Klumpen & Zerschneidung

Def: $G \le \mathrm{Sym}\,\Omega$, $G = G^{(1)}_{\Gamma}$, $\Delta \subseteq \Omega$ $(\Gamma := \Omega - \Delta$

Die „Klumpen" von Δ bezüglich G sind die Äqklassen auf Δ von:

$$\delta_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow \forall_{\gamma\in\Gamma} : \delta_1^{G_\gamma} = \delta_2^{G_\gamma}$$

(1) Seien $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ die Klump. von Δ; $\Delta = \Sigma\Delta_i$. Genau dann kann man $G(\Delta) (= G/\Gamma))$ zerschneiden, d.h. $G(\Delta)^\Delta \le G^{(\Omega)}$), wenn Δ jedes Δ_i einzeln festläßt. (Daß es sie höchstens vertauscht, ist klar. Also die größte durch $\Omega = \Gamma + \Delta$ zerschneidbare Ugr ist der Fixator von $\Delta = \Sigma\Delta_i$.

Klumpen von $\delta = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \delta^{G_\gamma}$

(2) Sind $\Delta = \Sigma\Delta_i$, $\Delta' = \Sigma\Delta'_k$ die Klumpenpart. bzgl (Γ, Δ) und (Γ', Δ'), so sind die nichtleeren $\Delta_i \cap \Delta'_j$ jeweils ~~im gleichen~~ genau die Klumpen von $\Delta \cap \Delta'$. Denn $\xi, \eta \in \Delta_i \cap \Delta'_j \Rightarrow \xi, \eta$ in derselben Bahn für jedes G_α, $\alpha \in \Gamma \cup \Gamma'$. Umgekehrt folgt aus letzterem das für alle $\alpha \in \Gamma$ und alle $\beta \in \Gamma'$, also ξ, η insg. Δ_i, Δ'_j.

dung

$\subseteq \Omega$ $(\Gamma := \Omega - \Delta$

, ~~[illegible]~~ G

f_A
von:

: $\Gamma_i^{G_\delta} = \Gamma_i^{G_\delta}$

Δ ~~[illegible]~~, $\Delta = \Sigma\Delta_i$

$= G(\Gamma))$

$\leq G^{(\Omega)})$,

festläßt.

…t, b(Klas.

verschmolzen

Δ.

k die

(Γ', Δ'),

Δ'_j jeweils

$\Delta \cap \Delta'$ ~~[illegible]~~

$'_j \Rightarrow \xi, \eta$

$\alpha \in \Gamma \cup \Gamma'$

, für alle $\alpha \in \Gamma$

$_i, \Delta'_j$.

(3) Ist $\Delta \subseteq \hat{\Delta}$, so besteht jedes $\hat{\Delta}_j$ aus vollen Δ_i.

(4) Die Klumpen von $\Delta \cup \Delta'$ bestehen aus vollen Zusammenhangskomponenten der Vereinigung der Graphen von Δ und Δ' (können aber aus mehreren solchen bestehen, da aus $G_\Gamma = 1 = G_{\Gamma'}$ nicht folgt $G_{\Gamma \cap \Gamma'} = 1$.

(6) Für $A \leq G \leq \mathrm{Sym}\,\Omega$ sei $k(A)$ die Anzahl der ~~[illegible]~~ Klumpen von A, d.h. von $\mathrm{Tr}\,A$. Ist $A \leq B \leq G$, so ist $k(A^{\cdot\cdot B}) \leq k(A)$. Sonst hätte $A^{\cdot\cdot B}$ einen Klumpen, der keinen von A enthält, daher A drin trivial, also auch $A^{A^{\cdot\cdot B}} = A^{\cdot\cdot B}$.

(7) Sei $\ell := \min k(A)$, $1 \neq A \leq G$, $\Omega_A \neq \emptyset$. "Heißt A extremal", wenn A maximal ~~[illegible]~~ in $\{B \mid k(A) = \ell\}$. Dann $A \leq G_\alpha \Rightarrow A \,\mathrm{sn}\, G_\alpha$. Sei $\mathfrak{A} = \{A \mid A \text{ extr. in } G\}$. Wähle stets $A, B \in \mathfrak{A}$.

$A, B \in \mathfrak{G}$,

8\. $A \neq B,\ \Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset \Rightarrow k(A,B) > l$.

$H \leq G_\alpha$, ~~[illegible]~~ von Tr H_0 Tr A

10\. $A \in \mathfrak{G}$, jeder Klumpen ~~eines $H \supseteq A$, $H \leq G_\alpha$~~ enthalte ~~nur~~ höchstens einen Klumpen von A.

Dann kann man H längs Tr A zerschneiden:

$H^{\mathrm{Tr} A} \leq G$; Bew. wie 9:

~~die Klumpen von Tr $A \cap$ Tr H sind die nichtleeren Durchschnitte~~ ~~Für jedes~~ Die Klumpen von H^A sind die $\Delta_i \cap \Delta'_j$, wo Δ_i = Kln H, Δ'_j = Kln A.

9\. $A, B \in \mathfrak{G}$, jeder Klumpen von $\langle A, B\rangle$ enthalte höchstens einen von A, ~~[illegible]~~ Tr $A \cap$ Tr $B \neq \emptyset$ und $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$. Kurz: $m(A,B) = 1$ (208 d)

Dann $A = B$.

Bew: Wenn $A \neq B$, so $k(A,B) > l$.

Es ist $A \trianglelefteq \langle A,B\rangle$. Sonst $\langle A, A^b\rangle < A$

Indukt. vorauss.: A, A^b erfüllen trivialerweise dieselben Vor., also $A = A^b$.

B läßt also den einzigen Klumpen von A in einem gegeb. Kl. von $\langle A, B\rangle$ fest. nach 210 (1) kann man B längs Tr A zerschneiden. Die Klumpen von Tr $B \cap$ Tr A sind genau die nichtleeren $\Delta_i \cap \Delta'_j$, Δ_i = Kln A, Δ'_j = Kln B.

$> l$.

von $\mathrm{Tr}H_0$ $\mathrm{Tr}A$
~~$H \ni A$~~, $H \le G_\alpha$

~ A.

schneidens

'D:

~~[illegible]~~
'n von H^A
', $\Delta_0' := \mathrm{Kl}_n A$.

~$\langle A, B\rangle$

$\mathrm{Tr}A \cap \mathrm{Tr}B \neq \emptyset$

$(A, B) = 1$ (208_d)

b) $< A$

[illegible]

pen von

B) fest

mp $\mathrm{Tr}A$

$\mathrm{Tr}B \cap \mathrm{Tr}A$

j, $\Delta_0 := \mathrm{Kl}_n A$
$\Delta_0' := \mathrm{Kl}_n B$.

Jeder der (nach 8 weniger als l) nächstleeren Schnitte Klump A $\cap$ Klump B ~~liegt ganz~~ ist ein ~~[illegible]~~ Klumpen von $B^{\mathrm{Tr}A} \le G$ oder $k(B^{\mathrm{Tr}A}) < l$, $B^{\mathrm{Tr}A} = 1$, $\mathrm{Tr}B \cap \mathrm{Tr}A = \emptyset$
↯

11. $A \neq B$ in $\mathfrak{A}$, $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$, $\mathrm{Tr}A \cap \mathrm{Tr}B \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ A hat mindestens zwei isolierte Klumpen in $\langle A, B\rangle$.

11'. Allg.: $k(\langle A, B\rangle) = l + m \Rightarrow$
es gibt mind. $m+1$ Klumpen von $\langle A, B\rangle$, die ganz aus Fixpunkten von A bestehen.
Sonst erfüllt A mit $H := B$ die Vor. 10)
$k(B^{\mathrm{Tr}A}) < l$; ↯ Ebenso.

12. A, B in $\mathfrak{A}$, $\mathrm{Tr}A \cap \mathrm{Tr}B \neq \emptyset$, $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$
$\alpha(A, B) = 1 \Rightarrow A = B$.

13. $l \overset{<}{=} 4$, $\left.\begin{array}{l}\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset \\ A, B \text{ in } \mathfrak{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A, B \trianglelefteq \langle A, B\rangle$

Vorm

Bew: $l=4$: Typ (A,B) = $(1;0)(1,0)(0,1)(0,1)$ * oder ≠*

~~OBdA $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$~~

OBdA $A \neq B$: ~~nach 12 = (1,0)(1,0)(0,1)(0,1)(2,3)...~~

Nach 11 gilt: ~~Wenn $\beta = 3$, so ... (2,2)~~

$\langle A, A^b\rangle$ H dann vom Typ [illegible])

falls $A \neq A^b$, [illegible] $(1,1)(1,1)$ [illegible] $(1,0)(1,0)$

~~nach 11~~, 12: $(0,1)(0,1)$ ↯

~~Wenn $\beta = 1$, so $\begin{matrix}1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{matrix}$~~

($l \leq 3$ noch einfacher ebenso).

Satz 14. G prim, $l = \min\limits_{1 \neq B \leq G_\alpha} k(B) \leq 4$, $A \leq G$, $k(A) = l$

$\Rightarrow$ A hat genau l lange Bahnen ~~Anfang~~ jede Bahn von G_{α} dies

Bew: sonst $N := A^{G_\alpha}$, [illegible]

17: Methode

OBdA A max, $\Rightarrow \in \alpha$. $|\Omega_N| > 1$

$\exists \; \beta \in \Omega_N$, $\beta \neq \alpha$

Aus $A^g \leq G_\beta$ folgt $A^g \triangleleft N(A^g) = G_\alpha$

der durchschnittliche Abschnitt von A in G_β hat keinen Fixpkt $\neq G_\beta$.

NN! Also $A = G_\alpha$ dies $l \leq 4$

Δ kann nicht in $G(\Delta)$ zerschneiden: $\forall\, u \in G_{-l-\Delta} \Rightarrow u \in A$ wegen l:

Forts 219

3 ⊴ ⟨A, B⟩

(1,1)(0,1) ≠

oder α ≠

~~A)(2,B)...~~

~~(2,2)~~

(1,0)(1,0)

(1,1)(0,1)

, k(A) =

~ G_{α_s} dies

(...) = G_α

ist hat

$l \le 4$

Vermutung 15 Unter Vor. 14 hat vielleicht der schwache Abschluss von A in G_α höchstens l Bahnen.

Herzustellen [illegible], wenn es nicht

dem entsprechende Teilerbildung aus

A entsteht, sogar $\le l-1$ lange Bahnen?

16 $\alpha \neq \beta$, $N \trianglelefteq G_\alpha$, N sn G_β ⇒ $N^{g\gamma} = 1$

sonst jedes $A^g \le G_\alpha \le N(N) = G_\alpha$, Abschluss A

in G_β hat weiteren Fixpunkt

<u>17: Methode:</u> $\exists\, \alpha, \beta$: $\Omega_{\langle A \in \mathfrak{A} \mid A \in \overset{=:E}{G_{\alpha\beta}} \rangle} =: \Delta$ minimal.

Dann: $|\Delta^g \cap \Delta| \le 1$ für $\Delta^g \neq \Delta$. (Wenn alle langen Bahnen von E Längen $\equiv 0\ (q)$ hätten so G(Δ) tra Δ) stets. {∃ $O_p(A^h) \neq 1$ für ein $A \le G(A)$ und $l_g(A) < p$ für jeden Untergruppen ... ⇒ $l(G)$ ...}

Δ kann nicht im G(Δ) zerschneiden: $1 \neq u \in G_{\Omega - \Delta}$ ⇒ $u \in A$ wegen $l = \max$ so

Ist $\Delta \underset{G}{\neq} \Delta' \neq ..$ und jedes $k(\Delta', -)$ $\Delta \ni \alpha$ ...,

$\Sigma\, k(|\Delta| - 1) \le |\Omega| - 1$

G(Δ) zerschneidet U ($\le G(\Delta)$) ⇔ $\forall \xi \notin \Delta\ \forall \eta^{G_\xi}$: $\eta^{G_\xi} \cap \Delta$ invar. bei U

Forts. 219 ⇔ $\forall_{\xi \notin \Delta}$ gilt: G(Δ)-Bahnen innerh. Δ sind U-inv. ⇔ $\forall \eta \in \Delta$ ξ $G(\Delta)_\eta$-Bahnen aufgelöst " "

A⊴ und Bahnen Forts. von 209

1. Sei G tra Ω; A sn G, B sn G,
$4 \cdot \mathrm{Gr}\, B < \mathrm{Gr}\, G'$, $G = \langle A, B \rangle$.
Dann A tra Ω.

Bew: Es gibt einen Block Γ von G, der aus den Fixpunkten der schwachen ~~[illegible]~~ Abschließung von B in G_α besteht.
Jede Bahn von A trifft Γ, und Ω_B besteht aus von Konjugierten $\Gamma_i = \Gamma^{g_i}$ (vgl S. 209)
A^G tra, sonst ließe B eine Bahn davon fest
oBdA ist $\langle A^g, A \rangle$ tra für jedes $A^g \neq A$, oder A intra.

$\exists\ h \in G: A \trianglelefteq \langle A, A^h \rangle$ tra.

Da $2 \times \#$ der Fixpunktblöcke von B
$< \text{Anz. der } \Gamma_i - 1$,
gibt es 2 Γ_i's in Ω_B.

Jede Bahn von A ~~schneidet also~~ enthält also 2 Fixpunkte von $\langle B, B^h \rangle$

Satz 2 allg

A sn G, A^G tra Ω, $\Omega_A \neq \emptyset \Rightarrow |\Omega| = 1$
d.h. $|\Omega| > 1$, $\Omega_A \neq \emptyset \Rightarrow A^G$ intr. Bew. Ind. [illegible]
mit $\bar{\Omega} := \Omega/N$, $N \trianglelefteq G$.
$A \trianglelefteq AN$

~209

en G,

, der

Eh1.

d Ω_B

(vgl. S. 209)

dann fest

is $A^g \neq A$,

$\sim B$

= enthält

$\Omega| = 1$

, und (α)

α/N, $N \triangleleft G$.

AN

Satz 3 Ein Subnormalteiler A der trans. Gruppe G habe nur 2 Bahnen; dann sind diese in G konjugiert.

4 $A_1, \dots, A_n$ Sy G auf Ω, $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ tra $\Rightarrow |\Omega| = 1$

Bew: $\exists g_i$: $A_i^{g_i} \in G_\alpha$; aber $\langle A_i^{g_i} \rangle = G$.

5 $A, B \in G$, $AB = BA$ $\Rightarrow$ auf jeder Bahn von AB ~~Auf fällt jede Bahn von A jede~~, in der A einen Fixpunkt hat, ist B transitiv.

$\langle K \rangle$ ∞

25. 9.

Frage 1 Ist $G = AB$; A, B sn G; $A = A'$ und $|G| < \infty$, so $G = A_B^{(\sigma)} \cdot B$ (sogar $G = (A_B)^{\sigma} B$?!)

gilt das auch für $|G| = \infty$?!

(Kurzbezeichnung = ...)

{ $\mathfrak{X} \subseteq$ Ugr G, abgeschl. gegen $X \to X^g$, Normalteiler und ... Durchschnitte

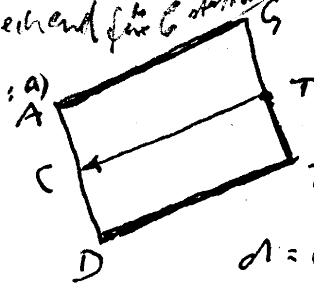
Satz 2 sei $A = A'$ sn G. Dann a) $A \leq \bigcap N S \Rightarrow A \in \bigcap N T$.

S sn A, $S \in \mathfrak{X}$ T sn G, $T \in \mathfrak{X}$

b) Entsprechend für G statt ...

von Kegel Math. Ann. 163 (1966)

Bew: a)



OBdA: $AT = G$

T ind.

$d = 0 \vee d = 1$. $A \trianglelefteq G(x) |G{:}T| = 2$.

OBdA $D = 1$ $C, T \trianglelefteq T^g$, $C \cap T = 1$

$[C, T] = 1$. $[C, T^a] = 1$ $[C, T^g] = 1$

$[C, C] = 1$ C abelsch

$x \in C \Rightarrow \langle x \rangle \trianglelefteq A$, $\mathrm{Aut}\langle x \rangle$ abelsch,

$A = A'$, also $x \in Z(A)$. $C \leq Z(A)$

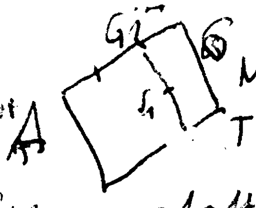
für $t \in T$: $t^a = c(a) \cdot t$

$t^{aa'} = c(a)\, t^{a'} = c(a)\, c(a')\, t$

$a \to c(a)$ ist Hom A, Bild $\leq C$ abelsch

$A \leq N(T)$ Ⓝ $|G{:}T| > 2$ Induktion

$d > 1$: Beweis Induktion $|G - B|$



Nach Induktion ist $T_1 = T_1^A \trianglelefteq G$ gehen G/T_1: $G_1 \trianglelefteq G$, normaler ...

FRAGE 3: Genügt statt $A = A'$ auch $A \perp B$?

NB Beim Beweis gilt $[B, A] = 1$

Lange Balmer-Zahl

Forts. von 215

25.9.77

(1) Vor* $Z(G(\Delta))^\Delta \neq 1$ &

$l(A) < q \Rightarrow l(G_\alpha) \le l(A)$, sogar $G_\alpha A = n-1$

hier genügt schon, daß die Anzahl der „Klumpen" (210) gegebenen [illegible] $\neq 1$ oder $< q$ ist.

Bew: Sei ~~Wähle~~ $A \le G(\Delta)_\alpha$, $A^\Delta \neq 1$; wähle $\alpha \in \Delta$, $Q \in$ p-Syl $G(\Delta)_\alpha$, $Z \le Z(Q)$. Wegen $(A_i, k)^{G_\Delta A} = A_i$ $\forall A_i \le G(\Delta)_\alpha$ ist $Z \le N(A_i)$ & läßt jeden Block von A_i fest, daher auch von $\langle A_i \rangle$. Ist $Z^\Delta \neq 1$, so ist G $(Z^\Delta)^{G(\Delta)}$ tra Δ, erzeugt mit A etwas größeres ohne Wachstum von l, hat noch Fixpunkte in ~~Δ~~ Δ.

$C \le G_\Delta$

Anwendung

Satz 2: Bew.

$\#$Kl in $A < q$, $|K| = pq^\alpha$, $\alpha > 0$, $\exists$ A B C. $A \triangleleft B$, $A \triangleleft C$, $B \neq C$ $\Rightarrow A = G_\alpha$.

Befreiung von Vor 1*! Wähle ☒ $A B C$: $A \le G_\Delta$, $B, C \le G(\Delta)$, $\trianglelefteq G_\Delta$, B anders als C, $A \trianglelefteq \langle A, B, C \rangle = K$. Dann kann man jede Sylowgr. von K zerschneiden durch Δ.

Zerschneide Δ, C mittels Tra A

☒: Bew. $E := \langle A \in \mathfrak{A} \mid A^\Delta = 1 \rangle$, $\exists$ $B, C \le G(\Delta)_1$ ... $B \neq C$ in $G(\Delta) - G_\Delta$. Dann B, C nicht conj, $B, C \le N(A)$, $l_q(B) \overset{?}{\le} l$; sicher genügt $\#$Klumpen $A < q$

?

Sei A maximal mit folg. Eig. bei geg. M:

Ziel (1) $A \le M <\cdot G, \forall_g (A \le M^g \Rightarrow A \text{ sn } M^g)$ $A \not\trianglelefteq_{sn} G$

„$A \le M^h \Rightarrow M^h = M$. oder ähnlich; $G = G^{(2)}$"

(unterscheidbar von einer r-Sylowgr. erzeugt und

Satz 2 Wenn A ~~[illegible]~~ weniger und $A^g \le N(A)$ ~~[illegible]~~ als r Klumpen hat, so ~~[illegible]~~ $Tr A^s \le Tr A$.

Bew. ~~Wähle A maximal mit B~~, $\in R$; $Q \in r\text{-Syl}\langle A, B\rangle$, dann kann man A^g vermöge $Tr A$ ~~[illegible]~~ unterscheiden ~~[illegible]~~.

~~zum Widerspruch führen dürfte.~~

Satz 3 Im $l(G_a)$ Problem werde A von den r-Syl zu erzeugt und habe höchstens ~~[illegible]~~ $l \le r$ Bahnen. Dann $l(G_a) \le l$ . . . Bew: wähle l min, sonst $\exists A \subseteq A$

~~$\le G_a$, sonst~~

Methode 4 Generell für $A \le G$ untersuchen die minimalen $H \le G$ die durch zwei nicht kommensurable Konj. von A erzeugt werden können.

bei geg. M:

$\delta)$ $A \notin s_a G$

zulässig: $G = G^{(2)}$;

ursprünglich und

[illegible] weniger

[illegible]

TrA.

$\overline{B}$, $\in \mathfrak{A}_j$

$\sim A^{\delta'}$

den [illegible].

+ Sg-Gr

+ l.c.B. Bahne.

wähle l min

Form $\exists A \in mA$

ste minima

normale

men.

221

222

Vor: A sn G_α sobald $A \leq G_\alpha$. $A \notin$ sn G = pri
„ und so fort schließen.

4.10.77

(1) Aus A_1 sn A folgt Grad $A_1 \geq 2f$, $f := |\Omega_A|$.

genauer (2)

Bew: $A_1 \notin$ sn G.

$\exists a_1 \in A_1, \exists g \in G$: $A_1 \notin$ sn $\langle A_1, A_1^{a_1^g} \rangle$

Dann $A \notin$ sn $\langle A, A^{a_1^g} \rangle$

$A^{a_1^g}$ bewegt ganz Ω_A

a_1^g bringt f Punkte von Tr A nach Ω_A

Gr $A_1 \geq$ Gr $a_1^g \geq 2f$.

(2) Stets ist [illegible] min grad $A \geq 2f$, $f := |\Omega_A|$.

Bew: Sei Gr $a = \mu$, $a \in A$. $T := \{a^g \mid g \in G\}$ ist eine Testmenge für (A_0, G), wenn $A_0 := \langle a \rangle^A$, denn $A_0 = \langle A_0 \cap T \rangle$ (s. Haupt-separat).

Da $A_0 \notin$ sn G (wegen G pri, $\Omega_{A_0} \neq \emptyset$), $\exists t \in T$: $A_0 \notin$ sn $\langle A_0, A_0^t \rangle$.

Dann ist erst recht $A \notin$ sn $\langle A, A^t \rangle$, da A_0 sn A. Also haben A, A^t keinen Fixpunkt gemeinsam, Gr $t \geq 2f$, aber Gr t = Gr $a = \mu$.

Satz (3) Ist $a \in A$ und ord $a \in \mathbb{P}$, so enthält a mindestens f Zyklen der Länge > 1.

(3') Genauer: ein passendes a^g, $g \in G$, enthält in seinen langen Zyklen ganz Ω_A, und in übrigen Zyklen nur $\leq$ einen Pkt von Ω_A!

Bew: Sonst gäbe es zu jedem $g \in G$ mindestens ein $t \in \langle a^g \rangle - \{1\}$, das einen Fixpkt von A in einen ebensolchen überführt, denn von den f Fixpkten von A ist entweder einer auch fix bei a^g, oder zwei liegen in demselben Zyklus der Länge >1.

Zu jedem g so ein T gewählt gibt wieder eine Testmenge für $(\langle a \rangle^A, G)$, für die stets A sn $\langle A, A^t \rangle$ und damit

A_0 sn $\langle A_0, A_0^t \rangle$ wäre $(A_0 := \langle a \rangle^A)$.

(3'') Wenn $\left\{ \begin{array}{l} a \in A \\ \operatorname{ord} a = r \in \mathbb{P} \end{array} \right.$, so $\operatorname{grad} a \geq r \cdot f$. (Bew 3')

Satz (3''') $a \in A$, $\mathbb{P} \ni r \mid \operatorname{ord} a \Rightarrow \operatorname{grad} a \geq rf$.

Daher $\mathbb{P} \ni r \mid |A| \Rightarrow \operatorname{grad} A \geq rf$

$n := |\Omega| \geq (r+1)f$, $f \leq \frac{n}{r+1}$

" (3^{IV}) Zu jedem $a \in A$ (mit $\operatorname{ord} a \in \mathbb{P}$) [illegible] $\exists\, g \in G$: a^g enthält keine Bahn Λ mit $|\Lambda \cap \Omega_A| > 1$.

Satz 4

4. 10. 77

Sei $B \leq G$, $G \supseteq T = T^g \ \forall g \in G$ und

(a) B sn $\langle B, B^t \rangle \quad \forall t \in T$.

Dann ist $\langle B \cap T \rangle$ sn G.

Statt (a) genügt auch (nach Baer's Satz)

(b) T enth. nur primäre El'te, und $t\,(o(b))^{\infty} \in B, \ \forall b \in B \cap T$

(oder z.B. erst recht $t \in Sn^*_G(B)$, $\forall t \in T$).

wichtige Aufg

G mod

'∈G–T.

G

eiSatz)

ad $t^{F(G)^\infty} \in B$, $\forall \ldots \in B \cap T$

(B), ∀t∈T).

"Vertauschbarkeit und Subnormalität"

Schöne Aufgabe:

Welche p-Untergruppen sind mit allen p-Untergruppen der endl. Gr. G vertauschbar? Liegen sie im Hyperzentrum von G? vgl Maier-Schmid

Klar: Sie liegen in jeder p-Sylowgr., also in $O_p(G)$

"Satz von Frattini"

(1) Verallg.: $$\Phi_p(G) := \bigcap_{\substack{M <\cdot G \\ |G:M| \not\equiv 0\ (p)}} M$$

besitzt nur eine einzige p-Sylowgruppe.

Steht das alles nicht schon bei FRATTINI selbst?

oder im selben Beispiel von CARTER?

(2) Kann man Gaschütz MZ 58 auf Φ_p verallgemeinern?

(3) Nenne $A < G$ groß, wenn $\exists g_1 \ldots g_n$: $G = \langle A, g_1, \ldots, g_n \rangle$. Nenne A, B benachbart wenn $A \cap B$ groß in A und B.

FR.: Entsprechendes für $\Phi_\pi(G)$?

$\mathcal{M}_\pi G$ (UAdSchreierV).

gemeint: $A \le$ Ex Aut $F \Rightarrow A$ läßt E-Untergr. $\ne 1$ von F fest

16.11.77 (1) UAdSchrV: sei $A \in \pi G$, $M \in \mathcal{M}\pi G$, sei $\{G_\lambda\}$ eine Normalreihe von G, und A lasse jedes nichtauflösb. $M \cap G^\lambda$ fest (dh. $A \le \mathcal{N}(\underbrace{M \cap G_{\lambda-1}})G_\lambda$)

Dann ist $A \le M$

$\langle A,M \rangle$

Bew: Indukt. $|G|$: oBdA sind alle $\downarrow \trianglelefteq G$.

[Für $\mathcal{M}^*_\pi G$ statt $\mathcal{M}\pi G$ gilt's ohne Schreier].

(1) folgt aus Modellsystem in Vorl. 77 (Bem. 14)

(2) UAdSchV: $M \in \mathcal{M}\pi G$, $\{G_\lambda\}$ NR G, für jedes nichtauflösbare G^λ sei $M \cap G^\lambda = \begin{cases} G^\lambda \text{ oder} \\ 1 \end{cases}$.

Dann gilt f. jedes $M_1 \in \mathcal{M}\pi G$: a) $M_1 \underset{G}{\le} M$; d.h.:

b) $C_\pi G = 1$ c) G ist π-separiert

Bew: Verfeinere $\{G_\lambda\}$ zu Hauptreihe, untersuche Glied: ist $\in \pi G$ oder $\pi' G$, wenn auflösbar

aber auch " " , wenn nicht (nach Vor.)

Hieraus folgt allgemeiner:

(3) $M \in \mathcal{M}\pi G$, $\{G_\lambda\}$ NR G, $H := \bigcap_{G^\lambda \notin \gamma} \mathcal{N}(M \cap G^\lambda)$

$\Rightarrow$ H ist π-separiert, $C_\pi H = 1$.

NB: "submaximal" wäre wohl konsistent mit subnormal

ziert).
Aut F ⇒ A liegt
[illegible] ⇒ 1 vom F fest
$\lambda\pi G$,
und A
$\leq \mathcal{N}(M \cap G_{\lambda+1})G_\lambda)$
le $\downarrow \trianglelefteq G$.
e Schreier].
— Vorl. 77 (Beweis (14))
S, für jedes
G^λ oder
M ; d.h.
π-separabels
, [illegible]testes
auflösbar
sich (nach Vor.)
$H := \bigcap \mathcal{N}(M \cap G^\lambda)$
$G^\lambda \notin \gamma$
[illegible]

227

FRAGE (4) Sei $H := \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}\pi G \\ G^\lambda \notin \gamma}} \mathcal{N}_G(M \cap G^\lambda)$. Ist H eine maximale π-separable Ugr.?

FRAGE (5) Hat jedes $M \in \mathcal{M}\pi G$ eine Projektionseigenschaft für direkte Produkte von einfachen Subnormalfaktoren von G, von denen einer (oder beide) nichtabelsch ist? Wohl „ja", wenn der Rumpf jedes direkt. pf. SNT's von G auflösbar.

NEIN! 242₃₆

Verm. (6) Aus $M, L \in \mathcal{M}\pi G$, $M \cap \mathrm{Kopf}\,E_i = L \cap \mathrm{Kopf}\,E_i$ für die „Einköpfe" (perfekten) folgt $M_G = L_G$. Für $A \leq M$ ist notwendig, daß A die $L \cap \mathrm{Kopf}\,E_i$ permutiert.

Aufg. (7) a) Nachprüfen, ob man von der Projektion eines $M \in \mathcal{M}\pi G$ in einem „abstrakten" Kompositionsfaktor reden kann.

NEIN

b) Ist die Proj. in einem nichtabelschen Kompositionsfaktor immer groß?

NEIN

Ist sie submaximal?

NEIN

§242 (36)

Satz (8) | Ist $T \trianglelefteq S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $M \in \mathcal{M}_\pi G$ und $N \trianglelefteq G$ derart, daß S/T von N gemieden wird, so ist $| M \neg S/T | = | M \neg NS/NT |$

Satz

(8') | Wenn man noch $L \in \mathcal{M}_\pi G$ $|L \neg S/T| = |M \neg S/T|$ hat, so ist auch $| L \neg SN/TN| = | M \neg SN/TN|$; ebenso ohne Betragsstriche.

Satz (9) | Seien $L, M \in \mathcal{M}_\pi G$, $G_0 \trianglelefteq G$, und es gebe eine SNR von G_0, in deren nichtauflösbaren Faktoren L und M dieselben Projektionen haben. Dann ist $L \cap G_0 \underset{H}{=} M \cap G_0$, wo $H := \langle L \cap G_0, M \cap G_0 \rangle$ gesetzt ist.
Dann OBdA $G = \langle L, M \rangle$, dann G_0 π-separiert.

FRAGE

FRAGE (10) | Ist jede "normal-maximale" π-Untergruppe von G (d.h. $\exists\, \hat{G}$: $M = G \cap \hat{M}$, $\hat{M} \in \mathcal{M}_\pi \hat{G}$, $G \trianglelefteq \hat{G}$) auch "holomorph-maximal"?

Gez. Bsp

FR. (11) | Kann man je zwei Erweiterungen von G unter einen Hut bringen? Was sagt Amalgamtheorie?
(ja wenn $Z(G) = 1$, Hut $=$ Aut G).

Satz (12) Sei $B \in_\pi H$. Dann $\exists$ G, $\varphi \in$ ~~Hom(G,H)~~ $\mathrm{Epi}(G,H)$, $A \in M_\pi G$ mit $\varphi(A) = B$

Bew: Stelle H (auf den Nebenklassen von 1) als reguläre Permutationsgruppe dar, grad$(H) = n$, wähle $N_1, \dots, N_n$ isomorph zueinander mit ≥ zwei Klassen nichtisomorpher max. π-Ugr, wähle M_i in einer Klasse maximaler π-Ugr von N_i für die i der einen festen Bahn von H, und M_j in einer anderen Klasse, sodaß die $M_j \not\cong M_i$ sind. (Bsp. $N_1 \cong \dots \cong A_5$) Dann $G := N_1 \times \dots \times N_n$ erweitert mit H, $A := M_1 \times \dots \times M_n$ erweitert mit B.

Allgemeiner 242_{36}

FRAGE (13) Sei $A \in M_\pi G$, $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, S vtb S^a $\forall a \in A$. Ist dann $A \cap S$ maximal unter denjenigen π-Untergruppen von A, die bei $N_A(S)$ invariant sind?

Geg. Bsp. (14) Konj.fakt$(G) = Kf(H) \not\Rightarrow c_\omega(G) = c_\omega(H)$

Bsp: $|G| = 2 \cdot 168$ mit $|N| = |168|$, $H = N \times C_2$; $\{2,3\}$

H hat wohl Konj.-Klassen mit Ord 24, 24, 6 $c_\pi H = 3$

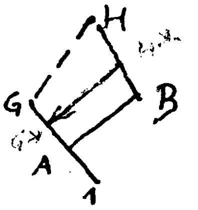
G " " – – 48, 12 $c_\pi G = 2$

230

$\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}_{\mathfrak{E}}\, G$ =: $\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} G$ ($\mathfrak{E}$ fest)

19.11.77 Def (1) A submaximale $\mathfrak{E}$-Untergr. von G :$\Leftrightarrow$ (4)

$\exists\ H, B$: $G \triangleleft\triangleleft H$, $B \in \mathcal{M}_{\mathfrak{E}} H$, $A = G \cap B$.



Dabei $\mathfrak{E}$ eine „nahezu abgeschlossene", d.h. Klasse von endl. Gruppen, abgeschl. gegen Ugr, Faktorgr, Erweiterung.   (5)

Frage: genügt Abgeschl. gegen Ugruppen und semidirekte Produkte?

Hilfsatz 245 (41')

(2) In der Situation (1) sei $B \leq H^* \leq H$, $G^* := G \cap H^*$

Dann ist auch A submaximal in G^* (6)

(2') Sei $A \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}_{\mathfrak{E}} G$. Dann $G_{\mathfrak{E}} = A_{\mathfrak{E}} \leq' A$.   Denn $G_{\mathfrak{E}} \leq H_{\mathfrak{E}} \leq B$ (6')

FRAGE (2'') $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{E}} G$, $A \in \mathfrak{E}' \subseteq \mathfrak{E}$ $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{E}'} G$? d.h. $\mathcal{M}_{\mathfrak{E}} G \cap \mathfrak{E}' = \mathcal{M}_{\mathfrak{E}'} G$

Satz (3) Sei $A \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}_{\mathfrak{E}} G$. ~~Sei $N \trianglelefteq G$ und ...~~

Sei $F = F'$ einfach*, $N := \langle F_i \in \mathrm{sn}\, G \mid F_i \cong F \rangle$.

* genügt: subnormal, und Rumpf $\in \mathfrak{E}$?

~~$S \triangleleft\triangleleft N$, $S \cong T \triangleleft\triangleleft G$ folge stets $T \leq N$~~

vielleicht auch ~~$\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse und $N := G_{\mathfrak{F}}$.~~

für $N \circledast G$, $N \in \mathfrak{F}'$ vgl 247

Dann ist A submaximal in $\underbrace{\mathcal{N}_G}\,(N \cap A)$.

Bew.: Wähle H, B nach (1), und $L := \langle F_j \in \mathrm{sn}\, H \mid F_j \cong F \rangle$

Dann ~~$L \in \mathfrak{F}$, $L \cap G \in \mathfrak{F}$,~~ $L \cap G = N$, $L = N \times K$

Setze $H^* := \mathcal{N}_H(B \cap L)$. Dann $B \leq H^* \leq H$,

und $G^* := G \cap H^* = \mathcal{N}_G(B \cap L) = \mathcal{N}_G((B \cap N) \times (B \cap K))$ FRAGEN (6*)

$= \mathcal{N}_G(B \cap N)$ wegen $G \leq \mathcal{N}(B \cap K)$

Bew für *: $L_0 := \mathrm{Rumpf}\, L$ $\bar{H} := H/L_0$ $\bar{L} = \bar{N} \times \bar{K}$, $K := L_0 \langle F^h \ntrianglelefteq G \rangle$

$[\bar{G}, \bar{K}] = 1$ $[G, B \cap K] \leq L_0$ $G \leq \mathcal{N}_H(B \cap K)$

$B \cap L = (B \cap N)(B \cap K)$ $\mathcal{N}_G(A) = \mathcal{N}_G(B \cap L) = G \cap H^*$ $B \leq H^* = \mathcal{N}_H(B \cap L)$

B max H^*

$G^* \triangleleft\triangleleft H^*$

$B \cap G^* = \mathcal{N}_{(B \cap G)}(B \cap H) =$

$= \mathcal{N}_A(B \cap N)$

$= \mathcal{N}_A(B \cap G \cap N)$

$= \mathcal{N}_A(A \cap N) = A$

NEI

(4) Aus $A_i \in \mathcal{M}^{11}\xi G_i$, folgt $XA_i \in \mathcal{M}^{11}\xi XG_i$.

Bew. $H := XH_i$, $B := XB_i$

N.B. Es wird wohl nicht ganz $\mathcal{M}^{11}\xi X G_i$ so entstehen.

(5) Aus $A \in \mathcal{M}^{11}\xi G$ und $\xi^* \le \xi$ (auch abgeschlossen), folgt $G_{\xi^*} \trianglelefteq A$

Denn $G_{\xi^*} \le H_{\xi^*} \le B$ in dem Bew. von (1).

$1.\underbrace{245}\,43$

(6) $A \in \mathcal{M}^{11}\xi G$, $\xi \ni N \trianglelefteq G$, aus $G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ folge $G \cap N^H = N$, $\bar{\ }: G \to G/N$. Dann $\bar A \in \mathcal{M}^{11}\xi \bar G$.

Insbesondere:

(6') Aus $\xi^* \le \xi$, $N := G_{\xi^*}$, $A \in \mathcal{M}^{11}\xi G$

folgt $A/N \in \mathcal{M}^{11}\, G/N$.

Bew (6): $\exists\, H, B$ (1). $K := \overset{N^H}{~~H_{\xi^*}~~}$ $\therefore K \cap G = N$, $K \in \xi$.

Der kanonische Isomorphismus $\bar{\bar{\ }}$ von $\bar G = G/N$ auf $GK/K = \bar{\bar G}$ führt $\bar A = A/N$ in $AK/K =: \bar{\bar A}$ über, also genügt es zu zeigen: $\bar{\bar A} \in \mathcal{M}^{11}\xi\, \bar{\bar G}$; hierfür wegen $\bar{\bar B} \in \mathcal{M}\xi\bar{\bar G}$ genügt es z.z.: für $\bar{\bar H} := H/K$, $\bar{\bar B} := B/K$ ist $\bar{\bar B} \cap \bar{\bar G} = \bar{\bar A}$.

In der Tat: $(GK \cap B)/K = (G \cap B)K/K = AK/K$.

~~[illegible] $\bar{\bar B} \in \mathcal{M}\xi\bar{\bar G}$~~

FRAGEN (6*) a) Folgt aus $A \in \mathcal{M}^{11}\xi G$, $N \trianglelefteq G$, $N \in \xi G$

stets $\begin{cases} A/N \in \mathcal{M}^{11}\xi\, G/N \\ A \in \mathcal{M}^{11}\xi H \text{ für } H := N_G(A \cap N) \end{cases}$?

b) Folgt aus $G_\xi \le A \in \xi G$ und $A/G_\xi \in \mathcal{M}^{11}\xi \frac{G}{G_\xi}$

NEIN → 251 stets $A \in \mathcal{M}^{11}\xi G$?

(ξ fest)

$\cap G$, G)

$A = G \cap B$.

genommen, d.h.

ine Klasse von

gen. gegen

, Erweiterung.

nicht gegen

normale Produkte?

H, $G^* := G \cap H^*$

in G^*

$\le B$

$\mathcal{M}\xi G \cap \xi = \mathcal{M}\xi G$

~~und Obus~~

$\rangle$.

~~$F \le H$~~

~~G_ξ~~.

$(N \cap A)$.

$:= \langle F_\xi \le \cap H \mid F_\xi \ldots \rangle$

N, $L = N \times K$

$B \le H^* \le H$,

$((B \cap N) \times (B \cap K))$,

$\le N(B \cap K)$

$\bar N \times \bar K$, $K := L_\xi(F^G \trianglelefteq G)$

$N(B \cap K)$

$: N_H(B \cap L) = G \cap H^*$

$G_{B} \le H^* = N_H(B \cap L)$

(7) Aus $A \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} \xi G$, $\xi^* \cap \xi = 1\}$ folgt:

Für $N := G_{\xi^*}$ ist $AN/N \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} G/N$.

Unzulängliche Beweisskizze: (6) mit Schur-Zass. oder $(|H_{\xi^*}|, |B|) = 1$

Bew ausführlich S. 246!

Satz (8) $A \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} G$, $G_1 \triangleleft\triangleleft G \Rightarrow A \cap G_1 \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} G_1$.

Bew: (1) $G_1 \triangleleft\triangleleft H$, $G_1 \cap B = G_1 \cap G_1 \cap B = G_1 \cap A$.

Bem 4.1.80: (8,1) $\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} G$ ist invariant unter aut G. Denn isomorphe Gruppen haben isomorphe Erweiterungen. Bewirkt meine Darstellg.

HS (9) Sei $G_2 \trianglelefteq G_1 \le G$, $A \le H \le G$, $H_i := H \cap G_i$.

Dann $(\underbrace{A \neg G_1/G_2}_{= (A \cap G_1) G_2 / G_2}) \neg (H_1/H_2) = A \neg H_1/H_2$

Bew:

a) $[(A \cap G_1) G_2 \cap H_1] H_2 = [(A \cap H_1) G_2 \cap H_1] H_2 = (A \cap H_1) H_2$.

denn $A \cap G_1 = A \cap H \cap G_1 = A \cap H_1$

b) $(G_2 \cap H_1) H_2 = H_2$.

HS (9a) $N \trianglelefteq G$, $N \le A \le G$, $G_2 \trianglelefteq G_1 \le G$,

$\bar{G}_i := G_i N \Rightarrow A \neg \bar{G}_1/\bar{G}_2 = (A \neg G_1/G_2) \neg G_1$!

Bew: Zähler links $= (A \cap \bar{G}_1) \bar{G}_2 = (A \cap G_1 N) G_2 N$

$= (A \cap G_1) N G_2$

Zähler rechts $= (A \cap G_1) G_2 N$

1} folgt:
$\mathcal{M}^{44} G/N$.
$(|H,*|, |B|) = 1$

$A \cap G_1 \in \mathcal{M}^{44} G_1$.
$G_1 \cap B = G_1 \cap B$.
isomorphe
Basisel monomen Darstellg.

$H_i := H \cap G_i$.
$A \to H_1/H_2$

$(A \cap H_1)H_2$

$1 \leq G,$
$\bar{G}_x = (A \cap G_1/G_2) \cap G/N$
$G_1 N) G_2 N$

Nenner links $= \bar{G}_2 =$

" rechts $= G_2 N$

$\widehat{III}$ (10) $A, B \leq G$, $\{G_\lambda\}$ SNR. Für ein μ sei $A \cap G^\mu = B \cap G^\mu$.

Dann: I. Ist $A, B \leq H \leq G$, $H_\lambda := H \cap G_\lambda$, so $A \cap H^\mu = B \cap H^\mu$

II. Ist $N \trianglelefteq A, B$, $N \trianglelefteq G$, $\bar{G} := G/N$, $\bar{G}_\lambda := G_\lambda N/N$, $\bar{A} := AN/N$, .. so ist $\bar{A} \cap \bar{G}^\mu = \bar{B} \cap \bar{G}^\mu$.

III. Ist $N \trianglelefteq G, (|N|, |A|) = (|N|, |B|) = 1, \bar{G} := \ldots$ so gilt Beh. II nebst $|\bar{A} \cap \bar{G}^\mu| = |A \cap G^\mu|$

Bew: (9) (10) oder kürzer.

$\forall a \in A \cap G_{\mu-1}\ \exists b \in B \cap G_{\mu-1}, x \in G_\mu : a = bx$

I. $a, b \in H_{\mu-1} \Rightarrow \exists x \in G_\mu : a = bx \quad x \in H, H_\mu$

II $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{G}_{\mu-1}$ ⇒ ~~alle~~ Originale $a, b \in G_{\mu-1} \Rightarrow a = bx \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}\bar{x}$.

III $\bar{a} \in \bar{G}_{\mu-1} \Rightarrow a \in NG_{\mu-1} \Rightarrow a \in G_{\mu-1}$ wegen $G_{\mu-1} \trianglelefteq\trianglelefteq NG_{\mu-1} \Rightarrow \ldots$

(11) UAdSchreierV: $F = F'$ einf, $F \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $A \in \mathcal{M}^{44} \mathfrak{E} G$, $\mathfrak{E} F \neq \{1\} \Rightarrow A \cap F \neq 1$ (sogar "groß")

Bew: bekannten Satz über $\mathcal{M}\mathfrak{E}H$ auf (1) anwend.

Satz (12) OAdSV: $G = G'$ einfach $\Rightarrow \mathcal{M}^{44}\mathfrak{E}G = \mathcal{M}^{4}\mathfrak{E}G$

Bew: $A \in \mathcal{M}^{44}\mathfrak{E} G \Rightarrow_\exists B, H$ nach (1)

$B \cap G$ ist maximal unter den von $B_1 := N_B(G)$ festgelassenen $\mathfrak{E}$-Untergr. von G. $G \trianglelefteq GB_1$. $\exists M$ (beliebig) $M \in \mathcal{M}\mathfrak{E}(GB_1)$, $M \geq B$. Dann $B \cap G \leq M \cap G$ invariant bei M, B also =.

(12') Hat G nur einen Kopf, $G = G'$, und ist der Rumpf auflösbar, so wird wie bei (12) gelten:

$$\mathcal{M}^{\Delta\Delta}\mathcal{E}\,G = \mathcal{M}^{\Delta}\mathcal{E}\,G.$$

Satz (13) allg: (13') UAdSV. Seien $A, B \in \mathcal{M}^{\Delta\Delta}\mathcal{E}\,G$, $\{G_\lambda\}_1^l$ SNR, aus $G^\lambda \notin \mathfrak{X}$ folge $A \cap G^\lambda = B \cap G^\lambda$.

Dann $A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$ { [illegible] π-Sylowsatz oder / nilpotenter π-Hallgr. oder

FRAGE: Kann man auf die G_λ [illegible] nilpot. π-Ugr verzichten

Verschärfg 2! Hauptsatz $B \underset{\langle A,B\rangle}{\leq} A$

Korolla

? Umkehrg ?

Kor (13')

ERGZG XV.

Bew: Gegenbeispiel $|G|$ minimal. Dann

(a) G_λ Kompositionsreihe von G

~~(a) $l > 1$ $G = \langle A, B\rangle$ oBdA~~

(b) $G_{\mathcal{E}} = 1$ (6, 10 II)

(c) Ist $\mathcal{E}^* \cap \mathcal{E} = \{1\}$, so $G_{\mathcal{E}^*} = 1$ (7, 10 III).

(d) $\exists\ F_{\min} \trianglelefteq\trianglelefteq G$; $F = F'$ einfach. (b, c)

$N := \langle F_i \mid F_i \trianglelefteq\trianglelefteq G,\ F_i \cong F\rangle$

$H := N_G(N \cap A)$ $N \cap A > 1$ (11)

Dann $A, B \in \mathcal{M}^{\Delta\Delta}H$ (3), ~~da~~ da nach $N \cap A = N \cap B$ (14)

Nach 3, 10 I ist $H = G$, $1 \neq N \cap A \in G_{\mathcal{E}}$ ↯

Nermal.

FRAGE

Nachzutragen:

(14) OAdSV: $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}\,G$, $F = F'_{\text{einf}} \trianglelefteq\trianglelefteq G \trianglerighteq S$, $F \not\leq S \Rightarrow A \cap F = (A \cap FS)S \cap F$

Bew: wie (12), oBdA S maximal, dann inv. bei $N_B(F)$.

FRAGE UMK UKegc

ist der

(2) gelten

$\{G_\lambda\}_1^l$ SNR,

$= B \cap G^\lambda$.

Sylowsatz oder

π-Hall-Gr. oder

π-Ugr. enthalten

Dann

$= (7.10\ \text{III})$.

(b, c)

(11)

$N \cap A = N \cap B$ nach (14)

$\in G_{\mathfrak{F}}$

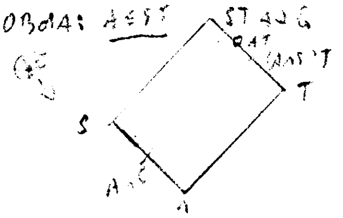
$\trianglelefteq\trianglelefteq G$ $\Rightarrow S$,

F

inv. bei $N_B(F)$.

$\mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}$

OBdA: $\underline{A \leq ST}$



$A \cap S \trianglelefteq A$

$(A \cap S)T \trianglelefteq AT$

$(A \cap S)T \cap S \trianglelefteq AT \cap S$

[illegible]: $A \cap S \trianglelefteq AT \cap S \in \mathfrak{F}$

$A \cap S = AT \cap S$, $(A \cap S)T = AT$

$(A \cap S)(A \cap T) = A \cap (A \cap S)T = A \cap AT = A$

Vorläufig 25.5.?? $\Rightarrow$ Genau wie (13) beweist man:

Hauptsatz (13') UAdSV: Vor. $A \in \mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}\mathfrak{F}G$, $B \in \overset{\pi(\mathfrak{F})}{\mathfrak{F}}G$, B läßt die Projekt. von A in jeden nicht-aufl. Faktor einer B-inv. SNReihe von G fest. Dann $B \leq A$.
$A \in \mathfrak{X}(G)$ und $\langle A, B \rangle$ $\mathfrak{F}$-sep.

$B \leq A$
$\langle A, B \rangle$

Korollar (13''): $\mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}\mathfrak{F}G \subseteq \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}G$ ("Submaximal")

Jede submaximale $\mathfrak{F}$-Untergr. von G ist groß in G:
$A \in \mathcal{M}\mathfrak{F}G$, $S \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow A \cap S \in \mathcal{R}_{\mathfrak{F}}S$.

Umkehrung?

Kor (13'''): $A \in \mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}\mathfrak{F}G$, $S \times T \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow A \cap (S \times T) = (A \cap S) \times (A \cap T)$ ⊕ Bew

od $A \in \mathcal{M}\mathfrak{F}G$

ERG26 $\overline{\text{XVI}}$ 81

Frage: Genügt in (13') die Vorauss., daß B zu jedem Faktor G^λ einer ~~[illegible]~~ beliebigen SNR von G, der nicht $\in \mathfrak{F}$ ist, eine Untergruppe H_λ von $G_{\lambda-1}$ mit $G_\lambda H_\lambda = G_\lambda(A \cap G_{\lambda-1})$ festläßt?

Verm. 13^{IV}: $A \in \mathcal{M}\mathfrak{F}G$, S, T sn G, $S \infty T$, $S \cap T$ $\mathfrak{F}$-separiert $\Big\}$ $\Rightarrow A \cap ST = (A \cap S)(A \cap T)$

FRAGE (15): Genügt statt Schreier "Die äußere Automorphismengruppe (der in G induzierte) jedes einfachen Faktors von G hat $c_{\mathfrak{F}} = 1$"?

244
38

FRAGE Umk. (13'') "Kegel": Folgt aus $S \leq G$ und $S \cap M \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}S$ für jedes $M \in \mathcal{M}\mathfrak{F}G$, $\forall \mathfrak{F}$, daß $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$ ist?

20.11.77 (16) Bei abelschen Kompositionsfaktoren, die äqu („projektiv") sind, kommt es vor, daß einer von einem $A \in \mathcal{M}^{11}\pi G$ gedeckt und der andere gemieden wird. 21.11.77 (19)

Bsp: $G = A \times S$, $A \cong S$ Ordnung 168.2

FRA:120

(17) $A, B \in \mathcal{M}^{11}\mathcal{E} G$, $P := G^{\mathfrak{F}}$, $A \cap P = B \cap P$ (13)

$\Rightarrow A \underset{\langle A,B}{=} B$

(18) Stets braucht man ~~wohl~~ nur die Kompositionsfaktoren zu berücksichtigen, in denen die Projektionen von A und B keine nilpotente Gr. erzeugen. ~~die keine nilpotente π-Hall Gruppe haben~~. Und statt Schreier wird es genügen, wenn jeder einfache Faktor von G nur „große" selbmaximale $\mathcal{E}$-Untergruppen hat. (= "subnormal-maximale") Darin steckt der Satz von Hall. Satz (2

FRA. 118') Wenn jede π-Untergr. nilpotent, gilt π-Syl Satz?

Faktoren,

und es

TG erdeckt

.

Anmerkung 168.2

$A \cap P = B \cap P$

13)

… die

berück-

…en von A und B

…

… Schreier

jeder

„größte"

…ppen hat.

…lankt der Satz

gilt … Satz}

21.11.77 (19) Ist P ein einköpf. perfekter Subnormalteiler von G und Q der größte P enthaltende SNT von G, so ist $\mathcal{N}_{\mathrm{aut}\,G}(P) = \mathcal{N}_{\mathrm{aut}\,G}(Q)$

Denn Q ist eindeutig mit P als der Deckgruppe.

FRA: (20) Genügt es für Konjugiertheit zweier minimaler Ugs, wenn ihre Projektionen in die "Ein-Hälfte" übereinstimmen?

Satz (21) Wenn G „ein-sockelig" ist, d.h. eine NR aufl.– halbeinfach – aufl. hat, und A, B ∈ MSG^{io} dieselben Projektionen in die nicht abelschen Faktoren einer Komp.-Reihe haben, so gilt dasselbe für jede Komp. Reihe, also ist für jedes $S \in \mathrm{sn}\,G$ $A \cap S \underset{\langle\rangle}{=} B \cap S$.

(22) Ist (H, B) eine Einbettung für $(G, A \in M^{A} \mathfrak{S} G)$ mit minimalem $|H|$, so folgt aus

$G \trianglelefteq H$ und $Z(G) = 1$ auch $C_H(G) = 1$.

und ausserdem $G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ hat keinen perfekten Sockel, falls G keinen solchen hat.

Satz (2

→ XVI

Aufgabe (23) π-Kompositionstürme abzählen, insb. bei subnormaler Erzeugung von G, vgl [62]

Satz

Satz (24) Eine $\mathcal{E}$-Untergr. A von $G_1 \times G_2$ habe $A \cap G_1 \in L_{\mathcal{E}} A$. Dann $A = (A \cap G_1) \times (A \cap G_2)$ die Projektionen sind überkreuz isomorph.

L

Folg: Sei A eine selbstgroße $\mathcal{E}$-Ugr. von G d.h.:

Satz (25) Sei $A \in \mathcal{E} G$, es gebe eine KR ~~[illegible]~~ von G, für welche alle $A \cap G^i \in L \cdot \mathcal{E} G^i$ sind. Dann gilt das gleiche für jede KR von G, und: Aus S, T sn G folgt $A \cap \langle S, T \rangle = \langle A \cap S, A \cap T \rangle$

FRAGE

Frage (und entsprechend für subnormale Ausschnitte?)

→ 248

$G, A \in M^{H}\mathfrak{E}G)$

aus

$\mathfrak{E}_H(G)=1.$

n solchen

zählen,

G, wie [62]

liebe

$(A\cap G_1)\times(A\cap G_2)$

homomorph-

gruppen G d.h.:

(R von G,

; G^1 sind.

KR von G,

$S,T) = (A\cap S, A\cap T)$

schnitte?)

Satz (26) $\rightarrow \overline{XVI}$ 85 $A \in \mathfrak{E}G$, F ein „perfekter Einkopf" von G, $A \cap F \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}F$ $\Rightarrow$ Man kann von der Projektion von A in den abstrakten Kompfaktor von G reden, der von E gedeckt wird.

Aber Vorsicht: $A \cap F$ braucht für $A \in M\mathfrak{E}G$ nicht $\in \mathfrak{L}\mathfrak{E}F$ zu sein; z.B. $A_5 \wr A_5 = G$, $p:=\{2,5\}$

Satz (27) Sei $T \leq A \in \mathfrak{E}G$ und T intravariant* in A und $T \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}G$. Dann $A \in \mathfrak{R}\mathfrak{E}G$

z.B.: T ein π-Normalisatorturm, wo $\pi = \{p \mid \exists\, E \in \mathfrak{E},\ p \mid |E|\} =: \pi(\mathfrak{E})$

Also.

(128) Jede $\mathfrak{E}$-Obergruppe A eines $\pi(\mathfrak{E})$-Normalisator-Kompositionsturms von G ist „L..." eindeutig groß und hat daher die Projektions-Eig.:

$\mathfrak{L}^{\urcorner}$

FRAGE (28') d.h. wohl $A \cap S_1 \cap S_2$ ist assoz., wenn S_i Subnormalfaktoren von G

* es genügt π-G-intravariant in A; d.h. die von π-Elementen von G induzierten Autom. von A wirken auf T wie innere Autom. von A

Bemerkg.: (29) Ist eine Klasse von endlichen Gruppen abgeschl. gegen Untergr. und semidirekte Produkte, so auch gegen Erweiterungen.

Bem.: $N \trianglelefteq G \Rightarrow G \lesssim N \wr G/N$ monomiale Darst.

Ist auch $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}$, so erfüllt $\mathfrak{E}$ die Voraussetzungen meiner Theorie (?), auch größter stets voraussetz. [illegible] "$\mathfrak{E}$ gut"

Satz (30) Zu jedem guten $\mathfrak{E}$ gibt es maximale $\mathfrak{E}$-Untergr. von G, die endlich groß sind; desgl. maximale auflösbare… (28).

(31) Subnormalquotienten

$$\mathfrak{Q}(G) = \{ S:T \mid T \trianglelefteq\trianglelefteq S \trianglelefteq\trianglelefteq G \}$$

sind wahrscheinlich neben den Faktoren

$$\mathfrak{F}(G) = \{ X/Y \mid Y \trianglelefteq X \leq G \}$$

die wichtigste Art von Quotienten in G.

Sie haben wohl eine genügend reiche "Struktur" für nützliche Homomorphiesätze. Deren Erweiterung auf $|G| = \infty$ gibt vielleicht Hinweise auf die "richtige" Verallgemeinerung der Subnormalität. → 240

en abgeschl.
irekte Produkte,
.
normale Darst.
die Voraus.
[illegible]
aximale
ich groß sind;
(28).
=
n
n Faktoren
}
n in G.
iche "Struktur"
Ugr. deren
leicht Hin-
meinerung
P
51

(und $G \setminus A$ „mit Schichten $X \setminus Y$ ausfüllen") 24

22.11.77 (32) Krit für sn

Sei $A \leq G$. Zu jedem $x \in G - A$ gebe es X, Y mit $A \leq Y \trianglelefteq X \leq G$ mit $x \in X \setminus Y$.

Dann ist A sn G.

Bew: Min. Gegenb. G: $A \leq M <\!\!\cdot\, G$ und

wähle $x \in \bigcap_{g \in G} (G \setminus M^g)$.

Achtung: die Vor. sagt nur: $x \in A^{\langle x \rangle} \Rightarrow x \in A$

Satz (33) A_5 als Kompf. („ganz "sub-"“?)

Jeder perfekte Kompfaktor von G sei $\cong A_5$. $\pi \cap \{2,3,5\} = \{2,3\}$ oder $\{2,5\}$ oder $\{2\}$

Sei ~~[illegible]~~ Seien A, B zwei (maximale) π-Untergr. von G und $A_2, B_2 \in$ 2-Syl A, B. Dann[1]

$$A \underset{G}{=} B \iff A_2 \underset{G}{=} B_2$$

oBdA $A_2 = B_2$, also $A \cap N_1 = B \cap N_1$ wenn $N_1 \trianglelefteq G$.

Bew: Zwei große π-Ugr von A_5 mit 1) gemeinsamer 2-Sylowgr. sind (oder " 5-Sylowgr. von G) konj. (nämlich entw. $\cong S_3$ oder $\cong A_4$).

Daher $N \trianglelefteq G \Rightarrow N \cap A = N \cap B$

F (34) Gilt ähnliches für alle nicht-auflösb. Komp-Faktoren? B. [illegible]

---

[1] Es gibt (z.B.) (bis auf Konjugiertheit) nur je eine max π-Untergr., die eine 2-Syl-U. enthält; sie enthält jeden $\{2, \pi'\}$ Turm wenn $\pi' = \pi - \{2\}$ in beliebiger Anordnung.

23.11.77 (33') Ist jeder nichtabelsche Kompfakt. von G $\cong A_5$ und ist $G_2 \in 2\text{-Syl}\, G$,

$G_2 \leq A, B \in \mathcal{M}\pi(G)$, $2 \in \pi \not\ni 3$ oder 5,

so $A \underset{N(G_2)}{=} B$. (33)

Bsp. (35) Es kommt vor daß zwei maximale 𝔈-Untergruppen $\overset{A,B \text{ von } G}{}$ nicht konjugiert sind und doch auf jeden "Einkopf" dieselbe Projektion haben. Man kann zusätzlich z.B. erreichen, daß alle Komp-fakt. von G $\cong A_6$ sind und alle Komp-fakt von A $\cong A_5$

Nur mit

Satz (36) Sei K eine Gruppe, die zwei nicht isomorphe max. 𝔈-Untergr. X, Y enthält. Sei H eine beliebige (endl.) Gruppe, $|H| = n$. Dann enthält das reguläre (Holano) Kranzprodukt $G := K \wr H = (\underbrace{K \times \cdots \times K}) H$ zu jedem $E \in 𝔈(H)$ ein $\tilde{E} \in \mathcal{M}𝔈G$.

Bsp. (3

$\mathcal{M}\pi G \cap$ T

l. von G

$\cong \pi \not\ni 3$ oder 5,

(33)

'male

sind

lbe

ägliche z.B.

$G \cong A_6$

$| \cong A_5$

l isomorphe [illegible]

.. Ei

$\cong$ n [illegible]

nläre

K) H

$\mathcal{U} \S G$.

derart, daß $\mathcal{M} \cap (K\times\cdots\times K) = (\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n_0} \times \underbrace{Y\times\cdots\times Y}_{n-n_0}) =: \mathcal{D}$

und $\mathcal{M}\,K$ [illegible] $=$ [illegible] E ist {also $M \neg GK = E$

d.h. man kann zu $H_0 \leq H$ stets ein G und $\varphi \in \mathrm{Epi}(G,H)$ derart angeben, daß jedes E [illegible] $\in$ [illegible] H_0 ein φ-Original in $\mathcal{M} \S G$ hat, und daß alle diese Originale den gleichen Durchschnitt mit dem Kern haben.

Bew.: $M := \mathcal{D} L$. Kurz: $\forall H \exists G, K$: $K \trianglelefteq G$, K auflösb G, $\mathcal{M} \S G \neg H := G/K = \mathcal{D} H$.

Bew. 35: $K := A_6$ enthält zwei nicht konj. Kopien X, Y von A_5. Für H wähle $K \times K$, für H_0 die „Diagonale", für $\begin{cases} M_1 \text{ das Bild von } X \text{ in } H_0, \\ M_2 \text{ " " } Y \text{ " } H_0. \end{cases}$

$\mathfrak{E} := \{C_2, C_3, A_5\}$

Dann $A := L_1$, $B := L_2$.

Bsp. (37) $\mathcal{M}\pi G \cap \mathfrak{N}$

Es kann $\mathcal{M}\pi G \in \mathfrak{N}$ sein und doch $c_\pi(G) > 1$.

$\left.\begin{array}{l} G \text{ einfach, } |G| = 168 \\ \text{oder } G = A_7 \end{array}\right\} \pi := \{2,7\}$. Hier ist

$\mathcal{M}\pi G = 2\text{-Syl}\, G \cup 7\text{-Syl}\, G$

38 Statt Schreier | Für die Untersuchung eines $A \in \pi G$ würde es genügen vorauszusetzen: läßt A einen einfachen Faktor von G fest, dessen Ordnung einen π-Teil hat, so läßt A eine π-Untergruppe $\neq 1$ fest. (Kurz: A wirkt in G auf Schreiersche Art.)

Lit: 39 | Sind nicht die maximalen auflösbaren Untergruppen von GL_n schon von Jordan bestimmt worden?

Aufg. 40 | Alles innerhalb der Menge der Faktoren von G machen, statt für abstraktes $\mathfrak{G}$ · Schwierigkeiten werden bei $\mathcal{M}^{aa}$ entstehen

Bsp 41 | Sei $|G| = 168$ einfach; $A \in 2\text{-Syl}\, G \Rightarrow \exists_H\ A \underset{3}{\le} H \underset{7}{<} G$

Dann $A \in \mathcal{M}^{aa}_{\{2,3\}} G$, aber $A \notin \mathcal{M}^{aa}_{\{2,3\}} H$.

(Wenn $H \text{ aa } G$ gilt, kann so etwas nicht passieren)

(Allg.: $G \in \mathfrak{E} \Rightarrow \mathcal{M}^{aa}_{\mathfrak{S}} G = \{G\}$.)

∈ π G würde es
ist A einen
fest, dessen
... ist A
(Kurz:
...sche Art.)

...auflösbaren
von Jordan

Faktoren von
𝔈 · Schwierig-

$\subset G \Rightarrow_{\exists} A \triangleleft H < G$
$\exists_H \quad 3 \quad 7$
$\notin \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\{2,3\}H$.
...ngs nicht passieren)
?.)

Bsp 41' Für $|A| = 2$, $A \le \overset{\le G}{A_4} \le \overset{H}{A_5}$ gilt es $M \in \mathcal{M}\{2,3\}H$ mit $A = H \cap M$.
Es hat also keinen Zweck, die Bedingg. $G \triangleleft\triangleleft H$ in $\overset{230}{(1)}$ wegzulassen.

Frage 42 Für die $A \in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}G$ seien die Projektionen in jeden Kompfaktor von G invariant. Ist dann A invariant in G?

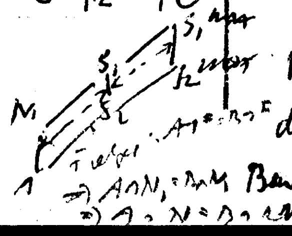
Def 43 $N \textcircled{$\blacktriangle$} G$ "super- ~~stark~~ charakteristisch"
$\Leftrightarrow$ $N \trianglelefteq G$, und $G \triangleleft\triangleleft H \Rightarrow \overset{H}{N} \cap G = N$

44 a) $N \textcircled{$\blacktriangle$} G \Rightarrow N \blacktriangleleft G$ (charakt.)
b) $A \textcircled{$\blacktriangle$} B \textcircled{$\blacktriangle$} C \Rightarrow A \textcircled{$\blacktriangle$} C$

45 $\overset{231}{\underset{6}{=}}$: $\varphi \in \operatorname{Hom} G, \mathfrak{E} \ni \ker\varphi \textcircled{$\blacktriangle$} G \Rightarrow (\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}G)^{\varphi} \subseteq \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}G^{\varphi}$

Ergänz. ?!
4.1.80 ?! ↓
Dann müsste Konj. Satz für $\mathcal{M}\mathfrak{E}G$ gelten, $\forall\,\mathfrak{E}$?!

Satz 46 $\mathfrak{E}$ beliebige Menge einfacher Gruppen, $A \in \mathcal{M}\mathfrak{E}G$, $N_1 = N_1'$ einfach sn G, $F = S_1/S_2$ beliebiger von N_1 gedeckter SNFaktor von G. Dann $A \cap N_1 = (A \cap F) \cap N_1$
Bew: $A \cap N_1$, $A \cap F$, $A \cap S_1^{max}/S_2^{max}$ sind $\mathfrak{E}$-Gruppen. $A \cap N_1$ bildet ... maximale von A normalisierte $\mathfrak{E}$-Untergr von N_1.



26.11.77

Satz: 46

überholt → 48

Sei $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathfrak{E}G$, $\mathfrak{E}' \cap \mathfrak{E} = 1$, $N := G_{\mathfrak{E}'}$, $\bar{G} := G/N$. Dann $\bar{A} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}_{\mathfrak{E}}\bar{G}$.

Bew: nach Def 230 (1) $\exists\, H, B$:

$$G \lhd\lhd H, \quad B \in \mathcal{M}\mathfrak{E}H, \quad G \cap B = A.$$

Bilde $M := H_{\mathfrak{E}'}$. Dann $N = G \cap M$, also

$G/N \cong GM/M$. Da $BM/M \in \mathcal{M}\mathfrak{E}H/M$, genügt es zu zeigen: ⊛ $K := GM \cap BM = AM$.

~~*s.u. Wegen $K/M \in \mathfrak{E}$, $M \in \mathfrak{E}'$ ist M ein Hallscher Normalteiler von K.~~

~~Wegen $M \le K \le GM$ deckt ~~K~~ G ganz K/M~~

~~" $M \le K \le BM$ " B ganz "~~

~~Also enthält ~~[illegible]~~ $G_1 := G \cap K$ ein Komplement C zu M in K, und dieser enthält B ein Kplt $D \overset{= B \cap GM}{}$ zu M in K.~~

~~Nach Schur-Zass. ist $C \underset{\langle C, D\rangle}{=} D$, also $D \le C^{\cdot\cdot K}$~~

~~Nun ist aber $C \le G_1 = G \cap K \lhd\lhd H \cap K = K$, also $C^{\cdot\cdot K} \le G_1$, $D \le G_1 \le G$ und daher~~

$D \le G \cap B = A$, also $K = MD = MA$: ⊛.

*Das folgt viel leichter mit 248 53 (oder ganz kurz.

nv!!

Beweis ganz kurz:

$B \cap GM \in \mathfrak{E}$

$\Rightarrow \le G$, da $]G$ su $G\mathfrak{n}$, $\{|GM : G|_\pi = 1$

$\Rightarrow \le A$

$\Rightarrow = A$

$BM \cap GM = (B \cap GM)M = AM$

2.6.77

$N := G_{\mathfrak{E}'}$,
$^{\lhd\lhd}_{\mathfrak{E}}\bar{G}$.

$\cap Z = A$.
$\cap M$, also
$/M \in \mathcal{M}_{\mathfrak{E}}H/M$,
$M = AM$.
M ein

nz K/M
ung
$\cap K$ in
und
$\Pi \cap GM$
zu M in K.
also

! $H \cap K = K$,
und daher
$= MA$ ⊛.
les ganz kurz-

27.11.77 His. 47
(Distributivitäts-Satz)

$S \lhd\lhd H$. $B \in \pi H$, $M \trianglelefteq H$, $B \cap M \in \pi\text{-Hall}\,M$,

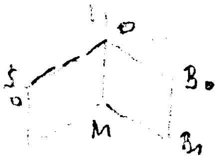
$\Rightarrow$ a) $B \cap SM = (B \cap S)(B \cap M)$ abschwächbar?

b) $BM \cap SM = (B \cap S)M$

$\rightarrow 248_{53}$ 249_4 $\overline{XVI}_{84}$ (4)

Bew. a) $M \leq H_0 := SM \cap BM = S_0M = B_0M$
[illegible]: 248 $_{53}$

mit $S_0 := S \cap H_0$, $B_0 := B \cap H_0$.



Es ist ⊛ $B_0 \in \pi\text{-Hall}\,H_0$, da für $B_1 := B_0 \cap M$:

$|B_0| = |B_0 : B_1||B_1| = |H_0 : M| \cdot |B_1|$

$= |H_0 : M|_\pi \cdot |M|_\pi = |H_0|_\pi$.

Ferner ist $S_0 \lhd\lhd H_0$, also $B_0 \cap S_0 \in \pi\text{-Hall}\,S_0$.

Wegen ⊛ & $H_0 = S_0M$ ist $B_0 = (B_0 \cap S_0)(B_0 \cap M)$.

Es ist $B_0 \cap S_0 = B \cap H_0 \cap S = B \cap S$,
$B_0 \cap M = B \cap H_0 \cap M = B \cap M$ } wegen $B \cap S \leq H_0$, $B \cap M \leq M \leq$!

Also $B \cap SM = B \cap BM \cap SM = B \cap H_0 = (B \cap S)(B \cap M)$.

b) $BM \cap SM = (B \cap S)(B \cap M)M = (B \cap S)M$.

Redukt. 48
auf Faktorgr.

d.h. Schnitte über π'

$(A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}_{\mathfrak{E}}G$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,G$, $\ker\varphi = N$ $\trianglelefteq G$ $\mathfrak{E}$-separiert$) \Rightarrow \varphi(A) \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}_{\mathfrak{E}}\varphi(G)$

Bew: H, B wie in 230_1; $M := N^H$. $M \cap G \overset{?}{=} N$.

$\pi := \pi(B)$ N und damit wegen $N \lhd\lhd H$ auch M ist $\mathfrak{E}$-π'-separiert, und $M \cap B \in \pi\text{-Hall}\,M$ (als HS formuliert)

Nach 47 ist $GM \cap BM = AM$, also [illegible]

Also $AM/M \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}_{\mathfrak{E}}GM/M$, und dies $\cong \bar{G} = G/N$

49 | G $\mathfrak{E}$-separiert ⇒ $m^{\Delta\Delta}G = 1$. 28.11.77

50 | $A \in \mathcal{U}^{\mathfrak{E}}_{\wedge}G$, $S := X S_i \; \Delta\Delta \; G \Rightarrow A \cap S = X(A \cap S_i)$

Projektionen, Unterverbände vom

51 | Sei $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $H \leq G$. Dann bilden diejenigen $A \in \mathrm{sn}\, G$, für welche $A \cap H \in \mathfrak{L}^*_\pi A$ ist, einen Verband ($\mathcal{K}^* :=$ endlich groß: $H \cap A^\vee \in \mathfrak{L}_\pi A^\vee$ für jeden Kompositionsfaktor $A^\vee$ von A).

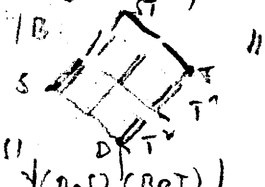
51' | $\left.\begin{matrix} S,T \;\Delta\Delta\; G \geq B, & B \cap (S : S \cap D) \\ S \cap T =: D & \ldots (T : \quad) \end{matrix}\right\} \in \mathfrak{L}^*_\pi \Rightarrow \underset{n}{B} \cap \langle S,T \rangle : D \in \mathcal{K}^*_\pi$

FRAGE 51'' | Wie sehen die größten „Subnormal-quotienten" von G aus, für die $H \cap Q^\vee \in \mathfrak{L}\pi Q^\vee$ ist? Sind es Faktoren? → 238_{24}, 240_{31}

52 | a) $B \in \mathfrak{E}G$, $T \;\Delta\Delta\; G$, B endlich groß auf $T \Rightarrow B$ ablg in $\langle T,B \rangle$
b) $B \in \mathfrak{E}G$, $S,T \;\Delta\Delta\; G$, $ST = TS$, ↓ ″ $\Rightarrow B \cap ST = \langle B \cap S, B \cap T \rangle$ 5

Dick. Dazu 207_{43}

Satz 53 | $S,T \;\Delta\Delta\; G$, $B \in \pi G$, $ST = TS$, $B \cap (T : (S \cap T)) \in \mathfrak{L}^*_\pi T:(S \cap T)$
$\Rightarrow B \cap ST = (B \cap S)(B \cap T)$



Bew. $|B \cap ST| = |B \cap ST : S| \, |B \cap S|$
$= \pi |B \cap T^i| \, |B \cap S| = \frac{|B \cap T| \, |B \cap S|}{|B \cap D|} = |(B \cap S)(B \cap T)|$

← Bemerkung Funktoren

lität[s]formeln

$= X(\ldots\cap S_i)$

len diejenigen

$^{0*}_{\pi}A$ 51, einen

$H\cap A^{\vee}\in \mathfrak{L}A^{\vee}$

von A).

$;,T\rangle : D\in \mathfrak{L}^{*}_{\pi}$

normal-

$H\cap Q^{\vee}\in\mathfrak{L}\pi Q^{\vee}$

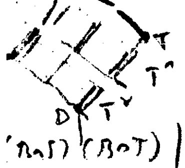
, 240_{31}

$T \Rightarrow B$ subn. in $\langle T,B\rangle$

$\cap ST=\langle B\cap S, B\cap T\rangle$ 51

$(T:(S\cap T))\in\mathfrak{L}^{*}_{\pi}\, T:(S\cap T)$

$\parallel \mathfrak{L}^{*}_{\pi}$



$(B\cap S)(B\cap T)$

Vermutungen über $\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}G := \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}G$

28.11.77

1 Wichtig sind die p-Füße und p-Köpfe von G: = minimale perfekte Normalteiler (SubNT). Zu geg. $A\in\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}G$ bilde man die Klassen A-äquivalenter p-Köpfe ($A\cap H_1$ isotop zu $A\cap H_2$), und den gemeinsamen Normalisator G^{*} aller A-Äquivalenzklassen. Haben zwei subnormale p-Köpfe eines p-Kopfs dieselbe Projektion in den Kopf, so sind sie isotop. Setze $p\text{-soc}\, G := \prod p\text{-Füße}$.

Dann folgt aus $p\text{-soc}\, G \leq H \leq G$: $p\text{-soc}\, G = p\text{-soc}\, H$.

$G^{*} \trianglerighteq C_G(p\text{-soc}\, G/(p\text{-soc}\, G)_{\gamma}) \in \gamma$.

2 $N \trianglelefteq G$, $\bar{G}$ = {durch G induz. Autom. von N}

$\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}_G N := (N\cap A \mid A\in\mathcal{M}G)$, $\Rightarrow \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}_G N = \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}_{\bar{G}}\bar{N}$

3 $A\in\mathcal{M}\mathfrak{E}G$; $S,T \triangleleft\triangleleft G$; $ST=TS$; $S\cap T$ $\mathfrak{E}$-separiert

$\Longrightarrow A\cap ST = (A\cap S)(A\cap T)$

4 In Dist-Satz 247_{47}, 248_{53} od. ähnl. genügt $B\cap M$ selbst. größte $\mathfrak{E}$-Ugr. von M statt $B\cap M\in\pi$-Hall M (falls $M\in\mathfrak{E}$).

Bemerkung: 53+51 deuten darauf hin, daß es Zweck hat, „lineare" Funktoren zu betrachten: $A,B \triangleleft\triangleleft G$, $AB=BA \Rightarrow (AB)^{\varphi} = A^{\varphi}B^{\varphi}$.

250 $\mathfrak{M}^{\triangleleft\triangleleft} = \mathfrak{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}$.

TRUGSCHLUSS 29.11.77

Gegenbeispiel 3 zu 250_1

f. sei $N := G_{\mathfrak{E}}$. Dann

$$A \in \mathfrak{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}G \Leftrightarrow N \le A,\ A/N \in \mathfrak{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathfrak{E}\, G/N.$$

$\Rightarrow$: (246_{48}) schon $231_{6'}$

$\Leftarrow$ falsch!! 251 Sei $G/N = \hat{G}$, $\varphi : G \to \hat{G}$

$\exists\ \bar{H}, \bar{B} : \hat{G} \triangleleft\triangleleft \bar{H},\ \bar{B} \in \mathfrak{M}\mathfrak{E}\hat{G},\ \bar{A} = \hat{G} \cap \bar{B}$

und oBdA $\bar{H}_{\mathfrak{E}} = 1$ (sonst $\bar{H} \to \bar{H}/\bar{H}_{\mathfrak{E}}$).

Stelle : ~~Wähle~~ $\bar{H}$ durch seine reguläre PGr dar.

Dann $\hat{G} \le \bar{H}$ als i-fach wiederholte reguläre Darstellung von $\hat{G}$, $i := |\bar{H} : \hat{G}|$.

Bilde $K := N \wr \bar{H}$

$C := N \wr \bar{B}$

Eine Kopie von G liegt in K (vermöge der mon. Darst. von G nach N), dabei ist und der natürliche Hom. $\psi : K \to \bar{H} \cong K/K_{\mathfrak{E}}$ stimmt auf G mit dem alten φ überein.

Es ist $K_{\mathfrak{E}} = N \wr 1$ (wegen $\bar{H}_{\mathfrak{E}} = 1$), $C \in \mathfrak{M}\mathfrak{E}K$ wegen $\psi(C) = \bar{B} \in \mathfrak{M}\mathfrak{E}\,\psi(K)$, $C \cap G = \{g \in G \mid \overset{\varphi}{\psi}(g) \in \bar{B}\} = A$.

Einfacher

Aber $G \ntriangleleft$ sn K!

2 Vielleicht geht's aber bei zentralem N ?

Behauptung

$A/N \in \mathcal{M}^{11}_{\mathfrak{F}}\, G/N$.

;→

$\mathfrak{F}\bar{G}$, $\bar{A} = \bar{G} \cap \bar{B}$

$(\bar{H} \to \bar{H}/\bar{H}_{\mathfrak{F}})$.

nläre PGr dar.

[illegible]

$i := |\bar{H} : \bar{G}|$.

< vermöge

$N)$, dabei ist

$(\to \bar{H} \cong K/K_{\mathfrak{F}}$

spielweise.

K wegen $\varphi(C) =$

$: G \mid \bar{\varphi}(g) \in \bar{B} \} = A$

lem N ?

Gegenbsp. 3 zu 250,

Aus $A \in \mathfrak{F}G$, $A/G_{\mathfrak{F}} \in \mathcal{M}^{11}\, G/G_{\mathfrak{F}}$ folgt nicht $A \in \mathcal{M}^{11}\mathfrak{F}G$.

→ 252

Bsp: $G := S_5 \wr P$, wo $P \le S_7$, $|P| = 168$.

G ist vollständig wegen $N_{S_7} P = P$ (Bew: $|S_7 : P| = 3$

$\pi := \{2,3,5\}$ gilt $G_\pi = (S_5)^7$. ∃ nichtmax. Ugr d. O. 8 in P.

Wähle A: $S_5^7 \underset{8}{<} A \underset{21}{<} G$

Wäre $G \lhd\lhd H$, $B \in \mathcal{M}\pi H$, $A = G \cap B$,

so wäre die Projektion von B in $G \cdot H_{\mathfrak{F}} / H_{\mathfrak{F}}$ eine maximale unter $N_B(G H_{\mathfrak{F}}) = N_B(G)$ invariante $\{2,3,5\}$- Untergruppe, deren Ordnung durch 8 teilbar ist. Da aber G vollständig, erleidet G unter seinem $\{2,3,5\}$-Normalisator nur innere Automorphismen und diese lassen welche eine Ugr der Ord 8, sogar eine der Ordnung 24 fest. Also $|B \cap GH_{\mathfrak{F}}/H_{\mathfrak{F}}| = 24$

$|B \cap (G / S_5^7)| = 24$, $B \cap G \neq A$.

Einfacher: Statt S_5 kann man auch S_3 nehmen, $\pi = \{2,3\}$

Bemerkung: Behebung des Gegenbeispiels durch Vergrößerung von G^{11}. 252

$\mathcal{M}^{\wedge}\mathfrak{E}$ = Pro-submaximale Untergruppen

1.12.77

~~Def. 0: $A \in \mathcal{M}'\mathfrak{E}G :\Leftrightarrow \exists\, Y \trianglelefteq X \trianglelefteq\trianglelefteq H \geq C$:~~

~~und $\exists\, B$: $Y \leq B \leq X$ und $\exists\, \sigma \in \mathrm{Iso}(G, X/Y)$:~~

~~$\sigma(A) = B/Y$, $B = X \cap C$, $C \in \mathcal{M}\mathfrak{E}H$.~~

~~(da $Y \in \mathfrak{E} \cap \mathrm{sn}\, H$).~~

~~Es handelt sich also um die Projektionen maximaler $\mathfrak{E}$-Untergruppen in Subnormalfaktoren mit Nenner $\in \mathfrak{E}$.~~ Da (4) wohl nicht gilt, ist das weniger empfehlenswert

Homom.

Sei $(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')$ die Klasse der $\mathfrak{E}$-separierten Gruppen [illegible]

Kurz $\mathcal{M}^{\wedge}$

Def. 1 $A \in \mathcal{M}^{\wedge}\mathfrak{E}G :\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')} \in \pi\text{-Hall}\, G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')} \\ A/G_{\mathfrak{E}} \in \mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}\, G/G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')} \end{cases}$

Das sind die A, die eine π-Hallgruppe von $G_{\mathfrak{E}}$ enthalten und bei Proj auf $G/G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$ submaximal werden.

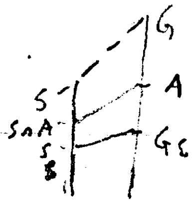
uAdsV:

Sätze: 2 $A \in \mathcal{M}^{\wedge}\mathfrak{E}G$, $G_{\mathfrak{E}} \leq S \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow A \cap S \in \mathcal{M}^{\wedge}\mathfrak{E}S$

Bew: $A\cap S/G_{\mathfrak{E}} \in \mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}\, S/G_{\mathfrak{E}}$

da $= A/G_{\mathfrak{E}} \cap S/G_{\mathfrak{E}}$

Durchschnitte 3 $A \in \mathcal{M}^{\wedge}G$, $S \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow S \cap A \in \mathcal{M}^{\wedge}S$



Bew $S/S_{\mathfrak{E}} \cong SG_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}}$, dabei

$S\cap A/S_{\mathfrak{E}} \cong (S\cap A)G_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}}$

$= SG_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}} \cap A/G_{\mathfrak{E}} \in \mathcal{M}^{\trianglelefteq\trianglelefteq}\, SG_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}}$

Untergruppen

$X \triangleleft\triangleleft H \geq C$:

$\in \mathrm{Inv}(G, X/Y)$:

$C \in \mathcal{M}\mathfrak{E} H$.

~~n die~~

~~der $\mathfrak{E}$~~

nalfaktoren
wohl mitteilt, ist das
ger empfehlenswert
– Gruppen
$\in \pi$-Hall $G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$

$\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\, G/G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$
ppen von
ken und

ral werden.

$A \cap S \in \mathcal{M}^{\wedge}\mathfrak{E} S$

$\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} S/G_{\mathfrak{E}}$

$A/G_{\mathfrak{E}} \cap S/G_{\mathfrak{E}}$

$^{\wedge} S$

$G_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}}$, dabei

$\cong (S \cap A)G_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}}$

$\in \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft} S G_{\mathfrak{E}}/G_{\mathfrak{E}}$

Der Vorteil von $\mathcal{M}^{\wedge}$ gegenüber $\left\{\begin{matrix}\mathcal{M}' \\ \mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\end{matrix}\right.$ besteht in 4+4:

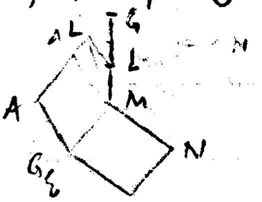
4 Sei $\mathfrak{E} \ni N \triangleleft G$. Dann $A \in \mathcal{M}^{\wedge} G \Leftrightarrow N \leq A$, $A/N \in \mathcal{M}^{\wedge} G/N$
[Lohnt das die kompliziertere Definition? 2.6.79]
Abwarten, ob es mitteilt für $\mathcal{M}_{\pi} G$!

Bew $\bar{G}\left\{\begin{matrix} G \\ A \\ G_{\mathfrak{E}} \\ N \end{matrix}\right\} \bar{G}_{\mathfrak{E}}$ $(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')$ $\bar{G} := G/N$ $\bar{G}_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$ $\overline{G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}}$

Kor.:

Homom.: 4' $A \in \mathcal{M}^{\wedge} G$, $\varphi: G \twoheadrightarrow \bar{G}$, $\ker\varphi \in (\mathfrak{E},\mathfrak{E}') \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{M}^{\wedge} \bar{G}$

~~5 $A \in \mathcal{M}^{\wedge} G$, $\varphi: G \twoheadrightarrow \bar{G}$, $\ker\varphi \in \mathfrak{E}'$ ($\mathfrak{E}$-fremd)~~
~~$\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{M}^{\wedge} \bar{G}$~~



~~6 $\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{M}^{\wedge} G, \ \chi: G \twoheadrightarrow \bar{G} \\ \ker\chi \ \mathfrak{E}\text{-separiert}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{M}^{\wedge} \bar{G}$~~

~~Bew 4', 5 oder wohl besser direkt, wie 5.~~

254

Noch $\mathcal{M}^\wedge$

Konjug. 7 | $A \in \mathcal{M}^\wedge\mathfrak{E}G$, $B \in \mathfrak{E}G$ lasse die Projektionen von A auf die $(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')$- nichtabelsch. Faktoren einer B-invarianten Subnormalreihe von G fest. Dann $B \underset{\langle A,B\rangle}{\le} A$.

[7' | $\mathcal{M}^\wedge(G_1 \times G_2) = \mathcal{M}^\wedge(G_1) \times \mathcal{M}^\wedge(G_2)$ 3.6.79]

Bew: $G \to \bar{G} := G/G_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$ $\bar{B}$ läßt die Proj von A in die nichtabelsch Faktoren der $\bar{B}$-inv. SNR $\{\bar{G}_i\}$ fest. $\bar{A} \in \mathcal{M}^{\wedge 0}\bar{G}$. 235(13'): $\bar{B} \underset{\langle\bar{A},\bar{B}\rangle}{\le} \bar{A}$

Also $BG_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')} \underset{\langle A,B,G_{\mathfrak{E}\mathfrak{E}'}\rangle}{\le} AG_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$

Daher $B \underset{\langle A,B\rangle}{\le} AG_{(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')}$

$\mathcal{M}^\wedge \subseteq \mathfrak{L}$ 8 | $A \in \mathcal{M}^\wedge\mathfrak{E}G \Rightarrow A \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}G$

Bew: $A \trianglelefteq B \in \mathfrak{E}G \Rightarrow$ B läßt Proj A in Hauptf fest

$\Rightarrow B \underset{\langle A,B\rangle}{\le} A \Rightarrow |B| \le |A|$, $B = A$.

9 | Def. 1 legt nahe, statt der max $\mathfrak{E}$-Untergr die max $(\mathfrak{E},\mathfrak{E}')$-Untergr zu betrachten. Jede letztere enthält bis auf Konj. nur eine max. $\mathfrak{E}$-Untergruppe

aber die Umkehrung gilt nicht; z. B. ist in A_5 jede max. 3-Untergr. in 2 nicht konjugierten max. $(3,3')$-Untergruppen enthalten (sie haben die Ordnungen 6, 12). Es ist also $m_\pi(G) \le m_{\pi\pi'}(G)$, und mitunter $<$.

10 Setzt man $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') =: \mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{F}' = 0$; hierfür sollten besonders einfache Regeln gelten. $\mathfrak{F}' = 0$ heißt: $\forall Z_p \in \mathfrak{F} : \sigma \le \mathfrak{F}$;

11 dann $A \in \mathcal{L}\mathfrak{F}G \Rightarrow N_G(A) = A$

12 Ansatz zur Entkoppelung bei der Bestimmung von $\mathcal{M}\mathfrak{E}G$ mit perfektem Sockel: Monomiale Darstellung von G mit Koeff aus $\mathrm{Aut}_G E_1$, $E_1 = E_1' \trianglelefteq G$.

erheblich große $\mathfrak{E}$-Ugr von G

13 $\mathcal{L}^\neg \mathfrak{E} G$ kann vielleicht besser von oben bestimmt werden, erst in G/N, dann in N, $N \trianglelefteq_{\min} G$.

14 Zwecks 13 Projektion in Quotienten betrachten. Vermutg

Es gilt mindestens:

$$|A \neg X:Y| = |A \cap X : A \cap Y| \text{, also}$$

bei $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_\ell = 1$ und $G^\lambda := G_{\lambda-1} : G_\lambda$:

$$|A| = \prod_\lambda |A \neg G^\lambda|$$ Verm.

(Es gilt i.a. nicht $|A \neg G^\lambda| \mid |G^\lambda|$,
z.B. $G^\lambda = A_5 : A_4$, $|A| = 3$.)

insbesondere $A \in \pi G \Leftrightarrow$ alle $|A \neg G^\lambda| \in \pi$.

FRAGE 15 Kann man "große π-Projektionen" definieren?

HiS 16 Wirkt die π-Gruppe A automorph auf eine auflösbare Gruppe, so läßt sie eine π-Hallgruppe fest

FR. 17 a) Kann man sich bei $M \pi G$ auf irgendwie zerfallende Gruppen beschränken? b) Welche maximalen Ugr von max. π-Gruppen haben die Konjugiertheits-Eigenschaft v. 257,1 ? c) Welche Ugr'en überhaupt haben sie?

tienten betrachten.

Y| , also

m $G^\lambda := G_{\lambda}$:

$| \; |G^\lambda| \, ,)$

: $|A \cap G^\lambda| \in \pi$.

tionen" definieren?

morph auf

äßt die eine

[irgendwie

n? b) Welche

ppen haben die

n ? c) Welche

Vermutg. 1 | $A, B \in \mathcal{L}^{\neg}\mathfrak{S}G$, $A \cap G^\lambda = B \cap G^\lambda$ $\exists \{G_p\}$ SNR G.

$\Rightarrow A \underset{\langle A,B\rangle}{\overset{\sim}{=}} B$ Fragestellung: Verallgemeinerung auf $\mathcal{N}_G(A \cap N_{min})$, falls A nicht überall invariant ist?

Aufgabe $25\underset{7}{1}$: Gemeinsame Obergruppe mit $\mathcal{L}^{\wedge}\mathfrak{S}G$?

Verm. 1' | $A \in \mathcal{L}^{\neg}\mathfrak{S}G$, $B \in \mathfrak{S}G$, B läßt die Proj. von A in die nicht auf G^π fest $\Rightarrow B \underset{\langle A,B\rangle}{\le} A$.

2 | π-Intravarianz von A in G heißt wohl:

$N_{\mathrm{Aut}\,G}(A)$ deckt $\langle \pi(\mathrm{Out}\,G)\rangle$.

3 | Allgemeines zur Projektion sn G → sn : wo $\le G$:

Aus $\begin{cases} A, B \in \mathrm{sn}\,G \\ A \le \mathcal{N} B \end{cases}$ folgt $A \cap H \le \mathcal{N}\, B \cap H$

Folge: Aus $AB = BA$ folgt $(A \cap H)(B \cap H) = (B \cap H)(A \cap H)$

wenn für H die Proj.-Eigenschaft gilt.

Die Umkehrung wird fehlen z.B. für Sylowtürme

4 | Sei $\pi = \{2,3\}$ jeder nichtabelsche Kompos. Faktor von G sei $\cong A_5$. Dann sind wohl je zwei A_4-freie Untergruppen X, Y von G vereinbar, d.h. $\exists g \in G: \langle X^g, Y\rangle \in \pi G$.

1 Ist $A \in M\mathfrak{E}G$ $^{\text{oder } M^{**}}$ und $\{G_\lambda\}$ SNR G, $A_\lambda := A \cap G_\lambda$ und $N_\lambda := \mathcal{N}_{G_\lambda}(A_\lambda)$, so ist $N_\lambda / A_\lambda \in \mathfrak{E}'$ und $N_\lambda \trianglelefteq N_{\lambda-1}$, da $A_\lambda \trianglelefteq N_{\lambda-1}$

Kann man durch Zusammenbauen

$H := N_1 N_2 \cdots N_\ell$ die größte $\mathfrak{E}$-separierte Untergruppe von G erhalten, in der A eine** maximale $\mathfrak{E}$-Untergr. ist?

FRAGE b "Koppl

10.12.5

Projekt

Monomial 2 Monomiale Darstellungen einer p-Gruppe P mit Diagonalprodukt 1 haben vielleicht was mit $J(P)$ zu tun.

FRATTI

ÅÅÅ

lsnl 3 Vermutung: A lsnl $G \Leftrightarrow \forall a_1, \dots, a_k \in A$

$\forall g_1 \cdots g_\ell \in G \; \exists n \in \mathbb{N}: \{g_1 \cdots g_\ell\}(\circ\{a_1 \cdots a_k\})^n \subseteq A$

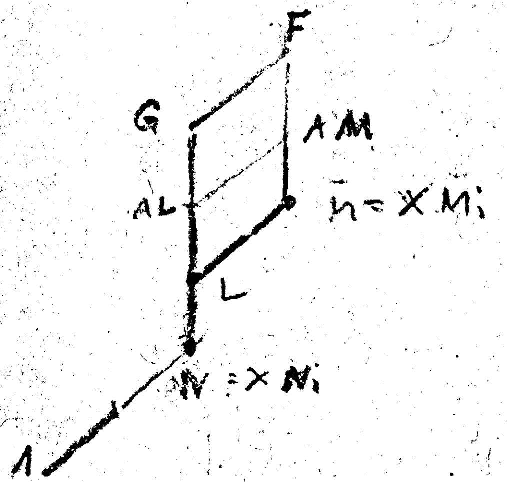
3' Sei H lsnl G. Gilt $N \trianglelefteq H \Rightarrow N$ lsnl G, $G \trianglelefteq K \Rightarrow H$ lsnl K?

Gegenbsp. $M\pi G$: 4 Falsch ist: Aus $A, B \in M\pi G$, $A \underset{G}{\sim} B$ folgt $A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$.

$|G| = 2 \cdot 168$, $G \cong \mathfrak{G}_{168}$, $\pi = \{2,3\}$, $|A| = |B| = 24$.

259

$A \in M \le G$ $A \le B \in M \le H$ $H = GM$



$M_i = A \wedge_G N_i$

$M \cap N \in \mathfrak{X}$

B auf M/N, [illegible] H/N fest von M/N

$M/N = H/N \cdot H'/N$ $H'_N \in$ [illegible] M/N

$AM \cap G = A(M \cap G) = AL$

Nach $\hat{J}$

G und $\{G_\lambda\}$ SNR G, $A_\lambda := A_n$

$N_{G_\lambda}(A_\lambda)$, mit $N_\lambda | A_\lambda \in \mathfrak{X}'$

$N_{\lambda-1}$, da $A_\lambda \trianglelefteq N_{\lambda-1}$

sich zusammenbauen

$\to N_e$ die größte $\mathfrak{X}$-separierte

von G erhalten, liefert A

$\mathfrak{X}$-Untergr. ist ?

stellungen einer p-Gruppe P

Produkt 1 haben vielleicht

) zu dann.

A lsn G $\Leftrightarrow \forall a_1, \dots, a_k \in A$

$: G \ \exists\, n \in \mathbb{N}: \langle g_1 \dots g_k \rangle (\circ \langle a_1 \dots a_k \rangle)^n \subseteq$

gilt $N \trianglelefteq H \Rightarrow N$ lsn G, $\trianglelefteq K \Rightarrow H$ lsn

$A, B \in M_\pi G$, $A =_G B$ folgt $A =$ $\langle A, B \rangle$

$G \cong S_{168}$, $\pi \supseteq \{2,3\}$, $|A| = |B| =$

soc G (= soc' G),

, $A \in M^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{E}} S$.

einem passend

. 260!

sicher, daß für

$X:Y|$ teilt

AB ;$A, B \in$

$= \Phi(A)\ \Phi($

$g_1, \dots, g_n \rangle$

mutator für A

Noch $\hat{\Pi}$

FRAGE $\mathfrak{M}^{AA}$ 1 "Kopplung" 10.12.77	Sei $G_\gamma = 1$, $P = \text{soc}\, G\,(= \text{soc}'\, G)$, $S/P = (G/P)_\sigma$. Ist dann jedes $A \in \mathfrak{M}^{AA}_{\xi} S$ der Schnitt $A \cap P = B \cap P$ mit einem passenden $B \in \mathfrak{M}^{AA}_{\xi} G$? siehe 260!
Projektion 2	Warum ist man sicher, daß für $A \le G$, $Y \trianglelefteq X \le G$ gilt: $\lvert A \cap X : Y \rvert$ teilt $\lvert X : Y \rvert$?
FRATTINI 3	Folgt aus $G = AB$, $A, B \trianglelefteq G$ stets $\Phi(G) = \Phi(A)\,\Phi(B)$?
⋘ 4	$A \text{ sn } \langle A, g_1, \dots, g_n \rangle$, $\forall g_\nu \in G$.
A LK? 5	Gilt Satz vom Permutator für $A, B \in {}_{L}\text{sn}\, G$?

1

4.

Satz (1)

FRAGE (1)
27.1.78

$\mathcal{M}_{\mathfrak{E}} G$: Maximalschnitte nach Schreier.

Sei $N \trianglelefteq G$, N halbeinfach, $N = \times N_i$. Die sämtlichen "Maximalschnitte" $A \cap N$, wo $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{E}}(G)$, erhält man so: Wähle $T \in \mathfrak{E}GN^?$, in jeder Bahn auf $\Omega = \{N_i\}$ von T wähle ein N_α, in N_α wähle eine maximale ~~Unte~~ unter den bzgl. $T_\alpha :=$ ~~[illegible]~~ $\mathcal{N}_T(N_\alpha)$ invarianten $\mathfrak{E}$-Gruppen etwa A_α. Dann ist das Erzeugnis der A_α^T ein Maximalschnitt, seine Komponenten in N sind die verschied. N_α^t, $t \in T$. (35)

Es ist nämlich $A_\alpha = N_\alpha \cap A$ für jedes A mit $T \leq A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{E}} G$. (36)

(37)

d Schreie(?) V.
infach, $N = \times N_i$
itte " $A \cap N$,
,
n zu.
oder Balen auf Ω: $= \{N_i\}$
. N_α wähle
den bei
varianten
nun ist das
Durchschnitt,
unklar, t
die N_α^t, $t \in T$.
(das A und

Spektrum und Winkelvorrat einer Matrix.

FRAGE 47
27.1.78

A_i habe Winkelvorrat $\mathfrak{W}_i$ $(i=1..n)$.
Ist dann Spektr $A \subseteq \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \cdots \mathfrak{W}_n$

Subnormalisator (Forts. v. 194)

(35) Die A-Untermoduln von A_0Z sind dieselben wie die P-Moduln und wie die A^G-Moduln

Bew: $A^G = A_0ZP$, A_0Z abelsch

(36) Die A-Länge von A_0Z ist 2. Bew: $[A_0Z, S]$ ist Z-Modul und nach (35) zugleich A-Modul, da $[A, S] \subseteq A_0Z$.

(37) G hat wohl im wesentlichen die Gestalt
$$\left\{ \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ z & s & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
, wo $x, y \in GF(q) = F$, $\rho \in F^\times$, und $\rho = p$.

Subnormalisator

(1) a) $G = AB$, A sn $\langle A, \overset{A^b}{b} \rangle\ \forall_b \Rightarrow A$ sn G Bew s.u. 15.2.78

FRAGE b) " $b(oa)^n \in A\ \forall_b \overset{?}{\Rightarrow}$ "

Genügt etwa schon ohne Transversale B von G:A?

FRAGE (1') Statt A sn $\langle A, b\rangle$ wird $B \subseteq S(A,G)$ (für welche Def.?) genügen.

" 1'' Folgt aus ~~S sn A~~, $G = AB$, S sn $\langle A, b \rangle\ \forall_b$ dass S sn G?

[illegible] 1^a: S sn $\langle A, A^b\rangle = \langle A, A^{g} \rangle$, S sn $\langle S, S^g \rangle$

FRAGE (2) Für welche Def. gilt $A \subseteq S(B,G)$, $B \subseteq S(A,G) \Rightarrow A$ sn B?

Frage 1.3.79 (3) Ist $x \in S_G(A) \Rightarrow \langle x \rangle \subseteq S_G(A)$ ein vernünftiges <u>Axiom</u> für Subnormalisatoren?

Beweis (1a) A sn $\langle A, A^b \rangle\ \forall_b \Rightarrow A$ sn $\langle A, A^{ab} \rangle \Rightarrow A$ sn $\langle A, A^g \rangle$

A sn G Bew. 15.2.78

"

versale B von G:A?

) (für welche Def.?)

n $\langle A,G\rangle \,\forall_G$ dann S sn G?

, S sn $\langle S,S^g\rangle$

), $B \subseteq S(A,G) \Rightarrow A$ sn B?

$_G(A)$ ein

ubnormalisatoren?

$A, A^{ab}\rangle \Rightarrow A$ sn $\langle A,A^g\rangle$

1 Eine monomiale Gruppe, in der alle Diagonalfaktoren 1 sind, kann monomial auf Permutationsform transformiert werden.

2 „Symmetrie" $P^* \cap_g P = P^g_\cap P^*$ ist äqu. „P^* stark abg. in P"

3 Sei $P \in p\text{-Syl}\,G$, $P_0 \le P$. Dann gibt es höchstens ein $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$, das zu P/P_0 komplementär ist im Sinn von $K \cap P = P_0$, $KP = G$. (Daher folgt dann aus $P_0 \trianglelefteq P$ stets $K \trianglelefteq G$.)

4 Aufgabe: Untersuche: geg. $P_0 \le P \in p\text{-Syl}\,G$. In jedem H mit $P \le H <\cdot\, G$ existiere ein $H_0 \trianglelefteq\trianglelefteq H$, das Kplt zu $P:P_0$ ist, aber nicht zu G selbst. Liegt P nur in einer maximalen Untergruppe?

Noch p-Faktorgruppen und Verwandtes

1. Kann man die Theorie von Thompson erweitern bei gegebenem $a \in P \in \mathcal{G}_p$, auf die Menge $A_a(P)$ der abelschen Untergruppen A, die unter der Bedingung $a \in A$ die maximale Ordnung haben?

2. In meiner Crelle-Arbeit kann man statt einer starkabgeschl. Untergr. vielleicht mit dem („starken" = „schwachen") Abschluss eines einzelnen p-Elements arbeiten.

sen und Verwandtes

rompsen

$P \in \mathfrak{G}_p$,

die 'sen

[illegible] der

ale Ordnung

man statt

deutlich mit

sch ps eines

(äqu. p-Untergr. A ist pronormal

1 $G \in \mathfrak{F}_p \Rightarrow \{ \dot{A}$ stark abgeschlossene p-Gruppe i-G $\Leftrightarrow A \in \mathrm{Syl}_p A^G \}$ · Bew. $|G|+|A|$ min

2 $G \in \mathfrak{F}_p \overset{?}{\Rightarrow}$ maximale p-Faktorgr von $G \cong$ der von $\mathcal{N}\bar{Z}$, $\bar{Z}$:= schwacher Abschluß eines p-Sylow-Zentrums?

3 $G \in \mathfrak{G}_{pq} \cap \mathfrak{F}$; $P \in p$-Syl G, $Q \in q$-Syl G
$\overset{?}{\Rightarrow} ZJ(P)$ oder ZJQ } und [illegible]
([illegible] $ZJ(P) \cdot O_q(G) \neq G$)

Δ, schwacher Abschluss, Matsuyama

1. 3. 78 1. Aufgabe: Lemma von Matsuyama (Osaka M.J. 10) [illegible] erweitern von p-Gruppen auf bel. FR.

s. 4

FRAGE 2. $G \geq A \in \mathcal{G}_p$, $A \text{ sn } \langle A, A^g \rangle \Rightarrow A \text{ sn} \langle A, A^{\bar{g}} \rangle$

Welche andern Ugr $A \leq G$ haben diese Symm.-Eig.? 20.3.78 Sn

("Jungfr. schärfer

Def 3. Sei $A \leq G$. Ein Normalprodukt zu A (in G) ist eine Gruppe $A_1 A_2 \cdots A_n$, wo $A_{\nu+1} \leq N(A_1 \cdots A_\nu)$ und jedes $A_\nu = A^{g_\nu}$, $\exists g_\nu \in G$.

Eine Verallg. des Lemmas von Matsuyama

4. Sei $Y, Z \leq G = N_G(X) \cdot N_G(Y)$. $\Rightarrow$ jedes maximale Y-invariante Normalprodukt X zu Z^Y ist ein (Y-invariantes) maximales Normalprodukt zu Z^Y. Für $X^Y \in \mathcal{G}_p$ ~ Matsuyama

Bew. Sonst $\exists g \in G$: $Z^{Yg} \leq N_G(X)$, $Z^{Yg} \not\leq X$.

Aber $\exists h \in Yg$: $Z^h \leq N_G(X)$, $Z^h \not\leq X$.

Dann $Z^{hY} \leq N_G(X)$, $\not\leq X$; aber es ist dann Y-invar.:

$Z^{hY} = Z^{mnY}$, $m \in N_G(Z)$, $n \in N_G(Y)$, also

$Z^{hY} = Z^{nY} = (Z^Y)^n$, daher $X \cdot Z^{hY}$ ein größeres Y-inv Normprod. zu Z^Y. $\lightning$

...lp, Matsuyama

...yama (Osaka

...ruppen auf lek.

$\Rightarrow A$ sn $\langle A, A^{g}\rangle$

...n diese Symm.-Eig.?

...dukt von A (in G)

... $A_{v+1} \leq N(A_1 \cdots A_v)$

...amat

...es maximale

X für Z^{Y} i.t

... Normal-

... ~ Matsuyama

...(X) $Z^{Yg} \nleq X$.

... $Z^{g} \nleq X$.

...er gibt dest.-invar.

$\in N_G(Y)$, aber

$X \cdot Z^{ht}$ ein größeres

FR. 5 Sind je zwei maximale Kosubnormalsysteme, die $\subseteq \{A^g \mid g \in G\}$ sind, konjugiert in G?

(6) z. Subnormalisator: Kommutator

20.3.78 **Satz** ("Jungfern-Thema") Schäfer (7)

$|G| < \infty$, $A \leq G$, $S \trianglelefteq G$ $S(\overset{\vee}{o}\overset{n}{a}) \in A \ \forall o \in S$

$\Longrightarrow A$ sn AS. Schäfer: 269 (7)

Bew: Gegenb. min $|G|, |S|$. $D := A \cap S$

a) D sn G nach Ind.-Annahme

b) $A \leq X < G \Rightarrow A$ sn X $(A, X \cap S)$

c) $\exists_1 M: A \leq M <\cdot G$; $g \notin M \Rightarrow A^{g} \nleq M$

d) $S \cdot\!\trianglelefteq G$ sonst $1 < T \trianglelefteq G$, $T \leq S$ (A, T)

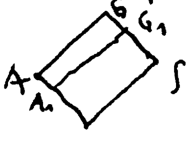
A sn AT; $(AT/T, S/T)$ AT sn G.

e) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN$ sn G.

f) $A_{..G} = 1$ $N(A_{..G}) \geq A, S$ $A_{..G} \trianglelefteq G$ $A \cdot A_{..G}$ sn G

g) $D = 1$ a) f)

h) A einfach, $S \cdot\!\trianglelefteq G$. Bew $\exists G_1$: $S \leq G_1 \cdot\!\trianglelefteq G$; $A_1 := A \cap G_1$



A_1 sn $A_1 S = G_1 \trianglelefteq G$

$A_1 \leq A_{..G} = 1$

$A = A/A_1 \cong G/G_1$ einf.

$G_1 = S$.

j) $S' = 1$ sonst $\forall p \in \mathbb{P}, \forall P \in p\text{-Syl}\,A : P \text{ sn } PS$, Satz 7

$S \trianglelefteq N_P$ $\quad S \trianglelefteq N\langle P \mid \forall p \rangle$ $\quad A \trianglelefteq G$ schärfer (ε)

i) $A' = A$, sonst $|A| = p$ (β)...

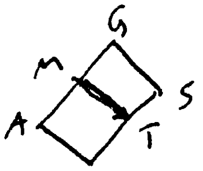
$A = \langle a \rangle$ ~~Ang~~ $s \in S \setminus M$ ~~[illegible]~~ folgt

$s \circ a \in S \setminus M$, sonst $a^s \in M$, c↯ ~~A~~ $= \langle a \rangle$

$\forall n : s(\circ a)^n \in S - M$ ↯

k) $\exists p \in \mathbb{P}$: ~~[illegible]~~ $|S| = p^\sigma$ (γ)

[l $A <\cdot G$ unmöglich



sonst $T \trianglelefteq M, S, G$ d): $T = \begin{cases} 1, & A = M \cap G \\ S, & M = G \end{cases}$.

m) Beweis $\exists q \in \mathbb{P} : q \mid |A|, q \neq p$ (δ)

$\exists Q \in q\text{-Syl}\,A$ $\quad$ Q sn

$S \le N(Q)$

$Q^G = Q^{SA} = Q^A \le A$

$Q^A \le A$, $G = 1$ ↯

FRAGE (δ)

1.270!

$P \in p$-Igel 4: P sn PS ,

$\forall \langle P | P_p \rangle$ $A \trianglelefteq G$

G)...

~~Dann~~ folgt

$z^S \in M$, c ↯ $A = \langle c \rangle$

γ)

d): $T = \begin{cases} 1, & A = M \cap G \\ S, & M = G \end{cases}$.

(δ)

= A

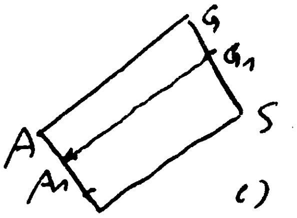
↯

Satz 7

$A \le G$, S sn G, $AS = SA$, $s(oa)^n \in A$ $\forall s, a$

$\Rightarrow$ A sn AS

Bew.: $|G|$ min



a) $S < G$

b) $\exists G_1 : S \le G_1 \triangleleft\cdot G$

c) $A_1 := A \cap G_1$ sn G

d) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN = G$

Bew.: $\overset{\text{sonst}}{AN} = AT < G$, $T := AN \cap S$,

$|G|$ min $\Rightarrow$ A sn $AT = AN$

$|G/N| < G$, AN sn G ↯

(Wähle $N \triangleleft\cdot G$. Dann

(e) $A_1 = 1$ Bew: $NA_1 \trianglerighteq N$ (c)

$\trianglerighteq A$, AN, G a)

$A_1 \trianglelefteq G$ $AA_1 = G$ d) ↯

(f) $S \trianglelefteq G$ Bew.: $S = G_1$.

(g) A sn G 267 (6)

FRAGE (8)
1.270ʼ

S_ϱ sn G, $s_\varrho(oa)^n \in A$ $\forall s_i \in S_i$, $\varrho = 1..r$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ A sn $\langle A, s_1, \ldots, s_r \rangle$.

Mir ist, als hätte ich schon mal ein Gegenbsp. gesehen

Genügt wohl: S_0 ein totales Erz.-System von S_A $\exists \Gamma_{A_0}, A = A$

Satz (8) | $A \leq G$, S sn G, $\exists\, S_0(\circ a_0)^\infty \subseteq A \Rightarrow A$ sn $\langle A, S \rangle$

21. 3. 78

Bew: Am Gegenbsp. min $|G| + |A|$, daher $\begin{cases} S \text{ einköpfig} \\ G = \langle A, S \rangle \\ S > 1 \end{cases}$

Beweis berichtigt 6.2.80

a) $\forall a \in A$: (A, S^a) haben dieselbe Eigenschaft

a') $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN$ sn G a'') $A_G = 1$.

b) $A_1 \trianglelefteq A \Rightarrow A_1$ sn $\langle A_1, S \rangle$

c) $A_1 \trianglelefteq A$, $a \in A \Rightarrow A_1$ sn $\langle A_1, S^{a} \rangle$

d) $A_1 \trianglelefteq A \Rightarrow A_1$ sn $A_1 T$ [147(6)],

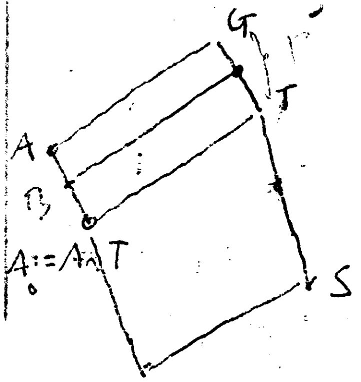
wo $S^A = S^{G''} =: T \trianglelefteq G$

e) $A_1 \trianglelefteq A \Rightarrow A_1$ sn G da $A_1 T \trianglelefteq AT = G$

f) A einköpfig   (e)

f') S einköpfig: $S_1 \trianglelefteq S \Rightarrow A$ sn $\langle A, S_1 \rangle$, A sn $\langle A, S \rangle$ / $A_0 \leq B < A$

g) $A / A \cap T \cong C_p^a$, $p \in \mathbb{P}$ Sonst A $\langle B/A_0$



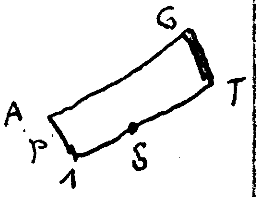
B sn $\langle B, S^a \rangle$ $\forall a$

B sn BT

$T(\circ B)^\infty \leq B \leq A$

$T(\circ B)^\infty \leq A$

A sn AT (6) ↯



System von $\underset{A}{S}$

$^\infty \subseteq A \Rightarrow A \text{ sn} \langle A,S\rangle$

$+ |A|^{|1|}$, daher $\{G = \langle A, S\rangle$, $S > 1$

dieselbe Eigenschaft

G   a'') $A_G = 1$.

$, S\rangle$

$\text{n} \langle A_1, S^{A_1}\rangle$

$_1 \overline{T}$ [147 (6)],

$S^A = S^{G''} =: T \trianglelefteq G$

$A_1 T \trianglelefteq AT = G$

(e)

$\langle A, S_2\rangle$, $A \text{ sn} \langle A, S\rangle$ / $A_0 < B < A$

sonst A $\langle B / A_0 |$

$\langle B, S^a\rangle$ ∀a

B T

$)^\infty \le B \le A$

$)^\infty \le A$

AT (6)

(h) δ charakt. Funktor, $S^\delta < S \Rightarrow S^\delta = 1$

Sonst $1 < T^\delta \trianglelefteq G$,

$A \text{ sn } \langle A, S^{a\delta}\rangle$

$A \text{ sn } \langle A, T^\delta\rangle$

(i) T ist keine p-Gruppe, sonst $G \in \mathcal{G}_p$

(j) (S und) T ist entweder $\in \mathcal{G}_q$ mit $p \neq q \in \mathbb{P}$, oder halbeinfach, $= \times E_i$, alle $E_i \cong E \in \mathcal{E}'$ 4.f

(k) $S_1 \underset{\neq}{\text{sn}} S \Rightarrow S_1 \le \mathcal{N}A$

$A \text{ sn} \langle A, S_1\rangle$, Annahme $G_p \notin \mathcal{K}(S_1$

Fall I: S, T, E perfekt

(l) $|A| = p$ sonst $1 < A_1 \underset{p}{\trianglelefteq} A$,

(11): $A_1 \text{ sn } A_1 T$, $T \text{ sn } A_1 T$, T halbeinf.

$A, T \le \mathcal{N}A_1$.

(l') $A \cap T = 1$ da $A \nleq T$; (l).

(m) S einfach (und perfekt). (j, k)

(m') $T = \underset{a \in A}{\times} S^a$ (p Faktoren) sonst $S = T \trianglelefteq G$, 26

(n) $\forall Q < S$: $A \text{ sn } \langle A, Q\rangle$ da $Q \trianglelefteq Q^A \trianglelefteq \langle A, Q\rangle$
$(Q(oa))^\infty \le A$.

(o) ↯ $A \trianglelefteq \langle A, S\rangle$, da $\forall Q \in q\text{-Syl}\,S$ $A \trianglelefteq \langle A, Q\rangle$

Also Fall I unmöglich bei unserem Gegenb.

Fall II: S, T sind q-Gruppen, $q \neq p$.

(p) $|A| = p$ sonst $A_1 \underset{p}{\trianglelefteq} A$

$A_1 \text{ sn } AT$, $A_1 = O_p(AT)$ (k)
$= O_p G$

$A_1 \trianglelefteq G$. Dann $A = AA_1 \text{ sn } G$

(q) $S_2 < S \Rightarrow A \trianglelefteq \langle A, S_2 \rangle$ da $S_2 \text{ sn } S_i$ (k)

(r) $1 < F := \Phi(T) \Rightarrow AF \text{ sn } G \Rightarrow AF \underset{q}{\trianglelefteq} G$

$\Rightarrow NA$ deckt $\Rightarrow A \trianglelefteq AT$ ↯

(r') T elementar abelsche q-Gruppe

(s) $C_T(A) = 1$ sonst $A \trianglelefteq A.C_T(A) \text{ sn } G$ (a')

(s') $C_G(A) = A$ da $= C_T(A)$

(t) Sei $S =: \langle s \rangle$. $\exists n: g := s(oa)^n \notin A$, $s(oa)^{n+1} = g \circ a \in A$

$g \circ a \in A \cap T = 1$ $g \in C(A) = A$ ↯

II ↯

p:

$\underset{p}{\trianglelefteq} A$

$, A_1 = O_p(AT)$ (k)
$= O_p G$

$\cdot G$

$A, S_2\rangle$ da S_2 sn S_i(k)

$G \Rightarrow AF \trianglelefteq_q G$

$\Rightarrow A \trianglelefteq AT$ ↯

Gruppe

$A \trianglelefteq A.C(A)$ sn G (a')

$_T(A)$

$^n \notin A,\ s(oa)^{n+1} = goa \in A$

$C(A) = A$ ↯

einfach, d.h.
(o) $S \not\cong E$ [illegible] (w): Dann $[S_2, A^S] = 1$

$A^S \trianglelefteq G$ also $[S_2^G, A^S] = 1$

Wäre $S_2 \neq 1$, so $A \trianglelefteq A S_2^G$ sn G

(p) Also $|A| = p$, S einfach, $|S| \neq p$.

(q) $\exists\ s \in S$: $s \circ a \notin N A$

Sonst $\forall s$: $s \circ a \in NA$, $A^s \le NA$, AAA

(r) $\exists\ s \in S,\ k \in \mathbb{N}$: $t := s(oa)^k \notin N(A)$, $s(oa)^{k+1} \in N(A)$

Hiermit ~~[illegible]~~ $s(oa)^{k+1} = t \circ a$; es wird

(s) $a^t \in N(A)$, $t \notin N(A)$, also $A < AA^t \in \mathfrak{S}_p$.

(t) $p \mid |S|$ (s) $|AA^t \cap T| \cdot |AA^t : A|$

(u) $S' = S$ sonst $|S| = p$ (o); ↯ (p)

(v) $A \notin N(S)$ sonst $S \trianglelefteq G$ ↯ 267_6

(w) $T = S \times S^a \times \dots \times S^{a^{p-1}}$ denn S^A, $S = S$ einf

~~(x) Für jede Primzahl $q \neq p$ läßt A eine q-Sylowgruppe T_q fest, nämlich S_q^A mit beliebl. $S_q \in q\text{-Syl}G$.~~ Sat

~~T_q $\trianglelefteq AT_q$~~

~~(y) $q \leq \mathcal{N}(A)$ Bew: $A \text{ sn } \langle A, S_q\rangle$ $(|G|_{\min})$~~

~~denn $S_q \text{ sn } T_q \trianglelefteq AT_q$; $\langle A, S_q\rangle = A \cdot S_q^A = AT_q$~~

~~$A \text{ sn } AT_q$ $|AT_q : A| = q^{\cdot\cdot}$ $|A| = p$~~

~~$A = O_p(AT_q) \trianglelefteq AT_q$ (sonst $\leq Z(AT_q)$)~~

~~(z) $|T : \underbrace{\mathcal{N}_T(A)}_{=:H}| = p^{\cdot\cdot}$ (x,y)~~

~~↯ Endwiderspruch: $A^G = A^{AT} = A^T = A^{\mathcal{N}_T(A) \cdot P}$ $\forall P \in p\text{-Syl}T$~~ F

~~denn $\exists$ $P = P^A$. Damit $A^G = A^P \leq AP \in \mathcal{G}_p$, $A \text{ sn } G$~~

Satz 9 $A \leq G$, $S_\varrho \text{ sn } G$, $A \trianglelefteq B \leq G$, $(\varrho = 1 \ldots r)$

$\forall a \in A, \forall \varrho$: $S_\varrho(a)^{\infty} \subseteq A$ $\Longrightarrow A \text{ sn } \langle B, S_1, \ldots, S_r\rangle$ Aufga

Bew.: $A \text{ sn } \langle A, S_\varrho\rangle$; mit $T := \langle S_1, \ldots, S_r\rangle$ wird

$A \text{ sn } \langle A, T\rangle$ $[197_6]$; $A \text{ sn } \langle A, T^b\rangle$ $\forall b \in B$.

$A \text{ sn } \langle A T^B\rangle \trianglelefteq \langle B, S_1, \ldots, S_r\rangle$ $\langle B, T^B\rangle = \langle B, T\rangle$ ∎

Frage: Vielleicht direkt zu beweisen wie (8)?

~~ist A eine q-Sylow-~~
~~S_q^A mit ... $S_q \in q$-Syl G~~

~~$\mathrm{sn}\,\langle A, S_q\rangle$ $(|G|_{\min})$~~
~~$q\rangle = A \cdot S_q^A = A T_q$~~
~~$A T_q : A| = q^{..}$ $|A| = p$~~
~~$A T_q$ $(\ldots \le Z(AT_q))$~~

~~(x,y)~~

~~$T = A^{N_T(A)\cdot P}$ $\forall P \in p$-Syl T~~
~~$G = {}^{P} \le AP \in \mathcal{G}_{p'}$ Ass G~~

G, $(\varrho = 1 \ldots r)$
$\Longrightarrow A\ \mathrm{sn}\ \langle B, S_1, \ldots, S_r\rangle$

$\langle S_1, \ldots, S_r\rangle$ wird
$\langle A, T^b\rangle\ \forall b \in B$.
$\Rightarrow \langle B, T^B\rangle = \langle B, T\rangle =$
wie (8)?

Zerfallskriterien

Satz (1) Enthält G einen P-Sylowturm ohne zentralen p-Hauptfaktor, so zerfällt jede p-Erweiterung von N.

Statt Sylowtürmen geht auch der volle „Normalisator" einer intravarianten nilpotenten p-großen Untergruppe I von G; d.h. $|N_G(I)/I| \not\equiv 0_{(p)}$

(2) Nach Gaschütz hat N ein Kplt. in G, wenn $N \trianglelefteq_{p'} G$ und $N = N^{p}$ und die p-Syl von N abelsch.

FRAGE Läßt jedes C eine p'-Hall-Gruppe von $N_N(P)$ fest? Dann wären je 2 C's konjugiert.

Nach Alperin gibt's verwandten Satz von Roquette in Buch HUPPERT (Juli 1978)

Aufgabe (3) $M_\pi(G)$ untersuchen wenn G über einem Normalteiler zerfällt, oder wenn für jedes $p \in \pi$ die p-Syl.-Gr.en der Komp.-Faktoren von G abelsch sind.

Aufgabe (4) Krit. für Existenz invarianter Komplemente zu N in G (liefern Zerfallskrit. für N in H, wenn $G \triangleleft H$).

(4) $P \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, $P \in p\text{-Syl}\, N$, $P' = 1$

$\overset{p'}{=}$ $[N, P]$ ist komplementiert in G.

aber die Kpl'te sind nicht immer konjugiert: $G = \mathrm{Sym}\,4$

Bew.: $C := N_G(N_{p'})$; dabei $C \cap P \leq Z(C \cap N)$

Aufgabe (5) Zerfall von pq-Gruppen.

(6) Literatur über Zerfall in Kompositionsklassen:

Šemetkov Sov. Math. Dokl. 13 (1972) separat
Math USSR Sbornik 23 (1974) "

Aufgabe (7) Konjugiertheitssatz zu ŠEMETKOV 1970 (vielleicht mit Johnson-Zassenhaus).

" (8) Verallgemeinerung des "Satzes von Maschke", S. 137, mittels ŠEMETKOV.

l anter

(liefern

enn $G \triangleleft H$)..

$p'=1$

mentiert in G,

$_{p}1$); dabei $C \cap P \leq Z(C,N)$

ll in

(1972) separat
K 23(1974) "

zov 1970

aus)-

Maschke", S. 137,

(1) <u>Intravarianz</u>: Jedes maximale (geordnete) intravariante System $\mathfrak{X}$ von Ugr von G ~~enthält~~ alle Gruppen, die ~~aus~~ von denen von $\mathfrak{X}$ aus eindeutig beschrieben werden können, z.B.: $A, B \in \mathfrak{X} \Rightarrow \mathfrak{X} \ni \langle A, B \rangle$, $A \cap B$, $N_B A$, $Z(A)$, $\mathfrak{X}$ ist also ein Verband | Siehe Char. Ugr von A sowie

$\boxed{\mathrm{Perm}_A(B)}$

(2) Ist $\mathfrak{X}$ ein maxim. intrav. System und $N_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{A \in \mathfrak{X}} N_G(A)$ sein Normalisator, und ist $M/N := \mathrm{Fitt}(N_G(N)/N)$, so ist M nilpotent.

Denn $N \in \mathfrak{X}$, also $M \in \mathfrak{X}$; sei C Cartergruppe von M, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ lasse $\mathfrak{X}$ fest. Dann $C^{\alpha} N = M$, also $C^{\alpha} = C^{n}$, $n \in N$, also $\mathfrak{X} + C$ noch intravariant, d.h. $C \in \mathfrak{X}$, $C^{N} = C$, $C \trianglelefteq M$, $C = M$, M nil.

(3) Ähnlich: Ist $N \trianglelefteq S \in \mathfrak{X}$ und $S/N \in \mathfrak{F} =$,, gesättigte Formation", so sind die $\mathfrak{F}$-Deckgr F von M normal in M. Dabei ist $(|F/F'|, |N|) = 1$.

Erweiterungen

(1) Je zwei Kompositions- – π – Sylow-Türme vom G sind konjugiert in ihrem Erzeugnis. (sie sind daher pronormal)

Bew mit G/N, $N \trianglelefteq G$; [illegible], S. 155.

(2) Def: $A \leq G$ heiße eine Erweiterungsgruppe (oder ein universeller Supplement-Kern) in G, wenn ~~in~~ jeder Erweiterung $G \trianglelefteq \bar{G}$ ein ~~Supplement~~ Supplement $\bar{A}$ zu G mit "Kern" A ~~gehört~~ existiert: $\bar{A}G = \bar{G}$, $\bar{A} \cap G = A$.

Suppl-Kern-Satz!

Forts. XVII 39

Satz (3)

26.3.78

Sei $Z(G) = 1$. Dann sind genau diejenigen $A \leq G$ universelle Supplementkerne, für die es in $G \trianglelefteq G^*$ ein Supplement mit Kern A gibt, dabei $G^* := \mathrm{Aut}(G)$.

Bew: Sei $A = A^* \cap G$, $A^*G = G^*$. Sei $G \trianglelefteq \bar{G}$. Setze $\bar{A} := \{ \bar{g} \in \bar{G} \mid \bar{g}$ induziert auf G einen Automorphismus aus $A^* \}$. Also

$N_{G^*}(A)$ muss G^*/G decken, und $N_{G^*}(A)/A$ [illegible] $N_G(A)/A$ [illegible].

(4) Aufgabe: Für $G := G_1 \times \dots \times G_n$, alle $G_i \cong E$ einfach $= E$, die univ. Supplement-Kerne. Gilt $G^* = E^* \wr S_n$, $G^*/G = (E^*/E) \wr S_n$

Sylow-Türme
dem Erzeugnis .
und daher pronormal)

G; vgl. Weinst., S. 153.

Erweiterungsgruppe
en) in G,
ng $G \triangleleft \bar{G}$
G mit "Kern"
$G = \hat{G}$, $\hat{A} \cap G = A$

39

sind genau
erzeugt
Komplementkerne;

Komplement mit
$X := \mathrm{Aut}(G)$.
$A^* G = G^*$
Setze $\hat{A} := \{$
auf G einen
aus $A^* \}$. Also
$N(A)/_A$ muss mit $N_G(A)/A$ zerfallen.

Gn alle $G_i \cong E$ zerfallen $= E$
Kerne
$G = (E^*/E) \wr S_n$

(5) Wenn $E^*:E$ zerfällt, so auch jedes $\bar{G}:G$.

(6) Intravarianz ist erst dann allgemeingültig, wenn man sie auf $G = \{(g,g,\dots,g) \mid g \in G\}$ anwendet! $T \subseteq G^n$ intravariant bezüglich komponentenweiser Anwendung der (äuß. und inner) Automorphismen von G.

(7) Das Čunichin-Verfahren liefert zu jedem in G intravarianten A ein $\hat{A} \leq G$ so daß $\hat{A}$ sein universeller Komplement-Kern ist und $\hat{A}/A$ eine Sylowturmgruppe vorgeschriebener Anord. (zur Intravarianz, d.h.) durch $N_{G^*}(A)$)

(8) (Zur Deckung von $\hat{G}/G$ genügt Deckung eines Erzeugendensystems. Bei (4) ist das durchweg wählbar

ylow-Theorie

Erzeugnis.

(daher pronormal)

vom Neuf., S.153.

rottungsgruppe

) in $\underline{G}$,

$G \triangleleft \bar{G}$

mit "Kern"

$\bar{G}$, $\hat{A} \cap G = A$

genau

entkern,

element mit

$= Aut(G)$.

$= \underline{G^*}$

$\hat{A} := \{$

auf G einen

$\hat{A}^*$ }. Also

[illegible] $N_G(A/A)$ zerfallen.

alle $G_i \cong E$ [illegible]

$= E$

ma

$|E^*/E| \leq S_m$

(5) Wenn E^* ist zerfällt, so auch jedes $\bar{G} : G$.

(6) Im Übrigen, [illegible] kann allgemeiner geschehen, wenn man sie auf $G = \{(g, g, \ldots, g) \mid g \in G\}$ anwendet: $T \leq G^n$ intravariant [illegible] komponentenweiser Anwendung der (äußeren und inneren) Automorphismen von G.

(7) Das Černikov-Verfahren liefert zu jedem in G intravarianten A ein $\hat{A} \leq G$ so daß $\hat{A}$ einen universellen Suppl.-Kern hat und $\hat{A}/A$ eine Sylowturmgruppe zu vorgeschriebener Anord. [illegible] $N_G(A)$)

(8) ([illegible]) Deckung eines Erzeugendensystems. Bei (4) ist das durchweg erfüllbar

Inhalt

Normalisatorsätze $\triangleleft\triangleleft$ 138 218

Vertauschbarkeit $\triangleleft\triangleleft$ 142 218

Frame 151

Vertauschbarkeit [illegible] Untergruppen 83

* und ∘ 126

Diss.: Bartels 124, 152   Rindersp.: 168

"Große" π-Untergr. etc: $L\pi G$, Mgbr. 154–166 Vorl #103 s. auch $M^{\triangleleft\triangleleft}$&G

$\triangleleft\triangleleft$ Gemeinsame Subnormalteiler 1-8 $S^{\triangleleft\triangleleft}AB$: 262, 269

$\triangleleft\triangleleft$ Subnormalisator 19, 21, 27, 104, 184, 261-, 267, 124-6

mon. Untergruppenfunktoren 175

$\triangleleft\triangleleft$ Kosubnormalität 195-201 205

$p^\alpha q^\beta$ 202

Lange Bahnen 204

Gaschütz–Matschke 127–137 [Vorl. #110], 181, 52

Frattini 225

$M^{\triangleleft\triangleleft}$ & G^{233}_{226}, 230– 253!, 260   s. auch "Große π-Untergr."

Quotienten 256

Monomiale Darstellungen von p-Gruppen 258

Verallgemeinerte Subnormalität 258

Zerfallskriterien 275

168

i Vorl #103 g. auch

SWAB: 262, 269

1, 267, 124 6

52

auch 'Gruppen'

ppen 258

Intravarianz 159 239 257 277 279

Kompositions-Tr.-Kylaw-Türme 278 154/5 159_2

Erweitg. Supplement-Kerne 278

Engel-Krot-Stufenbau. : 270