D 15

4300 lin.

3.2.1971 — 25.3.78

3

21. Jugendliche Gruppen Shaiz 1972

Dipl.arbeit Friedmann (Bielefeld 1975) | Anno/Math Studien 67

XV

3.2.71: $\lhd\lhd$: <u>Gemeinsame subnormale Ugr.</u> 1

V: (Stets sei gegeben $A, B \le G$, setze $M := A \cap B$, $A_1 = M_A$, $B_1 = M_B$,
$M_1 = A_1 \cap B_1$, $A_2 = M_{1A}$ usw. $X_\rho := \langle Y \lhd\lhd X \mid Y^\rho = 1\rangle$
$\rho, \sigma, \ldots$ seien Funktoren, die jedem X ein $X^\rho \le X$ zuordnen; ↓
so daß $X, Y \lhd\lhd \ldots \Rightarrow \langle X, Y\rangle^\rho = \langle X^\rho, Y^\rho\rangle$)

(1) $K \lhd\lhd B$, $N_B K^\rho \le A \Rightarrow K_\rho \le B_1$

Bew: $\langle K_\rho, h^b\rangle^\rho = 1$ $K_\rho \le N_B K^\rho \ldots \le A$ NB: Mittlereigenschaft $\lhd\lhd A$

(2.) $K \lhd\lhd B$, $K^\rho \trianglelefteq A$, $N_B K^\rho \le A \Rightarrow K_\rho \le A_2$

Bew (1) , $K_\rho = K_\rho^A \le B_{1A} = A_2$

$\pi := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ $X / X^\nu \in \ldots$, $X^\nu \ldots$

(3) Sei $K = K^\pi$ homogen (d.h. Erzeugnis homogen einfacher ...)
s. (4) $K \lhd\lhd B$, $N_B K \le A$. Dann
$K \le B_1$, und wenn $K \lhd A$, so $K \le A_2$. $K' = K$

(4) $K \lhd\lhd B$, $H := \langle$ einf. perf. SNT von K max. Ordnung $\rangle$
genügt: Erzeugnis gewisser
$N_B H \le A \Rightarrow K^\pi \le B_1$ (und wenn $P \lhd A$, so $P \le A_2$). $P = P' \le K$ und

Sonderfall:

(5) $K \lhd\lhd B$, H wie in (4), $A := N_G H \Rightarrow H \le A_2$
und wenn $K^\pi \lhd A$, so $K^\pi \le A_2$

2

Zwischenbemerkung.

Def: Charakteristik $\chi(G) := \begin{cases} p & \text{wenn } \exists S \lhd\lhd G,\ |S| = p, \text{ und } T \text{ simple } \lhd\lhd G \Rightarrow |T| = p \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

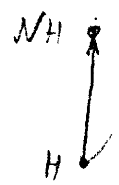
Dann ... $\Rightarrow |A_1|$ or $|B_2| = \chi(G)$.

$A \trianglerighteq N \text{ sn } B \Rightarrow A/A\cap N$ nilpotent

Sei P gruppentheoretisch perfekt, $P(G) := \langle Q \mid P \cong Q \lhd\lhd G \rangle$.

Dann (1) Aus $H = P(H) \text{ sn } B$, $N_G H \leq A$ folgt

$P(B) = P(A\cap B) = P((A\cap B)_B)$ $\qquad M := A\cap B$

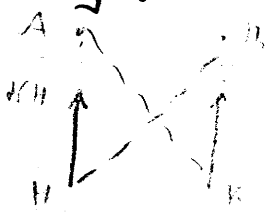
Bew:  A, M, $B \supseteq P(B) \leq N H \leq A\cap B$, $(A\cap B)_B = M_B$. Daher $H \lhd\lhd M_B$, und wenn $M_B \lhd\lhd X \leq G$ dann $P(X) \leq A_B$

Insbes. $P(M) \leq A_B, B_B, M_B$

Also $P(M) = P(M_B) = P(B)$

(2) Aus $H = P(H) \text{ sn } B$, $K = P(K) \text{ sn } A$, $N H \leq A$, $N K \leq B$

folgt $P(A) = P(A\cap B) = P(B)$ $\qquad$ (1)



insbes. $H \text{ sn } A$, $K \text{ sn } B$;

sogar $H, K \text{ sn } \langle A, B\rangle$; also

$P(A) = P(\langle A, B\rangle) = P(B)$.

Vor. 1

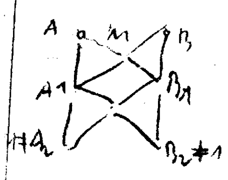
3

2

4

5

1.2 ⇒ a)



b)

1.2.5 ⇒ c)

1.2 ⇒ d)

Gemeinsame Subnormalteiler

$=p$, und
$|T|=p$

1 Sei $\langle A, B\rangle = G$, $M_G = 1$, $A \cap B = M$; $A_1 = M_A$, $B_1 = M_B$, $M_1 = A_1 \cap B_1$

Sei A_2 maximal mit $A_2 \trianglelefteq A$, $A_2 \trianglelefteq\trianglelefteq B$

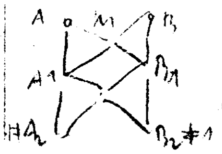
" B_2 " " $B_2 \trianglelefteq B$, $B_2 \trianglelefteq\trianglelefteq A$.

2 $1 \neq A_2 := M_{1A}$, $1 \neq B_2 := M_{1B}$

3 $A \geq N_{\cancel{B}} A_2$, $B \geq N_{\cancel{B}\,A} B_2$

5 $N_G A_2 = A$, $N_G B_2 = B$

a) $\mathrm{Soc}\, A$, $\mathrm{Soc}\, B$, $\mathrm{Soc}\, M \in \gamma$ (aufl.)



b) $M_p \neq 1 \Rightarrow A_2^p = 1$ od $B_2^p = 1$ $\quad (M_p = O_p(M))$

1.5 ⇒ c) $M_p \neq 1 \Rightarrow M_q = 1$ $\quad (\forall q \neq p)$

Sonst etwa $A_2^p = 1$, $B_2^q = 1$ nach b

$B_2^a \leq N A_2^b = A^b$ $\quad B_2^a \leq A_B = B_1$ $\quad B_2 \leq A_2$ ↯

1.2 ⇒ d) $\left.\begin{matrix} M_p \neq 1,\ A_2^p \neq 1 \\ N_G A_2^p = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \ni B_2 \leq A_2$

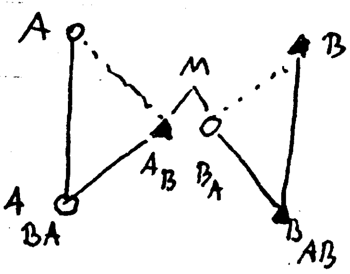
Bew. $B_2^a \leq N A_2^{p\,b} = A^b$ $\quad B_2^a \leq B_1$ $\quad B_2 \leq A_2$

[illegible]

4 AA Gemeinsame Subnormalt.: Bildwechselvoraus.

Sei $\begin{cases} N \trianglelefteq \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow N = 1; \\ 1 \neq AB; \end{cases}$ d.h. $\underbrace{N_B(A_{BA})}_{= A \cap B =} \leq A,\ \underbrace{N_A(B_{AB})}_{} \leq B$

Setze $M := A_B B_A$, also $A_B \trianglelefteq M \trianglerighteq B_A$



Satz (1) ~~Es ist $M \neq 1$ a) ∃ p ... $\triangleleft M$, ... $p' = 1$~~

Unter Vor V gilt ~~der Soc M auflösbar~~

a) $1 \neq$ Soc M auflösbar

b) ∃ $p \in \pi$ und $N_B A_{BA}^{p} = A \cap B$,

c) Wenn $B_{Ap} A_{Bp} \neq 1$, so ist ... $B_{A_p} \leq A_{BA} \leq A_B$

so ist Entweder $N_B A_{BA}^{p} > A \cap B$ oder $N_A B_{AB}^{p} > A \cap B$

Bew: a) α) Soc $M = 1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow A_B = B_A = 1 \Rightarrow A_{BA} = B_{AB} = 1$

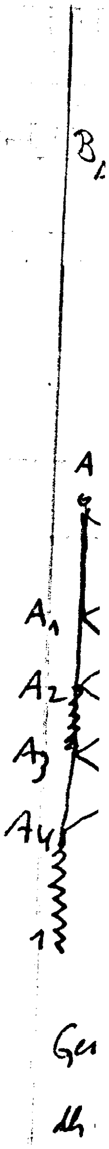
$\Rightarrow B \leq A \leq B \Rightarrow A = B = 1$ ↯

β) $P = P \cap A_B \Rightarrow P \leq N_A B_{AB} \Rightarrow P \leq N_A B_{AB} = B$

$\Rightarrow P \leq B_A \Rightarrow P \leq B_A$

γ) $A_B \triangleright P[A_B] = P[B_A] \Rightarrow = 1$ ↯

δ) $p' = p \cap M \Rightarrow p \cap A_B B_A \Rightarrow$ ↯



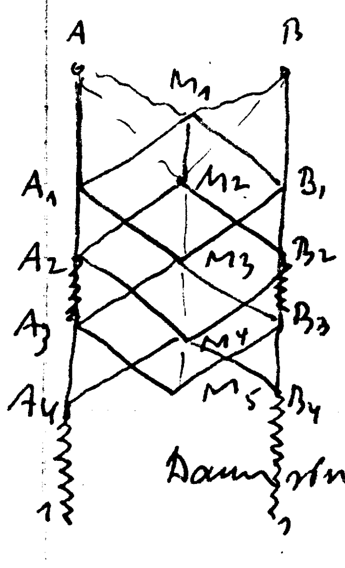
usw.

Bew b) Sei etwa $B_{A_p} \neq 1$. Dann $B_{A_p} \neq 1$, $B_{A_p} \leq M_{A_2}^{\,p})^{b}$

$B_{A_p}^{\;b} \leq \ldots_{B}(A_{BA}^{\;p}) \leq A \cap B$ $B_{A_p} \leq (A,B)_B \leq A_B \leq A$

$B_{A_p} \trianglelefteq A$, $B_{A_p} \leq A_{BA}$, $B_{A_p} \leq A_{BA_p} \leq A_{B_p}$

c) Sonst $B_{A_p} \leq A_{B_p} \leq B_{A_p}$, $B_{A_p} = A_{B_p} \ldots = 1$ ↯



Seien A, B normalisator-ablg.

$M_1 = A \cap B$, $M_2 =$ größter gemeinsamer Subnormalteiler von A und B, $A_i = (M_i)_A$, $B_i = (M_i)_B$, und $M_{i+2} = A_i \cap B_i$

Dann sind die Strecken ≀ auflösbar.

(und A_1 und B_2 primär etc.)

Genauer: $A_2^{\omega} \neq 1 \Rightarrow A_{2\,\omega} \leq A_3$

d.h. $A_{2\,\omega} < A_2 \Rightarrow A_{2\,\omega} \leq A_3$

6 $\triangleleft\triangleleft$ Gemeinsame SNT: Starke Voraus.

Vor:

$A \neq B$, $A, B <\cdot G$, $A_G = B_G = 1$. $A_{BA} \neq 1 \neq B_{AB}$

$D := A \cap B$

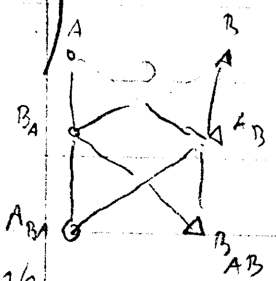
Beh: $\exists p \in \pi$: a) A_{BA} oder B_{AB} ist p-Gruppe } Satz 1

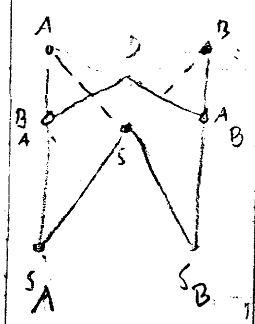
b) Ist A_{BA} nicht p-Gruppe, so $B_{AB} \leq A_{BA}$.

c) Soc A, Soc B, Soc D sind p-Gruppen

d) $D_p = B_p = (A_B)_p \overset{B_{AB} \leq}{=} (A_{BA})_p = (A_{B_p})_A$

Satz 2





Bew: α) $B_A \leq D$ sonst: $\langle B_A, A \rangle = G \Rightarrow B_A = 1$, $B_{AB} = 1$ ↯

β) $B_A = D_A \neq 1$, $A_B = D_B$

γ) $P_{min} \triangleleft\triangleleft D$, $P = P' \Rightarrow P' \leq N(A_{BA})^6 = A^6$ $P \leq A_B$

$\Rightarrow P[D] = P[A_B] \triangleleft B$, $\trianglelefteq A$, $= 1$ ↯

Also $P_{min} \triangleleft\triangleleft D \Rightarrow |P| = p$

δ) $A_{BA}^p \neq 1$ und $B_{AB}^p \neq 1 \Rightarrow P[D] \triangleleft A_B^A$ ↯

also a) ✓

etwa $A_{BA}^p \neq 1$. Dann $B_{AB} \in p$.

ε) $B_{AB}^a \leq N(A_{BA}^p)^6 = A^6$ $B_{AB} \leq A_B$ $B_{AB} \leq A_{BA}$

also b) ✓

ζ) $Q_{min} \triangleleft\triangleleft D$, $|Q| \neq p \Rightarrow Q \leq N(B_{AB})^a = B^a$

$Q \leq N(A_{BA\,p})^6 = A^6$

$Q \leq A_B \cap B_A$ $Q[D] = Q[B_A] = Q[A_B] \triangleleft A_B^A$ ↯

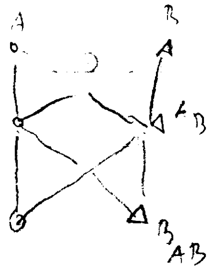
η) $Q_{min} \triangleleft\triangleleft A$, $|Q| \neq p \Rightarrow Q \leq N(B_{AB})^a = B^a$ $Q \leq B_A$ $Q \triangleleft\triangleleft D$ ↯

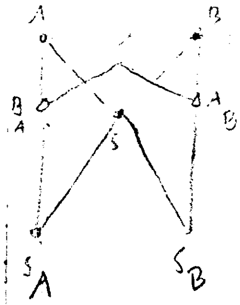
ϑ) $Q_{min} \triangleleft\triangleleft B$, $|Q| \neq p \Rightarrow Q \leq N(A_{BA\,p})^6 = A^6$ $Q \leq A_B$ ↯

7.2.71

Satz 21

Satz 21





Vor: $A \neq B$; $A, B <\cdot G$; $A_G = B_G = 1$

$S \lhd\lhd A$, $S \lhd\lhd B$; $S_A \neq 1 \neq S_B$; $D := A \cap B$

Dann $\exists X \in \{S_A, S_B\}$: $X^{\pi'} = 1$, (Sockel A_λ) [illegible]

Beh: (a) $S_A^{\pi'} \leq A_{BA}$ d. i. der perfekte Teil von S_A

(b) $S_A^{\rho\sigma} = 1 \neq S_A^{\sigma} \Longrightarrow S_A^{\rho} \leq A_{BA}$

(c) Falls weder S_A noch S_B primär, so $\exists p$: Die Sockel von A, B, D, S sind $\in p$. Es ist $S_p \leq A_B \cap B_A$, $S_{Ap} \leq A_{BA}$, $S_{Bp} \leq B_{AB}$. Ferner ist $S_A^{qp} = 1$ oder $S_B^{rp} = 1$ mit $r, q \in \pi$.

Bew (a) Sonst $1 \neq S_A^{\pi} = \pi H$, H hom. $\lhd A$, $H \leq \mathcal{N} H = 1$ $H \leq A_B$, $\leq A_{BA}$.

(b) $S_A^{\rho\sigma} = 1 \neq S_A^{\sigma} \Longrightarrow S_A^{\rho\sigma} = \mathcal{N} S_A^{\sigma} \Longrightarrow S_A^{\rho} \leq A_{BA}$

(c) S_A nicht primär $\Rightarrow A_{BA} \neq 1$.

(d) Wenn weder S_A noch S_B primär, so $A_{BA} \neq 1 \neq B_{AB}$,

(d): $\exists p$: Soc$(A, B, D, S) \in p$, und A_{BA} oder $B_{AB} \in p$

Wenn $A_{BA} \in p$, so $S_A^{\pi} = 1$, $S_A^{q\ldots} = 1$, $S_A^{q} \leq A_{BA}$, $S_A^{qp} = 1$;

Wenn $B_{AB} \in p$, so $S_B^{rp} = 1$.

In jedem Fall $S_p^{b} \leq \mathcal{N} S_{A^r} = A$, $S_p \leq A_B \cap B_A$.

Daher $S_{Bp} \leq B_{AB}$. NB: Wenn $q \neq r$, so $B_{rp} \leq N S_A^{rr} = A$,

$B_{rp} \leq A_B$, $A_{qp} \leq B_A$.

NB: $Z(O_q(\ldots B)) \leq A_B$

8 11 Gemeinsame Subnormalteiler, starke Vor.

(1) Beispiel von B. Fischer (31.1.71, Oxford)

Für $G = \mathrm{Sym}\,6$, $A = Z_G(12)$, $B = Z_G(12)(34)(56)$

ist $G \to A_{A,BA} = \langle (12) \rangle$, $B_{AB} = \langle (12)(34)(56) \rangle$

Bew: $A_B = \langle (12) \rangle \langle (34) \rangle \langle (56) \rangle$, $B_A = \langle (12) \rangle . V_4(3456)$

(2) Sei $A <\cdot G$, $A_G = 1$, $N \trianglelefteq A$, nicht $(N^{qp} = 1, (\mathrm{Soc}\,N)^p = 1)$.

Sei $N \leq S \trianglelefteq\trianglelefteq A$. Dann $S \trianglelefteq\trianglelefteq B <\cdot G \Rightarrow S_B^{qp} = 1$, $\mathrm{Sock}\, S_B^p = 1$,

~~dann~~ $N S \leq A$.

Sonst $t \in NS$: $A^t = B \neq A$ $S_A \geq N$ $S_B \geq N^t$ $\notin qp$

$\not\models$ zu S.7

3. $A, B <\cdot G$, verschieden, $U^A \trianglelefteq\trianglelefteq B$, $U^B \trianglelefteq\trianglelefteq A$

$\Longrightarrow$ $U^{qp} = 1$ Bew S. 7, $S := U U^{AB}$

4. $A, B <\cdot G$, $A \neq B$, $U^{AB} \leq A$, $U^{BA} \leq B$

$\Longrightarrow$ $U^p = 1$.

Fischers Bsp.

Satz 1:

$K = K' \in \mathfrak{X}$

Allgemeiner:

Satz 2

$K, K' \in \mathfrak{X}$

Frage über trans. G

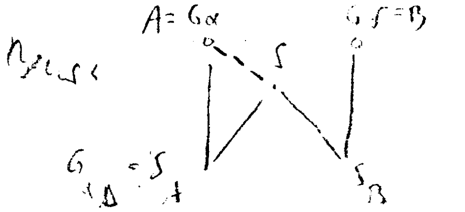
Methode f. Sims?

Subkonstituenten prim. Gruppen
SIMS

Fischers Bsp. — Satz 1: $k = k' \in \mathfrak{N}$

Hat G_α auf einer selbstgepaarten Bahn Δ einen nilpotenten Konstituenten, so ist $G_{\alpha\Delta}^{\;qp} = 1$ für passende Primzahlen p, q

Beweis



$S_A \cong S_B \in \mathfrak{N}$, also

$S' = G_{\alpha\delta}$ in A, B

$S_A \cong S_B$ nach p. 7, Satz 2c

Allgemeiner:

1. Satz 2: $k, k' \in \mathfrak{N}$

Hat G_α auf zwei gepaarten Bahnen Γ, Δ nilpotente Konstituenten, so ist $G_{\alpha\Gamma}$ oder $G_{\alpha\Delta}$ eine qp-Gruppe: $x^{qp} = 1$, $(\text{Sockel } X)^p = 1$. ($x^{p^n} = 1$ zugelassen)

Bew. S. 7 Satz 2

Frage über kreis G

Frage: Kann bei transitivem G $G_\alpha^{\Pi} \in \mathfrak{N}$ sein, G_α^{Γ} aber $\notin \mathfrak{N}$?

Methode f. SIMS?

Kann man Schinkas distrib. Subnormalfunktoren $\mho_k^p$ etc (4.18) für das SIMS-Problem verwenden?

Gepaarte Konstituenten zweier Permdarst.

Paare von transitiven Darstellungen zweier Ugr. A, B von G.

Sei $G = \Sigma\, A g_i B$

Dann heißt der treue Konst. von A auf $Bg_i^{-1}A$ in $G:B$
gepaart mit dem — B auf Ag_iB in $G:A$

Gepaarte Konst. haben proportionale Grade

Wenn 2 gepaarte [illegible] und $A, B < G$, so
ist wohl [illegible] kein gp

Graphlösen!! Stimmt!

Permdarst

Bgi A ; GA

IgfB in GA

frede

, 10

Gruppen vom Grad p:

Von den 1970 bekannten einfachen Gruppen besitzen genau die folgenden Untergruppen vom Index p: $PSL(2,5)$ $PSL(2,7)$ $PSL(2,11)$ M_{11}, M_{23}; $PSL(n,q)$ wenn $\frac{q^n-1}{q-1}=p$; A_p

(P. Neumann, OW 1971)

A. Schinzel

Math. Inst. PAN, Śniadeckich 8, Warszawa 1 — 25.2.71

schreibt mir am 17.2.:

In der PermGr $\mathrm{Aff}(n, p) =: G$ gilt die Zyklen-Eigenschaft: $\sigma \in G$, Zyklenlängen von σ haben ggT $= 1$ $\Rightarrow$ σ hat Fixpkt.

Er fragt: Folgt das aus der union property: wenn $H \le G$, $H \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$ dann $\exists \beta \in \Omega: H \le G_\beta$.

Ich habe mir überlegt:

Sei G eine PermutGr des Grades n mit regulärem Normalteiler N. Hat ein $H \le G$ eine normale $\pi(n)$-Hallgruppe N_0 mit Fixpunkt, so hat H einen Fixpkt. (Bew.: Zassenhaus-Thompson auf den Konst. von $N_G N_0$ auf $\mathrm{Fix}\, N_0$ anwenden)

Daher gilt die Zyklen-Eigenschaft für jede Gruppe G vom Grad p^a mit reg. Normalteiler.

Frage: Gilt eben stets $H \cap N = 1 \Rightarrow \mathrm{Fix}\, H \neq \emptyset$?

(Klar ist, dass für jedes F mit $N \le F \le G$ F über N zerfällt: $F = NF_1$.)

Nein! $\exists\, G$: $|G| = p^a$, $N \trianglelefteq G$, $G = NA = NB$, $A \cap N = B \cap N = 1$, $A \not\sim_G B$, $|A| = |B| = p$.

25.2.71

Frage: Sei $A_i \lhd\lhd G$ $(i=1..n)$ und $J := A_1A_2\cdots A_n \le G$. Ist dann $J \lhd\lhd G$?

Allgemeiner:

Frage: Seien $A_i \lhd\lhd G$ $(i=1..n)$; sei B ~~die größte~~ maximal unter den Untergruppen von G, die in $A_1A_2\cdots A_n$ enthalten sind. Ist dann $B \lhd\lhd G$?

Bem.: Eine schwache Form der Vertauschbarkeit von A, B besteht darin, daß $\langle A,B\rangle$ bei der Zerlegung nach dem Doppelmodul A,B nur eine beschränkte Zahl von Summanden hat.

Frage: Genügt eine in diesem Sinne schwache Vertauschbarkeit von A mit allen A^x, um $A \lhd\lhd G$ zu machen?

Forts. 14

$\triangleleft\triangleleft$ weak permutability

27 6 71

Def: $A_1, A_2, -, A_n (\leq G)$ cg (commutegebildet)
$:\Leftrightarrow \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu$ unabh. von Reihenfolge

Satz:

(i) $A_1, -, A_n$ cg $\Rightarrow A_1 A_2 \cdots A_n \leq G$

Def: $A_1 \cdots A_n$ Gcg $:\Leftrightarrow \forall x_\nu \in G,\ A_1^{x_1} \cdots A_n^{x_n}$ cg

Satz:

? $A_1 \cdots A_n$ Gcg $\Rightarrow A_1^T, A_2, \cdots, A_n$ G cg $(T \subseteq G)$? Frage
Dann könnte man Regel nachmachen.

Kor.:

Sei $A, B \triangleleft\triangleleft G$ (endl.) $1 = (|A:A'|, |B:B'|, |G:A|, |G:B|)$ Frage
Folgt dann $A_\nu B$?

Satz: $|G| < \infty \Rightarrow [\text{Sockel } G, \text{Fitting } G] = 1$

Beweis wie [53].

Indirekt: genügt $N \underset{\min}{\trianglelefteq} G$, $N \leq P$, P Syl$_p$-Gr. Fitt G $\Rightarrow [N, P] = 1$

aber $N \trianglelefteq P$, daher $[N, P] < N$, $= 1$.

Satz: $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $A \leq Z A_p \Rightarrow A^p \leq Z G_p$.

Bew. analog $A = 1^p$. $[A, G_p] \leq A_p$.

Kor.: $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $A \leq Z A_\pi \Rightarrow A^\pi \leq Z G_\pi$

π mit A

6.9.71 Subnormalteiler $|G|<\infty$

6.9.71

Aus $A \lhd\lhd \langle A, A^g \rangle$ für alle $g \in G$ folgt $A \lhd\lhd G$

mit Geg (4) $A^G = G$ $\quad 1 \neq N \lhd G \Rightarrow G = AN$

Bew: (1) $A = A'$ einfach: $A \lhd A^g$

(2) A einfach, $A' \neq 1$: $\langle A, A^g \rangle$ p-G. Baer (Gorenstein) ... 133, 2.5

(3) G nicht einfach. im minimalen Gegenbeispiel,

(4) Sei N minimaler $\lhd G$. Es ist $NA \lhd\lhd G$ und minimaler Normalteiler also

$G = NA$. ~~Also~~ $D := A \cap N \trianglelefteq A$, $D \lhd G$. ~~...~~ Nun $D = 1$, $N, D \lhd G$

$D = N$, ... (sonst wäre N p-Gruppe)

da sonst $AN = A$ ~~...~~ ... A nur p-Fixsel; $|N| = p^\lambda$.

Wegen $G = NA$ ist $|\langle A, A^g \rangle : A| = p^\lambda$, daher $A^p \lhd \langle A, A^g \rangle$, 2

$G = A^G \leq N(A^p)$. ~~...~~ $A^p \lhd G$. Aus Def

~~wegen ...~~ $A^p = 1$, da sonst ~~...~~. $G = A^p A = A$. Satz 3

Dann ist $G = AN$ eine p-Gr, $A \lhd\lhd G$.

Prob: 19

Wielandt: E eine SNT von $A \Rightarrow E^G \leq N(A)$ wenn $E = E'$

$1 \neq N \lhd G \Rightarrow G = AN$ $\quad \leq N(A^p) \sim |E| = p$.

im ersten Fall $G = E^G A = A$

im zweiten $A^p \lhd G$, $G = A^p G$ wenn $A^p \neq 1$. Also $A^p = 1$

nun Baer A^G p-Gr.

NB: Aus $B \leq J_G(A)$ folgt nicht $A \lhd\lhd \langle A, B \rangle$

Beispiel: $G = S_6$, $A = \langle (12) \rangle$, $B = \langle (135)(246) \rangle$ 4.

bzw $G = A_5$? $A = \langle (12)(34) \rangle$ $B = 1$

1. Aus $A, B, C \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $A^\alpha \vee BC = CB$, $C^\alpha \subseteq AB^\alpha$ folgt $A \vee B^\alpha$ $\{A^\alpha \vee B$

Bew: $A^\alpha \vee BC \trianglelefteq\trianglelefteq G$

$A \vee B^\alpha C^\alpha$, $AC^\alpha B^\alpha = B^\alpha C^\alpha A$

Hieraus $C^\alpha \subseteq AB^\alpha$ folgt AB^α, $B^\alpha A$.

2. $\alpha \in \mathcal{N}$ (Def nachstehend), $A, B \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $A \vee B \to (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$

Def. $\alpha \in \mathcal{N}$ (Normalfunktoren) $:\Leftrightarrow \left(A^B = A,\ B^A = B \to (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha \right)$
$\sigma\alpha = \alpha\sigma$ für Isom σ

Satz 3. $\alpha \in \mathcal{N}$, $\nu: G \to F = G^\nu \in \mathfrak{X}$ ein Homomorphismus
$\Rightarrow$ $\underline{\alpha\nu = \nu\alpha}$

Bew: $H := G \times F$; $(g,f)^\pi = f$; $g^\sigma := gg^\nu$, $\sigma: G \to H$.
~~[illegible]~~ Dann $\sigma\pi = \nu$. Es ist

b) $G^{\sigma\alpha} = G^{\alpha\sigma}$, daher $G^{\sigma\alpha\pi} = G^{\alpha\nu}$

a) Es ist $H/\mathrm{Ker}\,\nu \cong F \times F \in \mathfrak{X}$, ~~[illegible]~~ und $\mathrm{Ker}\,\nu \le G^\sigma \le H$, also $G^\sigma \trianglelefteq\trianglelefteq H$. Ferner

$H = GG^\sigma = GF$, daher (nach 2)

$G^\alpha G^{\sigma\alpha} = G^\alpha F^\alpha$, π macht hieraus $G^{\sigma\alpha\pi} = F^\alpha$.

Mit a) gibt das $\underline{G^{\alpha\nu}} = G^{\sigma\alpha\pi} = F^\alpha = \underline{G^{\nu\alpha}}$.

4. ~~[illegible]~~, $|C| = p$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Dann $C^\alpha = 1 \Rightarrow G^\alpha = 1 \ \forall G \in \mathfrak{G}_p$

$C^\alpha = C \Rightarrow G^\alpha = G \ \forall G \in \mathfrak{G}_p$. Bew a) G werde von seinen Elementen der Ord p erzeugt. Induktion $|G|$.

(b) G beliebig: $G \le H$ vom Typ (a) (z B. ~~[illegible]~~ Sylowgr. d. symm. Gr.)

Kurz: Auf $\mathfrak{G}_p$ ist $\alpha = \{^0_1$.

Normalfunktoren

11. 9. 71

Mit Homos sind Morph. ja nicht vertauschbar. 5

z. B. kann α die einfache perf. Gr A in 1 machen,

aber nicht eine [illegible] Gruppe mit Kopf A in ihren Rumpf abbilden.

$\alpha \in \mathcal{N}$:

Man kann $|\alpha|_G$ definieren als 6

$\Sigma j(F^\alpha) - 1$, wobei Falle [illegible] (Ausschnitte oder) Untergruppen von G durchläuft. Es ist

$|\alpha|_G \geq 0$, $= 0$ genau wenn $\alpha = 0$

$|\alpha|_G \leq |\alpha + \beta|_G \leq |\alpha|_G + |\beta|_G$

$|\alpha\beta|_G \leq |\alpha|_G \cdot |\beta|_G$

Man sollte die ~~[illegible]~~ Beweise durch Gegenbeispiele mit kleinstem $|\alpha|_G$ führen, und Folgerungen wie $\alpha = (\pi \times \pi')\alpha|(\circ \times \beta)$ kennen.

Das Erzeugnis zweier α-Bilder ist wieder eins: 7

$\langle A^\alpha, B^\alpha \rangle = \langle (A)^{B^\alpha}, B^\alpha \rangle = \langle (A^{B^\alpha})^\alpha, B^\alpha \rangle$

vorausgesetzt, daß das Produkt vertauschbarer α-Bilder wieder ein α-Bild ist. ~~[illegible]~~ Bew.: [illegible]

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

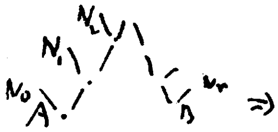
Deutung:

$A, B \leq G$: $\mathcal{S}_G(A,B) := \{x \in G \mid A^x \lhd\lhd \langle A^x, B\rangle \rhd\rhd B\}$.

Sei $S \subseteq \mathcal{S}_G(A,B)$. Dann gilt

(1) $A_p \leq O_G(B^n)\,\bar{S}$ ([illegible]), $A_p^S \leq O_G(B^n)$

(2) $A = A^n \leq \mathcal{Z}(A_p) \Rightarrow A \leq C_G(B_p)\,\bar{S}$, $A^S \leq C_G(B_p)$.

(3)  $\Rightarrow N_0 N_1 N_2 \cdots N_r \subseteq \mathcal{S}(A,B)$.

$N_r N_{r-1} \cdots \subseteq \bar{\mathcal{S}}(A,B)$

(4) Ist G eine Pgr, $A \lhd\lhd G_\alpha$, so gilt ~~$S(A)$~~
$\{g \in G \mid \alpha g = \beta,\ A \lhd\lhd G_\beta\} \subseteq S(A)$

(5) Sei $A, B \leq G$ und (G, Ω) eine Perm.-Darst. von G, setze $\Sigma_A := \{\gamma \in \Omega \mid A \lhd\lhd G_\gamma\}$
Ist $g \in G$, $\Sigma_A^g \cap \Sigma_B \neq \emptyset$. Dann ist $g \in S(A,B)$.

So erhält man ganz $S(A,B)$. Also:

(6) $S(A,B) = \{g \in G \mid \exists (G,\Omega) \text{ mit } \Sigma_A^g \cap \Sigma_B \neq \emptyset\}$.

$S(A,B)$ bringt A in die Lage, auf B zu wirken

Deutung: Der Subnormalisator $S(A,B)$ bringt A in die Nähe von B. bei: Unterer $u, v \in (u,v)$ u, v haben gemeinsamen „Vorfahren"
$g \in S(A,B)$ adjustiert A an B Forts.: 21

21

11 9 ?

Forts. Normalfunktoren von § 18 $\quad$ ganz $[A^p, A^p_p]$ ...

$*$: $A \mapsto [A^p, A_p]$ ist Normalfunktor. $\quad$ Lemma ?

Bew. $\quad A, B \trianglelefteq J$

$N := [A^p, A_p][B^p, B_p] \trianglelefteq J$

Es ist $[J^p, J_p] = [A^p, J_p][B^p, J_p] = [A^p, A_p][B, A_p] = 1$

Hilfsaussage: Ist $A \trianglelefteq G$, so ist

$[A^p, A_p] = \underline{[A^p, G_p]} = [A^p, A^p_p] =: M \trianglelefteq G$

Dann mod M ist $\underline{[A^p, A_p]} = 1$, $[A^p, G_p] = 1$.

Beweis: $\bar{\ } =$ Homom. i/M $1 = [A^p, A^p_p] = [\bar{A}^p, \bar{A}^p_p]$

$= [\bar{A}^p, \bar{A}^p_p]$ ...

(... $\bar{A}_p = \bar{A}_p$!!)

Aus $[A^p, A_p] = 1$, $A \trianglelefteq G$ folgt $[A^p, G_p] = 1$

(1)

(2)

Forts. von §

1

2

Frage: 3

4

5

Forts. von § 19: Subnormalisator

1 $A = A_1 \triangleleft\triangleleft \dots \triangleleft\triangleleft A_k = \bar{A}$, $B = B_1 \triangleleft\triangleleft \dots \triangleleft\triangleleft B_\ell = \bar{B} \Rightarrow$

$\bar{A} \to \bar{B}$ $\quad N(A_1)\,N(A_2) \dots N(A_k) \cdot S(\bar{A}, \bar{B})\,N(B_2) \dots N(B_1) \subseteq S(A,B)$

2 $N(A)\; S(A,B)\; N(B) = S(A,B)$!

Frage: 3 Wie ist $N(A)$ in $S(A,B)$ ausgezeichnet? als Linksmultiplikator?

4 Eigentlich sollte man $S_{\mathrm{Aut}\,G}(A,B)$, oder $S_{\mathrm{Op}\,G}(A,B)$ bilden. Für $\alpha \in \mathrm{Op}\,G$,

$\bar{B} = \bar{A}^\alpha$ in (1) $B_1 \to B$.

$\prod\limits_{\rightarrow} N(A_i)\; \alpha \prod\limits_{\leftarrow} N(B_j) \subseteq S(A,B)$,

daher z.B. $A_\pi^{\;\prod N A_i\, \alpha \prod N B_j} \subseteq N(B^\pi)$.

Was man allerdings so erhält, kann man auch durch Transformation $A \to A^x$.

5 Aus $x \in S(A)$ folgt nicht $x^2 \in S(A)$.

$G = S^5$, $x = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$

$A = \langle(12)\rangle \quad A^x = \langle(3,4)\rangle \quad A^{x^2} = \langle(5\,1)\rangle$

Gantzahler ... Abschlüsse

Def: Sei $\mathfrak{F} \subseteq 2^G$; $A, B \subseteq G$. Dann "gehe schwache" bzw.

Abschließung" von A in $B := \langle A^{\mathfrak{F}} \mid A^{\mathfrak{F}} \subseteq B, \ldots \rangle =: \hat{A}$ A^{s1} 12.9.M Satz 1

subnormale — — $:= \langle A^{\mathfrak{F}} \mid A^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq\trianglelefteq B \; \forall t \in T, T \in \mathfrak{F} \rangle =: \bar{A} = A^{ss}$

Bezeichnung: $\bar{A}^{(\mathfrak{F}, B)}$

Es ist $[A \subseteq] \bar{A} \subseteq \hat{A} \subseteq B$. [nur wenn $A \subseteq B$].

Satz: $\bar{A} \subseteq Z \subseteq B \rightarrow N(Z) \subseteq N(\bar{A})$

$\hat{A} \subseteq Y \trianglelefteq\trianglelefteq B \rightarrow N(Y) \subseteq N(\hat{A})$ 1'

Beide Operationen sind idempotent.

ganz schwach ...... der schwache Abschluß A^s

Dabei deckt auch Kragge 5.8 ..... Fälle: 2.

$A = B^{\mathfrak{F}} \Rightarrow A^{ss} = A$

~~mittlerweile in-ekg~~ von Gruppen, Heine gruppe, so

ist $\mathfrak{F}$ eine Klasse ~~konjugierter Ug von G, und H ≤ G~~

benutzt man oft das Erzeugnis der (subnormalen)

$\mathfrak{F}$-gruppen in H, sicherweise $\langle \mathfrak{F} H \rangle$ bzw $\langle \mathfrak{F} s H \rangle$

Satz: Ist $H \leq G$ und $\mathfrak{F}$ eine G-inv. Teil von 2^G, 3)

so folgt aus $\langle \mathfrak{F} H \rangle \leq Z \leq H$: $N(Z) \leq N\langle \mathfrak{F} H \rangle$

und aus $\langle \mathfrak{F} s H \rangle \leq Z \trianglelefteq\trianglelefteq H$: ...

Zusammenhang mit Abgrenz?, | Abschluss

Allgemeine Strukturbeziehungen 23

$\hat{}$ bzw. 12.9.71

$\,:\hat{A}\quad A^{s1}$

$\langle ? \rangle := \bar{A} = A^{s11}$

$A = \emptyset.$

Satz 1 Sei $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Klassen mit $\mathfrak{X} \subseteq N\mathfrak{Y}$.
Dann ist für jede Untergruppe $B \leq G$:

$$\mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A \cap (N\mathfrak{Y}B)_{S(BA)}) \ldots A$$

Wenn $(N\mathfrak{Y}B)_{S(BA)} \leq C$ mit $A \cap C \trianglelefteq\trianglelefteq A$,
so ist $\mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A \cap C)$.

1' Körper $\left.\begin{matrix} \mathfrak{X} \subseteq N\mathfrak{Y} \\ (N\mathfrak{Y}B)_{S(BA)} \leq C, \ A\cap C \trianglelefteq\trianglelefteq A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A \cap C)$

2. $\left.\begin{matrix} B \trianglelefteq M \lessdot G, \ M_G = 1 \\ \mathfrak{X} \subseteq N\mathfrak{Y}, \ \mathfrak{Y}B \neq \emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathfrak{X}(A) \subseteq \mathfrak{X}(A \cap M_{S(BA)})$

$A_x \in N\, B'$ im Sinne von

$X \in NY \Leftrightarrow X \cong X_1 \ldots \quad \ldots Y_1 \cong Y \Rightarrow X_1 \cong \ldots$

3) Sei $NB = \hat{B} \lessdot G$, $\hat{B}_G = 1$, $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}$.
Dann $\mathfrak{Y}B = \emptyset$ oder $\langle \mathfrak{X}A \rangle \leq \hat{B}_{S(BA)}$.

Lehrthema

PGr'.

16.9.71 Def

w

Bonn.

Def

(11.4.72)

16.9.71 Def. Ist $G \leq S^{\Omega}$, so „deute $(\alpha,\beta) \in \Omega\times\Omega$ in G" als
$\{g \in G \mid \alpha^g = \beta\} =: G_{\alpha\to\beta} = G(\alpha\to\beta)$, (α,β) in G

Deutung im Gruppenring $(\alpha,\beta)^{\wedge} = \frac{1}{|G_\alpha|}\sum x$, $x \in G(\alpha\to\beta)$
[illegible]
[illegible] $\Delta(\alpha)^{\wedge} = \hat{\Delta}\cdot\hat{\alpha}$ [illegible]

Dann ist z.B. in G: $(\alpha,\beta)^g = g^{-1}(\alpha,\beta) g = (g^{-1}\alpha g, g^{-1}\beta g)$

$\alpha(\alpha\beta) = (\alpha\beta) = (\alpha\beta)\beta \qquad (\alpha,\beta^g) = (\alpha\beta) g$

$(\alpha^g, \beta^e) = g^{-1}(\alpha\beta) h$

Bisher $\mathbb{Z}$-rel G, [illegible], das sollte

Knapps Schurbedingung umfassen (dort fehlt aber

die Wirkung von G durch Rechtsmultipl., das typisch

an Blums Methode.

Bem. Pfeile $\alpha\to\beta$ deuten:

Def. Für $\alpha,\beta\in\Omega$ sei ($G \leq S_\Omega$) $\alpha\xrightarrow{G}\beta := \{g \mid \alpha^g = \beta\}$ (in G)

$\alpha\xrightarrow{QG}\beta := \frac{\sum g}{|G_\alpha|}$ (in QG)

d.h. $(\alpha\beta)^{\wedge} \in \mathrm{Hom}(F,F)$. ? oder ? [illegible]

die Matrix $\frac{\sum D(g)}{|G_\alpha|}$ [illegible]

(11.9.72) Die G-invarianten Funktionen ~~zweier~~ Variablen $\Omega = G:H$

sind die $\mathrm{diag}(G\times G)$-rechts- und $H\times H$-linksinvarianten Funktionen auf $G\times G$.

P - Gr

(1) Gleichheiten in der approximierenden Folge
$S^{\Omega} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(n)} \geq \dots \geq G$:
Eine ähnliche Frage für universelle Algebren behandelt R.W. Quackenbush: The descending varietal chain of a variety.
Abstract 72T-A212, Notices AMS 19, p. A 576.

Folge

~

Ze

..A 576.

4.11.71 $|G|<\infty$. Dann $A \trianglelefteq\trianglelefteq G \iff$ aus $g \in \langle A, A^g\rangle$ folgt $g \in A$

$\iff$ aus $g \notin A$ folgt $g \notin \langle A, A^g \rangle$.

6.11.71 $|G|<\infty$ $A \leq G$, $(G, a, a, \ldots) \leq A$ f. jedes $a \in A$

$\Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq G$

Bew.: Sei G Gegenb. minimaler Ordnung, auch A minimal

$A \leq H < G \Rightarrow (H, a, \ldots) \leq A \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq H$

$\exists_1 M <\cdot G$, $A \leq M$; $A^x \leq M \Rightarrow x \in M$

Ist $B \trianglelefteq\trianglelefteq A$, so $(G, b, b, \ldots) \leq (A, b, b, \ldots) \leq B$

also $B \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Daher ist A einköpfig: $R \lhd\cdot A$, $R \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

$R=1$ $\{$ sonst wähle N min $\trianglelefteq G$; $A, N \leq N_R$;

falls $R \trianglelefteq G$, folgt in G/R: $A/R \trianglelefteq\trianglelefteq G/R$, $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$ ↯

also $R \ntrianglelefteq G$, daher $AN < G$, $A \trianglelefteq\trianglelefteq AN \trianglelefteq\trianglelefteq G$ ↯ $\}$

Also A einfach. Falls $|A|=p$,

dann $(x,a) \in M \Rightarrow a^x \in M \Rightarrow A^x \leq M$, $x \in M \Rightarrow G \leq M$ ↯

Also $A' = A$. Ist $x \notin M$, so $D := A \cap A^x$; $(G, d, d, \ldots) \leq A \cap A^x = D$

$D \ntrianglelefteq G$, $D < A$, $D = 1$.

Ist $x \notin M$, so $E := A^x \cap M$ $(M, e, e, \ldots) \leq A^x \cap M = E$, $E \trianglelefteq\trianglelefteq M$, $[E, A] = 1$

Wäre $E \neq 1$, so $A^x \cap A^{xa} \geq E > 1$, $A^x = A^{xa}$, $A^x \lhd \langle A, A^x \rangle = G$ ↯

also $A^x \cap M = 1$ wenn $x \notin M$. Aber $a^x \in M$ ↯

Subnormalisator (Forts.)

Satz. Jedem $g \in G$, $a \in A$ sei ein $g_a \in G$ so zugeordnet, daß

$x_a \in \langle a \rangle\, b^{x \neq 1} \langle a \rangle$ für ein $b \neq 1$ in $\langle a \rangle$,

für jedes $t \in G$ und $a^t \in A$ $\quad x_{a^t} \in (x_a)^t$ gilt.

Sei $g_{a,a,\dots,a} \in A$ (genügend lang) für alle g, a.

Dann ist $A \trianglelefteq\trianglelefteq G / G_{min}$.

Bew wie S. 27: $\quad B \trianglelefteq\trianglelefteq A \Rightarrow B \trianglelefteq\trianglelefteq G$

A einfach

Fall $|A| = p$: $\quad x \notin M,\ x_a \in M \Rightarrow b^{x^{\pm}} \in M$

$A^{x^{\pm}} \in M$

Fall $A' \neq 1$: $\quad D := A \cap A^t = 1$ für $A^t \neq A$, da $D \trianglelefteq\trianglelefteq A$ einfach

$E := A \cap M^x = 1$ für $x \notin M$, da $[E, A^x] = 1$,

$A \cap A^{a^x} \geq E$. $E \neq 1 \Rightarrow a^x \in NA \quad A^x \leq NA$,

$AA^x = G \quad A \trianglelefteq G / \dots$

$\exists\, x \in M,\ a \neq 1 \in A, \quad x_a \in M$

dann $b^x \in M \quad A \cap M^x \neq 1,\ x \in M$

Folge.

Satz $A \leq G$, $\quad a^{a^{\cdot^{g}}} \in A$ f. alle $a, g \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Schärfer

Satz $A \leq G$, $A = \langle E_\nu \rangle$, $\quad E_1^{E_2^{\cdot^{E_n^G}}} \subseteq A \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Sei G

$\vec{G}$, dess

Element

(Wir bezeich

und

Führe

gebung vo

die offene

laufbaren

$\mathring{A} = \{$

$A \in G, \dots$

Sei

Elemente

Form Ko

Exponent

FMTh I: A°

II :

Kr

od. viel. abg.

Sei G eine endliche Gruppe. Bilde den Graphen $\vec{G}$, dessen Ecken die Klassen erzeugungsäquivalenter Elemente $\neq 1$ von G sind: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$, (Wir bezeichnen sie aber als Elemente von $\vec{G}$ kurz mit x), und $x \to y$ bedeutet $y \in \langle x, x^y \rangle$, d.h. $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] = \langle x \rangle^{\langle y \rangle}$.

Führe $\vec{x} := \{y \mid x \to y\}$ als (die kleinste) Basisumgebung von x ein und bilde Topologie. Dann sind die offenen Mengen die nach rechts unbeschränkt durchlaufbaren (randlosen). A° ist die kleinste A enthaltende $= \{x \mid \exists\, A \to x_1 \to \dots \to x\}$ offene Menge (offene Hülle).

$6^{x^\pm} \in M$, $1^{x^\pm} \in M$

$^\circ A = \{y \mid \exists\, A \leftarrow y_1 \leftarrow \dots \leftarrow y\}$ ist der topologische Abschluß von A.

so A einfach, $A^x] = 1$

Sei für $A \subseteq G$ $F_0[x_i \mid A]$ die Menge der Elemente von $G * \langle x \rangle$, die in reduzierter Form Koeff aus $\langle A \rangle$ haben [und für x_i die Exponentensumme 0]. Dann gilt: Für $A \subseteq G$ ist

$\neq 1$, $x \in M$

FMA: A° = subnormale Hülle von $\langle A \rangle$ in G

$= \{c \in G \mid \exists\, f \in F_0[x \mid A]$ mit $f(c) = c\}$

Konj: $c \in F_0[c \mid A]$

Beweis II (a) $c \in \vec{B} \iff c \in F_0[c|A]$ ...

Beweis $\Rightarrow$: denn $c \in \langle a, c^{-1}ac, c^{-2}ac, \dots \rangle$

$\Leftarrow$ $F_0[X, a] := a x^{n} b x^{n} c x^{n} \dots a x^{m} b x^{-m} \dots x^{m+n} \dots$ $c \in \langle A, [A, C] \rangle$

(b) $c \in F_0(c|A)$ mod $\langle A \rangle^{\langle c \rangle}$ ist $c \equiv 1$, also $c = f(c) \equiv 1$,

$c \in A_1$, wenn A_1 das oberste Glied der Normalkette

usw.: also $c \in \langle A \rangle^{\langle A c \rangle} = H$, $c = a \cdot \bar{c} \bar{a} \bar{c} \dots$

$f \in A[X]$, und $c = f(a, \dots)$, $a \in A$, und

(c) Gleiches ~~gilt für $B := \langle A, c \rangle$~~: gilt

$d = f(d)$ mit $f \in B[x]$, so gibt es $h \in A[x]$ mit

$d = h(d)$.

Beweis: $\exists$ ~~$k \in a[x]$, $c = k(c)$~~

$k \in b[x_1, \dots]$, $d = k(a, c, x)$ $b_i \in B$

~~$f = \dots a\, x^{?} \dots c \dots = f[a, b, x]$~~

setze $l(x) := f[a, k(a, \dots x), x)$

$x =$ ...

Wenn a fix ist, so muß ...

$f \in [\dots x, a]$ $\Rightarrow$ $f^{n}(x) \in \vec{a}$ ...

H $\leq$ G

Verwende

Was

Fra

4. $H \leq G$. Dann $H \trianglelefteq G \iff H = H^G$

$\Rightarrow$ a) für $H \trianglelefteq G$ ..., dann $g \in \langle h, h^g \rangle \subseteq H^G$ ... $H = \langle H, g \rangle$

b) $\Leftarrow$ $h \in H, g \in G \Rightarrow$ ... h^g ... enthält also $H \trianglelefteq G$ nach [illegible]

Verwendung: $\langle A \rangle = {}^{\circ}A \cap A^{\circ}$
${}^{\circ}A = f_G(A)$

Was bedeutet die vereinfachte Relation
$a - b \iff$ ... oder ...?

Frage: $s, t \in S$, ... $\Rightarrow s, t \in S$?

Frage: $A_i \in \mathcal{H}, G$ $\langle A_i, A_j \rangle \in \mathcal{H}$
$\Rightarrow A_i^G \in \mathcal{H}$?

Frage: Genügt für $A \lhd\lhd G$-Nachweis $\forall g \in G\ \exists G' \leq G$: $\{ A \cap G' \lhd\lhd G',\ g \in G'$?

[Antw.: 2.2.80: Nein: für $\forall A\, \mathcal{H}$ $\forall_g$ $A \cap \langle g \rangle \trianglelefteq \langle g \rangle$

Tip: Untersuche $E, F \subseteq G$. e^f

E at F: E attrahiert F :⇔ $e^e \in E$ schließlich, und

oder E nat F :⇔ E wirkt normal-attraktiv auf F
:⇔ E at F und $E = E^e$, $F = F^e$ für alle $e \in E$.

Folgerung: $E, F \subseteq G$ endlich, E at $F \not\Rightarrow \langle E \rangle \lhd\lhd \langle E, F \rangle$.
Sonst wäre aber Subnormalisator eine Gruppe.

Frage: Genügt für $A \lhd\lhd \langle A, g \rangle$ schon $[g, a, \dots, a] \in A$ f. $\forall a \in A$?

siehe Peng, Sonderdr., MZ 93, 294-298 (1966)

Kurosch: Normalketten verfeinern unter Beschränkung auf (schrittweise) Gefälle 2, 3, ... Gilt bei der Endverfeinerung ein Eind.-Satz?

Als Rands
[illegible] der von
Es gilt
Bemerk
Sei G
Dann
Bew.

Lokalisierung von Einbettungsfragen

Als <u>Randstelle von H in G</u> könnte man einen (minimalen) Ausschnitt $A = Z/N$ von G bezeichnen, der von H weder gedeckt noch gemieden wird.

Es gilt z.B. wohl: $H \lhd\lhd G \Leftrightarrow H \cap A \lhd\lhd A$ für alle solchen A.

Vielleicht [illegible] [illegible] H hervorzuheben

Bemerkung über Faktorisierung:

Sei $G \leq G$; $A, B, C \subseteq G$; $AB, AC \leq G$.

Dann ist $A\langle B, C\rangle \leq G$, also $A\langle B C\rangle = \langle A B C\rangle$

Bew.: $P :=$ ~ Linksmenge $L(D) \geq AB, AC, \langle ABC\rangle$

Mittenwald-NOTIZEN

22.12.-3.4.
71 72

1. Schur-Zassenhaus angeben mit $x^2 \cdot m(x)$

2. Bei PGr vom Grad p auf arg K achten

3. ~~Ist A ⊲⊲ G, wenn A ein Erzeugendensystem E besitzt, das attraktiv ist ($e^{e^{-1}} \subseteq A$) [und längs einer Komp.-Reihe von A gestaffelt ist, so daß die ersten paar Erzeugenden jeweils ein Glied A_i der K'Reihe erzeugen? Genügt vielleicht sogar aus jedem $A_i - A_{i+1}$ ein Element?]~~ Ja: Bartels wenn die e primär

4. Ist das Erzeugnis jeder bez. Abhängigkeit vollständigen Teilmenge einer endl. Gruppe subnormal?

5. Ist d…
abhä…
[Für …
sonst …
von …

6. Hänge…
endlich…
mit Stab…
des gerichte…

7. Meine…
genau …
und ~~be…~~
~~stets~~ folg…

8. Nach To…
über) o…

22.12.-3.4.
71 72

5. Ist die Menge aller von einem El't indirekt abhängigen El'te einer endl. Gruppe eine Untergr.? [Für mehrere El'te kann das nicht stets gelten, sonst wäre die mengentheoretische Vereinigung von subn. Ugr. eine Ugr.]. Vorfrage:

6. Hängen in einer einfachen Gr. je zwei El'te indirekt voneinander ab? Zu untersuchen wäre vielleicht mit Stabilitätsgruppe einer Zusammenhangskomponente des gebildeten Abhängigkeitsgraphen.

~~7. In einer endlichen Gruppe G ist die Ugr. A genau dann subnormal, wenn aus $a \in A$ und $b \in G$, b konjugiert zu a in $\langle a, b \rangle$ [illegible] stets folgt $b \in A$~~

8. Nach Topologien suchen, in denen $ab\bar{a}\bar{b}$ (oder $\bar{a}ba$) stetig ist

29.1.72 Konjugiertheit maximaler Untergruppen

1. Ist $\{G_i\}$ eine Normalreihe von G, $A <\cdot G_1$, so deckt A alle G^j bis auf genau eines (G^j etwa).

Sei $\{G_i\}$ Hauptreihe $=1$

2. Ist $A \cap G^j$ nicht ~~…~~, so ist $A = N_G(A \cap G^j)$

(was zu Konj.-Krit. $A \underset{G}{=} B$ führt) und $H \trianglelefteq G$, dann $H \leq A$ ... $A^{j\,H} = A^j$

3. Vor 2 ist stets erfüllt, wenn man eine HR durch A_G wählt, ~~…~~ etwa $G_j = A_G$, und G_{j-1} so, daß $A \cap G_{j-1} \neq G_j$, d.h. daß A nicht G^j meidet. Dann ist übrigens für $G^j = 1$.

geht das denn immer?

~~4. …~~

4. Entsprechendes gilt für Gruppen mit Operatoren.

13.2.72

(1) Ist $A \leq$

so wirk

d.h. alle

(1a) Ist nach

NB: $\overset{n}{X} A$ nicht

eine Äqu

und ~~…~~

(2) Vor 1, 1a.

(2a) Allgemein

(3) Enthält

so ist

merkt dan

G_V ist

daher G

Warum so

(4) $G_{\tilde V}$ ist

$V^\tau \sim V$ is

Hängt

(5) Kann

schwä

13.2.72 **Komplemente**

Grundlagen Vorl. GrTh 1970/2 § 32–33.

(1) Ist $A \le G$, $|G:A| = n$, $A_0 \trianglelefteq A$, A/A_0 abelsch, so wirkt G von rechts, $N(A)$ von links auf

$$\mathfrak{W} := \{ V \mid V \subseteq G,\ A x \cap V = 1\ \forall_{x \in G} \}$$

d.h. $N(A) \times G$ wirkt auf $\mathfrak{W}$.

(1a) [Ist noch $(x \mapsto x^n) \in \operatorname{Aut}(A/A_0)$, so] definiert

$$V \sim W \;\cong\; \prod_{Av = Aw} (v w^{-1}) \in A_0$$

$N(A) \times G$ wirkt auf $\tilde{\mathfrak{W}}$.

(NB: $\overset{n}{\times} A$ wirkt reg. auf $\mathfrak{W}$)

eine Äquivalenz, die mit den Wirkungen verträglich ist, und $\forall_{V,W}\ \exists_1\ a \in A_0$ a: $W \sim aV$. d.h. $A/A_0 \xrightarrow[\text{reg}]{\text{wirkt}} \tilde{\mathfrak{W}}$.

(2) Vor 1, 1a. Dann $g \mapsto a$ $(Vg \sim aV)$ ist Homom. $G \to A/A_0$

(2a) Allgemein: Die Supplem. von A sind die DKL-Stabilisatoren G_α zu G-Räumen auf denen A {tr. reg.} wirkt; Komplemente: A_α.

(3) Enthält A_0 die Fokaluntergruppe von A mit G, so ist $aVa \sim V$ $(\forall a \in A\ \forall V \in \mathfrak{W})$; daher wirkt dann A von rechts transitiv auf $\tilde{\mathfrak{W}}$, und $G_{\tilde V}$ ist Supplem. zu A mit Schnitt A_0, sowie $G_{\tilde V} = G_{\tilde W}$ $\forall W \in \mathfrak{W}$, daher $G_{\tilde V} \trianglelefteq G$ … Fassung: $\exists_1\ G_0 : A G_0 = G$, $A \cap G_0 = A_0$.

Was passiert, wenn A/A_0 durch Konjugation regulär auf $\tilde{\mathfrak{W}}$ wirkt?

(4) $G_{\tilde V}$ ist invariant unter allen $\sigma \in \operatorname{Aut} G$, für die $V^\sigma \sim V$ ist und $A^\sigma = A$, $A_0^\sigma = A_0$.

Hängt diese Methode mit Eckmann-Transfer zusammen?

(5) Kann man Gaschütz-Satz so beweisen? Schur-Zass. auf Ω-Gruppen übertragen

Komplemente, Forts.

(1) Ein Supplement B zu $A \leq G$ mit $B \cap A = A_0$ heißt zweckmäßig ein **Komplement** zu $A : A_0$

Also: $B \in \operatorname{Kpl} A : A_0 \; :\Leftrightarrow \; AB = G, \; A \cap B = A_0$

(2) Die $B \in \operatorname{Kpl} A : A_0$ sind die Stabilisatoren G_α in denjenigen G-Räumen, auf die A transitiv wirkt mit $A_\alpha = A_0$.

(3) Für Verlagerung genügt es, zu jedem (bzw: zu einem) $a \in A$ ein V zu finden mit $V^a \sim V$.

$A : A_0$

I_0

G_d

acost the

Gruppen vom Grad p.

Anlässlich Lektüre von Camerons Entwurf 29.2.72:

1. Haben $K_1K_2 = u_3K_3^T + x_3J$ (C hat $-u_3$)
$K_1K_1^T = j_1 I + \lambda_1 J$ | & zyk. (C hat n_1 statt j_1)

Hieraus elegante Herleitung von $j_\nu = u_{\nu-1}u_{\nu+1}$:

Mod J gilt $K_1^T K_1 K_2 \equiv j_1 K_2$, & $\equiv u_3 K_1^T K_3^T \equiv u_3 u_2 K_2$.

also $j_1 = u_2u_3$; $k_1^2 = j_1 + \lambda_1 p$, $k_1 = j_1+\lambda_1$

Die K_ν sind paarweise vertauschbar, auch mit K_ϱ^T.

2. Es wird $K_1K_2K_3 = u_3K_3^TK_3 + k_3x_3J$
also ~~[illegible]~~ $= u_3 j_3 I + (u_3\lambda_3 + k_3x_3)J$
also $u_1j_1 = \dots$ (zyklisch) aber auch $u_3\lambda_3 + k_3x_3 = \dots$ (zykl.)
also auch $\dfrac{u_3 j_3}{u_3 k_3 + k_3 x_3} = \cdot$

Daher $k_1(x_1+u_1) = \cdot = \cdot$ (auch bei C).

Aufstellen alle Symmetrien, die durch $K_i \to J - K_i$ entstehen.

3. Weitere Gedanken: Besser $D_\nu = K_\nu - \frac{k_\nu}{p}J_\nu$ betrachten.
$D_\nu\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 0$. $D_1D_2 = u_3D_3^T$, $D_1D_1^T = j_1 I_0$
wo $I_0 = I - \frac{1}{p} J$

4. Die K_i, K_ϱ^T weiter in 01-Matrizen zerlegen (je 16 Stück?).
vermöge $X \circ Y := (x_{\alpha\beta}y_{\alpha\beta})$ bilde $K_1\circ K_2\circ K_3^T$ usw.

5. Ist
6. Man
Dab
Setzt
so wird
(vgl δ^2).
K_1K_2
also
(nämlich
(vgl δ^3 im
$G_1+G_3+b_1$

5. Ist $\mathfrak{k}^{e} \,\|\, p-1$, so ist $2^{e-1} \mid$ # Primid.faktoren von K.
(mit Vielfachheiten).

6. Man sollte K nach Potenzen von $\delta = 1-\varepsilon$ entw. ($\varepsilon^{\ell} = 1$)

Dabei müsste $\bar\delta = 1-\varepsilon^{p-1} = 1-(1-\delta)^{p-1} = -\delta-\delta^2-\dots-\delta^{p-1}$

Setzt man $K = k(1 + a\delta + b\delta^2 + \dots)$ $\qquad \bar\delta^2 \equiv \delta^2 \; (\delta^3)$

so wird wegen $K\bar K \equiv k^2 \quad (p, \delta^3)$

$$(1+a\delta+b\delta^2)(1-a\delta-a\delta^2+b\delta^2) \equiv 1$$

(wge δ^2):
$$b-a-a^2+b \equiv 0 \quad (p)$$
$$b \equiv \frac{a^2+a}{2} \quad (p)$$

$K_1K_2 = u_3\bar K_3$ ergibt $(1+a_1\delta+b_1\delta^2)(1+a_2\delta+b_2\delta^2) \equiv 1-a_3\delta+(b_3-a_3)\delta^2$

also $\quad a_1+a_2+a_3 \equiv 0 \quad (p) \qquad$ (Rest nichts neues)

[nämlich $\quad b_1+b_2+a_1a_2 \equiv b_3-a_3 \equiv \frac{a_3^2-a_3}{2}$

$\qquad a_1^2+a_1+a_2^2+a_2+2a_1a_2 \equiv a_3^2-a_3$]

wge δ^3 in $\quad (1+a_1\delta+b_1\delta^2+c_1\delta^3)(1+a_2\delta+b_2\delta^2+c_2\delta^3) =$

$$= 1+a_3(-\delta-\delta^2-\delta^3)+b_3(\delta^2+2\delta^3)-c_3\delta^3$$

$c_1+c_2+b_1a_2+a_1b_2+a_2 \equiv -a_3+2b_3-c_3 = a_3^2-c_3$

besser wenden

noch Grad p

1. $(1+a_1\delta+b_1\delta^2+c_1\delta^3)(1+a_2\delta+b_2\delta^2+c_2\delta^3)(1+a_3\delta+b_3\delta^2+c_3\delta^3)\equiv 1$

$$c_1+c_2+c_3+b_1a_2+b_1a_3+b_2a_1+b_2a_3+b_3a_1+b_3a_2 \dots + a_1a_2a_3 \equiv 0$$

$$c_1+c_2+c_3-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+a_1a_2a_3 \equiv 0 \quad (p)$$

2. Wenn κ_1, κ_2 den Körper F vom Grad f erzeugen, so ist $f \equiv 1 \ (3)$ und $\kappa_3 \in F$ und man kann annehmen, dass die Untergruppe der Ordnung f im p-Sylow-Norm. vorkommt.

*

3. Kern $q \mid j$ ist $= \bar{q}$, daher gibt es $2\cdot 2^e$ Konjugierte zu q, also Grad $F \equiv 0 \ (2^e)$ ~~ungerade~~, und Grad q ungerade, daher $q^{\text{ungerade}} \equiv 1 \ (p)$: q ist 2^e-te Potenzrest mod p.

4. Die K_ν als Funktionen zweier Variablen über $\mathbb{F}_p$ auffassen und durch Polynome darstellen.

1. Um …
man …
q von …
das …
$p-1$ gehö…

2. Zu j…
primäre…
gehört e…
[… s
\+ …

zusamm…
dieser Va…
Invariant…
bemerken…

1. Um alle „Invarianten" für p aufzustellen, braucht man nur ~~[illegible]~~ zu jedem primären Teiler q von $p-1$ ein $\bar q$ mod $r=\frac{p-1}{q}$ zu bestimmen, für das $q\bar q \equiv 1$ mod r. Zu dem Teiler $\prod q_i$ von $p-1$ gehört dann $\prod \bar q_i$, reduziert mod $\frac{p-1}{\prod q_i}$.

2. Zu je zwei Partitionen der Menge der primären Teiler von $p-1$ in je zwei Teilmengen gehört eine eindeutig bestimmte dritte: zu $rs.tu$ $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ und $rt.su$ gehört $ru.st$. Wie hängen die zugehörigen drei Invarianten zusammen? Bilden die Invarianten bezüglich dieser Verknüpfung (vorausgesetzt, daß jede Invariante bei nur einer Partition auftritt) eine bemerkenswerte algebraische Struktur?

1. Abschätzung der w_i in $K_1 K_2 = w_3 K_3^T + x_3 J$:

$$(w_1 w_2 w_3)^2 = j_1 j_2 j_3 \leq \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-1}{4} \cdot \frac{p-3}{4}, \text{ also}$$

bei Cameron'schen

$$|w_1 w_2 w_3| \leq \frac{p^{3/2}}{8}$$

2. Schreibt man $k_1 k_2 = u_3 k_3 + x_3 p$ wie bei Cam. f, so führt Elimination von u_3 aus

$$k_1(p-k_1)\, k_2(p-k_2) = (p-1)\, u_3^2\, k_3(p-k_3) \text{ zu}$$

$$k_1 k_2 \equiv k_1 + k_2 - b_3, \text{ wo } b_3 = a_3 + x_3,\ a_3 = y_3 + x_3$$

genauer: $k_1 k_2 = k_1 + k_2 - b_3 + p(b_3 - y_3 - 1)$, wobei

(die rechte Seite ist klein) $\mathbb{Z} \ni y_3 = \frac{(p-1)\, a_3 x_3}{k_1 k_2}$

also $k_1 k_2 y_3 = (p-1) a_3 x_3$

$k_1 k_2 k_3 y_3 = (p-1) A x_3$, wo $A = a_1 k_1 = a_2 k_2 = a_3 k_3$

3. Weil $a_i = u_i + x_i$ gilt auch $k_i a_i = A$ unabhängig

Bew: $K_1 K_2 = a_3 K_3^T + x_3 L_3^T$ wo $K_3 + L_3 = J$

$K_1 K_2 K_3 = a_3 K_3 K_3^T + x_3 K_3 L_3^T$

Spur: $\ldots = a_3 k_3 p + 0$

Also $A = \frac{1}{p} \cdot \text{Spur } K_1 K_2 K_3$

1. Sind {...

onsmatri...

und ...

falls ...

Ugruppen

2. Wenn ...

sind, in

und ...

matrizen

oder S_2 ...

über die ...

3. Wenn ...

S nach

$G_1 \cap G_1^N$

(falls meine

Frage:

4. In jeder

Wenn ...

p und Verallg.

1. Sind $\left\{\begin{matrix} S_1, S_2 \text{ zwei } n\times n\text{-Matrizen} \\ G_1, G_2 \text{ zwei Gruppen von } n\times n\text{-Permutati-}\end{matrix}\right.$
onsmatrizen derart, dass $S_i^{-1} G_i S \leq$ ~~[illegible]~~ {Perm. Matr.}, und ist Rang $(\mathbb{C}S_1 + \mathbb{C}S_2 + \mathbb{C}J) = 3$, so hat $G_1 \cap G_2$, falls transitiv, wohl mindestens 3 Klassen konj. Ugruppen des Index n

Cam. f_1 2. Wenn also G_1, G_2 zwei Gruppen vom Grad p sind, in denen beiden $(12\cdots p)$ vorkommt, und lässt sich G_i durch S_i in Permutations-matrizen transformieren, so ist $G_1 \cap G_2$ wohl auflösbar

$q_3 = q_3 + x_3$ oder S_2 lin. abh. von S_1 und J, falls meine Vermutung über die Zahl der Klassen konj. Ugr. vom Index p zutrifft.

3. Wenn insbesondere $N \in \mathrm{Nor}\langle(12\cdots p)\rangle$ und G_1 durch

sk_3 S nach Perm. Matr. (über $\mathbb{Q}$) transformiert wird, so ist wohl $G_1 \cap G_1^N$ auflösbar oder $S\; S^N\; J$ lin. abh.

abhi i (falls meine Vermutung zutrifft).

$_1 = J$

Frage: Potenzrestcharakter von K ?

4. In jeder der Verkettungsmatrizen K_i sind k_i, l_i 2^{e-1}-te Potenzreste mod p

Wenn $2^e \mid p$. Denn $k_i^2 = j_i$ ~ 2^e-ter Rest.

Wenn $\sigma = \sigma S + \lambda t$, $St = p-1$, so sind S, t 2^{e-1}-te Reste.

T

die endli

$(|H|, |A|)$:

Dann ist

A auf H

Bew: D

Hg_0 ver

Der Stabilisa

nach S-Z

einen Fixpu

Vermutun

für die A

Grad H

Elemen fo

Teilerfremde Wirkung: Fixpunkte

Die endliche Gruppe A wirke auf G. Sei $H \leq G$, $(|G| < \infty)$, $(|H|, |A|) = 1$, $H = H^A$, $Hg_0 = (Hg_0)^A$.

Dann ist $\#$ Fixp. A in Hg_0 = $\#$ Fixp A in H (und daher hat A auf Hg_0 dieselben Bahnlängen wie auf H).

Bew: Das semidirekte Produkt $H \rtimes A$ wirkt auf Hg_0 vermöge $x^{(h,a)} := h^{-}x^{a}$ oder ähnlich. Der Stabilisator von g_0 hat Ordnung $|A|$, ist also zu A nach S-Z-F-Th in HA konjugiert, also hat auch A einen Fixpunkt.

Vermutung: Meine Fixpunktformeln gelten auch für die Anzahl der Fixpunkte von A in $G:H$, wenn G und H von A festgelassen werden und $(|G|, |A|) = 1$ ist. Ebenso für die Anz. d. Fpe in Hg, wenn das von A fest ist.

M

G transitiv

(1) Die Vor

der Norma

gestalt Ana

faktoren

(1') Dann

(2) vermut

so kann

transform

vom Ind

=1 sind

Monomiale p-Gruppen G

10. 4. 72

G transitiv, von Grad $\not\equiv 0$ mod p.

(1) Die Koeff. seien in C_p. Genau dann läßt sich der Normalteiler der Det 1 von G auf Permutationsgestalt transformieren, wenn alle seine Diagonalfaktoren $= 1$ sind.

(1') Dann kriegen alle $g \in G$ die Gestalt Skalar · Permut.

(2) Vermutung: Hat die Koeff-Gr die Ord p^a, so kann man G genau dann auf Skalar · Permut. transformieren, wenn G eine Untergruppe H (Normal?) vom Index p^a besitzt, in der alle Diagonalfaktoren $= 1$ sind.

31.4.72 Ko

Def. H,

6) K

(1) H:H,

$\Rightarrow$

Bew.

andererseits =

(2) Wenn

Komple

(3) Ansatz: b

auf die l

finden, w

31.4.72 **Komplemente von Hall-Ausschnitten**

Def.: $H_1 \trianglelefteq H \leq G$. a) nenne $H:H_1 \in \mathcal{H}(G)$, wenn

$$(|G:H|, |H:H_1|) = 1$$

b) $K \in Kpl_G(H:H_1) :\Leftrightarrow K \leq G,\ KH = G,\ K \cap H = H_1$

[illegible]

(1) $H:H_1 \in \mathcal{H}(G)$, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_G(H:H_1)$, $K_1K_2 = K_2K_1$

$\Longrightarrow \quad K_1 = K_2$

Bew.: $|K_1K_2 : K_1| \;\Big|\; |G:K_1| = |H:H_1|$

andererseits $= |K_2 : K_1 \cap K_2| \;\Big|\; |K_2 : H_1| = |K_2 : H \cap K_2|$

$= |HK_2 : H| = |G:H|$

also $|K_1K_2 : K_1| = 1$

(2) Wenn für einen Hall-Ausschnitt von G ein [illegible] normales Komplement in G existiert, so ist es das einzige Komplement.

(3) Ansatz: Durch Kombination der Links- und Rechtswirkung auf die Menge R der Vertretersysteme von G:H weitere G-Räume finden, auf denen H transitiv wirkt.

<u>Verlagerungssatz analog zu Gaschütz Verallg. von Schur-Zass.:</u> 29.9.72

sei $H^* \trianglelefteq H \leq G_p \leq G$; $\forall_p \exists$ nKpl G_p^* von H/H^* in G_p, dann

sei $(i; n_1, \dots, n_r) = 1$. Dann $\exists$ nKpl H/H^* in G. $G \setminus H$

~~Aus $h \underset{G}{\sim} h'$ folgt $h \underset{H}{\sim} h'$~~ $h, h^g \in G_p \Rightarrow h \equiv h^g$ G_p^*

Bew: H/H^* abel.
$\mathcal{R}_p = \{ R \mid R \subseteq G, \ |R \cap G_p x| = 1 \}$

$\frac{R}{S} = \prod h \cdot H^*$, wobei $r \in R, s \in S$, $r = h g_p^* s$

$\frac{R}{S}\frac{S}{T} = \frac{R}{T}$, da $r = h g_p^* s$, $s = h' g_p^{*\prime} t \Rightarrow r = h h' \cdot g_p^{*\,h'} g_p^{\prime} t$

Wähle R so, daß aus H-konj Nebenklassen $G_p x$ auch H-konjugierte Vertreter genommen werden. Ist dann $r \in R$ und $G_p r^h = G_p r$, so $r^h = h' g_p r$ $r^h r^{-1} = h' g_p$

$h^{-1} r h r^{-1} = h' g_p$ $r h r^{-1} = h h' g_p$, $h' g_p \in G_p^*$, $h' \in H^*$.

Kurz: $V_{G \to G_p/G_p^*}(h) \xrightarrow{\text{nat}} H^* \cdot h^{n_p}$

Setze

$$\varphi(g) = \prod_p \left(V_{G \to G_p/G_p^*}(g)\right)^{k_p} \text{ mit } \sum n_p k_p = 1.$$

Dann $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H/H^*)$ und $\varphi(h) = h H^*$.

Zum Satz über Frobeniusgruppen

24.9.72 Eine Untergruppe H von G erfüllt genau dann die Bedingung $H \cap H^x = 1$ für $x \notin H$, wenn $G \setminus H$ eine <u>freie</u> H-Links- ~~und~~, H-Rechtsmenge ist.

Abschn:

#

Bew. de

mit o

Bemerkungen: 1)

2)

3) Verein.

sonst

Zum Satz von Heinz

Heinz: $H \leq P \in p\text{-Syl}\, G$, $|G| \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow$
$\#\{P^g \mid P^g \geq H\} \equiv 1 \mod 2$

Bew durch Sortieren der $P^g \geq H$ nach ihrem Durchschnitt mit $N(H)$.

Bemerkung: 1) Statt $|G|$ ungerade genügt $|G:P|$ ungerade.
2) statt $P \in p\text{-Syl}\, G$ genügt wohl P nilpotente Hallgruppe.

3) Vermutung: Ist jeder Primteiler von $|G:P| \equiv 1 \mod k$, so ist $\#\{P^g \mid P^g \geq H\} \equiv 1 \mod k$.

Norm

1. G Wielan

Rum

kommt

in Stolp

2. $|G| \leq \infty$

Kofull

Dann

B

Wäre d

perfekt

~~Frankeko~~

3. Analoge

Menge v

d. Faktor

Norm- & Zentralisatorsätze

1. G Wielandt 2.6.72: $A, B \trianglelefteq\trianglelefteq G$ (endl.), $A \cong A$ einköpfig, $A \not\leq B$,

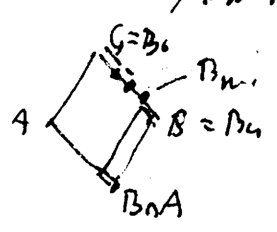
$\text{komp}\, A = Z(A) \Rightarrow [A, B] = 1$

Kommt mir bekannt vor, vielleicht aus Fitting? Hall aber nicht in Huppert; von Wd selbständig gefunden. Selbst...

Zwischen A und $A \cap B$

2. $|G| < \infty$. Seien A und $B = B' \trianglelefteq\trianglelefteq G$. ~~...~~ liege keinen perfekten Subnormalteiler außer 1 (A antiperfekt). Dann ist $A \leq \mathcal{N}(B)$.

Bew.: $A \vee B$ oBdA $G = AB$



Wäre $\text{def}_G B = n > 1$, so wäre $B_{n-1} \cap A / B \cap A$ perfekt und $\neq 1$ ↯.

Frage: Genügt es schon, wenn kein Normal- ~~faktor~~ von A perfekt ist 4.6.72

3. Analoges muß gelten, wenn $\mathfrak{F}$ eine geeignet abgeschlossene Menge von Köpfen ist, für A's, die keinen subnormalen $\mathfrak{F}$-Faktor enthalten, und B's, die nur $\mathfrak{F}$-Köpfe haben.

sind 2-

Bew: (1)

(2)

Wegen

auf Ω

Pfeil.

(3) F

Dreiecke

(4) Als

Ordnu

Jedes

Bew ind

als jeder

Dann

also entw.

Im 1. Fall

Im 3. F

(5) Abs

3-homogene Gr.

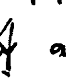
sind 2-tra (wenn $n \geq 4$)

Bew: (1) G ist 2-hom. Ann: nicht 2-tra

(2) Wähle $\alpha \to \beta$ wende G darauf an.

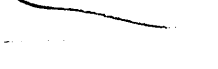
Wegen (1) erhält jede Kante des vollst. (ung) Graphen auf Ω einen Pfeil. Ist G nicht tra, so nur einen Pfeil.

(3) Falls  vorkommt sind alle Dreiecke zyklisch gepfeilt. Also wenn $n \geq 4$!

(4) Also tritt  auf und nur solche. gibt Ordnung jedes Dreiecks

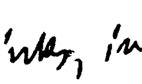
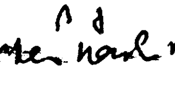
Jedes k-tupel ist dann geordnet:

Bew induktiv: $\cdot\,\alpha$

 sei → geordnet von links nach rechts,

d.h. jeder Pfeil geht von links nach rechts

Dann kommt nicht  vor,

also entw.  oder  oder 

im 1. Fall setze α nach links, im zweiten nach rechts

im 3. zwischen β und γ.

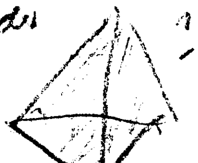
(5) Also ist Ω geordnet, G = id. q.e.d.

Erweiterung auf 4-hom. Gs

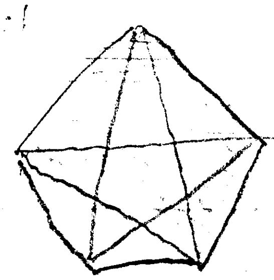
Jedes Dreieck erhält, wenn es etwa 3 Klassen von Tripeln gibt, genau eine der Farben 1, 2, 3; für G in invarianter Weise. Alle Arten kommen vor.

Oktaeder hat jede

Tetraeder



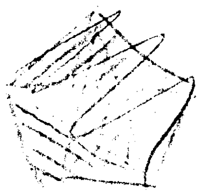
1 2 3 3
| ?
kein



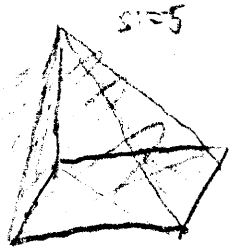
im Pentaeder:
$\exists$ 5 rote Flächen,
keine zwei Kante gemeinsam
$\exists$ 5 grüne Fl., keine 2 haben Kante gemeinsam
Pentaeder hat nur 10 Flächen, sind alle rot/grün ↯

wenn 2 Farben 1, 2, … Tetraeder 1 1 2 (I)
… 1 1 2 (II) Ikosaeder

I: Keine zwei Dreiecke auf Tetraeder haben Kante gemeinsam

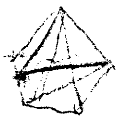


$s = 5$



$\# \{ \text{Rot} \subset \text{Tetr} \} = 5 \cdot 1$
jedes Dreieck liegt auf 2 Tetr.
$5 \cdot 1 = 2 \cdot f$ ↯
$f = \#$ Tetr $\subset$ farbig

II $s = 5$ … $5 \cdot 4 \cdot \{ \ldots T \} = f_2 \cdot 2$ $f_2 = 5 = f_0$



Frage:
Vielleicht
Gruppe
in der …
auf all…

(1) G 3-hom…
bzw. G 2-hom…

(2) G k-…

(4) G 4-…

Abschluss…

$\exists$ …

Frage!
Vielleicht ist eine nur f-transitive Gruppe schon festgelegt durch die von ihr induzierten partiellen Teilabbildungen auf einem $\Lambda \subseteq \Omega$ mit $|\Lambda| = f(t)$

$4 \le |G| \le \omega$:

(1) G 3-hom, ≠ 2-tra ⇒ G 2-o-tra für ... beim G 2-tra erklärt; ... kommt vor, erklärt ...

(2) G k-ho, $k \ge 3$, G nicht 2-tra ⇒ G k-o-hom.
... auf ... gleich ...

(4) G 4-hom, 2-tra, nicht 3-tra ⇒

$|F| = 3$

Also G_4 hat ... 2 2 ... nur einmal, ... zweimal

... kommt ... vor also ... und ...
zusammen 6 ×

Trip... Kommen vor

... mehr ... $= 5.1$

$f_2 = 5 = f_1$

P-Gr.

Sei Φ ein Raum, auf dem sowohl G wie H wirken. $\varphi \in \Phi$. Nenne $G \underset{\varphi}{\sim} H$, wenn $\varphi^G = \varphi^H$, d.h. G trans.

Für $H = [\mathrm{Sym}\,\Omega]^k$ ist $G \underset{\varphi}{\sim} H \Leftrightarrow G$ k-transitiv.

Frage: Welche 2-Relationen können Bahnen eines $G \leq S^\Omega$ auf Ω^2 sein?

d.h. Wann $N_G(\Delta)$ tra Δ $(\Delta \subseteq \Omega \times \Omega)$?

14.8.72 Idee:

Im A:

steigen a

langsam

halten

G

wür

Gib

16.8 Kan

auf

anwe

63

$|G_\alpha|$ in prim. PGr. – Jordan-Hölder

14.8.72 Idee: Auf und absteigende $A \triangleright \triangleright$ .. Ketten für $A := G_{x_1}$, $B = G_\beta$ vergleichen: Die absteigenden steigen anfangs langsam ab, die aufsteigenden langsam auf. Vielleicht durch Betrachtung der halben max. Schrittlänge etwas zu holen.

Gibt es Jord.-Hölder-Satz für solche gemischten Normalketten $A \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \cdots$ mit $N_{2i} \triangleleft B$, $N_{2i+1} \triangleleft A$?

Gibt es J-H-Satz für die Ketten

$A \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \cdots$ wobei $A \leq G \geq B$ und $N_i := N_i^B$ $i = 1, 2, \ldots$?

16.8 Kann man die Methode von Sims auf Dreiecksketten anstatt Pfeilketten anwenden?

27.7.72 Verlagerung invariant

... Faktor der Ord 2

Ist $t \in G$, $t^2 = 1$, so ist $\chi_- = n - \nu$

permutbar $\chi_+ = n + \nu$

$\nu = \dfrac{\chi_+ - \chi_-}{2}$

$\mathrm{Verl}(t) = (-1)^\nu = i^{2\nu} = i^{\chi_+ - \chi_-}$ $(i^2 = -1)$

$A_- = A - A_+$

... Verlagerung nach A'/A_+, Index $= 2$

$G = \Sigma A r$ $\mathrm{Verl}(t) = (-1)^\nu$, $\nu = \#\{r \mid t \in (A_-)^r\}$

$= \frac{1}{|A|} \#\{g \mid t^g \in A_-\}$

$$\boxed{\frac{|G:A|}{|t^G|} k = \nu = \frac{|C_G(t)|}{|A|} k ; \quad k := |t^G \cap A_-| = |\{t,g\} \in A_-, \ldots t \in N\ldots|}$$

Wenn A eine 2-Sylowgruppe N von $C_G(t)$ enthält, so ist

$\nu \underset{2}{\sim} \dfrac{k}{|t^A|}$; d.h. ν gerade $\Leftrightarrow$ k durch höhere 2-Potenz teilbar als $|t^A|$

... $0 < k < 2|t^A|$.

... Verallgemeinerung auf beliebige primäre ...,

wenn ... $= p^n$, ... $C_G(t)$ ...

Subnormalität

27.8.72

(1) Def: Seien $A, B \subseteq G \in \mathfrak{G}$.

$B \to A$ („A zieht B an") heißt:

Für jedes endliche $A' \subseteq A$ und festes $b \in B$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $b(\circ A')^n \subseteq A$.

Damit gilt:

(1') $B_i \to A \Rightarrow \bigcup B_i \to A$

(2) Sei A eine $\mathrm{Sym}\,3 \leq G$, $\overline{a \in A, a^2 = 1 \neq a}^{\text{nicht } A \triangleleft\triangleleft G}$. a ziehe G an, A: ~~...~~ $g(\circ a)^n \in A$. Sei D die Gr. d. Ord 3 in A. Dann zeigt die Determinante auf $\{D^G\}$: G enthält einen Normalteiler des Index 2, der ~~...~~ aus den Produkten einer geraden Anzahl von a^{g_i} besteht.

$g \in G \Rightarrow g \circ a \begin{cases} \in M & \text{oder} \\ \text{hat Ord } 2 \end{cases}$

Fortsetzung: 66 (1)

(3) Sei $|G| < \infty$; $\overset{A \leq G}{\text{aus}}$ $S \in A^S$ folge stets $S \subseteq A$. Dann ist $A \triangleleft\triangleleft G$

Bew. $S := G(\circ A)^n$ $\quad S = S \circ A \subseteq A^S$ $\quad$ ~~...~~ $G(\circ A)^n = S \subseteq A$

(3') $|G| < \infty$, $A \leq G$. Aus $a \in A$, $S \leq G$ und $S = a^S$ folge $S \subseteq A$.
Dann ist $A \triangleleft\triangleleft G$

Bew. $S =$ Periode von $g(\circ a)^n$.

66

Satz über $G(\sigma a)^u \subseteq A$. 28.8.72

(1) Sei $a \in G$, Ord $a = 2$, a stehe G in einer Diedergruppe der Ord $2p$ (dh $G(a)^u \leq A$).

Dann ist $A \triangleleft\triangleleft G$.

Bew: Sonst $\exists_1 M \geq A$

$$\exists \quad x \underset{G}{\sim} a \text{ mit } \begin{cases} x \notin M \\ a^+ \in M \end{cases}, \text{ aber } x^2 = 1$$

Dann $\langle a^+\rangle \triangleleft\triangleleft M$, zentralisiert den Normalteiler D der Ord. p von A; also $D \leq \mathcal{C}(a^+) \leq N(a^+)$.

aber da a^+ G nach A^+ trägt, das zumindest M^+ liegt, folgt $D \leq M^+$. Wegen $x^2 = 1$ ist $a \in M^+$)

also $A = \langle a, D\rangle \leq M^+$ ⅃.

Ebenso dürfte folgen:

Ao ziehe G nach A

(2) Sei $A_0 \subseteq A \leq G$, $A = \langle A_0\rangle^A$,

Für jedes B mit $A_0 \subseteq B \leq A$ sei A_0 intravariant in B. Dann ist $A \triangleleft\triangleleft G$.

Überholt durch Bartels

Vor:

(1) $\exists$ L

Da

Dann

(2) $x \in$

z. A

(3) $x \notin$

(4)

(5) $G >$

(5') $H < G$,

Bew: $C \triangleleft \langle H$

mele

a^5

(6) $G > B$

28.8.72 Vor: $\underline{G(oa)^n \subseteq A}$ $A \not\trianglelefteq\trianglelefteq G$ (minimal Gegenbsp.)

...ine ..., (1) $\exists\, L <\cdot G,\ L \neq M$, $B := a^{\cdot\cdot L}$ max

...A). Dann $(B \leq R <\cdot G,\ R \neq A) \Rightarrow B \trianglelefteq\trianglelefteq R$, $B \leq A$.

(2) $x \in N_G(B) \Rightarrow x \in N_G(A)$

Bew.: $B \trianglelefteq\trianglelefteq$ nur in M nicht subnor.

also $M^x = M$, $x \in M$, $A^x \trianglelefteq\trianglelefteq M$.

$a^x \in B \leq A$, $a^M \in A \wedge A^x \trianglelefteq\trianglelefteq M$, $A = a^{\cdot\cdot M}$, $A = A^x$.

...rmel.

$\ldots^x) \leq N(A^x)$.

$x \in G$, (3) $x \notin M$, $B^x \leq M \Rightarrow B^x \trianglelefteq\trianglelefteq M$.

$\ldots \in M$)

(4) $\leq K <\cdot G$, $\ldots \leq M$, $A, H \leq M$

$G > B = \langle a \rangle^B \leq K <\cdot G$ $|B|^{\cdot K} = |A| \Rightarrow K = M$

($\mathrm{Succ}\, H \leq N(A)$)

(5') $H < G$, $B = a^{\cdot\cdot H}$ $\Rightarrow N_G(B) \leq N(A)$

A_0 Bew.: $C = \langle H, a^x \rangle \ldots x \in N_G(C)$ ... A ... ... minimal subnormale Hülle $C^{\cdot\cdot X}$ der $|A|$ für $C \leq X < G$

$\trianglelefteq\trianglelefteq G$.: N.B.: ... $C^s = C$, so ...

a^s ganz G nach A.

(6) $G > B = \langle a^B \rangle \Rightarrow N(B) \leq N(A)$.

28.8.72 Vor: $G(oa)^n \subseteq A$ $A \not\!\!\lhd\!\lhd G$ (min. gegen G.) 67

eine $\le A$).

(1) $\exists\, L <\cdot G$, $L \neq M$, $B := a^{\cdot\cdot L}$ max

Dann $(B \le R <\cdot G,\ R \neq A) \Rightarrow B \lhd\lhd R$, $B \le A$.

(2) $x \in N_G(B) \Rightarrow x \in N_G(A)$

Bew.: B ist nur in M nicht subnor.

also $M^x = M$, $x \in M$, $A^x \lhd\lhd M$.

$a^x \in B \le A$, $a^M \in A \wedge A^x \lhd\lhd M$, $A = a^{\cdot\cdot M}$, $A = A^x$.

z.B. für $L \le N(A)$

Normal- $(a^x) \le N(a^x)$. x liegt, $a \in M^x$)

(3) $x \notin M$, $B^x \le M \Rightarrow B^x \lhd\lhd M$.

(4) $B \le H \le K <\cdot G$, $\neg B \lhd\lhd H \Rightarrow K = M$, $NH \le M$

(5) $G > B = \langle a \rangle^B \le K <\cdot G$ $|B|^{\cdot K} = |A| \Rightarrow K = M$

die G nach A

(5') $H < G$, $B = a^{\cdot\cdot H}$ $\Rightarrow$ {für $H \le N(A)$; $N_G(B) \le N(A)$

A_0 $\not\lhd\lhd G$.

Bew.: $C = \langle H_0 \ldots \rangle \langle A \rangle$, $x \in N_G(C)$ läßt A fest als einzige subnormale Hülle $C^{\cdot\cdot X}$ der Ord $|A|$ für $C \le X < G$)

NB: insbesondere, wenn $C^s = C$, so bildet a^s ganz G nach A.

(6) $G > B = \langle a^B \rangle \Rightarrow N(B) \le N(A)$.

$G(\in E)^n \subseteq A$

1. Vermutung: Wenn jede Schicht in einer Kompositionsreihe von A ein G nach A ziehendes Element enthält, so ist $A \triangleleft\triangleleft G$. ?

Bew.: Ind nach Jordanlänge führt auf Fall wo A einfach ? Bew. unvollständig

1a. Man kann vermutlich annehmen, daß G keinen abelschen Normalteiler hat.

2. Frage: Für alle $x, y \in G$ sei $A^x, B^y \triangleleft\triangleleft \langle A^x, B^y \rangle$. Kann man dann Subnormalteiler von G konstruieren? Kann G einfach sein? Vielleicht gilt: Ist stets $\langle a^x \rangle, \langle b^y \rangle \triangleleft\triangleleft \langle a^x, b^y \rangle$, so ist $A^G \cap B^G$ nilpotent, oder $\langle a^G \rangle / \langle a^G, b^G \rangle$ [illegible]

siehe 67.7

3. Ist das Erzeugnis von zwei subnormalen Liegruppen eine Liegruppe?

4 Frage: Ist die subn. Hülle $\langle a \rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \langle a \rangle^{\cdot\cdot \langle a, x \rangle} \mid x \in G \rangle$

Allg.: ist für $A \subseteq G$ stets $\langle A^{\cdot\cdot \langle A, x \rangle} \mid x \in G \rangle \triangleleft\triangleleft G$??

5. Bem: Statt eines totalen Erzeugendensystems

Gren

derart

$A \subseteq$

ist.

6 Satz (

wenn

Bew:]

7. Aus

Bew

beis

braucht man wohl nur eine Menge $E \subseteq G$ derart, daß jede (subnormale!!) Untergruppe $A \subseteq G$ die normale Hülle von $A \cap E$ in A ist.

6 Satz (Sept 72): Genau dann ist $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, wenn A vertauschbar, für jedes $a \in A$, mit $g \in G$

$$A^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^g}}}}} \quad |G|\text{-mal}$$

Bew: Dann ist schließlich $c^{\cdot^{g}} \in A$.

7. Aus $A, B^g \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, B^g \rangle$ für jedes $g \in G$ folgt
$A \cap B \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Bew: $d \in A \cap B$, $g \in G \Rightarrow d^{d^{\cdot^{\cdot^{d^g}}}} = a^{a^{\cdot^{\cdot^{c}}}}$, wo $c := d^g \in \langle A, B^g \rangle$
also $\ldots \in A$, ebenso $\in B$.

Dies enthält den Satz: $(\forall_g \; A \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, A^g \rangle) \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq G$

$\triangleleft\triangleleft$

1. Man sollte Kegels Problem für ein einzelnes p formulieren. Vermutung:
Ist $A \leq G$ endl. und gilt ($P \in p\text{-Syl}\,G \Rightarrow A \cap P \in p\text{-Syl}\,A$), so ist $O^p A \triangleleft\triangleleft G$.

Aufg. Nachprüfen für auflösbares A.

Wielandts Steuerwelt Kegel, und man kann obendrein bei Kegel o.B.d.A. annehmen, daß A einfach und perfekt ist.

2. $|G| < \infty$, $A \leq G$. Dann (besser B) 8.10.72

$$A_{\cdot\cdot G} = \bigcap_g A_{\cdot\cdot \langle A, A^g \rangle}$$

3. $|G| \leq \infty$. $A, B \leq G$, A, B endl. p-Gruppen, $A \triangleleft\triangleleft G \Rightarrow \langle A, B \rangle$ p-Gruppe.

Folg.:

4. $|G| \leq \infty$ A endliche subnormale p-Untergr. von G
B p-Gruppe in G ($|B| < \infty$)
$\Rightarrow \langle A, B \rangle$ p-Gruppe

4'. Verallg. auf lokal endliche p-Gruppe Untergruppen

1. $|G| \leq$ ...
Gr...
p ...

2. Frage: ...
j... ...
(unlesbar)

3. Frage ...
...
jede ...
N...

4. Frage: ...
Menge ...
eine sub...
gilt dann ...

1. $|G| \leq \infty \Rightarrow$ jede endliche subnormale p-Gruppe $A \leq G$ liegt in jeder maximalen p-Untergruppe von G.

Damit sollte Projektionssatz funktionieren.

2 Frage: Besitzt jede maximale p-Gruppe in G jeden endlichen subnormalen p-Faktor? (oder sogar jeden " " ?)

3. Frage: Ist eine sog. endliche Ugr A von G schon dann subnormal, wenn sie mit jeder endl. Ugr $B \leq G$ etwas Endliches erzeugt? Nein. Gegenbeispiel [z.B. G endl. Permut. auf Ω, $|\Omega| = \infty$.]

4. Frage: schreibe $G \in \mathfrak{W}$ (vollstd.-Eig.), wenn jede Menge $E \subseteq G$, für die aus $e \in E$, $g \in G$, $e \underset{\langle e,g\rangle}{=} g$ folgt: $g \in E$, eine subnormale Ugr von G erzeugt.

Gilt dann: ~~[illegible]~~ $K(G) \subseteq \mathfrak{W} \Rightarrow G \in \mathfrak{W}$?

72

10.12.72

5. Nach lesen Entwurf Otto Kellenkas:

Ist α normal-additiv (d.h. $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow (AB)^{\alpha} = A^{\alpha}B^{\alpha}$),

so folgt aus $A, B \trianglelefteq\trianglelefteq G$ stets $A_{\alpha} \leq N B^{\alpha}$.

Das hat ... auf der Klasse der regulären p-Gr.

für $\alpha = \mho_k$) in der schärferen Form $A_{\alpha} \leq \zeta(B^{\alpha})$

Vor* Im folgenden sei α nor-dis: $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow (AB)^{\alpha} = A^{\alpha}B^{\alpha}$

6. α nor-distributiv $\Rightarrow$

$$A \text{ sn } G \Rightarrow A^{\alpha G} = A^{G\alpha}$$

Bew: (1) $A \trianglelefteq G \Rightarrow A^{\alpha} \trianglelefteq G \Rightarrow A^{\alpha G} = A^{\alpha} = A^{G\alpha}$

(2) $A \ntrianglelefteq G \Rightarrow \exists B = AA^{t} > A$ Ind $|G:A|$:

$$A^{\alpha G} = A^{\alpha G} A^{\alpha t G} = A^{\alpha G} A^{t\alpha G} = (AA^{t})^{\alpha G} = B^{\alpha G}$$

$$= B^{G\alpha} = A^{G\alpha}.$$

9. G_p^{α}

(I) $\alpha \geq p$:

(II) α bel.:

Satz (10) $G_p^{\alpha} =$

~~...~~ E.11

≤ 9

7. * $\begin{cases} C_p^{\alpha} = 1 \Rightarrow P^{\alpha} = 1 \text{ für alle } |P| = p^i. \\ C_p^{\alpha} = C_p \Rightarrow P^{\alpha} = P \end{cases}$ Bew mit $C_p \wr C_{p^{\alpha-1}}$

ale

8. $C_p^{\alpha} = 1 \Rightarrow G^{\alpha} \leq G^{p}$ Bew mit $H = G \times P$, $P \cong G/G^{p}$

$D = \text{Diag } G \times P$ macht $H^{\alpha} = (DP)^{\alpha} = D^{\alpha} \leq D$ (7)

(NB: Es ist $D \trianglelefteq\trianglelefteq H$, da $HP = G^{p} \leq H$. $= (GP)^{\alpha} = G^{\alpha}$, z. Komp $D^{\alpha} = 1$,

... so über $\sim G^{\alpha}G^{p}/G^{p}$.

~~.......~~

10.12.72

noch normal-abstr. Funktoren

9. $C_p^\alpha = C_p$, A rein p-köpfig $\Rightarrow A^\alpha = A$ $\quad$ o.B.d.A.: A/A^p zykl.

(I) $\alpha \geq p$: $H := A \times P$, $\quad P \cong A/A^p \in \mathfrak{g}_p$. Es ist $P^\alpha = P$ nach 7, also

$H^\alpha = A^\alpha \times P$, $\quad$ ~~D^α~~ $\quad D = \text{Diag}$, $D^p = H^p = A^p$,

$H^\alpha = (AD)^\alpha = A^\alpha D^\alpha \Rightarrow H^\alpha / H^p \cong A^\alpha/A^p \cdot D^\alpha/A^p$

~~$|H^\alpha| = \frac{|A^\alpha|\,|D^\alpha|}{|A^\alpha \cap D^\alpha|} = \frac{|P|\,|D^\alpha|}{|P \cap D^\alpha|}$~~ $\quad \cong \underbrace{A^\alpha/A^p \cdot A^\alpha/A^p}_{\text{direkt}}$

$\exp H^\alpha/H^p = \exp A^\alpha/A^p$;

aber $H^\alpha/H^p \cong A^\alpha/A^p \times P$,

also $\exp H^\alpha/H^p = \exp P$, $\exp A^\alpha/A^p = \exp A/A^p$, $A \geq A^\alpha$

(II) α bel.: $\beta := \alpha + p$ erfüllt I, also $A = A^\beta = A^\alpha A^p = A^\alpha$.

Satz

(10) $C_p^\alpha = C_p \Rightarrow$ stets $A^\alpha A^p = A$ (d.h. A/A^α hat keinen p-Kopf)

Bew.: $A = A^{\bar p} A^p$ * $\quad A^\alpha = A^{\bar p \alpha} A^{p\alpha} = A^{\bar p} A^{p\alpha}$, $A^\alpha A^p = A^{\bar p} A^p = A$

~~Satz~~ 11. Sei A rein p-köpfig. Dann $A^\alpha = A \Leftrightarrow C_p^\alpha = C_p$

≮ 9 $\quad$ Bew. $\Rightarrow$ $P \cong A/A^p$ $\quad H := A \times P$ $\quad$ Ann. $C_p^\alpha = 1$; $P^\alpha = 1$

$H^\alpha = A^\alpha \cdot 1 = A^\alpha = A$

also $H^\alpha = (AD)^\alpha = A^\alpha D^\alpha$ $\qquad D \cong A$, $A^\alpha = A$, also $D^\alpha = D$

$= AD$

$A = AD \quad D = 1 \quad A = A^p \quad A = \cap$ ↯

~~[illegible]~~ $\quad$ * dabei $\bar p = \{E$ einfach $\mid |E| \neq p\}$.

Left margin notes: $)^\alpha = A^\alpha B^\alpha)$; α.; $B^\alpha)$; $B)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$; 6a; 11: $\alpha G \cdot G$; mit $C_p \in C_{p^{\alpha-}}$; G/G^p; 1; $\exp D^\alpha = 1$, AK

Kann man den „großen Durchschnitt" $A \cap B^A$ und das „kleine Erzeugnis" $A \cdot B_A$ durch symmetrische, noch speziellere Bildungen ersetzen (d.h. dass die alten sich durch die neuen ausdrücken lassen und die neuen nicht aus $\mathfrak{S}_n G$ hinausführen)?

Ist $(A \cap B)^A$ besser: ist näher an $A \cap B$!

$(AB)_A$ " " AB!