkt ± 1, $b = p$, $a = \sqrt{1+p^2}$.
Bew: längere Rechnung

10' Die kleine Halbachse von $\mathfrak{W}\begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ist

11. Im Paraboloid $\mathcal{P}$,
$X_A =$ Stellg (X, AX), ist für $X^*X = 1$
$\|(A-\lambda)X\|^2 = \sqrt{1+|\lambda|^2} \cdot d = \ell\partial$
Bew: $\ell = \{-2\operatorname{Re}\lambda \quad -2\operatorname{Im}\lambda \quad 1\}$ ist normal zu $\mathcal{P}$ in λ.
Also ist für $X_A \in \mathfrak{W}_A$

$$\left.\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} d\right\} = \left\{\begin{matrix} \lceil A-\lambda \rceil^2 / \sqrt{1+|\lambda|^2} \\ \lfloor A-\lambda \rfloor^2 / \sqrt{1+|\lambda|^2} \end{matrix}\right.$$



18/19

12. Die Randpunkte von $\mathfrak{W}_A$ werden geliefert von Eigenvekt von

$$(A-\lambda)^*(A-\lambda)$$

zum EW

$$\sqrt[4]{1+|\lambda|^2} \cdot \sqrt{d_{\substack{\min\\ \max}}}$$

10" $C = [A, A^*]$ hat EWe $\pm|c|i\sqrt{|c|^2+|s|^2}$, wenn $A = \begin{pmatrix} \alpha & c \\ & \beta \end{pmatrix}$ mit $\delta = \beta - \alpha$;
daher $|c| \leq \{\frac{1}{2}\operatorname{Sp} C^*C\}^{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{|c|^2+|\delta|^2}$.
$\big|[AA^*]\big| \geq c^2$

13. <u>Einschl. Satz für 2-reihige Matrizen</u> 27/6/62

Erklärt man die Schiefe σ_A für $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ durch $\sigma = \frac{1}{2}|\gamma|$, so ist für $A = (a_{\kappa\lambda})$:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left\{\sum |a_{ik}|^2 - \sum |\alpha_i|^2\right\}$$

$$\sigma \le \left\{\frac{1}{32}\,\mathrm{Sp}[A, A^*]^2\right\}^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left\lceil [A, A^*] \right\rceil^{\frac{1}{2}}$$

und wenn eine Halbkugel $\mathfrak{H}_\rho$ einen Pkt von $\mathfrak{W}_A$ im Poincaréraum enthält, so enthält $\mathfrak{H}_{\rho+\sigma}$ einen EW von A.

19/20

14. Setzt man bei $n = 2$

$$\tau_A^2 = \|AA^* - A^*A\|,$$

so ist bei $A \sim \begin{pmatrix} a & c \\ & \beta \end{pmatrix}$, $\delta = \alpha - \beta$

$$\tau_A^2 = \frac{1}{4}|c|\sqrt{|c|^2 + |\delta|^2},$$

und es gilt

$$|\frac{\tau}{2}| \le \tau A \qquad \sigma \le \tau_A$$

15. $\tau_{A+B}^2 \le \tau_A^2 + \tau_B^2$, wenn $[A, B^*] = 0$

16. $n = 2$: Ist $A = N + D$, N nor, so $\sigma_A \le |D|$.
Denn die Ellipse $\mathfrak{W}_A^2$ hat in der D-Umgebung der Strecke $\mathfrak{W}_N^2$ Platz, hat also kleine Halbachse $\le |D|$.

20/21

17. Es ist $\underbrace{\lceil AA^* - A^*A \rceil}_{C} \le A^2$

Bew: $\downarrow = |\mu|$, wo μ ein EW von C.
$C \le AA^*$, also $\mu \le \lceil A \rceil^2$, ebenso $\mu \ge -\lfloor A \rfloor^2$

18. Def Für $A = D + U$, $D = \mathrm{diag}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$,

setze

$$s_A = \sup_\lambda \left\{ \lfloor D - \lambda \rfloor - \lfloor A - \lambda \rfloor \right\}$$

19. Satz:
Dann ist $s = s_A$ die kleinste, also günstigste Schranke mit der Eigenschaft: Enthält die Halbkugel $\mathfrak{H}_\rho$ einen Pkt von $\mathfrak{W}_A$ im Poincaréraum, so enthält die konzentrische Halbkugel $\mathfrak{H}_{\rho+\delta}$ einen EW.

20. Es ist $s_A \leq \lceil U \rceil$.
Denn *[durchgestrichen:* die Vor. sagt $\lfloor A-\lambda \rfloor \leq \rho$, wenn $\lambda =$ Mitte $\mathfrak{H}_\rho$ und dann folgt *]* für ein X mit $|X| = 1$, $|A - \lambda X| = \lfloor A-\lambda \rfloor$

$$\min |\alpha_i - \lambda| \leq |(D-\lambda)X| \leqq |(A-\lambda)X| + |UX| \leqq \lfloor A-\lambda \rfloor + |U|$$

NB: Von $|X|$ wird dabei nur gebraucht: $\nearrow$ von $|x_i|$ abhängig.

21/22

20. Im Sinn von Def 18 ist $s_A \leq \vartheta_U$ (Frob-Norm)

21. Aufgabe: Ist der Diagonalteil D von A die im Sinn von ϑ nächstgelegene normale Matrix bei A?
Nein:

$$A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gibt

$$U^{-1}AU = B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

also

$$\vartheta^2 \left(B - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2},$$

aber $\vartheta^2 (A - \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}) = 1$
Anders gesagt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = G + H$$

$$\vartheta^2(A-G) = \vartheta^2(H) = \frac{1}{2} \quad .$$

22. Vermutung: Für $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix} = U + D$ ist

$$\vartheta^2(U) \leq 2 \begin{bmatrix} \min \\ N \text{ nor} \end{bmatrix} \vartheta^2(A-N).$$

NB: richtig für $n = 2$ nach 16, 23(2), da $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ -\rho & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & 0 \\ 2\rho & * \end{pmatrix}$

[Der folgende Beweis schließt an Seite 23 unten an.]
Bew: OBdA: $a_{11} + a_{22} = 0$ (sonst const. I abziehen), dann $a_{11} = \frac{d}{2} - a_{22}$ reell (mal $e^{i\varphi}$). Dann $-a_{12} = \overline{a_{21}}$. Wäre $|a_{12}| > |\frac{d}{2}|$, so

ergäbe Transf von $\begin{pmatrix} 0 & a_{21} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ auf Diagform kleinere Summe ausserhalb der Diagonale.

22/23

23. Ist $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ die im Sinn von ϑ^2 nächste normale Matrix bei A *durchgestrichen: [* und wird N auf Diagonalform transformiert angenommen *]*, so ist

    (1) $(\overline{a_{ii}} - \overline{a_{kk}} a_{ik} + (a_{ii} - a_{kk})\overline{a_{ki}} = 0$

    (2) $|a_{ik}| = |a_{ki}| \leq \frac{1}{2}|a_{ii} - a_{kk}|$
    durchgestrichen: [und zwar $= 0$ wenn $n_{ii} = n_{kk}$ *]*

Bew: Genügt für $n = 2$, $i = 1$, $k = 2$: $U = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$, $c = \cos\varphi$, $s = \ldots$

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= |(U'AU)_{12}|^2 + |(U'AU)_{21}|^2 \\ &= |a_{11}cs + a_{12}c^2 - a_{21}s^2 - a_{22}cs|^2 + |\ldots a_{21} - a_{12}\ldots|^2 \end{aligned}$$

hat Min für $\varphi = 0$, dort $c = 1$, $s = 0$. Das gibt Koeff $c^3 s = 0$, also

$$\mathrm{Re}(a_{11} - a_{22})(\overline{a_{12}} + \overline{a_{21}}) = 0$$

Transf mit $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \\ & 1 \end{pmatrix}$ gibt hieraus $(\underbrace{\overline{a_{11} - a_{22}}}_{\overline{d}})a_{12} + (\underbrace{a_{11} - a_{22}}_{d})\overline{a_{21}} = 0$, also (1).
Bew (2): *[Zwei Zeilen durchgestrichen; Verweispfeil auf den am Ende von S. 22 angefügten Beweis, s.o.]*
$d \neq 0 \rightarrow |a_{12}| = |a_{21}|$.
$d = 0 \rightarrow$ Tranf mit pass U gäbe Verkleinerung von $|a_{12}|^2 + |a_{21}|^2$ ausser wenn beide $= 0$.

23/24

24. Folge: Zu $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ existiert U unitär mit $U^*AU = B$, $(|b_{\kappa\lambda}|)$ symmetrisch,
    Folge 23:

25. Nur dann ist der Diagonalteil D einer Dreiecksmatrix A die nächste normale Matrix bei A (im Sinn von ϑ^2), wenn $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$

26. Lesen: Horn-Zykliden
Kommerell Grenzgebiet.
B.Schmidt, Über die Ecken des numerischen Wertebereichs in einer Banachalgebra, MZ 126, 47-50 ('72)
Die Abweichung einer normalisierbaren Matrix A mit lauter versch. EW von der Normalität messen Bauer & Fikl, Num Math 2, 140, durch $\max_i |E_i|$ wenn $A = \sum \alpha_i E_i$.
$|\cdot|$ kann dabei die von einer bel Vektornorm abgeleitete Matrixnorm sein.

24/25

26.4.74
Ein Maß für die Nichtkommutativität eines normierten Rings:

$$\int_{|x|,|y|\leq 1} |xy - yx|$$

Lit. über Nichtnormalitätsmaße:

R.Kress u. H.L. de Vries u. R.Wegmann:
On non-normal matrices
Lin. Alg. and its Appl. 8 (1974), 109-120 (Sonderdruck)

Frage (25.10.76): Wie groß muss (kann) der Abstand einer [zunächst: normalen] Matrix von den nichtnormalen mit gegebenem NiNoMaß und gegebenem Spektrum mindestens (höchstens) sein?

25/26

3-Wertevorrat
Lässt sich die Abb $\lambda \mapsto f(\lambda)$ mit Polynom f auf das Innere des Paraboloids fortsetzen?

27/28

27.11.76

Idee "Schiefe von A in Eigenwert λ" definieren mit Hilfe des Verhaltens der hyperb Krümmung des Randes von $V^3(A)$ in der Nähe von $(\lambda, |\lambda|^2)$.

& 1982 Preprint Paul Binding bei separata

[1] J.N.Franklin: On the numerical solution of characteristic equations in flutter analysis.
J. Assoc. comp. Mach. 5, 45-51, (1958)

[2] Olkin: Inequalities for the norms of compound matrices
Arch Math 10, 241-242 (1959)

[3] Mott-Schneider: Matrixalgebras and Grouprelativity bounded in Norm
Arch Math 10, 1-6 (1959)

[4] J.C.Varah: The Computation of Bounds for the invariant Subspaces of a General Matrix Operator. Technical Report No. CS 66, May 26, 1967. Computer Science Dept., School of Humanities and Sciences, Stanford U $\rightarrow$ Ze 2.9.67