rnbtt"

$A \cdot B_A$

ngen

nenen

icht

Fitting-Formationen

Doerk Hawkes MZ 117

Fitt.F.: "$\mathfrak{F}$ sei eine Klasse mit: $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F} \Rightarrow N \in \mathfrak{F}$, $G/N \in \mathfrak{F}$"

$G = N_1 N_2$, $N_i \trianglelefteq G$, $N_i \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$

$N_1 \cap N_2 = 1$, $G/N_i \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$

Def: $G^{\mathfrak{F}} = G^{\alpha} := \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G, \\ G/N \in \mathfrak{F}}} N$

monoton und

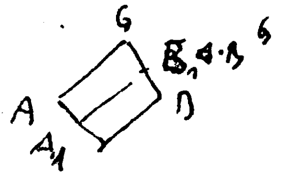
(1) α ist vertauschbarkeits-additiv: ~~$A \trianglelefteq B$ $A \trianglelefteq G$~~, $A, B \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und $AB = BA \Longrightarrow (AB)^{\alpha} = A^{\alpha} B^{\alpha}$.

Bew a) $A \trianglelefteq G \Rightarrow AG^{\alpha}/G^{\alpha} \in \mathfrak{F} \Rightarrow A/A \cap G^{\alpha} \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^{\alpha} \leq A \cap G^{\alpha} \leq G^{\alpha}$.

Bew: b) Ind $|G|$, dann Ind $|G:A| + |G:B|$

G, A, B min Gegenb. $\Rightarrow G = AB$

Genügt z.z.: $G^{\alpha} \leq \langle A^{\alpha}, B^{\alpha} \rangle$



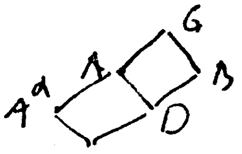
~~Also~~. $A < G > B$

$B \trianglelefteq\cdot G$ sonst $B_1^{\alpha} = A_1^{\alpha} B^{\alpha}$

$$(AB)^{\alpha} = (AB_1)^{\alpha} = A^{\alpha} B_1^{\alpha} = A^{\alpha} A_1^{\alpha} B^{\alpha} = A^{\alpha} B^{\alpha}.$$

Ebenso $A \trianglelefteq\cdot G$

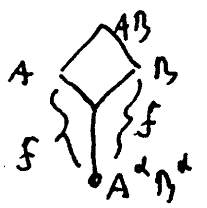
$A^{\alpha} \leq B$, sonst



$AB = A^{\alpha} B$, $(AB)^{\alpha} = A^{\alpha\alpha} B^{\alpha} \leq \langle A^{\alpha}, B^{\alpha} \rangle$.

Ebenso $B^{\alpha} \leq A$, daher $\langle A^{\alpha}, B^{\alpha} \rangle \leq D := A \cap B$

Sei $A^{\alpha} \trianglelefteq G$, also $A^{\alpha} \trianglelefteq G$; $B^{\alpha} \trianglelefteq G$. $A^{\alpha} B^{\alpha} \trianglelefteq G$



$A/A^{\alpha}B^{\alpha}$ Faktorgr von A/A^{α} also $\in \mathfrak{F}$

also $AB \in \mathfrak{F}$, $(AB)^{\alpha} \leq A^{\alpha} B^{\alpha}$. □

Frage [illegible]

(2) $X, Y \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow X_{\mathfrak{F}} \leq N(Y^{\mathfrak{F}})$

denn das gilt allgemein für vert-add. Funktoren α

(3) Frage: Ist jeder Fitting-Formations-Funktor epimorphismentreu?

(4) Es gibt distributive Funktoren α, für welche $\{G \mid G^{\alpha}=1\}$ eine Formation (z.B. $=\{1\}$) ist, ohne daß α epim-treu ist.

Bsp: $G^{\alpha} := \bigcap\{M \mid M \trianglelefteq G$, Deckgr. $\tilde{=} SL(2,5)\}$

wie $G := SL(2,5)$, $\varphi : G \to PSL(2,5)$ $G^{\alpha\varphi} = 1 \neq PSL(2,5) = G^{\varphi\alpha}$

(5) Schunck-Homomorphe, gesättigte:

Das sind einfach die Klassen $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ = endl gr,

für die gilt: (1) $H \in \mathfrak{H}$, $\varphi \in \operatorname{Hom} H \Rightarrow H^{\varphi} \in \mathfrak{H}$

(2) Zu $F \in \mathfrak{F}$, $\varphi \in \operatorname{Hom} F$

so gilt $F^{\varphi} \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow \exists A \leq F, A \in \mathfrak{H}, A^{\varphi} = F^{\varphi}$:

(Hpt 73). Damit sollte der Aufbau der Theorie durchsichtiger werden.

---

1) Nich

A

v

lesser

2) Kern

PermG

Q g

3) Unte

höchs

Frage

4). G =

Folge

5)

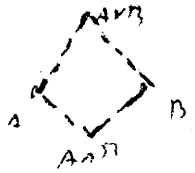
$\lhd\lhd$

1) Nichtvertauschbarkeitsmaß

$A, B \lhd\lhd G$

$\nu(A,B) := j(\langle A,B\rangle, A) - j(B, A\cap B) = \nu(B,A)$
$= j(\langle A,B\rangle, B) - j(A, A\cap B)$.

besser vielleicht $\bar{\sigma}$ statt ν



2) Kennzeichnung der Quasinormalität durch PermGr Eig.:

Q qn $G \iff$ Wirkt G auf Ω, so ist stets
$$\alpha^{Q} = \alpha^{QG_\alpha} \qquad (\alpha\in\Omega)$$

3) Unter dem k-ten W-Sockel (W_k) hat jedes $A \lhd\lhd G$ höchstens den Defekt k.

Frage: Was normalisiert der W_k ?

4). $G = \langle A_1, \dots, A_n\rangle,\ A_\nu \lhd\lhd G \Rightarrow \langle A_1^{g_1}, \dots, A_n^{g_n}\rangle = G$

Folge:

5) —, —, G tra $\Omega \Rightarrow$ für ein ν ist $\Omega_{A_\nu} = \emptyset$.

iktoren

} eine

n ist

kgr. $\cong SL(2,5)$ }

$1 \neq PSL(2,5) = G^{\varphi_q}$

)

$A^{\varphi} = F^{\varphi}$

chtigter leading

78

b) Sept 73 : Ist A mit jeder Sylowgruppe vertauschbar, so ist A subnormal. (Für maximale statt Sylow stimmts wohl nicht). Kegel!

Formel von

$N_1, N_2,$

Frage: Soll diesen Ordnung

a) Mod

also

b) Mit

gilt

also $\frac{X}{Y}$

Dies ist

also ist

Historis


„Ein

R[illegible]a

Frühe V

(Eypino

„Hyper

Frage

Frage: Zusammenhang mit $N_1 \cap N_2N_3$, $N_1N_2 \cap N_1N_3 \cap N_2N_3$?

25, so ist

o stimmt

Formel von Remak (J. f. r. u. a. M. 166, 100): 24.6.73

$N_1, N_2, N_3 \trianglelefteq G \Rightarrow \frac{N_1 \cap N_2N_3}{(N_1\cap N_2)(N_1\cap N_3)} =: \frac{X}{Y}$ ist abelsch und inv. (bis auf $\cong$) unter S_3.

Frage: Gibt es ähnliche Formel für [illegible] [illegible] $N_i \vee N_k$?

a) Mod Nenner gilt $N_1 Z N_2$, $N_1 Z N_3$ (Z := „zentralisiert")
also $N_1 Z N_2N_3$, Zähler abelsch mod Nenner.

b) Mit $X := N_1 \cap N_2N_3$, $Y := N_{12}N_{13}$, $N_{ik} := N_i \cap N_k$
gilt $X \cap YN_3 = (N_1 \cap N_2N_3) \cap N_{12}N_{13} \cdot N_3 = N_1 \cap N_2N_3 = Y$

also $\frac{X}{Y} = \frac{X}{X \cap YN_3} \cong \frac{XYN_3}{YN_3}^{*} = \frac{XN_3}{YN_3} = \frac{N_1N_3 \cap N_2N_3}{N_{12}N_3}$

$^{*}\ XYN_3 = XN_{12}N_3$; $XN_{12} = X$.

Dies ist inv. bei (12), die ursprüngliche Darstellg. b. (23)
also ist $\frac{X}{Y}$ bis auf $\cong$ inv. gegen $\langle (12), (23) \rangle = \mathrm{Sym}\,3$.

Historisches: Isomorphiesatz $\frac{AN}{N} \cong A/_{A\cap N}$ sowie „Einschiebung von Faktorgruppen" wohl erstmals bei Remak Crelle 166, 65–67. Früher vielleicht bei Klein-Fricke, Vorles. über d. Th. d. ellipt. Modulfunktionen Bd I S. 402–406 (Fußnote 3 bei Remak, Crelle 163, 2). [illegible] 163, S.
„Hyperzentrum" Remak Crelle 163, 34 Wohl $\prec i$ für $\triangleleft$
$\asymp$ für $\cong$

Frage: Erweiterung auf $N_1, \ldots, N_k$, $k > 3$.

(1) Dieser

angew
Norm

(2) X_{A1}

X_{A1}

$\underline{X \to X_A}$

(1) Dieser Prozeß, bei festem A auf alle $X \leq G$ angewandt, erhält nicht nur $\leq$, sondern auch Normalisierung; daher auch $\trianglelefteq$. (Hpt 73)

(2) $X_{AB} \cap X_{BA} = X_{(A \cup B)^2}$

$X_{ABA} \cap X_{BAB} = X_{(A \cup B)^3}$ usw. wenn $1 \in A \cap B$
$A, B \subseteq G$

In der

ihn Erf

wenn es

Bei fe

diese ent

unter-
zu [illegible]

A A_1

$\langle A_1,$

Abschwächungen der Vertauschbarkeit

In der Theorie der unendlichen Gruppen heißt ein Erzeugendensystem E von G endlich erzeugend, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $G = E^n$

und $E = A \cup B$; $A, B \leq G$

Bei festem n ist das eine Abschwächung der Vertauschbarkeit;

$AB = BA$

diese entsteht für $n = 2$.

unter-

Zu solchen Verallgemeinerung auf mehr als 2 Gruppen:

$A_1, A_2, \dots, A_k$ heißen n-vertauschbar, wenn

$$\langle A_1, \dots, A_k \rangle = (A_1 \cup \dots \cup A_k)^n .$$

Un

2.12-73

$g =$

Gr

Sei

(1) $\{f_1,$

(2) $L \leq$

(3) $e := (-$

(4) $L \varepsilon$

(5) $e_1 =$

(6) $\ell >$

(7) $g \ni M$

Bew

Uni-Primitive Gruppen vom Grad 2p

2.12.73 I. Neuer Beweis für Rang $G = 3$ (Bez. wie FPG.)

$\mathfrak{G} = \{G$-Moduln in $F := \{f : \Omega \to K\}\}$ Char $K = p$

$Gr = Gr_p$ $P \in p$-Syl G, $P = \langle (1\ 2 .. p)(p+1 .. 2p) \rangle$;

Sei $L \in \mathfrak{G}$, $L \not\geq C$, $Gr\, L < p-1$. Dann

(1) $(f_1, f_2) \in L \Rightarrow \int f_i = 0$

(2) $L \leq C^\perp$

(3) $e := (-\mathbb{1}, \mathbb{1}) \notin L$ wegen Primitivität

(4) L einreihiger P-Modul, Fuß $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$; $C \leq L$

(5) $l := Gr\, L > 2$ sonst G linear, p-abgeschlossen

(6) $l > \frac{p}{2}$ Bew: f^2

(7) $\mathfrak{G} \ni M \leq L$, $0 < gr\, M$ [illegible] $\Rightarrow M = L$ dh L/C irred

Bew: sonst $L_{\min} \supset C$, $Gr\, L^2 \leq p-3$ $L_2^2 \leq L^2$, $L_2^2 \leq L$

Einreihig

Bew (8): Absteigende R-Zentralreihe von $M^\perp$ betrachten

wenn $\dim M = p-d$, wo $1 \leq d < \frac{p}{2}$, so $M^\perp \cap L = 0$ *

$2p-1 = \dim C^\perp \geq \dim(M^\perp + L) = p+d+\ell-1$, $p-d=\ell$

mit x Zweierschritten, y Einerschritten ~~gemeinsam~~ (to) mit L, i.d.h.

so $M^\perp = p-1$ ($2x+y = p+d$, $x+y = p-1$, $x = d+1$, $y \leq p-d-2$)

Sei $e \in M^\perp$ und $\langle e\rangle_G \cdot (t-1)^{p-2} = e$ $\quad L(t-1)^{x+y-1}$

(8) Es gibt höchstens ein $L \in S$ mit $1 < \dim L < p-1$.

Ann $M \neq N$ Sonst ohne $\dim M \leq \dim N$

$L := M + N$ widerspricht (7)

(9) $\exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}_G(F,F)$: $C^\varphi = 0$, $F^\varphi \nsubseteq C$

(10) $\exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}_G(F,F)$: $C^\varphi = 0$, $(f_\alpha - f_\beta)^\varphi \neq 0$ $\forall \alpha \neq \beta$

$\mathrm{ann}(f_\alpha - f_\beta)KG = C^\perp$

(11) $\exists\, M \in S$: $\dim M = p$

(12) $M \in S$, $\dim M = p$ $\Rightarrow$ M einreihig $\quad$ Sonst $(-1,1) \in M$

(13) Wenn $E \in S$, [illegible], $C \nsubseteq E$, so $\dim E = p$ $\quad$ E einreihig, $F \neq$ & E irreduz. $(-1,1)$

(14) ∃

(15) Der

$\dim \geq p$ =

(16) Wegen

nun

(17) $\psi \in$

(18) dim

$^\perp$ betrachten

$1^\perp \wedge L = 0$ *

$\ell \sim 1$, $p\ell = \ell$ [illegible]

~~[illegible]~~ [illegible]

(14) $\exists\ E \in \mathcal{S}$, $\dim E = p$, $C \not\leq E$ $\quad F\eta\beta E = e$

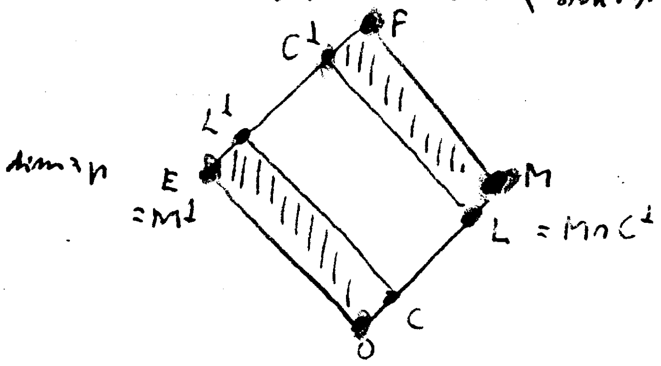
Sonst $\exists$ dom $M = p$, $C \leq M$, $E := M^\perp$

$p-1$.

$1 \in$ [illegible]

nicht (7)

(15) Der Verband der $\mathcal{S}$-Moduln sieht so aus



(16) Wegen Isomorphiesatz kommen als Kern φ, $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(F,F) =: \mathcal{H}$ nur in Betracht.

$\forall \alpha \mp \beta$

$C^\perp$

(17) $\psi \in \mathcal{H} \Rightarrow \psi \restriction (\text{const auf } E) = c \cdot id_E$, da ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\psi(e) = c \cdot e$ $(\psi \in \mathrm{Hom}_p 1)$ und $E = eKG$.

und $(-1,1) \in F\eta$ $\cdot e$

unteilbar, $F\eta\beta$ [illegible] $(-1,1)$

(18) $\dim \mathcal{H} \leq 3$ $\quad$ Sonst $\exists\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$, ~~[illegible]~~ unabh.,

$\mathrm{Kern}\,\varphi_i \geq (1,1)_i e$ $\quad E, C, L^\perp$ also $\mathrm{Kern}\,\varphi_i \geq C^\perp$
aber dann $\varphi_i(F) = C$, φ_i lin abh.

G pri, $n = \underset{p+p^\alpha}{p + p^2}, \dots \Rightarrow G$ 2-tra

Forts.: Verallg. auf ~~[illegible]~~ pri Gruppen mit einem Element t der Ord $p^a > p$, das nur einen Zyklus t^Δ des Grades p^a und einen t^T der Länge p besitzt: $n = p^a + p$ wähle $K \in \mathcal{S}_p$.

(1) Ist $f = 0$ auf T, $= 1$ auf Δ. Dann $E := fKG$ mindestens Grad $p^a - 1$, dim p^a.

(2) Dim $M < p^a \Rightarrow e \notin M$ $(M \leq_{KG} F)$

(3) Dim $M > p \Rightarrow E \leq M$, dim $M \geq p^a$ Bew.: $\underset{OG}{KG}\,(t-1)^{p^a-1} \leq M$

(4) Dim $\overset{E/E\cap M}{(E+M)/M} < p^a \Rightarrow E \leq M$

(5) ~~$C \leq E^\perp$, Dim $E^\perp \leq p$, Dim $(E^\perp)^2 < p^2 \leq p^a$; $e \notin E^{\perp 2}$, Dim $E/E\cap E^{\perp 2} \geq p^a$ Dim $(E^{\perp 2} \cap E) \leq p-1$ Dim $E^{\perp 2} \leq 2p-1$~~

(5) Wähle $\underline{M := \Sigma N}$, $E \not\leq N$. Dann Dim $M \leq p$ (3), $C \leq M$, Dim $M^2 < p^2$, $e \notin M^2$, $M^2 \leq M$, $\underline{M = C}$. Daher

(6) $E^\perp$ ~~[illegible]~~ $= C$, $E = C^\perp$.

(7) Die einzigen G-Mod. sind 0, C, $C^\perp$, F; also

(8) G 2-tra

Das gleiche Ergebnis dürfte durch Zerschneidung folgen, wenn die p-Sylowgr. einen Komp. Grades p und einen vom Grad p^2 hat und nicht abelsch ist. Also:

Satz: $n = p + p^2$; G enthalte eine nichtabelsche p-Gruppe oder ein Elt der Ord p^2; G pri $\Rightarrow G$ 2-tra

[d.h.: ~~[illegible]~~ p-Sylowgruppe von G nicht elem. abelsch]

Abw. vgl.: G [illegible] pri, $n = p + p^2 \Rightarrow p^2 \nmid G$

Unipoten. Gruppen vom Grad 2p

II: Fortführung der Theorie von FPG (Char = 0):

(1) $D := W - V$ hat EWe $n = 2s+1$ p-mal, $-n$ p-mal, und [illegible]

(2) $D^2 = n^2 I$. Mit $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ wird $\begin{cases} A^2 + BB' = n^2 I \\ AB + BC = 0 \end{cases}$,

(2') [illegible] $D = D'$, $A = A'$, $C = C'$

Wegen A, B, C ~~[illegible]~~ von P sind A, B, C vertauschbar. $B(A+C) = 0$. Wäre $\det B = 0$, so wegen $B = \sum_{t \in P} \pm t$ wegen $B = \pm J$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_p$

$$\mathfrak{D} \ni D - J_{2p} = \begin{pmatrix} A - J & 0 \\ 0 & C - J \end{pmatrix}$$, G imprim. Also $C = -A$, **daher** $\det B = 0$,

[anders: $\begin{pmatrix} n + A & B \\ B' & n + C \end{pmatrix}$ ist die [illegible] auf M, aber $Bx = 0 \Rightarrow (n+C)x = 0$, dann $(-n+C)x = 0 \Rightarrow x = 0$; $\det B \neq 0$

(3) $D = W - V = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix}$ ←

(4) Mit $T \in$ Symp, $T^{-1} X t = X' \quad (X \in P)$ wird etwa $T = ($

$T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -T \\ T & 0 \end{pmatrix}}_{S^-} \begin{pmatrix} A & B' \\ B' & -A \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix}}_{S} = -\begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix}; \quad S^2 = -I_{2p}$$

(5) $G^* := \langle G, S^- G S \rangle$ [illegible]$_{1,2}$ $\langle G, S \rangle =: \hat{G}$ monomial

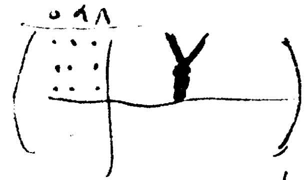
G^* zentralisiert $W - V$

30

16) $\hat G$ ist zweifach transitive monomiale Gr., nach Bildersatz

17) G^* " 2-fach monomiale Gr, da ΔG^* umfasst.

18) G^* ist nicht eine ~~allgem.~~ monom. Gr.? sonst wähle $0\ \alpha\ \beta$ verschieden, $\alpha, \beta \in$ Basis von V,

$W = V^2$ 

$\exists\ g^* \in G^*$, Ord $g^* = 3$,
$g^* = (\cdot\ \cdot)\}Z$ auf $(0\ \alpha\ \beta)$
Diag $g^* = 1$ wegen Ord $g^* = 3$

also $ZY = Y$, da zwei Zeilen von Y unterscheiden sich höchstens um Vorzeichen, aber da mehr $+1$ als -1 auftreten, sind alle Zeichen gleich. ~~g^* [illegible] Δ_3 [illegible]~~, ⟨~~[illegible]~~ Daher hat g^* nur Faktoren $+1$ auch links oben, $g^* \in$ Sym zyk. $\langle G, g^* \rangle$ zentralisiert V, enth. 3-Zyklen, ist $=$ Alt Ω, 2-fach; $W = V^2\binom{0\,1\,1}{0\,1\,0}$

19) G^*_+ := von G^* induzierte Permutationsgruppe

⇒ $G < G^*_+ \overset{\Delta}{\scriptstyle 1,2} \hat G_+ \neq \mathrm{Sym}\,\Omega$, ~~[illegible]~~.

„+" heißt: „durch +1 ersetzen in den monomialen Matrizen.

$G^*_+ = \langle G, G^{*R} \rangle$, $R := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}$
$\hat G_+ = \langle G, R \rangle$

(10) L
vo
Vo

(11) Da
daher $n|2s$
oder $n|2($

(12) Die
lila
Desgl

Für $X := ($
(13) a) (A
b) A

(10) Δ_2 und Δ_3 (die zu V bzw W gehörigen Bahnen von G_1) enthalten gleich viele Punkte aus $\{1, 2, -, p\}$. Von $\{p+1, -, 2p\}$ enthält Δ_3 μ Punkte mehr als Δ_2.

Bew.: Auf $\{1 .. p\}$ ist $\text{Anz}_{\Delta_3} - \text{Anz}_{\Delta_2}$ = Zeilensumme von A, wo $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix}$; aber = Spaltensumme von $-A$, also auch = Zeilensumme $-A$.

Auf Ω ist ~~Anz~~ $|\Delta_3| - |\Delta_2| = w - v = 2s+1 = \mu$.

(11) Ist $\left| \overset{N}{\widetilde{\mathcal{N}}}_G(P) : P \right| = n$, so $p \equiv 1$ (n) und $\mu \equiv \pm 1$ (n),
daher $n | 2s$
oder $n | 2(s+1)$ }. Denn N_1 hat auf $\Delta_2 \cup \Delta_3$ genau einen Fixpunkt, daher

$$\left\langle \begin{array}{ll} v \equiv 0, \; w \equiv 1 & (\text{mod } n) \text{ oder} \\ v \equiv 1, \; w \equiv 0 & \text{"} \end{array} \right.$$

$\mu = w - v \equiv \pm 1$.

(12) Die $\overset{\text{ersten}}{\text{letzten}}$ p Zeilen von $\mu I + D = \begin{pmatrix} \mu I + A & B \\ B' & \mu I - A \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des G-Moduls M von S. 87;

Desgl. ... von $-\mu I + D = \begin{pmatrix} -\mu I + A & B \\ B' & -\mu I - A \end{pmatrix}$ .. von E, S. 87

Für $X := \begin{pmatrix} \mu I + A & B \\ B' & -(\mu I + A) \end{pmatrix}$ ist $X^{-} G X = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$, $X^2 = 2\mu \begin{pmatrix} \mu I + A & 0 \\ 0 & \mu I + A \end{pmatrix}$

(13) a) $(A + iB)(A + iB)^* = A^2 + BB' + iA(B - B') = \mu^2 I + iA(B - B')$

b) $A + iB$ unitär $\Leftrightarrow$ $B = B'$
bis auf Skalarfaktor

92

(14) Ist bei $2p = n^2+1$ dass n eine Primzahlpotenz, so enthält die scharf 3-fache P-Gruppe $PSL_2(n^2)$ eine reguläre Diedergruppe der Ordnung $2p$; über $GF(n^4)$ hat sie die Normalform $\left\langle \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, wobei $a^{n^2+1} = 1$, d.h. a eine primitive (n^2+1)-te EW.

Frage: Kann man zeigen daß — immer solche umß? Gibt es dann ein interessantes „Doppelverhältnis" für G?

(15) Welche Determinanten s haben die p Zeilen von $(nI+A, B)$ bei der Darstellung durch eine $\mathbb{Z}$-Basis der ganzzahligen Funktionen an M, usw.?
Es ist $s \mid |nI+A|$, $s \mid |B|$; $s^2 \mid (2n)^p \cdot |nI+A|$ wegen $(nI+A)^2 + BB' = 2n(nI+A)$.

(16) Idee: Mod q rechnen, wo $\mathbb{P} \ni q \mid n$.

(17) Kombinatorischer Abschluss
funktioniert für monomiale Gruppen (wobei Übereinstimmung von s an a, b und passendem g auch bezüglich der Faktoren zu fordern ist)

(18) Der 2
enth Fa
G alle
OA
G^*
(19) (Da
1 oder 2
(20) De
entste
$0, \pm n$
man fi
n wenn
enthält
also 2 F
der Ord

(18) Der 2-Abschnitt einer 2-fach monomialen Gruppe mit Faktoren ±1 ist genau dann $2^n \mathrm{Sym}_n$, wenn G alle 4 Vorzeichenkomb. $\binom{+}{+},\binom{-}{-}$ $+-$ $-+$ $--$ enthält, $\oplus 1$ (natürlich genügen 3 davon).

G^* zentralisiert $W-V$. Daher:

(19) (Da die zu G^* gehörige Perm.-Gr. $P^* \neq \mathrm{Sym}\, n$ ist, ist der 2-Abschnitt von $G \neq 2^n \mathrm{Sym}\, n$, also) enthält G^* nur 1 oder 2 Komb. $++$, $--$.

(20) Der aus $W-V$ durch Streichen der ersten Zeile entstehende Abschnitt hat die rationalen Wurzeln $0, \pm u$ (je 1 mal); daher ist er „rational" im Sinne von Feit, z.B. im Fall $n=26$, $u=5$. (Außerdem hat er Wurzeln hoher Vielfachheit, also werden auch seine Abschnitte ziemlich rational sein.) Bei $n=26$ enthält daher wohl P^* ein Produkt von 6 Vierzyklen, also 2 Fixpunkten, das auf einer el. abelschen Gruppe der Ord 25 alle Potenzautom. induziert, wenn vorhanden.

(1) Si

„Lemma 2.5“ Das

(2) Lem

Wen

Ist

OE

Ähn

Folg

Schon

Subnormalteiler von P-Gr.

(Passman, Preprint Subnormality in loc. fin. gps, submitted to Proc LMS Jan 74)

(1) Eine endl. p-Gruppe P wirke transitiv auf Ω; $P = \langle P_1, .., P_k \rangle$
„Lemma 2.5" Dann $\exists\, i \;\exists\, x \in P_i$: $\Omega_{(x)} = \emptyset$

(2) Lemma 2.6: $G = \langle A_1, .., A_k \rangle$, $A_i \lhd\lhd G$.
Wenn jedes A_i höchstens n Punkte bewegt, ist jedes $|a^G| \leq n^n$; und wenn G p-Gruppe, ist $|a^G| \leq n$.

Ähnliches für lineare Darstellungen.

$\lhd\lhd$ Frage:

Folgt aus $A \vee B^g$ $\forall g \in G)$ und $A \lhd\lhd AB$ schon $A \lhd\lhd G$?

Verm.: Wenn es in einer stärkeren Isotropiegruppe überhaupt eine symplektische Alg. maximaler Belegung gibt, so kann diese direkt abgespalten werden

Ein Konvergenzbegriff für Untergruppen:

$A_i, A \leq G$. Dann $A_i \to A \;:\Leftrightarrow$

$A_i \cap A \uparrow A, \quad \langle A_i, A \rangle \downarrow A$

(1) Def:

a) :

dazu

(2) Versuch

(1') Wol

Schwach abgeschl. U'Gruppen

9.2.74

(1) Def: A schw.abg. in G

a) $:\Leftrightarrow$ $A \leq G$, und

$A^g \leq \mathcal{N}(A) \Rightarrow A^g = A$ viell.? A^g kom A $\Rightarrow A^g = A$

dazu ansehen Gorenstein S. 255 ff.

(2) Vermutungsweise:

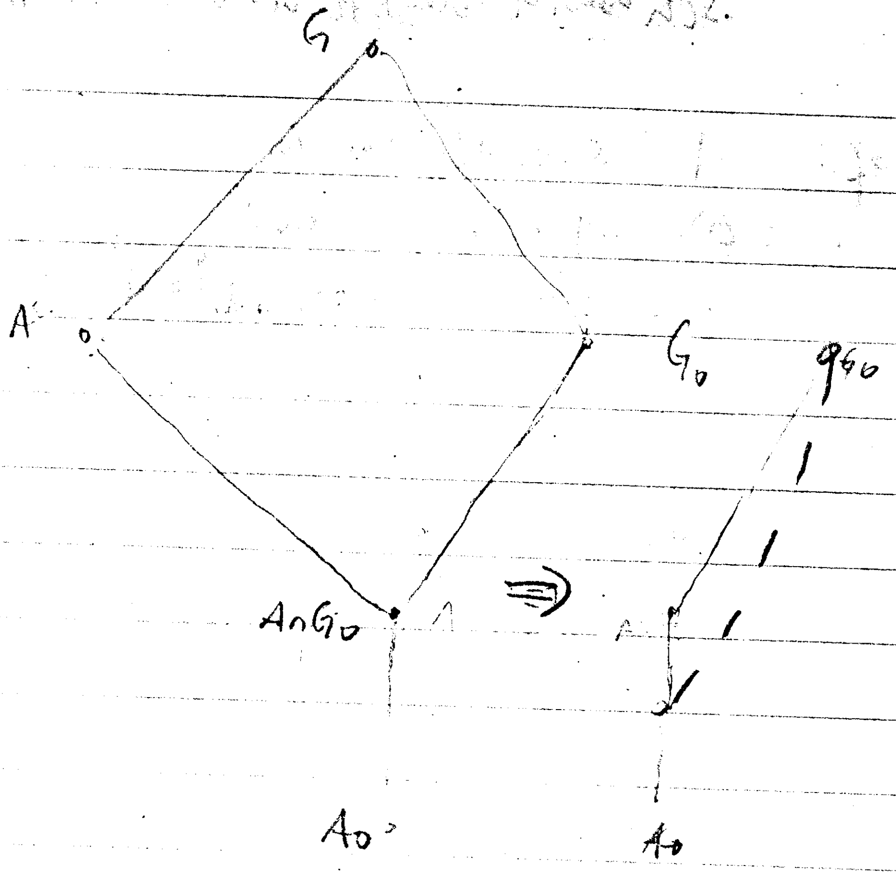
A stark abg in G $:\Leftrightarrow$

$A \leq G$, und

aus $a^g \in \mathcal{N}(A)$ folgt $a^g \in A$.

(1') Wohl äqu.: b) $A, A^g \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, A^g \rangle \Rightarrow A = A^g$

c) $A, A^g \trianglelefteq \langle \quad \rangle \Rightarrow$ – — —



locally an

Def.

gleichwe
wäre die

(1) A

(2) A.

(3) A

(4)

(4*)
(5)

G
die

Anwendung
Erfüllt

Bew

locally and weakly subnormal subgroups. 101

11.6.74

Def: A lbsn G :⟺ (G_0 endl. erz. Ugr von G, $A_0 \le G_0$, A_0 endl. erz. Ugr A, $a_1, \dots, a_n \in F \Rightarrow \exists S \le A$ mit $A_0 \le S$ sn G_0)$^{G_0} S$

gleichwertig, komplizierter wäre die Def mit n=1

(1) A lbsn G, $\varphi \in$ Hom G $\Rightarrow A^\varphi$ w G^φ

(2) A_i lb G, $i \in I$ $\Rightarrow \langle A_i \rangle$ w G

Beweis $|I| < \infty$ mit Roseblade-Stonehewer J Alg 8

(3) A_1, A_2 lb G $\Rightarrow A_1 \cap A_2$ lb G

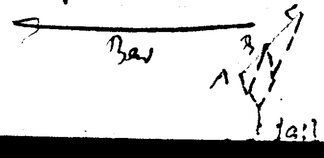
(4) $G = \cup G_i$, G_i Turm, $A \cap G_i$ lb' G_i $\Rightarrow$ A lb G.

(4*) (A_i, G_i) Turm, $A_i \le G_i \le G$, A_i lsn G_i $\Rightarrow \cup A_i$ lsn $\cup G_i$

(5) Gibt es eine Topologie auf G, für welche die wsn-Ugr. genau die offenen Ugr sind? kaum

Achtung: Fraglich ist, ob A lsn B ∪ C ⟹ A lsn C!

Erfüllt ist das aber für lsn: A w G ⟺ A = ∪S, S sn G, S ≤ A !



Dann

Sei χ e

$\psi(g)$

Chara

$[A,B]=1$.

sn G

$A_{..G}$, wsn

1. Satz: $A \leq G$ bel. Gruppen. $A_{..G} := \underbrace{\bigcup S}_{\substack{S \leq A \\ S \text{ sn } G}}$

ist $A_{..G} \leq G$, $A_{..G}$ wsn G.

Bew: Roseblade. Stonehewer: Of locally coalescent

2. $A, B \overset{(\text{oder } \ell)}{\text{wsn}} G$, A π-Gruppe, B π'-Gruppe

Ansatz: A maximal (mit) $A \lhd$

B wsn G, $\langle A, B \rangle$ -

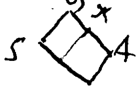
[illegible]

Hieraus folgt $|A| = p$. (Sonst gilt für jede Sylowgr P von A:

P sn SP (betr. (SP, P, P, S, —))

Da S keinen Kompfakt p hat, folgt $[S, {*}P] = 1 \;\forall P$, $[S,A] = 1$ ↯)

Wenn A eines der S_q normalisiert, ist dieses $\trianglelefteq G$, also $= S$,

S einfach.  Aus $A \leq X < G$ folgt A sn X $[(X, A, A, S\cap X)]$.

also ist A von Primzahlord, extrem in G, und hat normales

einfaches Komplement. Das widerspricht ↯. Also $|E| = q$, $|S| = q^i$.

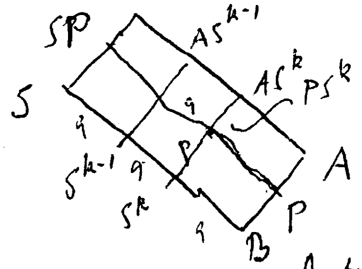
(g) $|A:B| = p \in \mathbb{P}$, $p \neq q$.

wäre $|A:B|$ zusammengesetzt

Wegen $|S| \neq q$ ist $A \not\leq S$. Sonst sei $S = S^0 \triangleright S^1 \triangleright \dots \triangleright S^m = B$

eine A-Komp-Reihe von S bis $B := S \cap A$ ($\trianglelefteq A$).

$\exists\, k \in \{1, \dots, m\}$: $AS^k \neq AS^{k-1}$ Wähle k: $AS^k \trianglelefteq S \cap AS^{k-1}$



Es gibt ($p \neq q$) eine p-Sylowgruppe von AS^k/S^k,

die sowohl von S^{k-1} normalisiert

sonst $O^q(AS^k) \trianglelefteq AS^{k-1}$ ↯.

wird. Sie hat die Gestalt PS_k mit $B < P < A$

Betrachte (SP, P, P, S, …), gilt P sn SP

PS^k sn SP, PS^k/S^k sn PS^{k-1}/S^k

also PS^k/S^{k-1} ist Sylowgr von PS^{k-1}/S^k, also $PS^{k-1} \trianglelefteq PS^k$ ↯

(h) $Z \neq S \cap$

(i) S enth

$D = Z$

$Y \trianglelefteq G$, wäre

, wenn $Y \neq 1$, $\underline{ZA}$

(j) A (

() $AK \cdot AZ =$

$Y \leq Z$

KF

nach (j) ist

ist

ei

aber h

(h) $Z(S) \cap A = 1$. denn $\overset{\cong A8}{/A}\, G$; (e)

vgl Prom A: (i) S enthält nur einen minimalen G-Normalteiler Z. $\Omega_1 Z \le Z(S)$

Bew: Klar ist $[S, Z] = 1$. Wäre auch $Z^* \trianglelefteq_G S$, so

$D = ZA \cap Z^*A$ sn G (b); $D = YA$, $1 \ne Y \le Z \cap D$; $\not\trianglelefteq Y^A$.

$Y \trianglelefteq G$, wäre $Y \ne Z$, so ~~[illegible]~~ $Y = 1$, $D = A$ sn G ↯. Also $Y = Z$,

ebenso $Y^* = 1$, $\underline{ZA = Z^*A}$. $\cap S$: $ZB = Z^*B$ mit $|Z||B|$

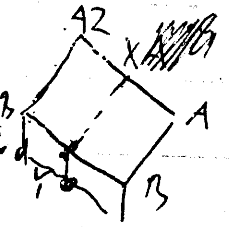
aber $(Z \times Z^*) \cap B = 1$ $\quad$ oder mit $|Z||Z^*||B|$ $\}$ ↯

(j') $A = O^q A$ $\quad$ Bew ~~[illegible]~~ Sonst (c) $O^q A$ sn G, $O^q A \underset{q}{\le} A \le G$, A sn G

(k) $AZ = A^{\cdot\cdot G} = O^q G$.

Bew: (b): AZ sn G, $A \le X$ ~~[illegible]~~ $\le AZ$.

$Y := Z \cap$ ~~X~~ $\trianglelefteq G \Rightarrow Y = \begin{cases} 1 \Rightarrow A^{\cdot\cdot G} = A \text{ ↯} \\ Z \Rightarrow AZ = A^{\cdot\cdot G} \end{cases}$



$KF(G, A^{\cdot\cdot G}) = \{C_q\}$, $\quad O^q G \le AZ$

$O^q G = O^q(AZ)$

nach (j) ist $O^q A = A$ [sonst $(G, O^q A, A, S, \ldots) \Rightarrow O^q A$ sn G

ist $O^q A \trianglelefteq A$, $O^q A \le B$, $|O^q A| = q^i$, $O^q A = 1$ ↯]

$O^q(AZ)$ wird von den p-El'ten von AZ

erzeugt, also $O^q(AZ) \ge A$, $= AZ$ (wie vorher $A^{\cdot\cdot G} = AZ$).

Achtung: A ~ isomorph, [illegible]

[illegible] nicht [illegible] isomorph.

aber in diesem Fall ja wegen [illegible] Sinnzeilen

$J = 1$ ↯)

$= S$,

$A, A, \ldots)]$

[illegible]

$q, |S| = q^i$

$\trianglelefteq \ldots S^{k-1}$

S^k / S^k,

[illegible]

$B < P < A$

D

$/ S^k$

$\trianglelefteq PS^k$ ↯

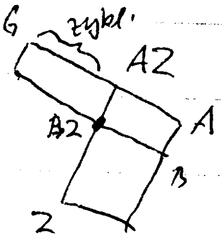
(l) ~~Alles~~ Sei $s \in S$ ~~[illegible]~~ $\langle A, s\rangle < G$. Dann $s \in S_G A \Leftrightarrow s \in N_G A$

"⇐" (I). "⇒" $A \operatorname{sn} \langle As\rangle =: H$ $A \trianglelefteq^{p} H \trianglelefteq H$.

(m) $r=1$, d.h. $G = \langle A, S_1\rangle$, und S_1 zyklisch; $G = S_1 \cdot AZ$

denn $r>1 \Rightarrow \langle A, S_p\rangle < G$, $S_p \le N(A)$, $A \trianglelefteq G$ ↯

$S_1 = T_1 T_2$; $T_1, T_2 \trianglelefteq S_1 \Rightarrow \langle A, T_i\rangle < G$, $T_i \le N(A)$, $A \trianglelefteq G$ ↯



(n) BZ ist elem. abelsch

sonst $\Phi(BZ)$ od $(BZ)^p \trianglelefteq G$
$\le B$

(o) ~~p-Syl A~~ $P \in$ p-Syl A wirkt fixpunktfrei auf BZ, denn $\mathrm{Fix}_{BZ} A \cap Z = 1$ und $\trianglelefteq G$, da $= \mathrm{Ztr}\, AZ \operatorname{char} AZ \trianglelefteq G$.

daher ist jede Gruppe U mit $P \le U \le AZ$ [illegible] und $= O^p U$.

Sei $P \in p\text{-Syl}\,A$ $(= p\text{-Syl}\,G)$ und $S_1 = \langle s\rangle$.

(p) Wenn $\langle s, P\rangle < G$, so $[s,P]=1$.

Bew: $A^* := \langle s,P\rangle \cap A$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \langle s, A^*\rangle \trianglerighteq A^*$

$\Rightarrow O^p(A^*) \trianglelefteq \langle sA^*\rangle \Rightarrow s \in N(O^pA^*) \Rightarrow s \in N\, O^p(A^* \cap B)$

$\Rightarrow A^*\cap B \trianglelefteq G \Rightarrow A^*\cap B = 1 \Rightarrow O^pA^* = 1 \Rightarrow O^pA^* = P$.

$[s,P] \le S \cap P = 1$.

(q) Wenn

S'

$s \in N$

$s \in N$

B_1

(r)

(s)

Bew $S^G \not\le BZ$

Wege

109

A M.

S_1

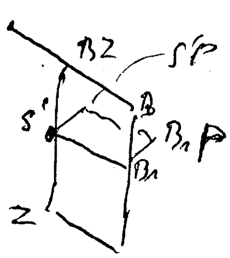
$A \trianglelefteq G$?

$N(A), A \trianglelefteq G$?

(q) Wenn es $P \in p$-Syl G abelsch gibt, dann $[S_1, P] = 1$, so

ist $B \underset{P}{\cong} Z$. Denn BZ ist als s-Modul zerlegbar, $B_1 P S \leq G$

$s' \underset{S}{\trianglelefteq} BZ$, $B_1 = S_1 \cap B$.



$A \cap L = B_1 P$

$s \in N(B_1 P)$

$s \in N(B_1)$

$B_1 \trianglelefteq G$ ~~⇒~~ $B_1 = 1$.

Sowohl Z wie B/B_1 sind irred. P-Moduln, also isomorph.

noch $\langle s \rangle = S_1$. Dann

(r) $\langle s^q \rangle BZ$ abelsch, $\underset{q}{\trianglelefteq} S$, $\trianglelefteq G$

Bew $A \cap \langle s^p, A \rangle$ $A \trianglelefteq \langle s^p, A \rangle$ $s^p \in N(B)$

$B \trianglelefteq \langle s^p, C \rangle$ $C := BZ$

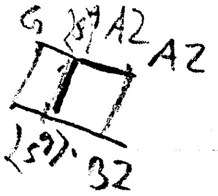
$Z =$

$BZ/B \in Z(\langle s^p, C \rangle / B)$

$Z \trianglelefteq AZ \trianglelefteq G.$

$\langle s^p, C \rangle / B$ abelsch, $\langle \rangle' \leq B$
$\trianglelefteq G$
$= 1$

(s) $s^q \in B$, $|G : AZ| = q$



A^*

)

Bew $s^q \notin BZ \Rightarrow [s^q BZ/BZ, AZ] \leq BZ$

P läßt $s^q \cdot BZ$ fest, hat Fixpunkt v

$O^p A^* = P$.

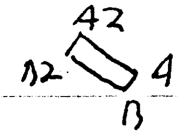
Wegen $|L| = q^b$ $\langle s^q \rangle BZ = \langle v \rangle BZ$

$C_G(v) \geq P$, $s^q BZ(v)$, also $s^q BZ P = s^q AZ$

$v \in Z(\underbrace{\langle s^q \rangle AZ}_{\trianglelefteq G})$ $Z(\ldots) \trianglelefteq G$, $Z \in Z(s^q BZ)$

$[Z, A] = 1$ $A \trianglelefteq AZ \trianglelefteq G$

Hiernach ist $s^q \in S_G(A) \cap ZA$

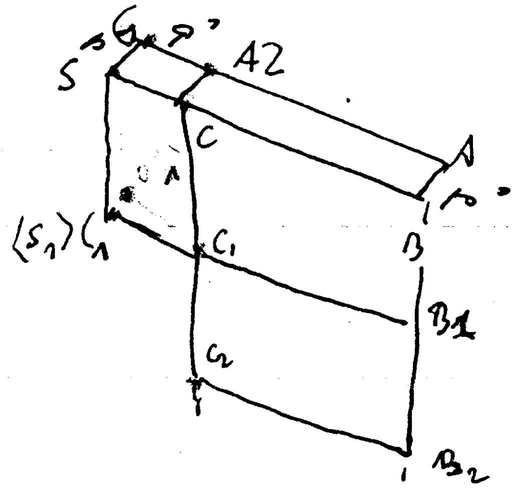


$\varphi: AZ \to AZ/B$:

$\varphi(s^q) \in S_{\varphi(G)}(\varphi(A))$, ~~bzw~~ wieder

$\varphi(A, G)$ extremal wie (4)!: also $s^q \in B$.

Also:



$\cdot \trianglelefteq G$

(t) C ist einreihiger s-Modul, also wenn $C_1 := [S, C] = [s, C]$, $\trianglelefteq G$

so $C/C_1 \cong Z$

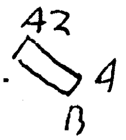
S/C_1 abelsch (G)

$S_1 \cdot C_1 \trianglelefteq S$ (v) $C_1 \trianglelefteq G$

Gilt $s_1^q \in C_1$, oder $\in B_1$ " wo v der Fixpunkt / irgendeines $P \in p\text{-Syl}\,G$ in $S.C$

~~Hieraus folgt $s_1^q = 1$~~ | Denn sonst

wäre S/C_1 Summe zweier irred G-M verschiedener Dimension q, $|Z|$. Dann gäbe es höchstens



einen G-Modul der Dimension q für S/C_1 .

~~Da für jedes $P \in p\text{-Syl}\,G$ das zugehörige $\langle v\rangle C_1/C_1$~~

~~ein G-Modul M, ist für alle $g \in G$~~

~~$v C_1 = v^g C_1$ [illegible]~~

wieder

Denn $C_1 \trianglelefteq G$ ~~denn was A recht ist, M A^g billig,~~

~~aber ist $s_1^{gg} \in C_1$~~

~~$\langle s_1\rangle^G \subseteq$~~

(iii) Ist $V = C_G(P)$, also $VC = S$, so ist $V^S = VC_1 \trianglelefteq G$.

Ann.: sonst $V^S \leq VC_2$

~~also~~ $\trianglelefteq G$

Dann $\exists_p$ $VC_k \trianglelefteq G$, $k \geq 2$

$[S/C, S/VC_k] \leq C \cap VC_k = C_k$

~~aber~~ $[V, C] = C_1$, also $C_1 \leq C_k$ ↯

$S, C]\cdot[S,C],$
$\trianglelefteq G$

S_1

exponent

(iv) $S \rhd VC_1 \rhd VC_2 \rhd VC_3 \rhd \ldots \rhd VZ \rhd$ sind

A-invariant, Quotienten sind irred A-Mod.

wegen $[V, C_i] = C_{i+1}$ ist auch $V^{C_i} = VC_{i+1}$.

p-Syl G
s.o.

Widerspruch

us

(v) $\langle S_1, P\rangle = G$ für jedes $P \in p\text{-Syl}\,A$.

Denn sonst $S_1 \sim V(\not{p})$, also $V^S \trianglelefteq G$, $V^S A < G$, $\langle S_1, A\rangle < G$ ↯
$VC_1'' < S$

noch Axiomatik für Subnormalisator
voll

(x) Zu jedem $a \in A$ und $g \in G - AZ$ gibt es $g' =_{\langle a,g\rangle} g$ so, daß $(A \cap \langle a,g'\rangle)$ [illegible] $\langle a,g'\rangle$.

In diesem Sinne ist also $G-AZ$ im Subn. von A.

Verschiedene Definitionen von $S_G(A)$

(1) **Ein Beispiel.** Die Gruppe $G = \{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \xi & \eta \\ & \varepsilon & \zeta \\ & & 1 \end{pmatrix}$

mit Elementen in $\mathbb{Z}_3$, $\varepsilon = \pm 1$ und

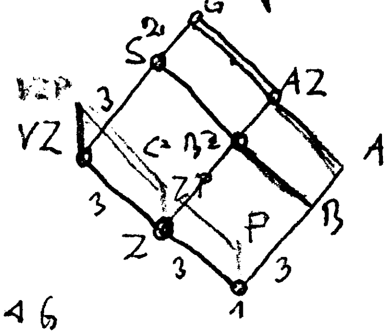
$B := \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & * \\ & & \end{pmatrix} \}$, $Z := \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & 0 \\ & & \end{pmatrix} \}$

$V := \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}^1$ $T := \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \rangle =$ [illegible]

$P := \{ \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & 1 \end{pmatrix} \} = \{1, a\}$ $(p = 2, q = 3)$

[illegible] Eigenschaften

$A := BP$, $S = Z \vee B$



$A \lhd\lhd AZ$, $\ntriangleleft$

$Z = \mathrm{Ztr}\, S$, $[V,A] = 1$

$[V,C] = Z$

$C = BZ = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \}$.

P wirkt fixpunktfrei auf C.

Der einzige für A vollsingulär (= extreme) Ausschnitt von G ist AZ/B.

Der größte Subnormalisator von A mit Eigensch. I ist $(G-C)^{+}B$, mit II ist auch $(G-C)+B$, mit II + III ist $(G-AZ)+A$.

Jedes Elt von $S-C$ läßt ein P^g fest.

Sing. für A endliche Ausschnitte

$H = VZP$, VP, AZ

$P < H$ g ~~$\in G - AZ$~~ ~~[illegible]~~ $\langle g, P\rangle < G \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\langle c\rangle P$ mit $1 \neq c \in C$

$(vz)^a = vz^-$ $\qquad (vz \cdot vz)^a = v^-$

Singulär für P sind ~~[illegible]~~ $VZ < VZP < G$,

$f_{\text{II}\,\text{IA}}(P) = VP$ ~~[illegible]~~

Hiernach ist $\underline{f_{\text{II}\,\text{IB}}(A) \cap f_{\text{II}\,\text{IB}}(A^{v}) = G - AZ + P \neq f_{\text{II}\,\text{IB}}(A \cap A^{v})}$

(9) Satz: Bezeichne $f = f^{\text{II}\,\text{IB}}$ den größten (universell definierten) Normalisator, der mit $\wedge$ und $\neg$ verträglich ist. Dann gilt

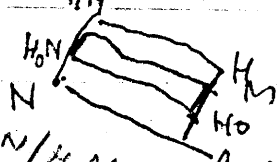
(a) $N \trianglelefteq G \Rightarrow f(A) \subseteq f(AN)$ $\qquad$ (b) $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$ i.A.

Bew. a): sei $g \in f(A)$, $NA \rightarrow H/H_0$ = sing, $g \in H - M$

$|\underbrace{NA \rightarrow H/H_0}| = p \in \mathbb{P}$.

wäre $= N \rightarrow H/H_0$, so $NA \rightarrow H/H_0 \ntrianglelefteq H/H_0$ ↯

also $N \rightarrow H/H_0 = H_0/H_0$ $\qquad N \cap H \leq H_0$



$HN/H_0N \cong H/H_0$ sing für H_0N/N

also ~~[illegible]~~ $g \in HN - MN$

$A \rightarrow HN/H_0N$

$AN \rightarrow H/H_0$

wegen $a \in H - H_0$ gilt $a \in HN - H_0N$, HN/H_0N sing für A

Noch Anmerkungen für Subnormalisator - -

(13) Bei den Kettendefinitionen gilt: Ist $|A| = p$ und $N(A) = A$, so ist $\mathcal{S}(A) = A$.

Allgemeiner: Ist für $g \in G - A$ stets $A \cap A^g = 1$ und $N(A) = A$, so $\mathcal{S}(A) = A$.
(Es genügt schon, wenn es $a \in A$, $a \neq 1$ gibt, daß aus $a^g \in A$ folgt $g \in A$.) – Wenn $A \leq N(B)$, $A \cap B = 1$, $\mathcal{C}_A(B) = 1$, so $\mathcal{S}_G(A) \cap B = 1$; ebenso für „Schichten" $B = B_1 \setminus B_0$.

(14) Aufgabe: Kettenlängen abschätzen auf auflösb. G!

(15) Bemerkg: In A_5 sind die 5-Sylowg. extrem.

(17) Eine 2-Untergruppe ist sn $\Leftrightarrow$ ihre Projektion in jede ungerade Diedergruppe ist trivial..

(18) Ein Vererbungstyp $\overline{\underline{VI}}$: $A \in G, B \in G \Rightarrow (A \cap B) \in G$

(19) Zusammenhang $\circ$ und $*$:

$$\begin{cases} g(\circ a)^n = a\left[g^{a^n}(* a^-)^n\right] \\ g(\circ a^-)^n = a^- g^{a^{-n}}(* a)^n \\ g(\circ a)^N = a\, g(* a^-)^N \end{cases}$$

auch für $n=0$, wenn $g(*a)^0 := a g$

$N := |G|$.

Also $\rho^*_A = \rho^\circ_A$

Sei

einen Su

Dann

isomorp

Fall

den No

fel, m

A eine

Zur Vollständigkeitseigenschaft von $\mathfrak{S}_G A$. 115

Sei (G, A, B, S) minimal mit

$G = \langle B, S \rangle$, A sn B, S sn G, $S \subseteq \mathfrak{S}_G(A)$ für einen Subnormalisator $\mathfrak{S}$, der folgende Eigenschaften genügt:

Dann ist S^B $_{\mathrm{I}}$ eine q-Gruppe oder$^{\mathrm{II}}$ direktes Produkt zu S isomorpher einfacher nichtabelscher Gruppen; im

Fall $\underline{\mathrm{II}}$: $|A| = p$, $|B| = p^a$, $[B, A] = 1$, A läßt nach Thompson den Normalisator einer char. Ugr. einer p-Sylgr von G fest, und der Normalisator ist keine p-Gr. Also zentralisiert A eine $\overset{\text{Schnitt}}{\text{Gruppe}}$ PQ/Q von S, mit einer q-Gruppe $Q \neq 1$.

FORTS: 184, 187

(1)

t

Zu Brauers Hauptsatz üb. Charaktere 117

(1) Sei $M \subseteq G$, M G-invariant. Dann

$M \trianglelefteq G \iff \forall E$ elementar: $M \cap E \leq E$.

Bew.: $\chi(g) := |G|$ wenn $g \in M$, $\chi(g) = 0$ sonst

χ ist G-invariant, $\chi|_E = p \cdot$ reg Char $E/M \cap E$ für ein $p \in \mathbb{N}$

Also ist $\chi \in Ch(G)$, $M = \operatorname{Kern} \chi \trianglelefteq G$.

Probleme über Perm.-Gruppen.

(1) G sei vom Grade $n(n-1)$. Wann ist G induziert von einer Gruppe vom Grade n durch Wirkung auf die Paare?

Gruppen mit Vollzykeln

1 G
ursp

haben nach Williamson 1973 auflösbare "äussere Permutationsautomorphismengruppen".

Frage: Wann enthält der 2-Abschluss von G einen Vollzyklus? (Insb. wenn |[illegible]| $= p^\alpha$: Vermutlich genau dann, wenn es kein Imprim.-System von p^2 Blöcken gibt, auf dem G elementar abelsch operiert.)

Kann in einer unendlichen Gruppe die Vereinigung von *endlich* vielen Konjugierten *einer* echten Untergruppe schon die ganze Gruppe ergeben?

Allg. Bemerkg:

Gegenstand der Gruppentheorie müssten Systeme übereinander liegender Faktoren sein: (subnormale Quotienten).

Abstand in $u(G)$:

$|A-B| = \max(\|A:D\|, \|B:D\|)$

wo $D = A \cap B$ und $\|A:D\|$ die Anzahl der Primfaktoren von $|A:D|$ (oder der Anzahl der verschiedenen Primfaktoren).

Existenz von Normalteilern.

1. Sei $H_0 \trianglelefteq H \leq G$. Genau dann ist $H_0 = H \cap G_0$ für $G_0 = H_0^G$, wenn die monomiale Darstellung von G mittels H/H_0 so transformiert werden kann, daß alle H_0^g, $g \in G$ aus Permutationsmatrizen bestehen. Das geht, wenn es zu $\alpha \neq \beta$ stets ein $g \in G$ gibt, für das $(x_1, x_2) \xrightarrow{g} (x_\alpha\ x_\beta)$ mit Faktoren 1!

Allg. Satz vom Sylowtyp: Enge Erzeugung

Def: Sei G Gruppe, $M_i \subseteq G$, $E = \langle M_i \mid i \in I \rangle$.
Schreibe $E = \langle M_i \mid i \in I \rangle_{eng} :\Leftrightarrow \forall e_i \in E : \langle M_i^{e_i} \mid i \in I \rangle = E$.

Zu betrachten sind vielleicht besser G-invar. Mengen γ von Teilmengen von G, derart, daß zu jeder Wahl von
$S_1, \ldots, S_n \in \gamma$ ein $T \in \gamma$ existiert, das
zu jedem ν ein passendes $S_\nu^{g_\nu}$ enthält
mit passendem $g_\nu \in \left\{ \begin{array}{l} \langle S_1, \ldots, S_n \rangle, \text{ oder} \\ G \end{array} \right.$, und
~~oder soll etw $T \in \gamma$ enth~~ $T \leq \langle S_1, \ldots, S_n \rangle$ sein

Verwandt m. Subnormalteiler

8.1.76 Zur Diss. von Bartels.

B: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{S_G(A) := \langle X \mid A \text{ sn } X \le G \rangle} \\ A \text{ kks } B \Rightarrow \exists H \le G: A \text{ sn } H, \; A \underset{H}{=} B . \end{array} \right.$

Sei $P \in U_p(G) = \{$p-Gruppen in $G\}$

Neue Beweise für Sätze von B.:

(1) $A \text{ kks } B \Rightarrow S_G(A) = S_G(B)$

denn $S_G(B) = S_G(A^h) = S_G(A)^h$, $h \in S_G(A)$.

(2) $(\text{kks})^\infty A = \{A^s \mid s \in S_G(A)\}$

Bew: $C \in (\text{kks})^\infty A \Rightarrow S_G(C) = S_G(A) =: S$, $C \in \{A^s \mid s \in S\}$

$A \text{ sn } X \ni x \Rightarrow A^x \text{ kks } A \Rightarrow A^x \in (\text{kks})^\infty A$

da $(\text{kks})^\infty$ G-invar. Äq.-Rel., ist $(\text{kks})^\infty A$

inv. unter x, X, S

(3) $P^g \le S := S_G(P) \Longrightarrow g \in S_G(P)$

a) Wenn $\langle P, P \rangle^g$ p-Gr, so $\exists R \in$ p-Syl G: $P, P^g \le R$

Dann $P \le R$, $R^{g^-} \in$ p-Syl S; $\exists s \in S$: $R^{g^- s} = R$ $\quad g^- s \in N(R) \le S$ $= g \in S$

b) $P^g \le S \Rightarrow \exists s \in G$: $\langle P, P^{gs} \rangle$ p-Gr $\underset{a}{\Rightarrow} gs \in S \Rightarrow g \in S$

(7) Nach Bartels gilt fürs Hyperzentrum H von G: $A \le V \le G$, $AH \trianglelefteq\trianglelefteq VH \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq V$.

Schärfer gilt: $A \le G \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq AH$ Gilt allg. für "A-Hyperzentr

(8) $\exists$ größtes $S(A) \trianglelefteq\trianglelefteq G$ derart, daß $A \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, S \rangle$

Neu: (

II ⇒ III

III ⇒ II : g

d

III ⇒ II :

b.

(5) Aus

(6) Für

a)

b.)

c) zu

d)

Neu: (4) $P \le L \trianglelefteq G$, $P^* := \bigcap_{P \le R \in p\text{-Syl} L} R$. Dann

$$\underbrace{P \text{ sn } S := S_G}_{I} \Leftrightarrow \underbrace{S = N_G(P^*)}_{II} \Leftrightarrow \underbrace{P^* \text{ pronormal in } G}_{III}.$$

Für $L = G$ ist das B.-Satz 3.1

II ⇒ III: wenn $\langle P^*, P^{*g} \rangle$ p-Gruppe, so $P^g \le S^{(3)}$, $g \in S$, $P^{*g} = P^*$.

I ⇒ II: ges. $S \le N(P^*)$. (Umkehrung klar) Bew.: Die Sylowgruppen von L, die P enthalten, sind die p-Sylowgruppen von $L \cap S \trianglelefteq S$, ~~da P sn $L \cap S$ ist.~~

III ⇒ I: $P \text{ sn } X \Rightarrow \exists R \in p\text{-Syl}(L \cap X)$, $T \in p\text{-Syl} L$: $R \le T$. Ges. $P \text{ sn } L \cap X$.

Ind. X: $P^* \text{ sn } L \cap X$, $P^* \le R \le T$, $P \le T^{x^{-1}} \in p\text{-Syl} L$, $P^* \le T^{x^{-1}}$, $\langle P^*, P^{*x} \rangle \le T$
$\Rightarrow P^{*x} = P^*$ $x \in N(P^*)$, $X \le N(P^*)$.

(5) Aus (4) folgt B's Satz: Ist P normal in einer Sylowgruppe von P^G, so P sn S.

Bew.: $P^* \trianglelefteq p\text{-Syl } P^G$, also pron. in G. (B '90)

(6) Für $P \le H \le G$ setze $P^{(H)} := \bigcap_{P \le R \in p\text{-Syl} H} R$. Dann $P^{(G)} \cap H \le P^{(H)}$

a) $P \text{ sn } S \Rightarrow P^{(G)} = P^{(S)} = O_p(S)$

b) $P \le H \text{ sn } K \le G \Rightarrow P \le P^{(H)} = P^{(K)} \cap H$

c) Ist $P \le H \text{ sn } G$, so gilt: $P \text{ sn } S_G(P) =: S \Leftrightarrow P^{(H)} \text{ sn } S$

Bew. "⇒" $P \le P^{(H)} \le P^{(G)} = O_p(S)$ "⇐" $P \le P^{(H)} \text{ sn } S$.

d) $P \le H \text{ sn } G \Rightarrow G = HS$, $P^{(H)}$ $P^{(G)}$

$P^g \le R$

$g^s \in N(R) \le S$
$= g \in S$
$\Rightarrow g \in S$

81.76
126

Noch zu Diss Bartels

(7) A, B pronormal in G & A ks B
$\Rightarrow A \trianglelefteq \langle A, B\rangle = AB$ pronormal in G.

Forts.: 152

In für$^{\mathrm{II}}$ G:

NB: (8) $g(\circ a^{-})^{n} \cdot a^{n} = a^{n-1} g(* a)^{n}$ $n = 1, 2, \dots$

wenn $g \circ a := g^{-}a^{-}ga$, $g * a = g^{-}ag$

(9) Der Sockel von G beläßt jedes Element von G in seiner Konjugiertenklasse innerhalb seiner subnormalen Hülle. Beweis in Hasse-Arbeit.
$g(\square a)^{\infty}$ (und damit per Induktionsschlüssen à la Bartels in seiner Äquivalenzklasse in G).

(10) Als Gegenbeispiel interessant: $C_3 \wr S_3$, $C_5 \wr S_3$ z.B. für:

(11) Aus $B \trianglelefteq A \leq G$ folgt nicht $B^{\cdot\cdot G} \trianglelefteq A^{\cdot\cdot G}$.

Verallge
Kann
(1) Satz:
A ⊕
a) a
oder β) 6
↑ Da
128 (1)!
Beispie
Ben
$g_1 \in$
$\in$
Dann
Für
ist an
aber
Setzt
so gilt
(2) Gilt
(3)

Verallgem. d. Satzes von Maschke   15.4.76   Tag nach Einsatz   127

Kann man das auch mit dem Begriff (relativ) von Curtis-Reiner kriegen?   = "Modul" mal Curtis-Reiner S. 50

(1) Satz: Die Gruppe G wirkt auf eine abelsche Gruppe $A \oplus B$; sei $AG = A$; sei $H \underset{i}{\leq} G$, und

(1) $a \mapsto ia$ ~~[illegible]~~ $\in Bij(A,A)$. Sei $BH = B$.
oder (2) $b \mapsto ib$ $\in Bij(B,B)$

Dann $\exists\ B'$: $A \oplus B = A \oplus B'$, $B'G = B'$.

≤ 2.7 (1)!

Beispiel: G wirkt auf abelsches N mit endlicher Torsionsgr. T, $(|G|,|T|)=1$. Dann $N = T \oplus S$, S torsionsfrei, $S = SG$ (Fuchs S. 187)

Bew: ~~Die Komplettierung von ag~~ Definiere für jedes $g \in G$

$g_1 \in \mathrm{Aut}\, A$ durch $g_1 = g|_A$, also $ag = ag_1$

$g_2 \in \mathrm{Hom}(B,A)$, $g_3 \in \mathrm{Aut}\, B$ durch $bg = bg_2 + bg_3$

Dann gilt für $f, g \in G$: $(fg)_2 = f_2 g_1 + f_3 g_2$, $(fg)_3 = f_3 g_3$

" " $h \in H, g \in G$: $h_2 = 0$, $(hg)_2 = h_3 g_2$.

Für $R \subseteq G$, $|R \cap Hg| = 1$ für alle $g \in G$ setze

$$[R] := \sum r_3^{-} r_2 \quad \in \mathrm{Hom}(B,A)$$

Ist auch S ein solches Repräsentantensystem, so ist $s_\nu = h_\nu r_\nu$ $\nu = 1..i$

also $$[S] = \sum_{\nu=1}^{i} (h_\nu r_\nu)_3^{-} (h_\nu r_\nu)_2 = \sum r_{\nu 3}^{-} h_{\nu 3}^{-} h_{\nu 3} r_\nu^{2} = [R]$$

Setzt man als Rechtsabbildung $x := [R] \cdot \frac{1}{i} \in \mathrm{Hom}(B,A)$! (α) siehe 127 Zeile 2-3

$= \frac{1}{i}[R]$ " im Falle (β)

so gilt $g_2 + x g_1 - g_3 x = 0 \in \mathrm{Hom}(B,A)$, daher für $b' := b + bx$ $(b \in B)$

$$b'g = (bg_3)' \in B'$$

(2) Gilt das Kriterium für Proj. oder Injektivität von G-Moduln? 137?

(3) Gilt dieser Satz von Maschke auch für $\Omega \times G$-Moduln? ja

Noch Maschke

(1) Genügt in 127_1, daß i^- auf $A \otimes B$ existiert?
Kaum*. Aber es genügt, wenn i^- auf $\mathrm{Hom}(B,A)$ existiert (oder auf
und hierfür genügt es, wenn i^- auf B oder A „ $\mathrm{Hom}_G(A+B/A)$?)
* $B = C_p$, $A = C_{p^\infty}$. Denn für $\eta \in \mathrm{Hom}(B,A)$ ist $i\eta = i_B\eta = \eta i_A$.

(2) Gilt Ähnliches für Wirkg von G auf $A \times B$, wo A, B [illegible]!

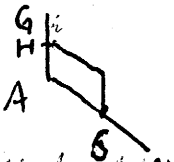
(2') Verallgem. auf $A \times B$, $A' = 1$, B beliebig (!): 131 (2)
NB ist in Maschke: Gorenstein S. 69/7

(3) Erweiterung auf $H_\nu \underset{i_\nu}{\leq} G$, $d := \mathrm{ggt}(i_\nu)$, $\exists\, d \mid A$ oder B.
Forts. 131-132

Umformulierung eines ~~Zerf~~ Spaltungs- Supplement- satzes von Gaschütz →

(4) Satz. Man verstehe unter einem G-Schnitt S den Durchschnitt eines Supplements von A ($\trianglelefteq G$) in G mit A. Sei $A' = 1$, $\exists\, i^-_{A/S}$.
Dann gilt:

a) Genau dann ist S ein G-Schnitt, wenn S ein G-invarianter H-Schnitt ist. (Bew „⇐": nach 129 (1) zerfällt G/S über A/S.)



b) Genau dann ist ein Supplement T von A in G Vertretergruppe (= Komplement) zu einem passenden G-Normalteiler ~~von~~ in A, wenn $T \cap H$ Vertretergruppe zu einem passenden H-Normalteiler in A ist. ← Neu

[illegible] →

Bew: Dann gibt es zu dem G-Normalteiler $T \cap A$ einen komplementären H-Normalteiler, also nach 127 (1) auch einen „ G- „ in A.

Zerfallssatz von Gaschütz, in der allgemeinen Formulierung von Huppert I. 121

(1) Satz s.u.

Bew. mit Wirkungen: Sei $A \trianglelefteq G$, $A \leq H \underset{i}{\leq} G$, $A'=1$ 15.4.76

H zerfalle über A $(H=AB, A\cap B=1)$. Dann $\exists\ \varphi \in \mathrm{End}\,H$, $h^{\varphi} \equiv h\ (A)$, $\varphi^2=\varphi$, $A^{\varphi}=1$.

Für ~~$R, S \in \mathfrak{R}$ = {Vertretersyst. für G/H}~~ $r, s \in G$, $Hr = Hs$ setze $\frac{r}{s} := s^{-}(sr^{-})^{\varphi} r = s^{-}(Asr^{-}\cap B)r = A \cap s^{-}Br$

" $R, S \in \mathfrak{R}$ " " $\frac{R}{S} = \prod_{G:H} \frac{r}{s}$ $r = Hx \cap R, \ldots$

Dann ist $\frac{r}{s} \in A$ (denn $sr^{-} \in H$, $(sr^{-})^{\varphi} \equiv sr^{-}\ (A)$), $\frac{r}{r}$

$\frac{r}{s}\cdot\frac{s}{t} = \frac{r}{t}$ $\frac{ra}{r} = a$, $\frac{ar}{\cancel{r}s} = \bar{r}ar\cdot\frac{r}{s}$ $\frac{rg}{sg} = \left(\frac{r}{s}\right)^{g}$ $\frac{r}{s} = \frac{cr}{s}, ac$

Also ist $\prod$ unabh. von Reihenfolge, $\frac{R}{S} \in A$. Es gilt (1) $\frac{R}{S} \in A$

(2) $\frac{R}{R} = 1$ (3) $\frac{R}{S}\cdot\frac{S}{T} = \frac{R}{T}$ (4) $\frac{Rg}{Sg} = \left(\frac{R}{S}\right)^{g}$

(5) $\frac{Ra}{R} = a^{2}$ ⑥ $\frac{cR}{\cancel{c}S} = \frac{R}{S}$ $(c = c^{\varphi})$ (7) $\frac{aR}{R} = \prod a^{r}$

(8) $\frac{Rxy}{R} = \left(\frac{Rx}{R}\right)^{y}\cdot\left(\frac{Ry}{r}\right)$ ⑨ $ji = 1$ auf A, $\psi = \psi_R : x \mapsto x\left(\frac{Rx}{R}\right)^{j} \Longrightarrow$ $\psi \in \mathrm{End}\,G$, $\psi(a)=1$, $\psi(x) \equiv x\ (A)$.

(10) s.u.

Setzt man $R \sim S$, wenn $\frac{R}{S} = 1$, so ist $\sim$ Äqu.-relation auf $\mathfrak{R}$ und $R \sim S \Leftrightarrow \frac{R}{R_0} = \frac{S}{R_0}$ ($R_0 \in \mathfrak{R}$ beliebig)

G wirkt auf $\mathfrak{R}$ vermittels $R \mapsto Rg$ und somit auf $\tilde{\mathfrak{R}}$; A tra $\tilde{\mathfrak{R}}$.

Wähle $R_0 \in \mathfrak{R}$, setze $C := \{g \in G \mid R_0 g \sim R_0\} = G_{\tilde{R}_0}$

Dann $C \leq G$, ~~$R_0, R_0 g = R_0 f \Rightarrow R_0 f g$ … A tra~~ $CA = G$,

da A tra $\tilde{\mathfrak{R}}$. $C \cap A = 1$, da $a \in C \Rightarrow 1 = \frac{R_0 a}{R_0} = a^{i}$. Also:

(10) $\frac{R}{S} = \frac{T}{U} \Rightarrow \frac{R}{T} = \frac{S}{U}$, $\frac{U}{S} = \frac{T}{R}$ (11) Benutzt man $B' = a^{-}Ba$ statt B, so wird $(S:T)' = \prod(A \cap t^{-}a^{-}Bas) = (aS : aT)$ also $(Tg : T)' = (aTg : aT(\in) = (T'g : T')$

$\mathrm{Kpl}(A,G) \neq \emptyset$, wenn

Satz (1) $\mathfrak{A} \ni A \trianglelefteq G$, $A \leq H \underset{i}{\leq} G$, $\exists\ B \in \mathrm{Kp}(A,H)$, $\exists\ i_A \Rightarrow \exists\ \mathrm{Kp}(A,G)$.

(1') Zusatz: Enthalten 2 Kpl C, D von A in G dasselbe $B := C \cap H = D \cap H$, so ist $C \underset{G}{=} C'$: Denn φ hängt nur von B ab, und

$C = G_{\tilde{R}}$ für $R \in \mathfrak{C}$, da $C \leq G_{\tilde{R}}$ wegen $\frac{Rc}{R} = 1$; denn

ebenso $C' = G_{\tilde{S}}$ für $S \in D$. $Hr_k c = Hr_\lambda \Rightarrow \frac{r_k c}{r_\lambda} = r_\lambda^{-}\underbrace{(r_\lambda c\, r_k^{-})}_{\in C\cap H = B}{}^{\varphi} r_k c = 1$

Anderer Beweis mit "Zerfällungsgruppe" [laut Artin Zass. 133]

Maschke Gaschütz

(1) Sei $N \leq G$; sei⁽²⁾ $G^* = \{\sigma \in Bij(G,G) \mid n g \sigma) = (ng)\sigma \ \forall g, n\}$ σ induziert gleiche Perm.

Also $G^* \overset{\leq}{=} \mathrm{Aut}\, {}_N G$ wobei ${}_N G$ = N-Linksmenge.

Setze $N^* = \{\sigma \in G^* : Ng\sigma = Ng \ \forall g \in G\}$.

Dann $N^* \trianglelefteq G^*$, $\exists \varphi: G \longrightarrow G^*$ natürl., inj. auf G:N wie ein g∈G

sodass wir $G \leq G^*$ schreiben können und es ist $G^* = N^* G$;

wenn man ein Vertretersystem R für G:N auswählt, ist der Stabilisator $C := G^*_R$ ein Komplement zu N^* in G^*.

Es ist $N^* \cap G = N_G$ (normaler Kern).

(2) Dieses G^* ist $\cong N \wr P$, wo P die Permutationsgruppe ist, die G auf G:N bewirkt. Es ist $N^* \cong \overset{|G:N|}{\times} N$

Gasch. ⇒ M so einfach Huppert S.

Existenz von Zerfällungsgruppen.

(3) G^* ist also eine Zerfällungsgruppe für $G : N_G$; Wenn $N \trianglelefteq G$, so von $G:N$.

FRAGE:

(4) Allgemeine Konstruktion für $N \leq H \leq G$, $N \trianglelefteq G$?

,Artin Zass. 133]

$(G,G) | n g(\sigma)$

$= (n g)\sigma$ }
g, n
Ordnung
gleiche Perm.

...tärl, inj.

, und

auf G:N
...rte ein $g \in G$

for

$\int$ in G^*.

(er Kern).

Per...statt-

G ist

...e für

G : N.

...[illegible]

G ?

Maschke ⇒
Gaschütz

Crelle, 190(1952)

18.4.76

(1) Beweis für Gaschütz' Zerfalls-Satz mit eleganter monomialer Darstellung:

Stelle G monomial über H dar. Ist
$K \in \mathrm{Kpl}(A, H)$, $A' = 1$, $j^{|G:H|}$ auf A,
so Matrix $\mathcal{M}(g) = \underbrace{\mathrm{Diag}(A)}_{D} \cdot \Pi(g)$, mit Koeff in K.

Dann ist $D \lhd \overset{D}{D\Pi(g)} = D\,\Pi(g) = \mathfrak{G}$ zerfällt.

$\exists\, B \leq D$, $B \lhd H$, nämlich Koeff(1) = 1.

Da $B = B^H$, $\exists\, B' = B'^{\mathfrak{G}}$ mit $D = B \times B'$.

$\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \cong G$ zerfällt.

Gasch. ⇒ Maschke
so ähnlich
Huppert S. 122

(2) G wirke auf $N = A \times B$, $H \leq_i G$, $A' = 1$ mod $B' = 1$!

$A = A^G$, $B = B^H$, $\exists\, i_A^{-1}$. Dann $A \times B = A \times C$, $C^G = C$.

Bew semid. Produkt von N mit G

$= (A \times B) H =: NH$; $N \trianglelefteq H \leq_i \mathfrak{P}$.

$A \trianglelefteq NG$, $BH \in \mathrm{Kpl}(A, NH)$

Nach Gaschütz $\exists$ $C := \mathrm{Kpl}(A, NG)$

Damit $N \cap C$ ein G-normales Kpl von A in N.

~~(1) Endliches G wirke auf $P \times R$, $P' = 1$, P p-Gruppe, $R \in G$. Eine p-Syl.-Gr. von G lasse R fest, und G lasse P fest. Dann $\exists\, S = S^G: P \times R = P \times S$.~~ $\longrightarrow$ (2)

~~neu 131 (2)~~

"Direkte Zerlegung von Gruppen mit [endl.] Operatorgruppen"

MASCHKE

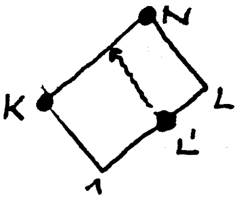
Verallgemeiner

neu auf 1.137!

(2) Sei $H \underset{i}{\leq} G$. G operiere auf $N := K \times L$ mit $K = K^G$, $L = L^H$. Zu der (~~[illegible]~~ stets abelschen) Gruppe $K_0 := K \cap L^G = K_0^G \leq Z(K)$ gebe es ein abelsches $K_1 = K_1^G$ mit $K_0 \leq K_1 \leq K$, $(a \mapsto a^i) \in \text{Aut}\, K_1$. Dann gibt es M mit $M = M^G$, $N = K \times M$.

neu: Zuerst besser Fall II Zeilen 1-3.

Bew: Fall I. $K = K_1$ ab., $k \mapsto k^i \in \text{Aut}\, K$.



Erst $L' = K' \times L' = N' = L'^G$; $\bar N := N/L'$

G operiert auf $\bar N = \bar K \times \bar L$, $\bar K = \bar K^G$, $\bar L = \bar L^H$

Auf $\bar K \cong K$ $\exists$ $i^- \in \text{Aut}\, \bar K$.

Nach 127 (1) $\exists$ $\bar M \leq \bar N$: $\bar N = \bar K \times \bar M$, $\bar M = \bar M^G$.

$\bar M =: M/L' \Rightarrow M^G = M$, $\overline{KM} = \bar K \bar M = \bar N$,

$L' \leq KM$, $KM = N$; $D := K \cap M \Rightarrow \bar D \leq \bar K \cap \bar M = 1$

~~$\varphi' = 1$~~,

(2)

„Gruppen"

$N := K \times L$

(~~[illegible]~~ stets

es ein

$\in \mathrm{Aut}\,K_1$

$K \times M$.

$\in \mathrm{Aut}\,K$.

$= L'^G; \bar N := N/L'$

$\times \bar L, \ \bar K = \bar K^G, \bar L = \bar L^{\dots}$

$\mathrm{Aut}\,\bar K$.

$\times \bar M, \ \bar M = \bar M^G$.

$= \bar K \bar M = \bar N$,

$\Rightarrow \ \bar D \le \bar K \cap \bar M = 1$

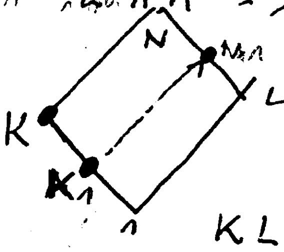
$D \trianglelefteq L' \le L, \quad D \le K \cap L = 1; \qquad N = K \times M.$

Bem.: Für Fall I [illegible]

Fall II: K beliebig.

$L \le C(K) \Rightarrow L^G \le C(K)$, da $K \trianglelefteq K^G$.

$K_1 := L^G \cap K \le Z(K)$ $\qquad K_1$ [illegible] ist G-invariant.



$N_1 := K_1 \times L_G$ [illegible] M H-inv.

Nach I $\exists\ L_. = L_.^G : \begin{cases} 1 = K_1 \cap L \\ M_1 = K_1 \times L_. \end{cases}$

$KL_. = KK_1L_. = KM_1 = $ ~~[illegible]~~

$K \cap L_. = K \cap (M_1 \cap L_.) = (K \cap M_1) \cap L_. = K_1 \cap L_. = 1$

~~Sei $N \trianglelefteq H \le_i G$, $N \trianglelefteq G$, $K = K^G \le N$.~~

~~Wenn es ein Komplement zu K in H gibt,~~

Lit. 1) Ein eigentümlicher Split-Begriff bei DRE, Contributions .... 1939, p. 445

2) G. N. PANDYA, R. D. BERCOV 1-cohomology and splitting of group extensions. Canad. M. Bull. 19, 369-71 (1976)

3) P. Schmid: Group extensions and splitting modules, 15 pp. MS, eingereicht bei MZ 11.5.78

4) Gruenberg, K. W.; Cohomological topics in gr. Th. Lect. Notes, Springer #143 (1970)

(3) Geht man von $C \in \mathrm{Kpl}(A \le G)$ aus und benutzt in (1) $C_\nu := C \cap H_\nu$, so wird im Fall $R_\nu \le C$: $\mathrm{Stab}(R_1, \dots, R_n)^\sim = C$.

Bew: Für $c \in C$ ist $A \cap r_\nu'^{-} C_\nu r_\nu c \in A \cap C = 1$,
wobei $A r_\nu' = A r_\nu c$; $r_\nu, r_\nu' \in C_\nu$.
Also $\left(\frac{R_\nu c}{R_\nu}\right)_\nu = 1$, $C \le \mathrm{Stab}(R_1 \dots)^\sim$, =.

(4) Sind $C, C^* \in \mathrm{Kpl}(A \le G)$ und ist
$C_\nu = C \cap H_\nu \underset{A}{=} C_\nu^* = C^* \cap H_\nu$, so $C \underset{A}{=} C^*$.

Bew. Mit $R_\nu \le C$, $R_\nu^* \le C^*$ wird nach (3)
$C = \mathrm{Stab}(R_1 \dots)^\sim$, $C^* = \mathrm{Stab}(R_1^* \dots)^{\sim *}$
und nach (2) ist $C^* \underset{A}{=} \mathrm{Stab}(R_1^*, \dots)^\sim \underset{A}{=}$

(5) $C, C^* \in \mathrm{Kpl}(A \le G)$; $\forall \nu \exists a_\nu : C^* \cap H_\nu = (C \cap H_\nu)^{a_\nu}$
$\Longrightarrow \exists a : C^* \cap H_\nu = (C \cap H_\nu)^a$ Bew. (4)

Ergänzungen 136 (2) 181 Operatoren
182 $C_\nu \not\equiv C$

16.4.76

Beispiel zum Gaschütz-Problem.

(1) ~~Auch~~ Unter den Voraussetzungen des Satzes von Gaschütz kann man nicht jedes Kplt von A in H ergänzen zu einem von A in G. Beispiel: ⁙ Gittergruppe $\leq S_9$, die die Zeilen miteinander beliebig permutiert, die Spalten aber gerade. $|G| = 3^2 \cdot 2$

A = {jede Zeile im Ganzen fest}. $A \underset{3}{\leq} H \underset{2}{\leq} G$

Zu $\langle z \rangle$, wo z Zeilen und Spalten zyklisch vertauscht, gibt es in G kein invertierendes Element, da es in den von G induzierten Permut. der Zeilenmenge keins gibt. Also gibt's kein Klt zu A in G, das $\langle z \rangle$ umfasst.

Hier ist die Klassenzahl $|\mathrm{Kpl}(A,G) : G| = 1$,

aber $|\mathrm{Kpl}(A,H) : H| = \frac{9-3}{3-1} = 3$.

Im allgemeinen gilt also nicht $C_\nu \leq C$ in 135(1)

Einfacheres Beispiel: $G = C_p \wr C_2$, $A = Z(G)$, $H = C_p \times C_p$

s. auch 18?(1)

Anzahl-Satz

(2) Unter den Vor. des allg. Gaschütz-Satzes 134(1) gilt $|\mathrm{Kpl}(A,G) : G| \leq \prod_\nu |\mathrm{Kpl}(A,H_\nu) : H_\nu|$.

bzw. 134(2)

und vermutlich sogar ... | ...

(3) Aufgabe: Gaschütz 1. Reduktionssatz erweitern wie (1).
Vielleicht damit leichterer Beweis für 135(2)?

16.4.76

des Satzes
: jedes
önen von
Galoisgruppe $\leq S_9$
permutiert,
$3^2 \cdot 2$
$A \underset{3}{<} H \underset{2}{\leq} G$

legen
von G
keins gibt.
(2) [illegible]
$:G| = 1$,

: in 135(1)
$H = C_p \times C_p$
[illegible] Satzes
$\prod_\nu |\mathrm{Kpl}(A, H_\nu) : [illegible]^{H_\nu}|$.
...

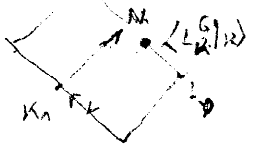
[illegible] (1).
für 135 (2)?

MASCHKE
schärfer: XVI 23

16.4.76

(1) Endl. Gr. G operiere auf $N = K \times L_\nu$, $\nu = 1 \dots n$; $K^G = K$
Es gebe $H_1, \dots, H_n \leq G$: $L_\nu^{H_\nu} = L_\nu$;
für $i := \mathrm{ggT}\{i_\nu\}$ gelte: $i \cdot \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}\, K_1$ für ein K_1 mit
Dann $\exists\, L = L^G$: $N = K \times L$ | $K_1' = 1$, $K_1 \supseteq K \cap \langle L_\nu^G | \nu \rangle$
[illegible] z.B. $i \in$ [illegible](K)

wie 132   Fall I: $K' = 1$
Bew: 134(1) auf $K \trianglelefteq NG$ und die NH_ν anwenden:
$\exists_\nu C \in \mathrm{Kpl}(K \text{ in } NH_\nu)$, also $\exists\, C \in \mathrm{Kpl}(K, G)$. $L := C \cap N$
Fall II wie 133 mit $K_1 := Z K$, $N_1 := K_1 \cdot \langle L_\nu^G | \nu \rangle = K_1 L_\nu$.



Sonderfall:

(2) Auf $K = K^G \leq N$ $= N^G$ wirke die op. Gr. G.
Genau dann $\exists\, L = L^G$, $N = K \times L$, wenn zu jeder Sylowgruppe P_ν von G ein $L_\nu = L_\nu^{P_\nu}$ existiert mit $N = K \times L_\nu$.

(2') Ein G-Modul ist sicher dann injektiv (proj.) wenn er als P_ν-Modul stets injektiv (bzw. proj.) ist.

FRAGEN 13)

(3') Wann sind operator-invar. Kplte konjugiert?
(3'') Behandle $\int^{T} = (S^{+}\;{}^{-}(S^{-})^{P}{}_{\nu}$?
(3''') $\psi \in \mathrm{RAB}(G, G)$ $\varphi \in \mathrm{Hom}\, H$
Fastgruppe auf N anstelle der Wirkgruppe G

138

6.5.76

Funktorielles zu Normalisatorsätzen

Funktor: $G \mapsto G^\alpha \le G$ sodaß $\forall \sigma \in \mathrm{Iso}$: $G^{\alpha\sigma} = G^{\sigma\alpha}$ 8.5.76

Dann $G^\alpha \trianglelefteq G$. Schreibe kurz $\alpha \in \Phi$

$\alpha + \beta$: $G^{\alpha+\beta} = G^\alpha G^\beta = \langle G^\alpha, G^\beta \rangle$,
$G^{\Sigma\alpha_i} := \langle G^{\alpha_i} \rangle$
$\alpha \le \beta :\Leftrightarrow G^\alpha \le G^\beta$, $\forall G$

Schreibe α nort β $:\Leftrightarrow \left(X \xrightarrow[sn]{\sigma} Z \xleftarrow[sn]{\tau} Y \Rightarrow X^{\alpha\sigma} \le N_Z(Y^{\beta\tau}) \right)$
"normalisiert"

mehr :

$N(\beta) := \Sigma\alpha$ $(\alpha$ nort $\beta)$.

Programm: Welche funktoriellen Eigenschaften hat $N(\beta)$? Etwa „fittingsch": A sn B ⇒ $A^\alpha \le A^\beta$

Und welche hat

$\mathfrak{N}(\alpha) = \Sigma\beta$ $(\alpha$ nort $\beta)$?

etwa „Gaschützsch": $N \trianglelefteq G \Rightarrow (G/N)^\alpha = G^\alpha N/N$

Ziel: Dualitätssätze für geeignete α, β

(etwa zwischen den fittingschen und gaschützschen).

Elementarere Darstellung:

α nort β $:\Leftrightarrow$ X kos Y $\Rightarrow X^\alpha \le N(Y^\beta)$ kos = Ko-subnormal

$N(\beta) = \Sigma\alpha$ α nort β $\mathfrak{N}(\alpha) := \Sigma\beta$ α nort β

Dann ist α nort β gleichwertig mit $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \le N(\beta) \\ \beta \le \mathfrak{N}(\alpha) \end{array} \right.$

11 Normalisator- u. Zentralisatorsätze

8.5.76

(1) Def: Sei $B \in \mathfrak{G}$. $\mathcal{C}[B] :=$ Klasse derjenigen $A \in \mathfrak{G}$, für die gilt: $A \cong A_1$ ksn $B_1 \cong B$ $\Rightarrow A_1 \leq \mathcal{C}(B_1)$. Ähnlich $\mathcal{N}[B]$.

Ist $\mathfrak{X}$ eine Klasse von Gr, so $\mathcal{C}[\mathfrak{X}] := \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathcal{C}(X)$ usw

mehr: 5 Fitting-Formeln; A, B ..., $A\ p\ g \Rightarrow (AB)^5 = A^5 B^5$ ($x \mapsto x^5$ ist linear")

(2) Ist ~~𝔊~~ $\mathfrak{G}_p$ die Klasse der endlichen p-Gruppen, so ist $A \in \mathcal{C}[\mathfrak{G}_p] \Leftrightarrow A \leq \mathcal{C}(P)$ $\forall P \in \mathrm{sn}\, A\, \mathfrak{G}_p$ und Kpf $A \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. -- Ferner ist $\mathcal{N}[\mathfrak{G}_p] = \mathcal{C}[\mathfrak{G}_p]$

Bew betrachte, wenn A sn G, A sn $G \times G_p$.

(3) Ist $p > 2$, so ist $\mathcal{C}[\mathfrak{G}_p] = \underbrace{\mathcal{C}[Z_p]}_{\leq 6}$

Bew: $A \in \mathcal{C}[Z_p] \Rightarrow A \leq \mathcal{C}(A_p)$ da A_1 ist A_p. (2)

(4) Für $p = 2$ ist $\mathcal{C}[\mathfrak{G}_2] \subset \mathcal{C}[Z_2]$

Bsp.: Quaternionengruppe Q erweitert mit $Z_3 =: G$

Dann $G \in \mathcal{C}[Z_2] \setminus \mathcal{C}[\mathfrak{G}_2]$, da $G_2 \not\leq Z(G)$.

(5) Also kann man nicht G von (4) mit der 2-Sylowgruppe von S_4 derart ksn schalten, daß die zyklische Untergr. der Ord. 4 amalgamiert wird.

Zentralisatorsätze

9.5.76 (1) Erstes Teilziel bei Zentralisatorsätzen: Untersuchungen 11.5.7
Paare $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ mit $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] = 1$ (bei loser Einbettung)
vollständig kennz. Eigenschaften von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$? Dualität?
"normal-persistent"

(2) Für $G(q_2)$ braucht man: Jeder Autom. ungerader
Ordnung einer 2-Gruppe G, der welche, zentral
Elemente von G fest läßt, ist trivial. Für 24.5.
$p > 2$ Gorenstein S. 184. Genügt $Z_2(G)$?
NB: aus Gorenstein 184 folgt.

(3) $A = A' \text{ sn } G$, $B \text{ sn } G$, $G \notin \mathcal{K}(B, A \cap B)$, $A \le N(X)$ für alle $X \le \text{sn } G$ mit
$A \cap B \le X \le A \cap B^A$ und $|X : A| \in \mathbb{P}$ $\Longrightarrow A \le N(B)$.
Frage: Entspr. auch für bel. B? (2) bisher
genügt $A \le N(X)$ wenn $X \text{ sn } A$, $A \le X \le B^A$ und
$|X : A \cap B| \in \mathbb{PP}$. (Primzahlpotenz)

Sockel: (4) $A \text{ sn } G \Rightarrow A \cap \operatorname{soc} A \le \operatorname{soc} A$

Bew.: oBdA $A \trianglelefteq G$. $N \trianglelefteq G \Rightarrow N \le A$, od. $N \le Z_p(G)$
wenn $G/A \cong C_p$, oder zeile sogar NT an[illegible].

Messreihe max

Einbettung)

Dualität?

11.5.76 Bahnlängen in faktorisierten Gruppen (G, Ω)

(1) $G = AB \Rightarrow \max|\omega^G| \leq \max|\omega^A| \cdot \underline{\min}|\omega^B|$

~~Bew ∃ $|\beta^B| = \min|\omega^B|$~~ $|\beta^G| = \beta^{BA}$

Bew: $\alpha \in \Omega$ oBdA $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ tra } \Omega \\ |\alpha^B| = \min_\omega |\omega^B| \end{array} \right.$

sonst $B \to B^g$. $|\alpha^G| \leq |\alpha^{BA}| \leq |\alpha^B| \cdot \max|\omega^A|$

ungerader

Wechsel

Für

(G) ?

24.5.76 (2) <u>Kompositionsfaktoren</u>: Sei $|\Omega| = n$;

G tra, $E \in \mathcal{K}(G)$, $E \notin \mathcal{K}(U)$ $\forall U < G$; $G/N \cong E$

(a) $\Rightarrow$ N intra. nilpot. $<$ $N = 1$, $G \cong E$ oder
E hat Darst. als tra Gruppe vom Grad d für ein $d|n$, $d<n$,
wobei jeder Primteiler von n/d in $|E|$ aufgeht

Sp. G mit

$\leq d(B)$.

$\leq B^A$ und

b) Jeder <u>maximale</u>* Komp-Fakt. von G, der nicht als <u>Kompfaktor</u> von G_α auftritt, hat eine Darstellung mit Grad $d \,|\, n$.

*nicht Faktor eines anderen

mit $N \leq Z_p(G)$

Partition

142

11 Verallgemeinerte Vertauschbarkeit.

(1) $|G|<\infty$; A, B sg G. Genau dann ist für $J = \langle A, B \rangle$

$J = ABABA$, usw., wenn

$J = J^{\mathfrak{N}} ABABA$ ist.

Bew: Stets ist $J^{\mathfrak{N}} ABAB.. = AA^{\mathfrak{N}}B^{\mathfrak{N}}BAB..$

'Also Vertauschbarkeitsstufe' bleibt bei Hom. $J \to J/J^{\mathfrak{N}}$ erhalten.

(2) Ist $G \in \mathfrak{N}_2$, so ist für $A, B \le G$ stets $ABA = AB$ (also $= \langle A, B \rangle$).

Bew: $Aba = Aab^a = Ab^a$

$b^a = zb \qquad z \in Zn\langle A, B \rangle$

$Aba = Azb$

$z = a_1 b_1 a_2 = a_2 z a_2^{-} = \in AB$

$Aba = Azb \subseteq AB$.

(3) Sind in G alle Sylowgruppen von der Klasse ≤ 2, so sind alle SNT vertauschbar.

keit.

für J=⟨A,B⟩

dann

AB..

den.

n.

≤ G

= ⟨A,B⟩.

B⟩

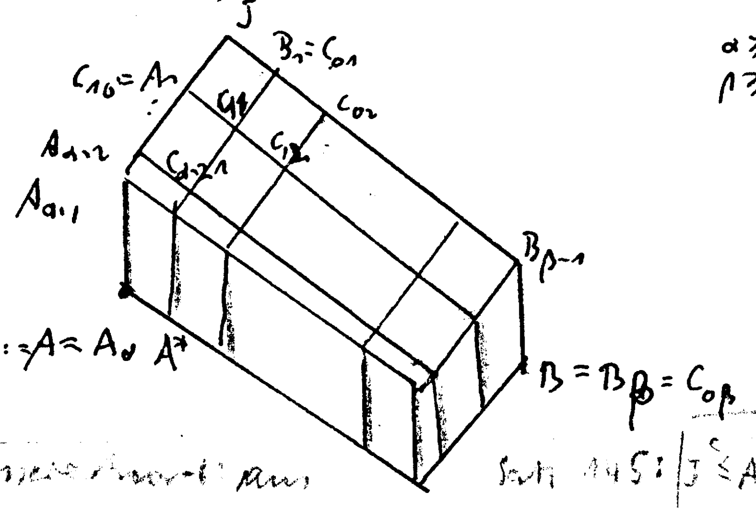
; A B

Klasse

41 Vertauschbarkeit

Satz: (1) Das folgende Diagramm in $J=\langle A,B\rangle$ sei direkt, und zerfallene ähnliche Faktoren. Sei stets X^c der kleinste Normalteiler von X mit $X/X^c \in \mathfrak{N}_c$. Dann folgt aus $J = AB\,J^c$ stets $J=AB$, wobei $[\alpha,\beta] = c := \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$ wenn $|J-A| = \alpha$, $|J-B| = \beta$.

$\alpha \geq 2$
$\beta \geq 1$



Besseres Ansatz' aus

Satz 145: $\boxed{J^c \leq A_{\alpha-1} B_{\beta-1}}$

Zusatz (2) NB: Mit [illegible] kann man auf Vor $| \in \mathfrak{N}$ verzichten

Bew: $[\alpha,\beta]_{A_{00}}\ J^{[\alpha,\beta]} = C_{10}^{[\alpha-1,\beta]} \cdot C_{01}^{[\alpha,\beta-1]}$,

da $[\alpha-1,\beta] + [\alpha\ \beta-1] = \binom{\alpha+\beta-3}{\alpha-2} + \binom{\alpha+\beta-3}{\alpha-3}$
$= \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-2} = [\alpha,\beta]$.

So fortfahrend erhält man

$$J^{[\alpha\ \beta]} \leq AB$$

besser verwenden

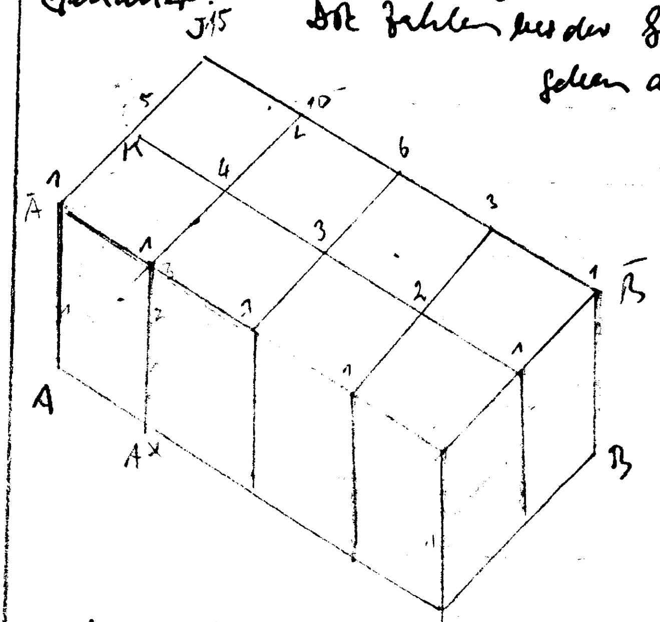
$A = A_0 < A_1$

bessere Bezeichnung: [illegible]

144

(1) Genauer: Die Zahlen^c bei der Gruppe X geben an, welches X^c sicher in AB liegt.

17.5.76



Ergänzg.

Induktiv: $J^{15} \le K^5 \cdot L^{10} \le ABL^{10} = AL^{10}B \le AABB$,

Gebraucht wird dabei der Hilfssatz:

Ist $G = KL$; $K, L \trianglelefteq G$, so ist für $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}_0$

$$G^{\kappa+\lambda} \le K^{\kappa} L^{\lambda}$$

Schreibt man G nämlich additiv, Kommutierung wie Produkt, so ist $G^{\kappa+\lambda} = (K+L)^{\kappa+\lambda} = \sum_{\rho+\sigma=\kappa+\lambda} K^{\rho} L^{\sigma}$ enthalten $\rho \ge \kappa$ (oder $\sigma \ge \lambda$), dann $K^{\rho}L^{\sigma} = [K^{\rho}, L^{\sigma}] \le K^{\rho} \le K^{\kappa}$ bzw. $\le L^{\lambda}$, $G^{\kappa+\lambda} \le K^{\kappa}L^{\lambda}$,

(2) Hauptsatz:

$A \trianglelefteq^{\alpha} G$, $B \trianglelefteq^{\beta} G$, $\langle A, B \rangle =: J$. Dann:

$$AB = BA \Leftrightarrow ABJ^{c} = BAJ^{c}, \ c := \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$$

Bew mit Reduktionen wie im Skript Mod.

Brewster J. Alg. 36 (1975), 85-87

Stonehewer MZ 139, 45-51 Nilpotenzbedingung

[illegible]

Das gibt eine Theorie der schwach [illegible] Funktoren: wenn $K, L \trianglelefteq G$, so $(KL)^{\alpha 2} \le K^{\alpha}L^{\alpha} \le (KL)^{\alpha}$

zB $K^{\alpha} := K'$. Oder $(KL)^{\alpha\kappa+\lambda} \le K^{\alpha\kappa}L^{\alpha\lambda}$.

11

(1) Sa

~~wo~~

ohne d

Vol. 7h

bei Brew.

J Alg. 36, 8

(1975) 1

for the perm

ability of sn

s. auch Lemm

Roseblade,

Stonehewer

Ergänzg

...e X
...elches X^c
...er für AB Abgl.

Ergänzg

↓

für $k, l \in \mathbb{N}_0$

...ung
$K^\rho L^\sigma$
$\sigma = k+l$

L^l, G^{k+l}

$=: J$. Dann:

J^c, $c := \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$

Skript Mad.

$)^{\alpha l} \le K^\alpha L^\alpha (KL)$

$)^{\alpha k + l} \le K^{\alpha k} L^{\alpha l}$.

11

(1) **Satz.**

(1955)

Vol. ...

mit Beweis, JAG 36, 85-87 (1975) A criterion for the permutability of subgroups.

s. auch Lennox, Proc. Camb. Ph. S. 72 (1972), 351-356

Roseblade, MZ 117, 57-69

Stonehewer MZ 1977

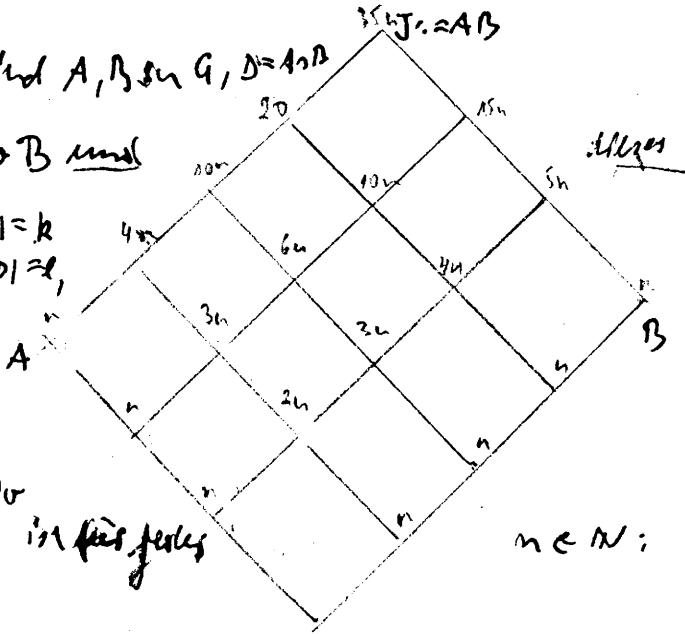
Vertauschbarkeit, Operat. $\mathfrak{N}$

145

Sind A, B in G, $D = A \cap B$

$A \cap B$ und

$|A:D| = k$
$|B:D| = l$,



allgem. Diagr. direkt,

So ist für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$J^{n\binom{k+l}{k}} \le A^n B^n \le J^n \quad \text{wobei } X^k := \bigcap_{X/N \in \mathfrak{N}_k} N$$

Jedes:

Das ist die Verallg. von $(AB)^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}} B^{\mathfrak{N}}$ auf beliebige Gruppen. (AB = BA ist vorausgesetzt!)

Beweis schrittweise ist $X^{ii} \le A^n B^n$

Beachte: $X \trianglelefteq Y \Rightarrow X^n \le Y^n$, da $XY^n/_{Y^n} \in \mathfrak{N}_n$

Ergänzg zu 144(1): Der nach Wielandt im Fall der Normalteiler auflösbar der Länge $\le \min(\alpha-1, \beta-1) =: d$, ist, gilt (unter den dort gezeichneten Voraussetzungen!))

$$|J - A| = \alpha, \ |J-B| = \beta \Rightarrow J^{c \cdot d} \le AB, \ c := \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$$

Bew. und $J^{ncd} \le A^n B^n$

Vermutlich gilt das aber auch für beliebige A, B in G.

Vertauschbarkeit

1. Frage: A, B sn G, $A / (A\cap B)^A$ "$\perp$" $B / (A\cap B)^B \overset{?}{\Rightarrow} A \triangleleft B$

Bemerkungen: a) Die Bedingung bleibt erhalten bei Homomorphismen $G \xrightarrow[\varphi]{} \bar G$:

$$\overline{(A\cap B)}^{\bar A} \le (\bar A \cap \bar B)^{\bar A}$$ also mit K = Kern.

$\bar A / (\bar A \cap \bar B)^{\bar A}$ Bild von $\bar A / \overline{(A\cap B)}^{\bar A} = AK / D K^A = A D^A K / D^A K$
$A\cap B =: D$
$\cong A / A \cap D^A K$
$=$ Bild von A/D^A

b) Nach 144 (2) kann man $J = \langle A,B\rangle$ als nilpotent annehmen. ~~Induktion nach Klasse J gibt mit $Z = Ztr(J)$: $AZ \triangleleft BZ$~~

~~Übergang zu~~

c) Aus Vor. "$\perp$" folgt $C := [A,B] = D' \cdot [C,J]$, $D := A\cap B$

und daher $C = D'^J \le A'^J \cap B'^J$

sowie $J' = A'^J \cap B'^J = A'^J = B'^J$

daher auch $C = (A^q \cap B^q) \cdot [C,J] = (A^q \cap B^q)^J$

$C \circ J = D' \circ J$

Ferner
$J \circ\circ J = J' = A \circ A + A \circ A \circ J$

$J' = J \circ A$. Genauer: $\underline{C = D'[C,A][C,B]}$.

2. Hilfssatz: A, B sn $G \in \mathfrak{N}$, $A_0 \trianglelefteq A$, $B_0 \trianglelefteq B$, $A/A_0 \perp B/B_0$

$\Rightarrow [A,B] = [A_0, B_0]$

$A\cap B) \overset{B}{\underset{2}{\Rightarrow}} A \triangleright B$

dran bei

. m' K = Komp.

$'D_K^A = AD_K^A/D_K^A$

$\cong A/A\cap D_K^A$

$=$ Bild von A/D^A

~~[nach Klemz]~~

—

$[C,J]$, $D := A\cap B$

, B^{CJ}

$= A^{CJ} = B^{CJ}$

$J] = (A^g \cap B^h)^J$

$'[C,A][C,B]$:

$'A_0 \perp B/B_0$

11

Bew.: $C := [A,B]$, $N := [C,A]\cdot[C,B] \trianglelefteq C$

mod N ist $[a_1a_2, b] = [a_1,b][a_1,b,a_2][a_2,b] \equiv [a_1,b][a_2,b]$

also $a \mapsto [a,b]$ ein Hom von A in C/N

ferner ist $b \to [a,b]$ ein Antihom $B \to C/N$,

also $(a,b) \mapsto [a,b]$ ein Bihom $\to C/N$

aber C/N abelsch und $(a,b) \mapsto [a,b]$ Bihom

Nun liegt mod $[A_0,B_0]^C \cdot N$ ein Bihomom. von A/A_0, B/B_0 vor, aber $\equiv 1$. Das gibt

$$C = [A,B] \leq [A_0,B_0]^C\cdot[C,A]\cdot[C,B] \leq C$$

$$\Rightarrow \quad C = [A_0,B_0]^C\cdot[C,A]\cdot[C,B] \quad ✓$$

$$\Rightarrow \quad C = [A_0,B_0]\cdot[C,A]\cdot[C,B]$$ da C [illegible]

Ist $A_0 = A_{00}^A$, $B_0 = B_{00}^B$, also ist mod N $[a_{00}^a, b_{00}^b] = [a_{00}, b_{00}]$, also $[A_0,B_0] \equiv [A_{00},B_{00}]$: dann also $C = [A_{00},B_{00}][C,A][C,B]$.

(2) Idee: Kann man statt $(\circ J)^n$ auch $(\circ A)^n$, $(\circ B)^n$ verwenden?

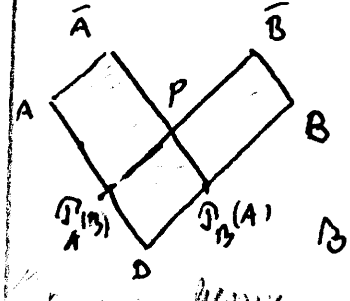
(3) Frage!: A, B sn G, $A \triangleleft^2 G \Rightarrow A$ vtb B' ?

27.5.76

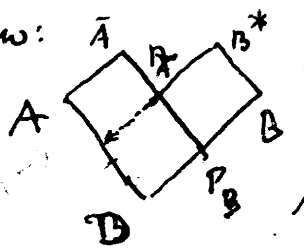
(1) Der HS 2 von S. 144 dürfte sich so verschärfen lassen: Seien $A \triangleleft^{\alpha} J$, $B \triangleleft^{\beta} J$ und in jedem homomorphen Bild $\bar{J}$ von $J = \langle A, B \rangle$, das höchstens die Klasse $\binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$ hat und dessen Torsionsuntergruppe primär ist $(\in \bigcup \mathfrak{g}_p)$, sei $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$. Dann ist $AB = BA$.

Zum Beweis genügte es wohl zu zeigen, daß das Produkt^{G} von zwei Normalteilern dieser Art, mit Klassen α, β, einen Normalteiler von G enthält, der $G^{(\alpha\beta)}$ umfaßt und die Torsionsgruppe von G mod $G^{\alpha+\beta}$.

(2) Sind A, B sn G, aber nicht vertb., so ist mit $P := \mathfrak{P}_A(B) \cdot \mathfrak{P}_B(A) =: P_A \cdot P_B$, $\bar{A} = P_B A$, $\bar{B} = P_A B$ stets P Gruppe, $P = \bar{A} \cap \bar{B}$, $P \triangleleft \bar{A}, \bar{B}$ und $\bar{A}$ ist mit keiner Gruppe Z: $P < Z \leq \bar{B}$ vertauschbar.



Bew:



$B^* := B \cdot \mathfrak{P}_{\bar{A}}(B)$
$= B \cdot P_{\bar{A}}$

gilt

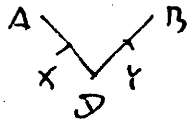
$A \cap P_{\bar{A}} \lneq P_A \leq P_{\bar{A}} \cap A$

[illegible], bessere Darstellung [illegible] auf 150 (4)

27.5.76 Daher $A \cap P_{\bar A} = P_A$, $B^* = P_A B$, $P_{\bar A} = P_A P_B$.

(2') Also $\bar A \cdot P$ mit $\bar B : P$, total unvertauschb. in folgendem Sinn: Forts.: (2'') s.u.

(3) Def. $A, B \le G$, $A \cap B = D$. Dann A $\underbrace{\text{tot. unvertb.}}_{\text{tuv}}$ B :⇔ Aus $D < X \le A$ folgt $XB \ne BX$; $D < Y \le B \Rightarrow AY \ne YA$.



(4) $|G| < \infty$, A, B sn G, A tuv B $\Rightarrow$ A/D_A, $B/D_B \in \mathfrak{N}$.
denn $A^{\mathfrak{N}} \le \mathfrak{S}_A(B) \le D$, $B^{\mathfrak{N}} \le D$.

(5) Def Schreibe kurz: $A:D \in \mathfrak{N}$, $B:D \in \mathfrak{N}$

Das läßt sich wohl auch ohne Übergang zu Faktorgruppen ~~[illegible]~~ erkennen, ob $A:D \in \mathfrak{N}$: vermutlich gilt

(6) B sn A. Dann $A:B \in \mathfrak{N}$ ⇔ zu jeder Anordnung von $\mathbb{P}$ gibt es einen o-Sylowturm in $A:B$.

(2'') In Fig (2) ist $k(\bar A \cdot P) = \mathcal{K}(\hat A : P) = \mathcal{K}(\hat B : P) = k(\hat B : P)$.

FORTS.: 158

---

schärfen
dem
höchstens
zen. Isotonie-
sei $\bar A \bar B = \bar B \bar A$.

en, daß
dieses
nalreihe
1 und
$\ne p$.

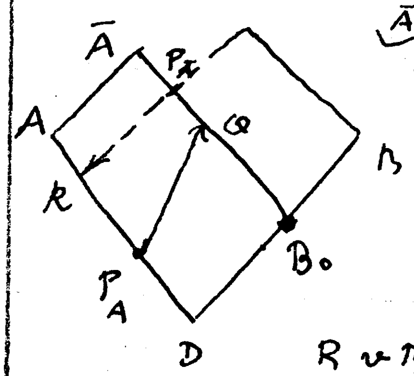
so ist mit
$= P_{\bar A} B$
$= \bar A \cap \bar B$, $P_{\bar A}$
Gruppe Z:
vertauschbar.
$:= B \cdot \mathfrak{P}_{\bar A}(B)$
$= B \cdot P_{\bar A}$
ilt
$P_A \le P_A \le P_{\bar A} \cap A$

Vertauschbarkeit

27.5.76 (1) Vertauschbarkeit beliebiger Untergruppen:

(1) $A, B \le G$, $D := A \cap B$, $D \le B_0 \le B$, $B_0 \triangleleft\triangleleft A$,

$\bar A := AB_0 \Rightarrow \underbrace{P_{\bar A}(B)}_{P_{\bar A}} = \underbrace{P_A(B)}_{P_A} \cdot B_0$; insbesondere: $P_A \triangleleft B_0$



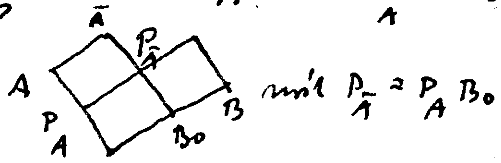
Bew: $Q := \langle P_A, B\rangle \triangleleft B$

$Q \le P_{\bar A}$ $R := A \cap P_{\bar A}$

$R \triangleleft B$ $R \le P_A \le P_{\bar A} \cap A = R$

$R = P_A$ = $P_{\bar A} = RB_0 = P_A B_0$

Also siehts so aus:



mit $P_{\bar A} = P_A B_0$

(2) Sind $A, B \le G$, so gilt für ~~P_{AB}~~ $D := P(A,B)$ $:= \mathfrak{P}_A(B) \cdot \mathfrak{P}_B(A)$: $\bar A : P(A,B)$ Aut $\bar B : P(A,B)$.

mit $\bar A = A\mathfrak{P}_B(A)$, $\bar B = B\mathfrak{P}_A(B)$, $P(A,B) = \bar A \cap \bar B$

(2') insbesondere: $A, B \le G \Rightarrow P(A,B) := \mathfrak{P}_A(B)\mathfrak{P}_B(A)$ Gruppe

44 (3) 149 (2') zeigt: Sind A, B sn G und $D = A \cap B$ und $A : D$ Aut $B : D$, so ~~sind~~ die Strukturen von $A : D$ und $B : D$ sehr ähnlich und so gut wie nilpotent. Untersuchen! Kombin. mit 144 (2)

ruppen:
$_0 \doteq B, B_0$ ~~A~~ A
B_0 ;
insbesondere:
$P_A \vee B_0$
$B) \vee B$
$R := A \cap P_{\bar{A}}$
$\cap A = R$
$= P_A B_0$

$D := P(A, B)$
1 für ~~[illegible]~~ :=
$\bar{B} : P(A, B)$.
, $P(A, B) = \bar{A} \cap \bar{B}$
$P_A(B) P_B(A)$ Gruppe
und $D = A \cap B$
e Stellen
und so
!
e 144 (2)

Frame

1 Frage von Baer: läßt sich der Frame-Quotient q als Gruppen-Index ... deuten?

2. $\pm q \doteq \Delta^2 \equiv 0,1 \mod 4$, daher $q \not\equiv 2$ (4).
Bew mit iterierter Laplace-Entwicklung und daraus abgeleiteter „Alternante" Stets $q = \square \cdot$ ungerade?

3 Was bedeutet der Zusammenhang zwischen den Vertauschungsrelationen von G und $H < G$ für q_G, q_H?

4 Wenn für alle „ungeraden" χ_λ (d.h. $e_\lambda \equiv 1$ (2)) und alle p-El'te $g \in G$ gilt $\chi_\lambda(g) \in \mathbb{Q}$, folgt $q = \square$?

λ fest.
5 Erzeugen die $\chi_\lambda(g)$ für p-El'te schon den vollen p-Teil des Körpers, der von allen $\chi_\lambda(g)$ erzeugt wird?
Beweis von Speiser „dualisieren" zwecks Abstieg von p^{q^l} zu p^a

s. auch $\underline{XI}$ 355 $\underline{XIII}$ 131

6 siehe Vortragsnotizen Caltech 1364 + Cameron Prepr. '70 p. 7

152

44

ursprünglich $\varepsilon_H a$

Auszug aus Otto Bartels.

$\forall a, G$: sei $a, \ldots \in G$

Schreibe $a \, \varepsilon \, b \; :\Leftrightarrow \; a \underset{\langle a,b\rangle}{=} b$ ~~oder~~ Dann $\varepsilon(b) \Leftrightarrow b \in \underset{G}{\varepsilon} a$.

1 $a \, \varepsilon \, b \;\Rightarrow\; \langle a\rangle^{\cdot\cdot G} = \langle b\rangle^{\cdot\cdot G}$

2 $\varphi \in \mathrm{Hom}\, G \;\Rightarrow\; (\underset{G}{\varepsilon} a)^{\varphi} = \underset{G^{\varphi}}{\varepsilon}(a^{\varphi})$

3 $a \, \varepsilon \, b \;\Rightarrow\; \langle \varepsilon a\rangle = \langle \varepsilon b\rangle$

Def: $a \in H \leq G$: $\quad \overset{\infty}{\underset{H}{\varepsilon}} a := \{b \in H \mid \exists\, h_i \in H: h_0 = a, h_n = b, h_i \varepsilon h_{i-1}\}$

4 $a \overset{\infty}{\underset{G}{\varepsilon}} b \;\Rightarrow\; \langle \underset{G}{\varepsilon} a\rangle = \langle \underset{G}{\varepsilon} b\rangle$

5 $\langle \underset{G}{\varepsilon} a\rangle = \langle \overset{\infty}{\underset{G}{\varepsilon}} a\rangle$

I Satz $\langle a\rangle \in g_p \;\Rightarrow\; a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}} = \overset{\infty}{\underset{G}{\varepsilon}} a \;,\; \langle a\rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \underset{G}{\varepsilon} a\rangle$

Ann.: (a, G) Gegenb., $|G| = \min$. Dann

6 $\overset{\infty}{\underset{G}{\varepsilon}} a \subset a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}}$ (5)

8 $1 \neq N \trianglelefteq G \;\Rightarrow\; \langle \underset{G}{\varepsilon} a\rangle N = G$ (2,7)

7 $G = \langle a\rangle^{G} = \langle a\rangle^{\cdot\cdot G}$

9 G wirkt transitiv auf $\Omega := \{A_i\}$, $A_i = \overset{\infty}{\underset{G}{\varepsilon}} a_i$, $\Sigma A_i = a^G$

10 $|\Omega| > 1$ $\quad (a, G)$ Gegenb.

11 $\langle A_1\rangle$ läßt $A_1 \in \Omega$ fest

12 G wirkt treu auf Ω

Def: für $U \leq G$ setze $[U] := \{A_i \mid A_i \cap U \neq \emptyset\}$

13 $b \in A_i, b \in U < G \;\Rightarrow\; b^{\langle b\rangle^{\cdot\cdot U}} \subseteq A_i$

II H5a

FRAGE:

$i \quad a, b, \ldots \in G$

$\varepsilon(b,\varepsilon)\, b \in \varepsilon_G a.$

ε ~~Daum~~

$h_0 = a, h_1 = b, h_i \varepsilon \{h_j\}_{i-1}$

$, \langle a\rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \varepsilon_G a\rangle$

aum

(2,7)

$A_i = \varepsilon^{\infty}_G a_i, \quad \Sigma A_i = a^G$

$A_i \cap U \neq \emptyset\}$

14 $U < G,\ P$ p-Syl $U \Rightarrow [U] = [P]$ $\qquad P \cap L \in$ p-Syl $L := \langle b\rangle^{\cdot\cdot U}$

15 $U < G \Rightarrow [U] \subset \Omega$ $\qquad$ sonst $Z(P) \neq \emptyset$ i.d. Ω, 12

16 $M <\cdot G, [M] \neq \emptyset, P$ p-Syl $M \Rightarrow \mathcal{N}_G(P) \leq M$

17 $M <\cdot G, [M] \neq 0 \Rightarrow$ M enth. eine p-Syl-Gr von G

18 P p-Syl $G \Rightarrow \exists_1 M_1 : \quad P \leq M_1 <\cdot G$

19 $\exists_1 M : \quad a \in M <\cdot G$ $\qquad$ Bew: $|M_1 \cap M_2|$ max $\;|R| =$

$\mathcal{N}_G(R) \leq^{p} M_3$

20 $M \ntrianglelefteq G$

21 $a^g \in M,\quad a^h \notin M \Rightarrow \langle a^g, a^h\rangle = G, \quad a^g \,\varepsilon_G\, a^h$

22 $\exists\, a^h \notin M$ $\qquad$ (7)

23 $\forall x \in G : \quad a^x\, \varepsilon^2\, a$

24 $\varepsilon^{\infty}_G a = a^G = a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}}$ $\qquad$ ↯ 6

II H-Satz $\quad a \in G \Rightarrow^{a)} \langle \varepsilon_G a\rangle = \langle a\rangle^{\cdot\cdot G} \qquad b)\ a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}} = \varepsilon^{\infty}_G a$

Vereinfachter Bew: $\quad a = x x_1 \ldots x_r \qquad$ (Primärkomp.)

$H := \langle \varepsilon_G a\rangle$

25 $\langle x\rangle^{\cdot\cdot G} \overset{=}{\underset{I}{}} \langle \varepsilon_G x\rangle =$ ~~$\langle y \mid \exists t \in \langle x,y\rangle : y = x^t\rangle$~~ $\langle x, t \mid t \in \langle x, x^t\rangle\rangle_t$

~~26 $y = x^t,\ t \in \langle x,y\rangle \Rightarrow t \in \langle x, x^t\rangle \leq \langle a, a^t\rangle \leq H,\ y \leq H$~~

26 $\langle x\rangle^{\cdot\cdot G} \leq H = \langle a, s \mid s \in \langle a, a^s\rangle\rangle$

27 $\langle a\rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \langle x\rangle^{\cdot\cdot G}, \langle x_1\rangle^{\cdot\cdot G}, \ldots\rangle \leq H \leq \langle a\rangle^{\cdot\cdot G}$ (a) ✓

28 H wirkt tra auf $\Omega = \{\varepsilon^{\infty}_H$-Klassen in $a^H\}$, aber $\langle \varepsilon_G a\rangle$ läßt die Klasse von a fest: $|\Omega| = 1$.

FRAGE: Ist $\operatorname{soc} G \leq \mathcal{N}\, a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}}$?

24.6

$\mathcal{L}\pi G$ ....

Def: $\mathfrak{X}$ eine Klasse von Gruppen: $\mathcal{L}\mathfrak{X}G := \{L \le G \mid L \in \mathfrak{X};\ L \trianglelefteq M \in \mathfrak{X}, M \le G\} \Rightarrow L = M$.

(1) (1) Wenn $\mathfrak{X}$ („endlich"-) normal-persistent ist so folgt aus $L \in \mathcal{L}\mathfrak{X}G$: L besitzt eine Subnormalisatorgruppe in G, nämlich den Normalisator $N_G(L)$:

$L \text{ sn } U \le G \Rightarrow L \trianglelefteq U$

Sa

(2) Sylownormalisatortürme: Sei geord. $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$

$T \in \mathcal{T}_\pi(G) :\Leftrightarrow \exists\ 1 \le T_1 \le T_2 \le \dots \le T_n = T$:

$T_\nu \trianglelefteq T$, $T_\nu / T_{\nu-1} \in p_\nu\text{-Syl } N_G(T_{\nu-1})/T_{\nu-1}$

Z! (2a) Sylownormalisatoren und -Türme sind vertr. mit Hom.

Damit gilt:

(3) $T \in \mathcal{T}_\pi(G) \Rightarrow T \in \mathcal{R}_\pi(G)$ (~~π~~Hall gr. seines Norm'tors)

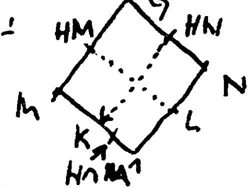
(4) T intravariant in G

(5) Wenn $H \le G = M \times N_2$ und

$H \neg G/M \in \mathcal{T}(G/M)$, $H \cap M \in \mathcal{T}(M)$,

so ist auch $H \neg G/N \in \mathcal{T}(G/N)$ und $H \cap N \in \mathcal{T}(N)$

Bew:



$H \cap M$ ~~[illegible]~~ wird von ~~H~~ HN normalisiert, daher auch von $HN \cap M =: K$

da $H \cap M \in \mathcal{R}(M)$, ist $H \cap M = K \in \mathcal{T}_\pi(K)$

daher $HN/N \in \mathcal{T}(G/N)$.

$; := \{L \le G|$

$L = M.$

r folgt

normalteiler-

ator $N_G(L)$:

d. $\pi = \{p_1, .., p_n\}$

$T_n = T$:

gt $N_G(T_{n-1})T_n$

ierbar mit Hom.

uellen Norm'ten)

$\trianglelefteq(M)$,

nd $H\cap N \in T(N)$

h normaliert,

von $HN\cap M =: K$

n $H\cap M = K \in T_\pi(K)$

$/N)$.

24.6.76

Insb. ist $|H \neg G/N| = |H \neg M|$

und daher $|H \neg N| = |H \neg G/M| = L := HM \cap N$

andererseits $H \neg N = H \cap N \le L$, also $= L \in T_\pi(N)$ wegen

$G/M \cong N$ und $HM/M \in T_\pi(G/M)$

Satz: „Kompositions-π-Turm-Gruppen". Def.:

(1) $H \le G$ liefere für eine Komp.-Reihe $\mathfrak{G}$ von G alle Projektionen $H \neg G^\nu \in T_\pi(G^\nu)$.

Dann gilt das Gleiche für jede Komp.-Reihe von G.

Ferner ist H intravariant in G (Bew. mit MS 1963, S. 5.3)

Die Existenz solcher H folgt mit MS 1953 S. 5.2

(2'') Jede G projiziert sich homomorph in ein H MS 1953, 4.7

(3) H ist erblich, gruppe in travariante π-Gruppe (letzte [illegible] Übergang zu Subnormalfaktoren von G).

(4) Je zwei H_1, H_2 mit der Eigenschaft 1 sind konjugiert in G. Falls G auflösbar, sind die H die π-Hallgruppen.

(2') $H \neg F_1 \times F_2 = (H \neg F_1) \times (H \neg F_2)$ wenn $F_1 \times F_2$ ein Subnormalfaktor von G

Bew. für teilerfremde F_i: 154 (5)

FORTS: 159, XVII 23

---

(3) FRAGE: Kann man MπG-Theorie auf geeignete andere verbandsähnliche Untergruppenmengen ausdehnen?

27.6.76

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{S}_\pi}(G)$$

:= {max. auflösb. π-Untergruppen von G}

(1) Sind die Projektionen der $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{S}_\pi}(G)$ in Hauptfaktoren H von G die direkten Produkte der Proj. in die einfachen Faktoren von H? Gilt für $s_\pi G \to s_\pi A$ die Homomorphie?

(2) Untersuchen: $A \cap P$, wo $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{S}_\pi}(G)$, P ein einköpfiger perfekter Subnormalteiler von G. (Wie stellt sich der Sockel von P^G dar!)

(3) $N \trianglelefteq G \not\Rightarrow \mathfrak{L}_\pi G \cap N \subseteq \mathfrak{L}_\pi N$.

Bsp: $G = \mathrm{Sym}\,4$, $\pi = \{2,3\}$, $A = 2\text{-Syl}\,G$, $N = \mathrm{Alt}\,4$

}

G/ in

ste-

Faktoren

} die

U(G),
Π
Normalteiler

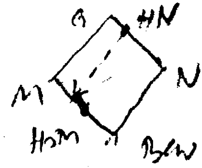
von P^G das!)

V.

Sylow G, N = Alt 4

Juli 1976

1. Jede endlich große Gruppe hat die Projektions-Eigenschaft. Lemma: $G = M \times N \geq H$, $H \in \mathcal{O}_{\Pi}$, $H\cap M \in \mathcal{L}_{\Pi} M$



$\Rightarrow HN/N \cong H\cap M$

$HM/M \cong H\cap N$

Bew: $HN \leq N(H\cap M)$, $H\cap M \trianglelefteq HN\cap M \in \mathcal{Y}_{\Pi}$ von G

2. Wenn man von einer ersten Π-Sylow-Turm eine zweite (mit anderer Anordnung) bildet usw, so kommt man schließlich zu einer invarianten nilpotenten Untergruppe [die jeden Kompositionsfaktor ~~trifft~~ Nein, z.B. $G = S_3$]!

Widerspruch mit der Verwendung von Kompositions-Π-Turm-Gruppen, vgl. 155 (4)? * nein

3. Die in 2 beschriebene nilpotente Gruppe G^* hat die Eigenschaft: A sn $G \Rightarrow A = (A\cap G^*)^{\prime\prime G}$. Und wenn A, B sn G, so $A \underset{G}{=} B \Leftrightarrow A^* \underset{G}{=} B^*$, oder wenn $A\cap G^* \underset{G}{=} B\cap G^*$.

Zum Konj.-Problem für sn s. Briefwechsel mit HO, Okt. 74.

4. * Wenn G sowohl ein aufsteigender wie ein absteigender Sylowturm ist, so ist G nilpotent.

Fusion

(1) Frage: Seien x, y p-Elemente, $x \underset{G}{=} y$.
Ist dann $x \underset{D}{=} y$ mit $D := \bigcap_{x,y \in P \in p\text{-Syl}\, G} NZJ(P)$?

Vertauschbarkeit lokal subnormaler Gruppen

(2) Forts. von 149 : Vielleicht kann man zeigen
$A = A', B$ lsn $G \Rightarrow AB = BA$
durch eine Erweiterung des Satzes A, B sn $G < \omega \Rightarrow AB = BA$
auf unendl. Gr. (Stonehewer, Lennox, Roseblade, Wilson ?!)
s. Lit. Brewster. Mitt. Wilsons Arbeit ?

(3) Lokal subnormale Ugr. sind seriell.
Denn E endl. erzeugt, $E \le A^E \Rightarrow$
$\exists$ A_0 endl. erz., $E \le A_0^E$
$\exists$ A_1 : $A_0 \le A_1$ sn G, $A_1 \le A$
$E \le A_1^E$, also $E \le A_1 \le A$.

Vermutlich [illegible] von Kegel

$x \underset{G}{=} y$.
$NZJ(P)$?
$\in p$-Syl G

…aler Gruppen

…elgen

…$s n G < \omega \Rightarrow$ $\overset{\pi}{A}$… π

…oder [illegible] ?!)
[illegible] ?

…d zerfall.

$A_1 \le A$
$\le A_1 \le A$

Vermischte Einfälle

1. 1. Lineare Automorphismen einer (irred.?) linearen Gruppe sollten analog zu der Permutationsautom. einer P Gr. untersucht werden.

2. π-Sylow-Türme: $T \le H \in G$, $T \in \pi$-Syl-Türme$(G) \Rightarrow T \in$ ″(H)
daher $\Rightarrow T$ intravariant in H.

3. Intravarianz

kann so verallg. werden: U ist G-intr. in A, wenn
$\times$ sym
$A \cdot N_G(U) = G$

Es gilt: a) $U \le A \le B_i \le G$, U B_i-intr. in $A \Rightarrow$
U $\langle B_i \rangle$-intr. in A.

b) A intr. $B \Rightarrow A^B \trianglelefteq B$

c) Beim Existenzbeweis für Ugr mit geg. Projektionen in Komp.-Reihe (K-Faktoren!) genügt es, in isomorphen K-Faktoren „entsprechende" große π-Untergruppen vorzuschreiben (die „normalisator-intravariant sind:) d.h. in ~~den $\overset{H}{\text{Köpfen}}$ von~~ perfekten [illegible] Subnormalteilen A_i wählt man π-Gruppen U aus, die N_i-Intrav. sind, mit $N_i = N_G(A_i)$ (
d.h. $T_i \le N_\pi(N_i) \Rightarrow A_i^{\{N_i T_i\}} = A_i^{\{N_i\}}$.

160

17.10.76

$\mathcal{M}_\pi G$

Ergänz. zur Diplomarbeit von J. v. Belau

$D_\pi^* := \{X \mid A \leq X \Rightarrow A \in D_\pi\}$

1 Zu (14.3): $G/K \in$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \forall M_i \in \mathcal{M}_\pi(G)$:

$$M_1 \underset{G}{=} M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap K \underset{G}{=} M_2 \cap K$$

Denn $M_1 \cap K = M_2 \cap K =: D \Rightarrow D \in \mathcal{C}_\pi^K$, $\mathcal{N}_G(D)/\mathcal{N}_K(D) \in D_\pi$,
$\langle M_1, M_2^n \rangle$ π-π'-[illegible]

1' Folge: $G/K \in D_\pi^S \Rightarrow m_\pi(G) \leq \ell_\pi(K)$

Hilfss. 1'' Sei $K \trianglelefteq G$, $D \in \mathcal{M}_\pi(G) \neg K$. Genau dann ist $M_1 \underset{G}{=} M_2$ für alle $M_i \in \mathcal{M}_\pi(G)$ mit $M_i \cap K = D$, wenn $m_\pi(\mathcal{N}_G(D)/D) = 1$, also $\mathcal{N}_G(D)/D \in D_\pi$.
Falls $D \in \ell_\pi(K)$, so genau wenn $\mathcal{N}_G(D) \cdot K/K \in D_\pi$
Folge:

Satz 2. Sei $K \trianglelefteq G$. Genau dann [illegible] die Abbldg.
$M \mapsto (M \cap K, M \neg G/K)$ eine Bijektion von $\mathcal{M}_\pi(G) :^G$ auf $[\mathcal{M}_\pi(K) : K] \times [\mathcal{M}_\pi(G/K) : (G/K)]$, wenn
$\mathcal{M}_\pi(G) \neg K = \mathcal{M}_\pi(K) \subseteq G\text{-}I(K)$.
d.h. $\begin{cases} \forall M \in \mathcal{M}_\pi(G) : M \cap K \in \mathcal{M}_\pi(K) \\ \forall L \in \mathcal{M}_\pi(K) : \mathcal{N}_G(L) \cdot K = G. \end{cases}$ Bew.: 1' + 2':

Lemma
$\in D_\pi\}$
$\mathcal{M}_\pi(G)$:
$= M_2 \cap K$
$D)|N_K(D)|\in D_\pi$,
π ... vollstg
$_\pi(K)$

Genau
(G) mit $M_i \cap K = D$,
für $N_G(D)|D| \in D_\pi$.
$K/K \in D_\pi$

die Abbildg.
eine
$:K]$ ×

$\subseteq G J(K)$.

Bew.: 1''+2':

---

noch zu v. Below

2' Sei $M \in \mathcal{M}_\pi(G)$, $K \trianglelefteq G$, $M \cap K \in \mathcal{E}_\pi(K)$,
$M \cap K$ G_π-intravariant $[g \in G, \langle g \rangle \in \mathcal{G}_\pi$
$\Rightarrow \exists k \in K: (M \cap K)^g = (M \cap K)^k]$.
Dann $M \neg G/K \in \mathcal{M}_\pi(G/K)$.

2'' $K \in E_\pi^{*}$, $\mathcal{U}_\pi(G/K) \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow M \neg G/K \in \mathcal{M}_\pi(G/K)$

3 Sei $K \trianglelefteq G$, $G/K = O^\pi(G/K)$. Genau dann ist
für $K \le A \le G$ stets $m_\pi(A) = m_\pi(K)$,
wenn $\mathcal{M}_\pi(G) \neg K = \mathcal{M}_\pi(K) \underset{\uparrow}{\subseteq} J_G(K)$ & $\forall A/K \in D_\pi$
Bew: Alle Ann. $K \trianglelefteq_{\pi'} A$ betrachten! d.h. $L \in \mathcal{M}_\pi(K) \Rightarrow G = K N(L)$.

4 Falls $K \trianglelefteq_p G$, $p \in \mathbb{P}$, so ist $\mathcal{M}_\pi(G) \neg K \setminus \mathcal{M}_\pi(K)$
$\subseteq J_G(K)$
und diese $M \neg K$ lassen sich
eindeutig zu einer max π-Ug von G verlängern.

5 Aus $M \in \mathcal{M}_\pi(G), A \le G, A^M \in \mathcal{G}_\pi$ folgt $A \le M$.

162
18.10.76

$M_\pi(G)$

Im folgenden sei π eine „abgeschlossene" Klasse von Gruppen, so daß $A \le B \in \pi \Rightarrow A \in \pi$; $A \trianglelefteq B (\in \pi \Leftarrow) B/A \in \pi, A \in \pi$

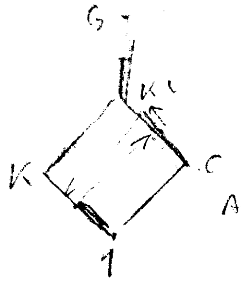
1. Man kann die Bestimmung von $M_\pi(G)$ auf die von $M_\pi(A)$ für geeignete echte Ausschnitte A von G zurückführen, außer wenn G nur einen Fuß $N \trianglelefteq G$ hat (und s. [illegible] 166 (1)! $G/N \in \pi$? ist?). Es genügt, für den $K \trianglelefteq G$, $K \neq 1$, alle Maximalschnitte $M_\pi(G) \rightharpoondown K$ zu finden. — OBdA sei $G_r = 1$, also ist G perfekt.

Sei $1 \neq K \triangleleft G$ $\quad \underset{\pi}{U}(K) \cap \pi \neq \emptyset$. Suche $M_\pi(G) \rightharpoondown K$.

Bem.:
Bestimmung von $M_\pi(G) \rightharpoondown K$ für mehrfüßiges G:

Satz 2. Wenn $KC \trianglelefteq G$, $C \cap K = 1$, setze $G^* := G/C$, $K^* := KC/C$.

Dann reduziert Bijektion zwischen $(M_\pi(G) \rightharpoondown K) : G$ und $(M_\pi(G^*) \rightharpoondown K^*) : G^*$ die Aufgabe auf $K^* \trianglelefteq G^*$.



Also $M_\pi(G) \rightharpoondown K = M_\pi(G^* \rightharpoondown K^*) \rightharpoondown K$.

Also kann man $C = 1$, G als einfüßig annehmen ($K \trianglelefteq G$).

Satz 3 sei $G \rhd K \cong K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_r$, G tr. a. $\Omega := \{K_1, \dots, K_r\}$,

$$\mathcal{M}_\pi(G) \to K_1 = \mathcal{M}_\pi(K_1) \subseteq \mathrm{Inv}_{G_1}(K_1),$$

(d.h. $M_i \to K_1 =: L_i \in \mathcal{M}_\pi(K_1)$, $L_1 \underset{G_1}{=} L_2 \Rightarrow L_1 \underset{K_1}{=} L_2$).

Dann erhält man so genau einen Vertreter für $\mathcal{M}_\pi(G)$: G per. Belege $K_1, \dots, K_r$ auf alle Arten mit $\{1, 2, \dots, m\}$, $m := m_\pi(K_1)$; Setze $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\} := \mathcal{M}_\pi(K_1) : K_1$.

Wähle aus jeder G-Klasse von Belegungen eine T aus und wähle $D_T := L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_r$ mit $L_\varrho \underset{G}{\in} \Lambda_{\mu_\varrho}$ wenn $T = (\mu_1, \dots, \mu_r)$

sei G_T der Stabilisator von T in G.

Dann ist D_T G_T-invariant in K, kann also zu $\overset{\text{genau}}{\wedge}$ $m_\pi(G_T/K)$ wesentlich verschiedenen max. π-Ugr von G_T ergänzt werden, diese $\in \mathcal{M}_\pi(G)$

Folge:

3' $$m_\pi(G) = \sum m_\pi(G_T/K)$$

T ∈ Vert.-syst. der Belegungen

Folge:

Satz 4 Ist in jedem nichtab. Faktor F von G jede große $\left\{\begin{array}{l}\pi\text{-Ugr} \\ \rho\text{- "}\end{array}\right.$ maximal und intransvariant mit $m_\pi(F) = m_\rho(F)$, so gilt $m_\pi(G) = m_\rho(G)$.

z.B.: alle $F \in \{A_5, G_p\}$ $\pi \cap \{2, 3, 5\} = \rho \cap$ [illegible]

$\mathcal{M}_\pi(G)$

18. 10. 76

4' Für jeden ~~[illegible]~~ Faktor von G sei $\mathcal{L}_\pi(F) = \mathcal{M}_\pi(F) \leq J_G(F)$

" " " " $\mathcal{L}_\rho(F) = \mathcal{M}_\rho(F) \leq J_G(F)$

" " " " $m_\pi(F) = m_\rho(F)$.

Dann ist $m_\pi(G) = m_\rho(G)$.

Allgemeinere Situation: auf $K = K_1 \times \dots \times K_r$

$L = L_1 \times \dots \times L_r$

wirkt G/K als Permgr genau wie H/L

vergleiche Anzahl und Verteilung der max π-Ugr.

4'' Sei $K \trianglelefteq G$, $K = K_1 \times \dots \times K_r$, $\mathcal{L}_\pi(K_i) = \mathcal{M}_\pi(K_i)$ intrans.

Sei $K \trianglelefteq H$ und $H/K \cong G/K$. Dann

$m_\pi(G) = m_\pi(H)$. Ω mit $\Omega = \{K_1, \dots, K_r\}$

Bew. 163 (3)

4''' : z. B. m_π(auflösbare) = m_π([illegible] Erweit.)

~ monomiale ~ Perm. gr., wenn Dutk. Gr

fehlt Ersetzung durch Kranzprodukte mit kanonischer Entsprechung $u - \mathcal{M}_\pi(G)$ u. G. nämlich.

5 Eine monomiale Gruppe mit auflösbarer Koeff.-gr. hat dasselbe m_π wie die entsprechende Perm.-gr.

$\mathcal{M}_\pi(G)$

Frage 1 Kennzeichnung von $\mathcal{M}_\pi(G) \to G/N$?
bei gegebenen G, N

" 2 Wenn G/K zerfällt und $M \in \mathcal{M}_\pi(G)$ ist,
zerfällt dann $M / M \cap K$?

(3) Stets $N \trianglelefteq G \Rightarrow \mathcal{L}_\pi(G) \cap \mathcal{M}_\pi(\ ) \subseteq \mathcal{M}_\pi(G)$

$\mathcal{M}_\pi(G) \to G/N$ besteht nicht aus ausgez. Gruppen:

(4) Zu jedem $B \in \mathcal{U}_\pi(F)$ gibt es G, $N \trianglelefteq G$, $A \in \mathcal{M}_\pi(G)$
mit $G/N \cong F$, $A \to G/N = B$

Bew.: $|F:B| =: n$; stelle F trans. auf $\{1 \cdots n\}$
mit $B = F_1$ dar. Wähle M mit $m_\pi(M) \geq 2$.
In $M \underset{n}{\wr} F =: G$, das auf $N := \overbrace{M \times \cdots \times M}^{n}$ wirkt,
wähle , $A := (X^1 \times X^2 \times \cdots \times X^2)B$
mit $X^1 \underset{M}{\neq} X^2$, $X^i \in \mathcal{M}_\pi(M)$

Frage 5 Ist $\mathcal{M}_\pi(G) \to G/N$ eingeschränkt, wenn man N oder
die von G auf $N_1 \times \cdots \times N_n$ induzierte Perm. der Faktoren kennt?

$\longrightarrow$

166

24.10.76

$\mathcal{M}_\pi(G)$

≤ 165(5) Frage:

Idee:

1 Vielleicht kann unter den Vor. von 164(4'') keine π-Ugr von G/N mit größeren Bahnen existieren als sie $M \triangleleft G/\hat{N}$ hat? $\hat{N} := \{g \mid N_g^g = N_g\}$ $_{b \in g}$ Dazu könnte der Übergang zu zerfallenden Erweiterungen nach 164,4''' nützlich sein, und vielleicht führt das doch zu $G/K \in \mathfrak{g}_\pi$ in 162(1), und unter 161(3) sogar auf $G/K \cong C_{p^q}$, $p \in \pi$!

25.10.76 Ide

2 Vielleicht genügt statt Schreier die folgende Vermutung: Wirkt eine π-Gruppe automorph auf eine einfache Gr., so läßt sie eine π-Ugr ≠ 1 fest, wenn es solche gibt.

Oder die folgende? "Ist E einfacher Faktor von G und $\hat{E}$ die auf ihm durch $N_G(E)$ induzierte Automorphismengruppe, so ist $m_\pi(\hat{E}|E) = 1$."

Sc

3 $A \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}} G$, $A \text{ sn } G \Leftrightarrow A$ ist die größte $\mathfrak{X}$-Ugr von G ($\mathfrak{X}$ ist $\overset{*}{\pi}$-closed).

von 164(4'')

n Bahnen

$\hat{N} := \{g \mid N_{b_g}^{g} = N_g\}$

freuden

ützlich sein,

n $G/K \in \mathfrak{g}_\pi$

1 (3) sogar

de Vermutung:

e einfache Gr.,

es solche gibt.

Faktor von G

induzierte

$n_\pi(\hat{E} \mid E) = 1$.

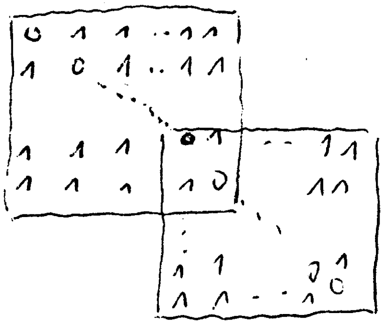
größte $\mathfrak{X}$.

($\mathfrak{X}$ ist $^{\mathfrak{X}}_{\pi}$-closed).

2-trans. Konstituenten von Untergruppen

25.10.76 Idee: 1

einer primitiven Gruppe G müssen zu starken Einschränkungen für die Vertauschungsmatrizen führen, indem man für ein Δ, auf dem $H \leq G$ 2-tra ist, die Bilder Δ^g betrachtet, für die $|\Delta \cap \Delta^g| \geq 2$:



liefern die Kriterien-

papier 1976, Satz 5.10

Satz 2 Sei G eine endl. tra. P Gr., Untgr. $U \leq G$ besitze einen 2-tra Konstituenten vom Grad k und sonst nur Konstituenten, die diesen irred Bestandteil nicht enthalten (z.B. alle Grade $< k$ haben). Dann gilt: a) G pr $\Rightarrow$ G 2-tra

b) $k > \frac{n}{2} \Rightarrow$ G pri

Bew. ergibt Verschärfung bei b) genügt [illegible] 2-tra

168.

Bemerkungen zur Diss. Rindersbacher:

28.10.76 1. R. Satz 7.4 sagt: $A, B <\cdot G$, $D := A \cap B$, $D_G = 1$, $n \in \mathbb{N}$ Dann) $G = (AB)^{n+1} \cup (BA)^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad D_{(AB)^n} \cap D_{(BA)^n} = 1$$

zu 6) $G = ABABAB \not\Rightarrow D_{AB} \cap D_{BA} = 1$

Dahinter steckt schärfer und allgemeiner:

2. Seien $A, B \leq G$, $D := A \cap B$, $|G| \leq \infty$.

Setze $G_k := (A \cup B)^k$ $k = 1, 2, \ldots$

$$D_k = D_{G_k}$$

Dann ist (mit $g * h := g^{-1} h g$)

$$D_k (* G_{2k})^{2k} \subseteq D,$$

daher, falls z.B. G endlich und $G_{2k} = G$:

D_k sn G Kurzer Beweis: 4

Bew: Q_k, P_k bedeute $\overbrace{ABA\cdots}^{k}$ oder $\overbrace{BAB\cdots}^{k}$. Idee

Dann ist etwa

$$P_{2k} * D_k \subseteq \overbrace{AB\cdots}^{k}\overbrace{A}^{k} * D_{\underbrace{AB\cdots}_{k}} \subseteq Q_k * D, \text{ also}$$

$G_{2k} * D_k \subseteq G_{2k-1}$ allg. $G_l * D_k \subseteq G_{2(l-k)-1}$

denn $G_{2k-1} * D_k \subseteq G_{2k-2}$ usw.:

$$G_{2k} (* D_k)^k \subseteq G_k$$

$$G_{2k} (* D_k)^{2k} \subseteq G_k * D_k \subseteq D, \text{ weiterhin:}$$

$$G_{2k} (* D_k)^{2k+1} \subseteq D_k \text{ sn } G \text{ wenn } G = G_{2k}$$

ier:

$,B, D_G = 1,$

esmer:

$G| \leq \infty$.

$_k = G$:

Beweis: 4

$\underbrace{AB \cdots}_{k}$

, also

$G_{2(l-k)-1}$

D_1 weiterhin:

wenn $G = G_{2k}$

3 Beispiel: $A, B <\cdot G$, $D = A \cap B$, $D_G = 1 \Rightarrow$

a) $G = (A \cup B)^2 \Rightarrow D_A \cap D_B = 1$

b) $G = (A \cup B)^6 = (AB)^3 \cup (BA)^3 \Rightarrow D_{ABA} \cap D_{BAB} = 1$.

4 der Bew. für 2: also $k = 2$

$F^{a_1 b_1}$, $F^{b_1 a_1}$ sn D

F sn $\langle F^{a_1 b_1 a_1 b_1 a}, F \rangle$

wenn $G_4 = G$, so F sn $\langle F, F^g \rangle$.

gezeigt $\overset{?}{=}$ G_i

4' Aufgabe: Verallgemeinerung von 2 auf A, B, C

Idee 5 FRAME-QUOTIENT

sollte auch aus der Wirkung von $g \mapsto g^n$ auf die Konjugierten Klassen bestimmbar sein

$\lhd\lhd$

1.11.76 1. G habe Kompositionsreihe. Sei $A \le B \le G$.
Dann $A \le B_{\cdot\cdot G} \Leftrightarrow A^{\cdot\cdot G} \le B$.

FRAGE 2 $a, b \in G \in \mathfrak{F}$. $C := \{b^g \mid g \in G\}$
Was ist $\langle c(\ast a)^\infty \rangle_{c \in C}$?
Vielleicht $= \langle a \rangle^{\cdot\cdot M}$ mit $M = \langle a, C \rangle$?

3 $A \le G$ heiße glm. attraktiv wenn $G(\ast a)^{n} \le A$ für ein n.
Im extremalen Gegenbeispiel für $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_4$ gilt: A, B att., $\mathfrak{S}(A) \ne \mathfrak{S}(B) \Rightarrow$
$\underbrace{D_{A} \cap D_{B}}_{E} = 1$ wo $D = A \cap B$.
denn E sn A, B ; $\mathfrak{S}(A) = \mathfrak{S}(E) = \mathfrak{S}(B)$ da E att.

1/13 Sogar $D_A = 1$ oder $D_B = 1$.

4 Der Durchschnitt von glm attraktiven Untergr. $A_i \le G$ von beschr~~änkter~~ Stufe ist glm attraktiv von derselben Stufe.

FRAGE 5 ∃ Kriterium dafür, daß für geg. $a, b \in G$ gilt: $b \in a^{\cdot\cdot G}$?
Ist $A^{\cdot\cdot G} = \bigcup_{g \in G} A^{\cdot\cdot \langle A, g \rangle}$?

4

5

FRAGE 7

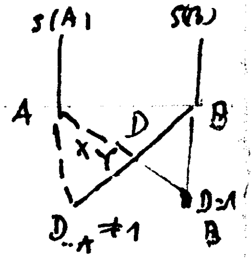
8

~~Es ist sogar stets $D_{..A} = D_{..B} = 1$,~~

~~wenn $D = A \cap B$ mit $S_G(A) \neq S(B)$.~~

~~Bew. OB. D Maximalschnitt~~

Ist $D_{..A} \neq 1$, so D sn A da D pn G



~~So $X \nleq S(B)$ aber $Y \leq S(B)$; $t \in X - Y$~~

~~$D \leq B \cap B^t$, $S(B) \neq S(B^t)$~~

~~also $D < B \cap B^t$ wegen Maximalität~~

~~$S(A) = S(D)$~~

4 Vielleicht ist der folgende von Interesse:

A sn $G \Rightarrow A \cap A^g$ sn A

Es gilt das nur, wenn A sn G oder $A \in \mathfrak{N}$ oder $A \in I$-lok ?

5 Die Bedingung $\forall_X \; A < X \leq G \Rightarrow A^X < X$

wird zur Deszendenz führen.

FRAGE 7 Ist jede attraktive maximale Ugr. normal?

8 A glm attraktiv in G, $A \ni e \neq 1$, $A_1 := \bigcap_{e \in A^g} A^g$

$\Rightarrow A_1$ glm " " ", und aus

$e^g \in A_1$ folgt $g \in \mathcal{N}(A_1)$.

Folge: $e \in H \leq G \Rightarrow \mathcal{N}_H(A \cap H) > (A \cap H)$.

$A \leq B \leq G$.
$G \leq B$ ·

$\}$

$\langle a, C \rangle$?

$\cap G(ea)^n \leq A$

$\leq G$

$\Rightarrow$

$) = S(B)$

Stufe

: a:G ?

172

nach 44 (und Verallgemeinerungen)

Vtbrell n. [illegible] 9. Kriterium für A ser G: Hinreichend: $\forall X \subseteq G$ $\forall H \leq G$: $(B := \langle A^X \rangle < H$, $\langle A^X \rangle \ntrianglelefteq H \Rightarrow \exists\, h \in H : H^{6} \neq H$, $B B^h = B^h B)$.

Frage 9' Frage: Ist das auch notwendig für A ser G?

Frage 10 Hat jede deszendente Gruppe eines $G \in \max_u$ einen Subnormalisator?

Frage 11 Sind deszendente attraktive Untergruppen subnormal (z.B. in einer Noetherschen Gruppe)?

12 $A \leq B$, $A \text{ sn } \langle A, B^g \rangle_{\forall g} \Rightarrow A \text{ sn } G$

denn $A \text{ sn } \langle A, A^g \rangle$

Folge,

13 $A, B \leq G$, $A \text{ ksn } B^g$ $\forall g \Rightarrow A \cap B \text{ sn } G$

Bew: 12 auf $A \cap B$ statt A

FRAGE 18

ungen)

∴ $\forall X \subseteq G$

$\exists h \in H: H^{h} \neq H$

ser G ?

∈ max einer
u

ruppen

en Gruppe)?

A sn G

$A \cap B$ sn G

---

14 Wenn $B (\leq G \in \mathfrak{F})$ im kleinsten Subnormalisator von A liegt, so ist $A \cap B$ sn B.

15 Perm Gr Bs 44: Die transitiven Konstituenten von A sn G sind alle zueinander ähnlich, wenn G prim, endlich.

Frage 16 Gilt was Entsprechendes für die irreduziblen Bestandteile eines A sn G, wenn G eine irreduzible lineare Gruppe ist? Käme als Thema für Herrn Schmidt [illegible] (bei Pazzani) in Frage

17 <u>Normalsysteme</u> sollten abweichend von Kurosh usw so definiert werden: Kette bei der für jeden (Dedekindschen) Schnitt $\{U_i\}, \{O_j\}$ gilt: $\langle U_i \rangle \trianglelefteq \bigcap O_j$. Entsprechend und zur alten Def. gleichwertig: <u>Serialität</u>.
Aber Homomorphie-Invarianz sollte eingebaut werden!

FRAGE 18 Hat jede projektiv-serielle Untergr. einen <u>Serialisator</u>?

mögl. $\lhd\lhd\lhd$

Frage 19 Kriterien für serielle Persistenz einer Untergruppeneigenschaft?

Frage 20 Kriterien für Subnormalität in auflösbaren Gruppen.

Frage 21 Bilden die deszendenten Untergruppen einer Noetherschen Gruppe einen Verband?

Frage 22 Hat bei einer Noeth. Gruppe jede proj.-deszendente Untergruppe einen "Deszensor"?

Frage: Sei $A \leq G$ endlich. Ein Subnormalisator von A enthalte zu jeder (maximalen?) zyklischen Untergruppe von G eine Erzeugende. Ist dann $A \lhd\lhd G$?

Def: $\mathcal{G}_0 = \{$endl. Gruppen$\}$

$\psi \in \Psi_0 :\Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{G}_0 \ \exists_1 \ G^\psi \leq G$, verträgl. mit Isom.

[illegible]

(1) $G^\psi \trianglelefteq G$

[illegible]

Def (2) ψ heisst stabil, wenn $\begin{cases} \text{monoton: } A \leq B \Rightarrow A^\psi \leq B^\psi \\ \text{idempotent } A^{\psi\psi} = A^\psi \end{cases}$

idemp., aber nicht monoton

Satz (3) a) $\psi \in \Psi$ stabil $\mathfrak{X} := \{X \in \mathcal{G}_0 \mid X^\psi = X\}$.

Mayer 177.1 Dann $G^\psi = \langle X \leq G \mid X \in \mathfrak{X} \rangle$ (=: $G_{\mathfrak{X}}$) ; $\mathfrak{X}$ [illegible] ; $\mathfrak{X}$ $\langle\rangle$-abg.

b) Umgekehrt bestimmt jede Klasse $\mathfrak{X}$ einen stab. Funktor ψ,

c) und falls $\mathfrak{X}$ $\langle\rangle$-abg., so gilt $\mathfrak{X}$ entsteht aus ψ gemäß a)

Bew. a) $X = X^\psi \leq G \Rightarrow X = X^\psi \leq G^\psi$ $\quad G^\psi \geq \langle \ldots \rangle$

$G^\psi = G^{\psi\psi} \in \mathfrak{X}$ $\quad G^\psi \leq \langle \ldots \rangle$

b) $G^\psi := \langle X \leq G \mid X \in \mathfrak{X} \rangle \Rightarrow (A \leq B \Rightarrow A^\psi \leq B^\psi)$

& $\Rightarrow A^{\psi\psi} = \langle X \leq A^\psi \mid X \in \mathfrak{X} \rangle$

$\geq \langle X \leq A \mid X \in \mathfrak{X} \rangle = A^\psi$.

Satz (4) ψ stabil, $A \leq G$, $A^\psi \leq B \leq G \Rightarrow A^\psi \leq B^\psi$

Bew. $A^\psi = A^{\psi\psi} \leq B^\psi$

Satz (5) Vor.: a) $A \leq G \leq \mathrm{Sym}\,\Omega$ b) ψ stabil c) $A^\psi \leq G_\alpha \Rightarrow |G_\alpha^\psi| \leq |A^\psi|$

Dann gilt: α) $A^\psi \leq G_\alpha \Rightarrow A^\psi = G_\alpha^\psi \trianglelefteq N$

β) $A^\psi \leq G_{\alpha\beta}$, $\alpha^t = \beta \Rightarrow t \in N(A^\psi)$

γ) $\Gamma := \Omega_{A^\psi}$ ist Block von G und $G(\Gamma) = N(A^\psi)$

Bew. $A^{\psi t} = G_\alpha^{\psi t} = G_\beta^\psi = A^\psi$

Vor. 5c ist z.B. erfüllt, wenn $A^{\psi\varphi} = A^{\varphi\psi}$ ($\forall \varphi \in \mathrm{Epi}(A, G)$
jedes $G_\alpha \geq A^\psi$ ein hom. Bild von A ist und)

(= erz. abg.)

1. Sei ψ stabil; dann glw. {wenn ψ zu $\mathfrak{X}$ gehört: Satz

I $\forall G \in \mathfrak{G}_0, \forall \varphi \in \mathrm{Hom}\, G: \quad G^{\psi\varphi} = G^{\varphi\psi}$

II a) Ist $N \trianglelefteq G$, $\mathrm{Suppl}(G,N) = \{G\}$, $\frac{G}{N} \in \mathfrak{X}$, so $G \in \mathfrak{X}$

b) " , $G \in \mathfrak{X}$, so $\frac{G}{N} \in \mathfrak{X}$ {d.h. gibt kleinste Suppl.

Nun I → II$_b$: $G \in \mathfrak{X} \Rightarrow G^\psi = G \Rightarrow G^{\varphi\psi} = G^\varphi \Rightarrow G/N \in \mathfrak{X}$

I → II$_a$: $(G^\psi)^\varphi = (G^\varphi)^\psi = \left(\frac{G}{N}\right)^\psi = \frac{G}{N}$

$N \cdot G^\psi = G \qquad G^\psi = G$

II$_{a,b}$ → I: $G^{\psi\varphi} = \langle X \leq G \mid X \in \mathfrak{X} \rangle^\psi \leq \langle Y \leq \frac{G}{N} \mid Y \in \mathfrak{X}^\varphi \leq \mathfrak{X} \rangle$ Satz

$\leq G^{\varphi\psi}$

N Suppl.-Kern

Sei {H minimales Urbild von $G^{\varphi\psi}$ in G. Dann

$\left(\frac{H}{N}\right)^\psi = G^{\varphi\psi} \in \mathfrak{X} \Rightarrow H \in \mathfrak{X} \Rightarrow H \leq G^\psi \Rightarrow H^\varphi \leq G^{\psi\varphi}, G^{\varphi\psi} \leq G^{\psi\varphi}$.

2 Ist $\mathfrak{E}$ eine nach unten abg. Menge einfacher Gruppen und $\mathfrak{X} := \{X \mid$ kein Kompositionsfaktor von X ist $\in \mathfrak{E}\}$, so $\mathfrak{X}$ erzeugungsabg. u. die Bed. (1) II a b gilt, und es ist $G_{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{E}}$, wo $\mathfrak{E}$ = unterer Abschluss von $\mathfrak{E}$

s. auch 177.2

1. Sind $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ beliebige Klassen, so gilt:
$(\forall G \quad G_{\mathcal{X}_1} = G_{\mathcal{X}_2}) \Longleftrightarrow \{E\,\text{einf.}\,\mathcal{X}_1\} = \{E\,\text{einf.}\,\mathcal{X}_2\}$

Satz 2 Sei φ ein stabiler, mit Homom. vertauschbarer Funktor. Dann $\exists\, \mathfrak{E}$, n. unten abgeschlossen so daß $G^{\varphi} = G^{\mathfrak{E}}$ (und umgekehrt)
Bew: $\mathfrak{E} := \{E \mid E \text{ einfach}, E^{\varphi} = 1\}$.

Satz 3 Sei $A \le G \le \mathrm{Sym}\,\Omega$, jedes G_α sei ein hom. Bild von A.
Sei $\mathfrak{E}$ n.u.abg., $\Delta := \Omega_{A^{\mathfrak{E}}}$.
Dann ist Δ ein Block von G, und $N_G(A^{\mathfrak{E}}) = \{g \in G \mid \Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset\}$.

[illegible]

$\varphi\psi$ ($\forall \varphi \in \mathrm{Epi}(A, G_\alpha)$
ist und)

([illegible])
[illegible] gelöst.
$= G^{\varphi\psi}$
$\frac{G}{N} \in \mathcal{X}$, so $G \in \mathcal{X}$
[illegible] kleinste Gruppe.
$G^{\varphi\psi} = G^{\varphi} \Rightarrow G/N \in \mathcal{X}$
$)^{\psi} = \frac{G}{N}$
$G^{\psi} = G$
$= \langle Y \le \frac{G}{N} \mid Y \in \mathcal{X}^{\varphi} \le \mathcal{X} \rangle$

$\varphi\psi$ in G Dann
$\Rightarrow H^{\varphi} G^{\psi\varphi}, G^{\varphi\psi} \le G^{\psi\varphi}$

einfacher
[illegible] $\in \mathfrak{E}\}$,
und es
[illegible] Abschluß
von $\mathfrak{E}$

178
15.12.76

Satz 1 G prim Ω, $\Delta^{G_\alpha} = \Delta \subseteq \Omega - \alpha$, $\Gamma \subseteq \Delta$ $\alpha \in (\alpha \vee \Box)^t$

$$\Rightarrow \mathfrak{C}(G_{\alpha\Gamma}) = \mathfrak{C}(G_{\alpha\Gamma}^{t\,\Delta}) =: \mathfrak{C}$$
$$= \mathfrak{C}(G_{\alpha\Gamma}^{\Delta^s}) \quad (\alpha^s \in \Delta)$$

Bew.: $G_{\alpha\Gamma}^{t\mathfrak{C}} \le G_{\alpha\Delta} \le (G_{\alpha\Gamma})^{G_\alpha}$ $G_{\alpha\Gamma}^{t\mathfrak{C}} = G_{\alpha\Gamma}^{\mathfrak{C}} g \lambda$

$\forall h \in G_\alpha$: $\left(\mathfrak{C}_\Delta^{t}\right)^\Gamma = \left(\mathfrak{C}_\Delta^{th}\right)^\Gamma$ da $\Gamma^h = \Gamma$

also $G_{\alpha\Gamma}^{th\mathfrak{C}} = G_{\alpha\Gamma}^{\mathfrak{C}}$ $\langle th \mid h \in G_\alpha \rangle = \underset{\le \mathcal{N} G_\Delta^{\mathfrak{C}}}{G}$.

Sonderfall Jordan

steckt im folgenden allgemeinen Satz

Satz 1* G pri Ω, $\alpha \in \Omega$, $\overset{=\alpha^t}{\beta} \in \Delta = \Delta^{G_\alpha} \subseteq \Omega$, $G_{\alpha\Delta} \le H \le G_\beta$,
H_0 schwach G-abgeschlossen in H, $H_0^{\Delta^t} = 1$
$\Longrightarrow H_0 = 1$

Bew: $H_0^{t^-} \le G_{\alpha\Delta} \le H$, $G_\alpha t \subseteq \mathcal{N}(H_0)$

Als Jordan: $H = G_{\alpha\Delta}$; $H_0 = H^{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(G_\alpha^{\Delta^t})$.
$\le \mathfrak{C}(G_\alpha)$

FRAGE Homogen [illegible] invariante Relationen [illegible] auf Permutationsgruppen beschreiben (vgl. 177.2)

$: \Delta \quad \alpha \in (\Delta \vee \Gamma)^t$

$t \Delta) =: \xi$

$\xi) \quad (\alpha^\xi \in \Delta)$

G^ξ

$h) \Gamma \quad da \; \Gamma^\xi = \Gamma$

$t \xi \mid \xi \in G_2) = G$

$\leq d G_\Delta^\xi$

Folge

$\leq H \lhd G_\delta ,$

$H_0 \quad \Delta^e = 1$

$\Gamma(H_0)$

$\xi = \xi(G_2^{\Delta^t})$.

$\leq \xi(H_2)$

Komplettum

en bestimm-

180

9.1.77

Moduln einer p-Gruppe über $\mathbb{F}_p$

Im Anschluss an Dipl.Arb. Friederich bemerkt:

1 Sei $R = \mathbb{F}_p[G]$, $|G| = p^n > 1$, $J = \{\sum c_g g \mid \sum c_g = 0\}$
das Jacobson-Radikal von R.

1 Ist m ein R-Modul und $\Phi m := \bigcap n$
n maximaler Teilmodul von m $\left[\text{also } \frac{|m|}{|n|} = p\right]$, so

$$\Phi m = mJ$$

2 Jeder Vektorraum zwischen m und Φm ist ein R-Modul

3 Sei $n < m$, jeder maximale Vektorraum zwischen n und m sei R-Modul. Dann ist $\Phi m \leq n$

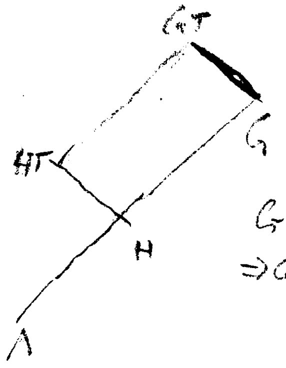
Gaschütz?

Anderer Be

links

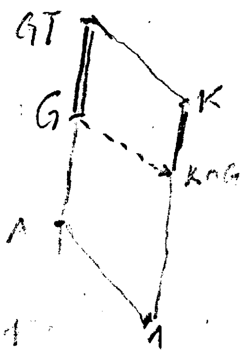
Anderer Beweis für 180.1(1)

$A \triangleleft GT$



$G = HR$
$\Rightarrow GT = HR.T$

nach Gaschütz ∃ K:



(

lemmatt:

$\{\sum c_g g \mid \sum c_g = 0\}$

$= 1 \dots n$

so

und Φ in 1,1

. Fröhlich

. $m \le M$

G

$G = HR$
$\Rightarrow GT = HR.T$

Gaschütz für Gruppen mit Operatorgruppe T

(1) Sei $A \trianglelefteq G$, $A' = 1$, $A \le H_\nu \le_{i_\nu} G$ $(\nu = 1, \dots, n)$.
Gruppe T operiere auf G sodaß $A^T = A$, $H_\nu^T = H_\nu$. Sei $i := ggT(i_\nu, -)$
$(a \mapsto a^i) \in$ Aut A. (*) Es gebe $C_\nu = C_\nu^T \in Kpl(A, H_\nu)$. Dann
$\exists\, C \in Kpl(A, G)$ so daß die Konjugiertenklasse
von C in G bei T fest bleibt: $C^t \overset{G}{=} C$, $\forall t \in T$.
[= unter A] nämlich $C = Stab_{R\sim}$ für jedes $R = (R_1 \dots R_n)$

Andere Bew. links

Beweis Ist $A \le U \le G$, $C = C^T \in Kpl(A, U)$, so gilt
für $H_\nu r = H_\nu s$: $H r^t = H s^t$ und
$\frac{r^t}{s^t} = s^{-t}(s^t r^{-t})^{\varphi} r^t$
wobei $c := h_\nu^\varphi = C_\nu$-Teil von h : $h = ac$
$\Rightarrow h^t = a^t c^t$, also ist $(h^t)^\varphi = (h^\varphi)^t$
und somit $\frac{r^t}{s^t} = (s^{-}(s r^{-})^\varphi r)^t = \left(\frac{r}{s}\right)^t$
Daher folgt aus $R \sim S$ auch $R^t \sim S^t$, also
wirkt T auf Ω, und es ist
$(\omega g)^t = \omega^t g^t$
Die von T induzierte Pgr auf Ω
permutiert also die Stabilisatoren G_α untereinander, $(G_\alpha)^t = G_{\alpha^t} = G_\alpha^a$ $\exists\, a \in A$

(2) FRAGE: Genügt statt Vor * eine schwächere
$\{C_\nu^a \mid a \in A\}$ sei T-invariant ?
Ja: Wenn $\begin{cases} B^t = B^a, \text{ so} \\ C = Stab\, R\sim \end{cases}$ $C^t = Stab(a R^t)\sim \overset{\cdot}{\underset{A}{=}} C$

Gaschütz (1) Zu S. 134: Es kann nicht allgemein $C \cap H_\nu \underset{H_\nu}{=} C_\nu$ gelten. Denn man kann $H_1 = H_2$ wählen, aber $C_1 \neq C_2$, z.B. $C_2 = \bar{a} C_1 a$.

(Anderer Beweis: 136_1)

ferner (2) 134(2)

~~Ersetzt man im Satz von Gaschütz 134,1 jedes C_ν durch $C_\nu^* := C_\nu^{t_\nu}$, $t_\nu \in G_\nu$, so wird $C^* \underset{G}{=} C$.~~

~~{ also H_ν " $H_\nu^* := H_\nu^{t_\nu}$~~

~~Bew: Sei R_ν Vertr.-Syst. von $A C_\nu =: H_\nu$; $R_\nu^* := R^{t_\nu}$ zu H_ν;~~

~~Dann gilt $\left(\frac{R_\nu^{*t_\nu}}{S_\nu^{*t_\nu}}\right)_* = \left(\frac{R_\nu}{S_\nu}\right)^{t_\nu} = \frac{R_\nu t_\nu}{S_\nu t_\nu}$ (nach 129,4)~~

~~$= \prod (A \cap S^{t_\nu} C_\nu^{t_\nu} r^{t_\nu}) = \prod (A \cap S C_\nu r)^{t_\nu}$~~

~~NB: $H_\nu^{t_\nu} s^{t_\nu} = H_\nu^{t_\nu} r^{t_\nu} \Leftrightarrow H_\nu s = H_\nu r$~~

~~Also~~ ~~[illegible]~~ ~~$x \in G^*_{R^*} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{R^* x}{R^*}\right)_* = \prod_\nu \left(\frac{R_\nu^* x}{R_\nu^*}\right)_*^{g_\nu}$ und~~

~~mit $x = x_\nu^{t_\nu}$ $= \prod \left[\frac{(R_\nu x_\nu)^{t_\nu}}{R_\nu^{t_\nu}}\right]_*^{g_\nu} = \prod_\nu \left(\frac{R_\nu x_\nu t_\nu}{R_\nu t_\nu}\right)^{g_\nu}$~~

~~$= \prod \left(\frac{R_\nu t_\nu \cdot x}{R_\nu t_\nu}\right)^{g_\nu} \Leftrightarrow x \in G_{(R_1 t_1, \dots, R_n t_n)}$ (bezüglich C)~~

~~$\overset{*}{G}_{(R_1^*, \dots)} \underset{G}{=} G_{(R_1 t_1, \dots)}$~~

ausführlich $^{(C^{t_\nu})}G_{(R_\nu^{t_\nu})} = {}^{(C)}G_{(R_\nu t_\nu)} \underset{G}{=} {}^{(C)}G_{(R_\nu)}$

FRAGE (3) Kann man aus S. 137 einen Satz von Gaschütz für nichtabelsche Normalteiler erhalten?

Aufgabe: Unter einen Hut bringen mit Operatorgruppen!

$C \cap H_v \underset{H_v}{=} C_v$

H_2 wählen,

4.1 jedes

$\cancel{C^* \underset{G}{=} C.}$

$R_v^{t_v} = R^{t_v}$ zu H_v;

t_v (nach 129.4)

ζ_v

$) = T_1 | A \cap S(C_{vr})^{t_v}$

$\mathfrak{z}_v$

$*$ mod

$x_v t_v$; $\mathfrak{z}_v$

t_v

$(R_1 t_1, \dots, R_n t_n)$

(bezüglich C_v)

$\underset{G}{=} G^{(C_v)}_{(R_v)}$

en Ganzheit

2

pen!

Subnormalisator

11.5.77 (1) Hilfssatz: $A \le G$, S sn G, $G = AS^G \Rightarrow G = \langle A, S \rangle$

Bew: $S^G = S^{(AS^G)} = (S^A)^{S^G}$ mit (S^A) sn S^G

$S^G = S^A$ $\quad G = AS^A = \langle A, S \rangle$

---

(2) **Satz:**

$|G| < \infty$; $A \le G$; S, T sn G; A sn $\langle A, S \rangle$;

A sn $\langle A, T \rangle \Rightarrow A$ sn $\langle A, S, T \rangle$

Allgemeiner u. viel einfacherer Beweis: 199(6)

Bew: Ann. Gegenb. (G, A, S, T) mit $|G|$ min, $|A|$ min, $|S| + |T|$ max. Dann

a) Alles folgende gilt auch mit Vertauschung von S mit T.

b) $G = \langle A, S, T \rangle$ sonst $(\langle A, S, T \rangle, A, S, T)$

b') $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN$ sn G

c) $S = S^A$, $T = T^A$ sonst (G, A, S^A, T^A)

d) $AS^G < G$ sonst (1): A sn $\langle A, S \rangle = G$

e) $S^G \cap T \le S$ sonst: $(AS^G, A, S, S^G \cap T)$

gilt A sn $\langle S, S^G \cap T \rangle =: \bar{S}$,

$(G, A, \bar{S}, T)$ ↯

f) $S^G \cap T = S \cap T$ denn e) $\le S \cap T \le S^G \cap T$

g) $S \cap T \trianglelefteq S$, $\trianglelefteq T$ f)

h) $S \cap T = 1$ b' [$N := S \cap T > 1 \Rightarrow (G/N, AN/N, SN/N$ [illegible] gilt AN sn G, aber A sn AN [illegible]]

Subnormalisator

(i) $A_{..G} \leqq S$ $(G, A, A_{..G}S, T)$ $A_{..G}S \leq S$

(j) $A_{..G} = 1$ (a, h)

(k) A einfach $A_1 \triangleleft A \Rightarrow (G, A_1, S, T)$ kein Gegb.

$A_1 \text{ sn } \langle A_1, S, T\rangle \trianglelefteq \langle A, S, T\rangle = G$

(l) $A \nleq S$ sonst $A \text{ sn } \langle A, S\rangle = S \text{ sn } G$

(m) $|A| =: p \in \mathbb{P}$ sonst $[A, S] = 1 = [A, T]$, $A \trianglelefteq G$

(n) $\exists\, S_1$ einfach, $S_1 \text{ sn } S$ sonst $S_1 = 1$, $A \text{ sn } \langle A, T\rangle \leq \underset{=G}{\langle A S\rangle}$,

(p) $|S_1| = p$ sonst $[A, S_1] = 1$, $S_1 \leq N(A) \leq N(T)$ (p)

dann $A \text{ sn } A^T = A^{(AS_1)T} = A^{\langle A, S, T\rangle}$

$A \text{ sn } \langle A, S_1, T\rangle$, $S_1 \leq T$ ↯ (h)

(o) $N = N_G(A) \Rightarrow T = T^A$ sonst (G, A, S, T^A)

(q) $P := O_p(G) \neq 1$ (p)

(r) $A \cdot P \text{ sn } G$ (b') $[(G/P, AP/P, SP/P, TP/P)]$

(s) $A \leq P$ $|AP|$ teilt $|A| \cdot |P| = p^{\cdot\cdot}$, (r)

(T) $A \text{ sn } G$ da P p-Gruppe (s).

---

(3) **SATZ:** $|G| < \infty$, $A \trianglelefteq B \leq G$, $A \text{ sn } \langle S, A\rangle$,

$S \text{ sn } G \Rightarrow A \text{ sn } \langle B, S\rangle$

Bew: $A \text{ sn } \langle A, S^{b}\rangle$; $A \text{ sn } \langle A, S^{B}\rangle$ (2)

~~Gegenbeispiel $\Rightarrow G = \langle B, S\rangle$~~, $A \text{ sn } \langle A, S^{B}\rangle$ [redacted] $\trianglelefteq \underset{=\langle B,S\rangle}{BS}$

Anmerkung: Statt $A \trianglelefteq B$ genügt nicht $A \text{ sn } B$!

$\Rightarrow G = \langle A, S\rangle$

$(S^A) \text{ sn } S^G$

$A, S\rangle$

$\langle A, S\rangle$;

$, S, T\rangle$

Beweis: 199(6)

$|G|$ min,

Dann

ung von Satz T.

$A, S, T\rangle, A, S, T)$

$A, S^A, T^A)$

$\langle A, S\rangle = G$

$S, S^G \cap T)$

$T\rangle = \bar{G}$,

$T)$ ↯

$\leq S^G \cap T$

$G/N, AN/N, SN/N)$

jeder $A \text{ sn } AN \trianglelefteq A$]

Subnormalteiler

(4) <u>Gegenbeispiel</u>: Sogar Aus $A \text{ sn } B \leq G$, $[A,S]=1$, ~~[illegible]~~, $S \text{ sn } G$ folgt nicht $A \text{ sn } \langle B, S\rangle$.

$\mathbf{B} := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\cong C_2 \wr C_2}$ in $GL(2,p)$, $p>2$.

$A := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq B$.

$G = P \rtimes B$ semidirekt, wo $P = \{(x\ y) \mid x,y \in \mathbb{F}_p\}^{+} \cong C_p \times C_p$.

Dann $A \text{ sn } B$, da $|B| = 8$; $S := \langle (1,0) \rangle$, $|S| = p$, $S \trianglelefteq P \trianglelefteq G$

A zentralisiert S, also $A \trianglelefteq AS$; aber $A \notin \text{sn } G$, da

A nicht $\langle (0,1) \rangle = T$ zentralisiert, obwohl $T \text{ sn } G$, $(|A|,|T|)=1$

?: $a = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $x \in Z(B)$ $B \trianglelefteq$ direkt $B \text{ sn } \langle A, B\rangle$

~~(5) <u>Gegenbeispiel</u>: $A \text{ sn } B$, $A \leq Z(C)$ $\not\Rightarrow$ $A \text{ sn } \langle B, C\rangle$~~

~~Bew: zu (4) setze $C = A \times S$~~

Satz (5) $A \in \mathfrak{U}_p(G)$, $A \text{ sn } H \leq G \Rightarrow A \text{ sn } \langle H, O_p(G)\rangle$

Bew: $A \text{ sn } A \cdot O_p(G) \text{ sn } H\,O_p(G)$.

allg. ebenso:

(6) $A \in \mathfrak{U}_p(G)$, $B \in \mathfrak{U}_p(G)$, $A \text{ sn } H$, $H \leq N(B)$
$\Rightarrow A \text{ sn } \langle H, B\rangle$.

Satz 7 $A \text{ sn } B \leq G$, $N \trianglelefteq G$, $A \text{ sn } \langle A, N\rangle \Rightarrow A \text{ sn } BN$

Bew: ~~muss N ist $bn(\circ a)^k$~~ $\equiv b(\circ a)^k \in A$, ~~also~~ ~~$bn(\circ a)^{k+e}$~~ $\in AN$! $\bar{G} := G/N$ $\bar{A} \text{ sn } \bar{B}$

$A \text{ sn } AN \text{ sn } BN$ Fortg.: 201

FRAGE 9.79:

NB:

$=1$

S sn G

$,S)$.

$2,p|,\ p>2$.

$|\ x,y \in F_p \}$

$\rangle, |S|=p, S \trianglelefteq P \trianglelefteq G$

$\nexists$ sn G, da

? T sn G, $(|A|,|\pi|)=1$

~~A sn ⟨B, C⟩~~

A sn $\langle H, O_p(G)\rangle$

G).

$H \le N(B)$

$1,N) \Rightarrow A$ sn BN

$(oa)^k \in A$

$\tilde{A}$ sn $\tilde{B}$

;201

Subnormalisator

(1) Satz: Für jedes Paar (A,G), $A \le G \in \mathfrak{F}$, {endl. Gr.}, sei der Subnormalisator $S(A,G) \le G$ definiert, derart daß gilt:

✓ I. $S(A,G) = G \Rightarrow A$ sn G

✓ II. $A \le G \ge G_1 \Rightarrow G_1 \cap S(A,G) \le S(A\cap G_1, G_1)$

✓ III. $\varphi \in \mathrm{Hom}\, G \Rightarrow S(A,G)^{\varphi} \le S(A^{\varphi}, G^{\varphi})$

✓ IV. $A \le G, |A| \in \mathbb{P}, G \trianglerighteq S = S'$ einfach, $S \le S(A,G) \Rightarrow A$ sn AS

✓ V. $A_1 \trianglelefteq A \Rightarrow S(A,G) \le S(A_1,G)$

✓ ⊗ Sei (G, A, S) ein Tripel mit minimalem $|G|\cdot|A|\cdot|S|$ mit den Eigenschaften: $A \le G \in \mathfrak{F}$, S sn G, $S \le S(A,G)$, $A \notin$ sn $\langle A, S\rangle$. Dann (1) – (34), insb. $\exists\, a \in A, s \in S$ mit allen $(xa)^n \notin A$.

NB wohl ähnlich für allgemeinere Ketten.

✓ (1) $G_1 < G \Rightarrow A \cap G_1$ sn $\langle A\cap G_1, S \cap G_1\rangle$ II

✓ (2) $G = \langle A, S\rangle$ (8) $A \not\le S$, $S \not\le A$

✓ (3) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN$ sn G III $G^{\varphi} = G/N$

(4) $A_G = 1$ (3)

✓ (5) $A_0 := A \cap S^G < A$ sonst $A \le S^G$, $G = AS^G = S^G$, $G = S$ $\le S(A,G)$ I ↯

(6) $\forall_B$: $A_0 \le B < A \Rightarrow B$ sn $\langle B, S\rangle$

Bew: $G_1 := BS^G$ also $G_1 < G$ $A \cap G_1 = BA_0 = B$ $S \cap G_1 = S$ (1)

✓ (7) $S^A = S^G < G$ $S^A = S^{\langle S, A\rangle} = S^G$ (2)

Wäre $S^G = G$, so $S = G$ wegen S sn G; $S(A,G) = G$ I

✓ (8) $S_1 \trianglelefteq S \Rightarrow A$ sn $\langle A, S_1\rangle$ S_1 sn G   ⊗

✓ (9) S einköpfig   sonst A sn $\langle A, S_1, S_2\rangle = G$ 184(3)

FRAGE 9.79: 21 "$x \in S(A,G) \Rightarrow \langle x\rangle \le S(A,G)$" ein vernünftiges Axiom?

NB: ✓ Heißt: wird später benutzt

Ziel: (14) $S' < S$.

✓ (10) $S' = S \Rightarrow S$ einfach

Bew: $S_0 :=$ Rumpf S, $F := S/S_0$, Skriptfehler bei

Mit $X^{[F]} := \bigcap M$ gilt: $X = \langle X_i \rangle$, X_i sn G

$M \trianglelefteq X$, $X/M \cong F$ $\Rightarrow X^{[F]} = \langle X_i^F \rangle$

Danach $S^{G[F]} \overset{?}{=} (S^A)^{[F]} = \langle S^{a[F]}, a \in A \rangle = \langle S^{[F]a} \mid a \in A \rangle$

$= S_0^A$, wegen $S^{G[F]} \trianglelefteq S^G \trianglelefteq G$ bel

also $S_0^A \trianglelefteq G$, Wäre $S_0 \neq 1$, so A sn $\langle A, S_0 \rangle$

und nach Baumann $\langle A, S_0 \rangle = A S_0^A$ sn G, A sn G.

✓ (11) $S' = S \Rightarrow (A_0 :=) A \cap S^G = 1$

Bew:

$S = S'_{\text{einf}}$ sn $\langle A_0, S \rangle$

A_0 sn $\langle A_0, S \rangle$ (6) mit $B := A_0 \underset{(5)}{<} A$

$A, S \le N(A_0)$

$A_0 \trianglelefteq \langle A, S \rangle = G$ $A_0 \le A_G = 1$

✓ (12) $S' = S \Rightarrow |A| =: r \in \mathbb{P}$

Sonst $\exists B < A$, $|B| = r \in \mathbb{P}$. Für jedes solches:

ist $A_0 = 1 \le B < A$, also nach (6): B sn $\langle B, S \rangle$

$[B, S] = 1$, da $S = S'$ sn $\langle B, S \rangle$; $[B^a, S] = 1$ $[B^A, S] = 1$

$B^A \le A_G = 1$.

NB: wahrsch. $|S| = q$

o. Skript [illegible]

$x_i\rangle$, x_i sn G

$F] = \langle x_i^F\rangle$

$S^{[F]a} \mid a \in A\rangle$

, $G[F] \le S^G \trianglelefteq G$ ist

, nach 8 A sn $\langle A, S_0\rangle$

A, sn G, A sn G.

$B := A_0 \le_{(5)} A$

ür jedes [illegible]:

sn $\langle B, S\rangle$

, $[B^A, S] = 1$

(13) $S' = S \Rightarrow S \trianglelefteq G$

Sonst $N_A(S) < A$, $N_A(S) = 1$ wegen $|A| \overset{=r}{\in} \mathbb{P}$

also sind alle S^a verschieden:

$$S^G = S^A = \underset{a \in A}{\times} S^a$$

Wegen $|S| \neq r^{..}$ gibt es $Q \le S$, $|Q| = q \in \mathbb{P}$, $q \neq r$.

Damit ist Q^A eine abelsche q-Gruppe, da $= \underset{a \in A}{\times} Q^a$.

$G_1 := \langle A, Q \rangle < G$, da $= A \cdot Q^A$ auflösbar, $S' = S$.

A sn G_1, da $Q \le S \cap G_1 \le S(A, G_1)$ II und $G_1 < G$.

$Q \trianglelefteq Q^A \trianglelefteq \langle A, Q \rangle = G_1$

wegen $(|A|, |Q|) = 1$ ist $[A, Q] = 1$

$\exists\, a \neq 1$. Damit wird $Q^a = Q \le S^a \cap S = 1$ ↯ wegen $S \neq S^a$ auf $a \in G$

(14) $S' < S$ Sonst (12, 13), (10), IV ↯

(15) $|S| = q^\beta$, $q \in \mathbb{P}$, S zyklisch.

Beweis: $\exists\, q \mid |S : S'|$ wegen (14) $S^{[q]} := \bigcap N < S$, $N \trianglelefteq^A_{q} S$

$(S^{[q]})^A = \langle S^{[q]a} \mid a \in A \rangle = \langle S^{a\,[q]} \mid a \in A \rangle$

[illegible] $\langle S^a \mid a \in A \rangle^{[q]} = (S^A)^{[q]} \overset{?}{=} S^{G\,[q]} \trianglelefteq G$

Wäre $S^{[q]A} \neq 1$, so (3): $A S^{[q]A}$ sn G

Aber (8): A sn $\langle A, S^{[q]} \rangle = \langle A, S^{[q]A} \rangle = A S^{[q]A}$

Also A sn G ↯. Daher $S^{[q]} \le S^{[q]A} = 1$, $|S| = q^\beta$.

(h) Nach S. 9, [illegible] $\Rightarrow S$ einköpfig

NB: wahrsch. $|S| = q$!

190

Jetzt untersuchen wir A :

(20) $A^{[q]} = A$ sonst $A^{[q]} \triangleleft A$, daher nach

15): $A^{[q]}$ sn $\langle A^{[q]}, S \rangle$

wegen $A^{[q]} = \langle A^{[q]}, S^{[q]} \rangle = \langle A^{[q]}, S \rangle^{[q]} \trianglelefteq \langle A^{[q]}, S)$

ist $S \leq \mathcal{N} A^{[q]}$, $A^{\leq ..}$, $A^{[q]} \trianglelefteq G$, $A^{[q]} \leq A_G \overset{4}{=} 1$.

A q-Gr, S sn G q-Gr, $G = AS^A$ q-Gr, A sn G ↯

(16) $A_1 \triangleleft A \Rightarrow$ A_1 sn G. Bew:

A_1 sn $\langle A_1, S \rangle$ $\overline{V}$ ⊛

$A_1 \trianglelefteq A$, S sn G

185(3): A_1 sn $\langle A_1, S \rangle = G$

(17) A einköpfig sonst $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ sn G (16)

(18) Aus: $A_0 \leq B < A$ folgt $B^{[q]} = 1$

Bew: (6): B sn $\langle B, S \rangle$

da $S^{[q]} = 1$, ist $S \leq \mathcal{N} B^{[q]}$

Ebenso für alle $a \in A$: $S \leq \mathcal{N}(B^{a\,[q]}) = N {B^{[q]}}^{a}$

$S \leq \mathcal{N} (B^{[q]})^A$

$B^{[q]A} \trianglelefteq G$ $B^{[q]A} \leq A_G = 1$ (4)

(19) $A_0^{[q]} = 1$ (18)

→ (20) $A^{[q]} = A$

A daher noch

$\langle A^{[q]}, S\rangle^{[q]} \trianglelefteq \langle A^{[q]}, S\rangle$

! G, $A^{[q]} \le A_G \overset{!}{=} 1$

Sr, A sn G ↯

$,S\rangle$ $\underline{V}$ ⊕

S sn G

n $\langle A, S\rangle = G$

$,A_0\rangle$ sn G (16)

$B^{[q]} = 1$

q]

$B^{q[q]}) = N_B^{[q]}$

q] $A \le A_G = 1$ (4)

✓ (21) $|A:A_0| =: p \in \mathbb{P}$, $p \neq q$

Bew: $|A:A_0| \neq q^{\cdot\cdot}$, sonst $A^{[q]}=1$ ↯ (20)

$\exists\, p \in \mathbb{P}, p \neq q, p \mid |A:A_0|$

$\Rightarrow B: A_0 \underset{p}{\lessdot} B \le A$. Wäre $B < A$, so $B^{[q]}=1$ (18)

also $B = A$

Weiter sei $\begin{cases} P \text{ eine } p\text{-Sylowgruppe von } A. \\ Q := A_0 S^G \\ Z \text{ ein min. Normalteiler von } G \text{ in } Q \end{cases}$

✓ (22) $A = A_0 P$, $|A_0| = q^{\cdot\cdot}$, $|P| = p$ (21)

(23) $^{Q:=S^G}$ $G = QP$, $|Q| = q^{\cdot\cdot}$, $Q \underset{p}{\trianglelefteq} G$

Bew: S sn G q-Gr, also Q q-Gr

q-Syl$(G) = \{Q\}$ $Q \ge A_0$

$Z \le Q$, $Z \cdot\!\trianglelefteq G \Rightarrow Z$ elem.-abelsch,

✓ (24) $Z \le Z(Q)$, $PAZ = AZ = A^G = P^G \trianglelefteq G$

Bew: $[Z,Q] \trianglelefteq G$, $< Q$, $= 1$.

(3): AZ sn G ; $[G:AZ] = q^{\cdot\cdot}$ wegen $G = AQ$, also

$G^{[q]} \le AZ$

$A = \langle p\text{-Syl}(A)\rangle \le P^G = G^{[q]} \le AZ$

$P^G = A(Z \cap P^G) \neq A$ (sonst $A \trianglelefteq G$)

also $Z \cap P^G \neq 1$, $Z \le P^G$ wegen Z minimaler NT G

$\underline{AZ \le P^G \le AZ}$ $A^G \le P^G \le A^G$

$\hookrightarrow P^G = AZ$ $\hookrightarrow P^G = A^G$

✓ (25) $G = AZS = PA_0ZS$, da $G = A^GS = AZS$

✓ (26) $A_0Z \trianglelefteq G$ Bew. $A_0Z \trianglelefteq_p AZ = A^G \trianglelefteq G$ $A_0Z = (AZ)^{(p}$

(27) $(S^G =) Q = A_0ZS = G^{[p]}$ denn A_0Z normale q-Gr

(25): A_0ZS Sn q-Gr vom Index p

$A_0ZS = G^{[p]} \geq Q$

und $|G : Q| = p$

(28) A_0Z elementar abelsch

Bew $A_0Z \trianglelefteq G$ (26) ; q-Gr.

$A_0' = (A_0Z)' \trianglelefteq G$ $A_0' \leq A_G = 1$

A_0Z abelsch; für $X^{(p)} := \langle x^n \mid x \in X)$ ist ebenso $(A_0Z)^{(p)} = 1$.

(28a) { Z ist P-irreduzibel, daher $Z \cap A_0 = 1$ 26, 28
{ Z ist einziger minimaler NT von G sonst $A_0 \cap \mathrm{Ztr}\,Q > 1$

✓ (29) $C_{A_0Z}(P) = 1$ Bew: $=: C$

$C = A_0Z \cap \mathrm{Ztr}\,AZ$

$= A_0Z \cap \mathrm{Ztr}\,A^G$ (24)

$\trianglelefteq G$ (26)

$[C, A] = 1$; $A \trianglelefteq AC$.

Wäre $C \neq 1$, so (3): $A \triangleleft AC$. Sn G ↯

(30) s.u.

(31) Aus $P \in \mathrm{Syl}_p A$, $x \in A^G (= AZ = PA_0Z)$, $P^x \subseteq A$ folgt $x \in A$

Bew: $\exists\ a \in P$, $y \in A_0Z$: $x = ay$.

(32) $N_{AZ}(A) = A$ (31)

$G = A^G S = AZ\,|$

$= A^G \trianglelefteq G$ $A_0Z = (AZ)$

normale q-Gr

; Sn Gr vom Index p

$G^{[p]} \geq Q$

und $|G:Q| = p$

q-Gr.

$\leq A_G = 1$

usw $(A_0Z)^{(p)} = 1$,

$A_0 \cap Z(Q) \overset{26,28}{\neq} 1$

=: C

Z

A^G (24)

(4)

$\geq A^C$.

? ↯

$P^x \in A$ folgt $x \in A$

193

Dann $P^y = P^x \leq A$; ~~weil~~ (30) ist $y \in A_0$, $x = ay \in A$.

(33) $S \cap A_0Z = 1$ Bew: $t \in S \cap A_0Z \Rightarrow A \trianglelefteq \langle A, t \rangle$

$t \in N(A)$ (31): $t \in A$ (25): $t^G = t^{SZA} = t^A \leq A_G = 1$

(30) Aus $y \in A_0Z$ und $a^y \in A$ (wo $\langle a \rangle = P$) folgt $y \in A_0$

Bew: $[a, y] = a^{-1}a^y \in A \cap A_0Z$ (26)

$= A_0P \cap A_0Z = A_0(P \cap A_0Z) = A_0$

$\wedge A_0 a^{-1} y^{-1} a y = A_0$

$(A_0y^{-1})^a = A_0y^{-1}$; $|A_0y^{-1}| = q$

also hat a einen Fixpunkt f in $A_0y^{-1} \leq A_0Z$

nach (29) ist $f = 1$, $A_0y^{-1} = A_0$, $y \in A_0$.

(34) auf S. 194

~~(32) $D := \mathcal{C}_G(P)$ deckt G/A_0Z.~~

~~Denn deckt PA_0Z/A_0Z sowieso wegen $P \leq D$, und er deckt SA_0Z/A_0Z wegen $[P, S] \leq [P^G, Q] \leq P^G \cap Q = A_0Z$ wonach P jede Nebenkl. A_0Zu, $u \in Q$, fest läßt. Ordn q~~

~~(33) Nicht für jedes $s \in S$, $s \in A$, Ordn p enthält für $a^s \in A$ ... $a^s \in A$~~

~~Bew: sonst $P^s \leq A$ f. alle $s \in S$ und alle P ≤ p-Syl A. Diese P erzeugen aber A (20), also wäre $A^s \leq A$~~

~~$A \trianglelefteq \langle A, S \rangle = G$~~

Subnormalisator

24.5.7

14.5.77 (1) Ein sehr großer "Subnormalisator" $S(A,G)$, für den die Hauptforderungen gelten, ist wohl: $\bar{S}(A,G) := \{g \in G \mid$ Aus "$a \in A$, $n \in \mathbb{N}$: $g = g(a_n)$" folgt: $\exists E_0, \dots, E_n \subseteq G$: $\langle a, g_0 \rangle = E_0$, $\langle a, a^{E_i} \rangle = \langle E_{i+1} \rangle$, $E_n \subseteq A\}$.

Aber für diesen gilt nicht: (s. 187–193)

$A \le G$, $S \text{ sn } G$, $S \subseteq \bar{S}(A,G) \Rightarrow A \text{ sn } \langle A,S \rangle$

(2) Ein Axiom: $A, B \le G$, $A \subseteq S(B,G)$, $B \subseteq S(A,G)$

(3) " $s \in S(A,G)$, $z \in C_G(A) \Rightarrow sz, zs \in S(A,G)$ ⇒ A, B kosubnormal

---

(3A) Sei $\langle a \rangle = P \in p\text{-Syl}\,A$, $\langle s \rangle = S$. Nicht zu jedem $t \in s^{\{A_0\}}$ gibt's Mengen $E_1, \dots, E_n \subseteq G$, sodaß $\langle E_1 \rangle = \langle a, a^t \rangle$, $\langle E_i \rangle = \langle a, a^{E_{i-1}} \rangle$, $E_n \subseteq A$.

Bew.: Wenn $E_1, \dots, E_n$ diese Bedingungen erfüllen, dann ist $E_1 \subseteq A$. Das ist klar, wenn $n = 1$. Für $n > 1$ ist $E_1, \dots, E_{n-1} \subseteq A^G$, also $E_{n-1}, \dots, E_1 \subseteq A$ (31).

Ann.: $\forall t \in s^{\{A_0\}} \exists E_1, \dots, E_n$. Dann $\forall a_0 \in A_0$: $t := a_0^{-1} s a_0 \Rightarrow a^t \in A$. Daher gilt $a^{a_0^{-1} s} \in A$, $P^{A_0 s} \subseteq A$. Aber P^{a_0} durchläuft p-Syl A, nach 20.22 also $P^{A_0} = A$, somit $A^s \le A$, $A \trianglelefteq \langle A, S \rangle = G$. ↯

NB: alle $t \in s^{A_0} \in S(A,G)$!

Fortsetzung: 201.

...eher $S(A,G)$,

...gelten, ist

$\in \mathbb{N}$: $g = g(\dots)^n$

..., $E_m = G$"

$1, a^{E_i}) = \langle E_{i+1}\rangle, E \leq A_n\}$;

(s. 187–193)

$\Rightarrow A$ sn $\langle A, S\rangle$

), $B \leq S(A,G)$

, B kosubnormal

$t \in S^{\{A_0\}}$ gilt

$= \langle u, a^t\rangle$,

A.

...erfüllen; –

...wenn $n = 1$.

..., $E_1 \leq A$ (31)

$= a_0^{-1} s a_0 \Rightarrow a^t \in A$.

$\leq A$. Hier

also $P^{A_0} = A$,

↯

-61.

Kosubnormalität (Fortsetzung 184)

und was ist, wenn $|G| = \infty$?

24.5.77 (1) **Satz:** $A_i \leq G$ endlich ($i = 1, \dots, n$); je zwei seien kosubnormal und untereinander vtb. Dann ist jeder A_i sn $\langle A_1, A_2, \dots, A_n\rangle =: J$.

Schiess - Seitenblatt

+ ... 10.9.77

197 (5)

Ergänzung: 196 (2,3), 197 (5)

Bew: (G, A_1, A_2, A_n) Gegenbeispiel mit $|J| + \sum |A_i|$ = min. im J.

(0) $n \geq 3$; alle $A_i \neq 1$. Etwa $A_1 \not\text{sn}\, J$.

o.E.: α ein distributiver Subnormalfunktor.

(1) A_i ... A_k, $J = \langle A_1 \dots A_n\rangle \Rightarrow N := \langle A_1^\alpha, A_2^\alpha, \dots, A_n^\alpha\rangle \trianglelefteq J$.

Bew: Wegen der Kosubn. ist $N = \langle\langle A_1^\alpha, A_2^\alpha\rangle, \dots, \langle A_{n-1}^\alpha, A_n^\alpha\rangle\rangle$ $= \langle \langle A_1, A_2\rangle^\alpha, \dots, \langle A_{n-1}, A_n\rangle^\alpha\rangle$ $\Rightarrow A_1 \leq N(N)$, ebenso $A_i \leq$ ...

$n \geq 3$

(2) $A_n^\alpha < A_n \Rightarrow A_1^\alpha = A_2^\alpha = \dots = A_n^\alpha = 1$.

Bew: $A_1^\alpha, A_2^\alpha, \dots, A_n^\alpha$ sind kon., Widerspruch: A_1 sn A_1N wäre $N \neq 1$, in G/N: A_1N sn G, A_1 sn G.

(3) $A_1, A_2, \dots, A_n$ haben bis auf Isom. nur einen und denselben Kompositionsfaktor F. (denn sonst $A_n^\alpha \neq 1$, $\alpha = \{F\}$).

(4) $F' = F$ sowie $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{O}_p$ wegen $A_i \not\sim A_k$ in $G \in \mathfrak{O}_p$; A_1 sn G ↯

(5) $A_1 A_2 \cdots A_n$ sind direkte Produkte gewisser $F_\nu \cong F$, desgleichen daher alle $\langle A_i, A_k\rangle$ Bew [illegible] = [F]

(6) ↯: Sogar $A_1 \trianglelefteq G$

196 Kosubnormalität

24.5.77 (2) Zu (1) kann die Vor. "A_1 vertb. mit A_2, A_3" nicht weggelassen werden:

$A_2 := \langle (12)(34)(56) \rangle$, $A_1 := \langle (23) \rangle$, $A_3 := \langle (45) \rangle$

Hier ist sogar noch $[A_1, A_3] = 1$

~~Satz (3) $A_1, .., A_n$ perm. $\Rightarrow A_i$ sn $A_i N$, $N := \langle A_1^{\mathfrak{n}}, .., A_n^{\mathfrak{n}} \rangle \trianglelefteq$]~~ Bew: (1) auf $\langle A_1, A_2^{\mathfrak{n}}, .. \rangle$

FRAGE! ~~(3') Seien $A_1, \dots, A_n \le G$ paarweise kosubnormal, A_1 mit $A_2, .., A_n$ vertauschbar.~~

~~Ist dann A_1 sn $\langle A_1, .., A_n \rangle$?~~

~~NEIN! XVI 115 (2)~~

~~Satz (4) Sei $G = \langle A_0, A_1, .., A_n \rangle$, A_i sn $\langle A_i, A_k \rangle$.~~

~~Dann $\forall i$: $A_i^{\mathfrak{n}}$ sn G~~ Bew $A_i^{\mathfrak{n}}$ sn $\langle A_0^{\mathfrak{n}} A_1^{\mathfrak{n}} A_n^{\mathfrak{n}} \rangle \trianglelefteq G$

Anwendung XVI, 114

~~(4) Vermutung ⇒ (B) die größte Untergruppe B_0 von A_0,~~

~~die mit jedem A_k, $1 \le k \le n$, vertauschbar ist, ist B_0 sn G~~

~~(A) jeder Subnormalteiler B_0 von A_0 für den $A_k B_0 = B_0 A_k$ ($k = 1..n$), ist sn G~~

~~NB: zu (C): $S = (\mathfrak{P}_{A_1} \mathfrak{P}_{A_2} \mathfrak{P}_{A_3} - \mathfrak{P}_{A_n})^m A$~~

~~für große m (stabil stationär), wo~~

~~$\mathfrak{P}_X A = \langle U \mid U \le A, UX = XU \rangle$.~~

[illegible] B_0 [illegible]

Satz (5

$\exists p \in \pi$: $p(A)$

(6)

A_1 ullb auf A_2, A_3"

$)\rangle$, $A_3 := \langle (45) \rangle$

$N := \langle A_1^{\pi}, \dots, A_n^{\pi} \rangle \trianglelefteq J$

(1) auf $\langle A_1, A_2^{\pi}, \dots \rangle$

~~weise~~

vertauschbar.

$, A_n \rangle$?

A_i sn $\langle A_i, A_k \rangle$

w $\langle A_0^{\pi} A_1^{\pi} \dots A_n^{\pi} \rangle \trianglelefteq G$

~~von~~ A_0,

vertauschbar

B_0 von A_0

$)$, ist sn G

$T_{A_n})^m A$

$)$, wo

$X = X \rangle$.

Satz 7. (5) Sei A_i sn $\langle A_i, A_k \rangle$ $(i, k \in \{1, 2, 3\})$ und A_1 ulb $\langle A_2, A_3 \rangle$. Dann A_1 sn $G := \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$

Das verallgemeinert 195(1) im Fall $n = 3$. Für $n = 4$ gilt das Entsprechende nicht: 197(2)

Bew. (G, A_1, A_2, A_3) Gegenb., $|G| \cdot |A_1| - |A_3|$ min.

$N := \langle A_1^{\pi}, A_2^{\pi}, A_3^{\pi} \rangle \trianglelefteq G = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$.

$A_1, A_2^{\pi}, A_3^{\pi}$ erfüllen Vor. 195(1), also

A_1 sn $\langle A_1 A_2^{\pi} A_3^{\pi} \rangle = A_1 N$.

Wenn $N \neq 1$, so $|G/N| < |G|$: $A_1 N$ sn G ↯

Wenn $N = 1$, so alle $A_i \in \pi$, $\langle A_i, A_k \rangle \in \pi$;

$\exists p \in \pi$: $p(A) \trianglelefteq$ sn J. $[p(A_1), (A_i)] = 1$ $i = 1, 2, 3$ wo $p(X) = p$

$[p(A_1), Q] = 1$, $Q := \langle p'(A_1), p'(A_2), p'(A_3) \rangle \trianglelefteq J$. 19$\frac{1}{2}$

$p(A_1) \trianglelefteq p(A_1) \cdot Q \trianglelefteq A \cdot Q$ (sn J außer wenn $Q = 1$) $\Rightarrow Q = 1$

also $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{G}_p$, $J = A_1 \cdot \langle A_2, A_3 \rangle \in \mathfrak{G}_p$ ↯

~~$\exists p$ $p(A_1) \trianglelefteq G$, wofür $A_1 \neq p(A_1)$ wegen $|A_1|$ min.~~

$Q := \langle A_1^{p}, A_2^{p}, A_3^{p} \rangle \trianglelefteq G$, also $A_1^{p} = 1$, also

$Q = \langle A_2^{p}, A_3^{p} \rangle = \langle A_2, A_3 \rangle^{p} \neq 1$, Sonst G ell. p

$G \to G/Q$: $\langle A_1 \cdot \langle A_2, A_3 \rangle^{p} \rangle$ sn G.

~~so $[A_1, \langle A_2, A_3 \rangle^{p}] = 1$, ist $A_1 \trianglelefteq V$.~~

(6) $A_i \leq G$, A sn $\langle A, S \rangle$, A sn $\langle A, T \rangle$, S, T sn G $\Rightarrow$ A sn $\langle A; S, T \rangle$
$= 184(2)$

Bew. (5) auf A, S^A, T^A anwenden

Kosubnormalteiler.

(1) $\forall p \in \mathbb{P}$: Aus $A, B, C \leq G = \langle A, B, C\rangle$, $|A| = |B| = |C| = p$ und je zwei kosubnormal folgt nicht A sn G.

Beispiel für $p = 3$: $a = (1 2 3)(4 5 6)(7 8 9)$

$b = (1 4 7)$

$c = (2 5 9)$

gilt $b^a = (2 5 8)$, $\langle b^a, c\rangle \notin \mathfrak{g}_p$.

(2) $\forall p \geq 3$: Aus $A, B, C, D \leq G$, $|A| = \dots = |D| = p$, alle Paare kosubnormal und A vtb $\langle B, C, D\rangle$ folgt nicht A sn $\langle A, B, C, D\rangle$.

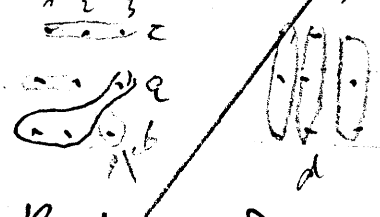
Bsp: $a = (1\ 2 \dots p)$

$b = (p{+}1\ p{+}2 \dots 2p{-}1\ 3p)$

$c = (2p{+}1\ 2p{+}2 \dots 3p{-}1\ 2p)$

$d = (1\ p{+}1\ 2p{+}1 \dots (p{-}1)p{+}1) \cdot$
$(2\ p{+}2\ 2p{+}2 \dots (p{-}1)p{+}2) \cdot \dots$
$\cdot (p\ 2p\ 3p \dots p^2)$

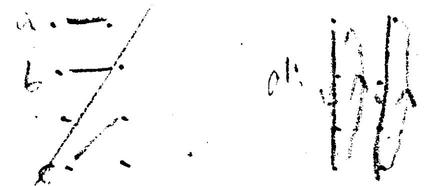
etwa $p = 3$ illustriert:



b und c mit ihren Konjugierten unter D erzeugen als [illegible] eine tra. $\mathfrak{g}$, also prim, also A_9; folglich $A \leq \langle B, C, D\rangle$, erst recht A vtb $\langle B, C, D\rangle$, aber $\langle B, C, D\rangle$ einfach.

29.5.77 Für $p=2$ finde ich Ähnliches bisher

(3) nur für's! $|A|=|B|=|C|=2$, $|D|=4$!



(4) Also: Für jedes $p \in \Pi$ gibt's ein Gegenbeispiel zu der Vermutung: $A, B, C, D \in \mathfrak{G}_p$; $A, B, C, D \leq G$; je zwei kosubnormal, $A \text{ utb } \langle B\, C\, D \rangle \Longrightarrow A \text{ sn} \langle A\, B\, C\, D \rangle$

sogar =

FRAGE (5) $A_i \leq G$, A_i, A_k kosubnormal.

$A_1 \text{ utb } B_l := \langle A_j \mid j \neq 1, l \rangle$ für alle $l > 1$

$\overset{?}{\Longrightarrow} A_1 \text{ sn } \langle A_1, A_2, \dots, A_l \rangle$?

Das wäre eine Verschärfung von 1.1.6 (3')

(6) Wie (3) zeigt man: sind $A_1, -, A_n$ p-Gruppen in G und je 100 von ihnen kosubnormal, so folgt nicht $A_1 \text{ sn} \langle A_i \rangle$.

Bew. Man kann $p \geq 100$ und alle $|A_i| = p$ wählen.

Kosubnormalität

7.6.77

, d.h. $A_i \text{ sn } \langle A_j \rangle \leq G$

(1) a) $\{A_i \mid i \in I\} \text{ csn } G,\ \{B_j \mid j \in J\} \text{ csn } G \Rightarrow$
$\{A_i \cap B_j \mid i \in I, j \in J\} \text{ csn } G$

b) $\{A_i\} \text{ csn},\quad H \leq G \Rightarrow \{A_i \cap H\} \text{ csn}$

c) " $\varphi \in \text{Hom} \langle A_i \rangle \Rightarrow A_i^{\varphi} \text{ csn}$

d) " , $B_i \text{ sn } A_i \Rightarrow \{B_i\} \text{ csn}$

~~Satz (2) $\{A_i\} \text{ csn } G,\ \{B_j\} \text{ csn } G,\ \{A_i, B_j\} \text{ csn},$
$\langle A_i \rangle \wp \langle B_j \rangle \Rightarrow \{A_i\} \cup \{B_j\} \text{ csn}.$~~

Vergl[illegible]

FRAGE (3) $A \text{ csn } B, C\ ;\ B \text{ csn } C^a$ (oder B und C^a) $\forall a \in A$ b) genügt $B^A \wp C^A$, s.u.)
$\xrightarrow{?} A \text{ sn } \langle A, B, C \rangle$?

Bew 36: (XVI 40): $A \text{ csn } AB^A \cap \text{sn } AC^A$. $AB^A \wp AC^A \underset{\text{XVI}}{\Rightarrow} A \text{ sn } ABC^A$

Aufgabe (4) Kriterien für Kosubnormalität, z.B. lokale.

Falsch ist die Vermutg.: (5) Sei A G.
Wenn die Kosubnormalität auf der Konjugiertenklasse $\{A^g \mid g \in G\}$ transitiv ist, so ist $A \text{ sn } G$.

Gegenb.: I 80: Dann würde aus $A < G$ stets $A \text{ sn } G$, also $A \trianglelefteq G$ folgen.

(b) Fr

Frob. von

← d.h.

$n G \Rightarrow$

$\}$ csn

$A, {}^P$ csn

$B_i \}$ csn

$, B_j \}$ csn

csn.

B^A p(^{A}, sn.)

c$^{(a)}$ Var A

$\Rightarrow A$ sn $ABC^{A|A}$

$\overline{XVI}$

Lokale,

der

transitiv

G folgen.

(b) FRAGE

Fortsg. von 186

Zusammenhang mit Knapp, Archiv 25, 473 ?

$P \in \mathfrak{S}_p$, $P \leq G$, M max mit P sn $M \leq G$

$\Rightarrow O_p(G) \leq M$

analog: $P \in \mathcal{U}_p(G)$, P sn $H \Rightarrow P$ sn $\langle H, O_p G\rangle$.

Bew: Klar: P sn $[P \cdot O_p(G)]$ sn $H\, O_p(G)$

← d.h.: 12'

Sei A p B ; A_i sn $A = \langle A_i \rangle$; B_k sn $B = \langle B_k \rangle$.

Dann A csn $B \Leftrightarrow A_i$ csn B_k .

FORTS: $\underline{\overline{XVI}}$ 39, 107

$p^\alpha q^\beta$

14.7.77 1. In einer p-auflösbaren Gruppe hat das Erzeugnis aller p-Sylow-Zentren (also p-Länge 1 und) abelsche p-Sylowgruppen. (Der schwache Abschluß eines p-Sylowzentrums in einer Sylowg. ist abelsch. (wird im wes. bei Hall-Higman stehen.)

2. $|G| = p^\alpha q^\beta$, $G \in \mathfrak{I} \Rightarrow$ Ist $\left\{ \begin{array}{ll} X \le Z(P) & P \in p\text{-Syl}\,G \\ Y \le Z(Q) & Q \in q\text{-Syl}\,G \end{array} \right.$

so hat $\langle X, Y \rangle$ abelsche Sylowgruppen.

3 In ~~einer p-aufl.~~ jeder Gruppe sind p-Sylowgr. von Normalteilen schwach (sogar stark-) abgeschlossen. Ist G p-auflösbar und ist A eine schwach abgeschl. p-Untergr. von G, die von Elementen mit G-Klassenlänge $\not\equiv 0 \bmod p$ erzeugt wird, Sylowgruppe von A^G und daher stark abgeschl. [In p-aufl. Gr. ist also manchmal für p-Untergr. schwache Abgeschlossenheit gleichwertig mit starker.]

3' Entsprechendes dürfte in π-aufl. G gelten für π-Untergr., die von Elementen π-freier G-Länge erzeugt werden.

hat das
(oder p-Länge
(Der
zu eins
und immer.
P Sy-Lp G
Q ∈ q-Sylg
ppen.
lo. gr.
Klassen.
abgeschl.
Untergr.
i-Klassen
ngruppe
p-auflösb.
Abgeschl.
hen für
G-Länge

1 | Ist $|G|<\infty$; $K, L \trianglelefteq G$*); $A \in \pi$-Hall K, $B \in \pi'$-Hall L, so ist $AB = BA$

Bew oBdA $G = \langle A,B\rangle$. $D := K\cap L \trianglelefteq G$ Dann $A\cap D \in \pi$-Hall D, $B\cap D \in \pi'$-Hall D, also $D = (A\cap D)(B\cap D)$. Nun wird $[A,B] \le D$, und mod D $[A,B]=1$, also ist $\langle A,B\rangle = ADB = A(A\cap D)(B\cap D)B = AB$.

*) Es genügt nicht: $K,L \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $KL=LK$ (Sonst $A \in \mathcal{H}_\pi(G)$, $L \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow AL=LA$)

2 | $G \in \mathfrak{G}_{p,q}$ (d.h. $|G|=p^\alpha q^\beta$) $\Rightarrow$ jede schwach abg., von Elementen p-freier G-Länge erzeugte p-Gruppe ist vertauschbar mit jeder ebensolchen q-Gruppe. (202 (3))

4 | Sei G minimal nicht auflösbar, $G = PQ$, $X = Z(P)$ $Y = Z(Q)$. Besitzt G eine maximale Untergruppe mit $O_p \ne 1 \ne O_q$, so ist $XY < G$, und $\exists\ \hat X, \hat Y$: $X \le \hat X \le P$, $Y \le \hat Y \le Q$: $\langle X,Y\rangle = \hat X\hat Y$; $\hat X, \hat Y$ abelsch, nämlich $\hat X := P\cap\langle XY\rangle$.

5 | Es gibt G mit $|G| = 9\cdot 16$ mit Sockel der Ord. 9

Bew: $16 \mid |GL(2,3)| = (3^2-1)(3^2-3)$

FORTS: 265 s. [illegible]

PGr: lange Bahnen u. Kosubnormalität

13.9.77

1 G tra, A sn G, $l(A)=1$, Grad $A > \frac{1}{2}$ Gr G,
$\Longrightarrow$ A tra

Dann Grad A | Grad G. Ähnlich für A mit mehreren Bahnen, von denen eine länger als $\frac{1}{2}$ Gr G ist.

2 A, B Kombn, $l(A) = l(B) = 1$,
$\mathrm{Tr}\,A \cap \mathrm{Tr}\,B \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Tr}\,A \supseteq \mathrm{Tr}\,B$ oder umg.

3 A sn G,$^{(1)}$ A unzerschneidbar, in $G^{(2)}$ jede Bahn von G enthalte ~~höchstens~~ genau eine lange Bahn von A. (Dann: a) $g \in G$, $\mathrm{Tr}\,A \cap \mathrm{Tr}\,A^g \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,A^g$.

b) Gr $A > \frac{1}{2}$ Gr $G \Longrightarrow$ Gr A = Gr G; d.h. $\Omega_A = 0$

Satz

4 G pri, A sn G_α, Gr $A \geq \frac{1}{2}$ Gr G, jede lange Bahn von G_α enthalte höchstens eine von A. Dann Gr A = Gr G_α, d.h. A tra β^{G_α} ($\forall \beta \neq \alpha$).

Bew: Sonst G_α nach 3 zerschneidbar, da oBdA A unzerschn.

nalität

$A > \frac{1}{2}$ Gr G

. fü.

denen

r B oder umg.

e Bahn

kon. Bahn

$A = \mathrm{Tr}\, A^g$.

. G; d.h. $\Omega_A = 0$

Bahn von G_α

A. Dann

$(\forall \beta \neq \alpha)$.

schwedbar.

untersuchen.

205

5 $A \leq G$ habe Fixpkt und sei maximal mit minimalem $l(A)$. Desgl. B.

~~L. 3.1~~ Bahnen konst. [illegible] von A [illegible]

~~A, B Mittel auf einer~~ [illegible], [illegible] inhomog. [illegible] B^Γ in $\langle A B\rangle^\Gamma$ einen Fixpunkt, Bahn von A, so ist B in $\langle A, B\rangle$

6 Zwei Gruppen A, B mit Vor. 5 (I. Tinte) sind genau dann kosubnormal, wenn jede auf einer pass. Bahn der andern trivial operiert.

7 Sei A und $B < G$, $l(A) = \min = l(B) = l$; A, B max. Wenn $l(\langle A, B\rangle) > l$, so A, B kosubnormal.

Satz 8 Sch[illegible]

$A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, A^G transitiv $\Rightarrow$ alle Bahnen von A sind konjugiert unter G (und daher gleich lang).

Bew.: Gegenb. mit |G| min, A max.

N minim NT von G. Fall I: $A < AN$. Dann sind

Tragfähig?! Das genügt nicht

zwei Bahn. von AN konj, daher die von A wegen $A \trianglelefteq\trianglelefteq AN$.

Fall II: $A = AN$, $N \leq A$. Betrachte $\bar{\Omega} := \Omega : N$
$\bar{G}$ auf $\bar{\Omega}$

Die Bahnen von $\bar{A}$ sind die Bahnen von A, aufgefaßt als Vereinigungen von Bahnen von N.

206 Noch lange Bahnen: Extremalgruppen

kein Fixp.

$A = G_{\Omega_A}$

{A unzerlegbar [illegible] $\Delta_{A\neq 0}$ [illegible] $G^{(2)}$, $\operatorname{Gr} A \geq \frac{1}{2} \operatorname{Gr} G$.

1. Def Sei G PermGr, A ≤ G, jedes Erzeugnis von A mit weiteren (Konjugierten) Ähnlichen, das noch einen Fixpunkt hat, habe mehr lange Bahnen als A: $l(A, A^{g_1}, -, A^{g_n}) > l(A) = l$, wenn $A^{g_1} \neq A$. Schreibe A extr G

2. A extr G, $A \leq G_\alpha \Rightarrow$ A sn G_α.

3. A extr G, $A \leq H \leq G$, jede Bahn von H enthalte höchstens eine lange von A. Dann A tra auf jeder solchen Bahn von H. 204_3

4. A extr G, $l\langle A, A^g\rangle = l + k = l(A) + k$, $(k > 0)$ $A \neq A^g$. Dann hat A (und A^g) mindestens k+1 isolierte lange Bahnen in $\langle A, A^g\rangle$.

Allg.:

4' A, B extr G, $A \neq B$, $l\langle A, B\rangle = l(B) + k$. Dann hat ~~A~~ A mindestens k+1 isolierte lange Bahnen.

gruppen
$\sim G^{(2)}$, Gr $A \geq \frac{1}{2}$ Gr G.

, Erzeugnis
lichen
ten), das noch

mehr lange

−, $A^{S_n}) > l(A) + l$.

c A erz G

n G.

von H

A. Dann

− H. 204_3

$A \neq A^g$
$> l(A) + k$, ($k > 0$)

ens $k+1$

, $A^g\rangle$.

$+k$. Dann
verliert lange Bahnen.

Satz 5 A sn G tra Ω, ~~[illegible]~~ $\Omega_A \neq \emptyset$ ~~[illegible]~~
$\Rightarrow A^G$ in Ara

Bew.: $\exists\ A \trianglelefteq \langle A, A_1\rangle \trianglelefteq \langle A A_1 A_2\rangle \trianglelefteq \dots \trianglelefteq A^G$
mit $A_i \underset{G}{=} A$. Schrittweise betrachten, bei denen doppelt. Transitivität erhalten wird.

Allgemeiner und wohl schon früher gefunden:

Satz 5* Sei A_i sn G, G tra, jedes $\Omega_{A_i} \neq \emptyset$, $A := \langle A_i \rangle$.
dann ~~[illegible]~~ A in Ara. Sonst. ~~[illegible]~~ $\exists\ g_i \in A$: $\alpha \in \Omega_{A_i^{g_i}}$
$\alpha \in \Omega_{\langle A_i^{g_i} \mid i \rangle} = A$.

Bem. 6 A sn G = tra, $\Omega \neq \Omega_A \neq 0 \Rightarrow \exists\ g \in G$: A^g hat keine lange Bahn in Ω_A. Bew wie für 5.

lange Bahnen.

Def. 0 G PGr. Ein Extremalsystem b) (a) nicht leer. $\ell(E) \geq \ell_0$, $\Omega E \neq \emptyset$) ist eine Menge (G-inv.) von Ugr von G; c) für $A_i \in \mathcal{E}$, $A \neq A_i$ ~~folgt~~ und $\Omega\langle A_i \rangle \neq \emptyset$ folgt ~~[illegible]~~ $\ell\langle A_i \rangle > \ell$ ~~[illegible]~~; und d) in mind. einer Bahn von $\ell\langle A, B \rangle$, falls $A \neq B$ in $\mathcal{E}$, kommen ≥ 2 lange Bahnen von A oder B vor. Seien $A, B \in \mathcal{E}$ = extr. für G. Dann:

(1) ~~$A \in \mathcal{E}$ [illegible]~~, $A \leq G_\alpha \Rightarrow A$ sn G_α

(2) $A, B \in \mathcal{E}$, $\ell\langle A, B \rangle \geq \ell + k$, $k > 0$ $\Rightarrow$ A hat mindest. $1+k$ lange Bahnen in Ω_B, und A sn $\langle A,B \rangle$. Bew unten

eine Bahn von H enth. [illegible] lange von A;

Hilfs(3) $A \leq H \leq G_*$, jede Bahn von H enth. ≤ 1 lange Bahn von $A \Rightarrow A$ td auf jeder ~~[illegible]~~ Bahn ~~[illegible]~~, H' oder Annihil

(4) $A \neq B$ in $\mathcal{E}$ mit gem. Fixpkt $\Rightarrow A$ und B haben mindestens je 2 isolierte lange Bahnen.

Bew d), 2

Def 0') $A, B \in \mathcal{E}$, für die langen Bahnen Γ_i von $\langle A, B \rangle$ sei $\ell(A^{\Gamma_i}) = \alpha_i$, $\ell(B^{\Gamma_i}) = \beta_i$, $\alpha(A,B) = \max \alpha_i$, $\beta(A,B) = \max \beta_i$, $\rho(A,B) = \max(\alpha, \beta)$, $\sigma = \max(\alpha_i + \beta_i)$

(6') Zu

b)
...ystem Ω ∈ ...
... Aus A_i ∈ G
... ≠ ∅
... (d),
... $\{\Omega_{A_i}\}$
...), falls $A \neq B$ ...
... A oder B
... G. Dann
... in G_α

$k > 0$
... Bahnen ...
... B ...
... von A
... von H
⇒ A ≠ A
... oder
... trivia

⇒ A und
... Bahnen ...
...
... $\max a_i$, ...
... $\sigma = \max$ ...

(5) $\mu(A,B) = 1 \Rightarrow A = B$ wenn $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$

NBs: $\Updownarrow$
$\sigma(A,B) \leq 2$

(6) Eine tra PGr. des Grades n werde erzeugt von $A, B \leq G$, und B habe einen Fixpunkt. Dann ~~[illegible]~~ enthält jede Bahn von A einen Fixpkt von B

~~Bew. A^B tra Ω, sonst Bahn Bahn~~

~~mit A^B fest, $\langle A,B \rangle$ haben G.~~

~~∃ C maximal, erzeugt v. Konjug. von A endlich.~~

~~Dann $\langle C, C^b \rangle$ tra für passendes $b \in B$~~

Bew. OBdA nehmen B maximal mit Fixpunkten unter den Erzeugenden $\langle B^{g_i}, i \in I \rangle$, dann ist Ω_B ein Block für G, dessen Konj. werden transitiv von A perm.

jener Colett B

(6') Zusatz. Jede Bahn von A enthält den gleichen Prozentsatz von Fixpunkten von B.

Denn wenn $\Omega_B \cap \Gamma^g \neq \emptyset$, so $\Omega_{B^{g^{-1}}} \cap \Gamma \neq \emptyset$,

daher $\Omega_{\langle B, B^g \rangle} \neq \emptyset$, ~~[illegible]~~ $B^g \leq C$ $B \leq C^g$

$\Gamma^g \subset \Omega_B$.

Ω_B besteht aus vollen Konj. Blöcken zu Γ

Forts. S. 216