Suite I - Die StrukturGebende

Teil 1: Essays 0-5

Klasse. (Un-)Menge. (Un-)Gleichheit. Liste der KlassenVariablen, Teil 1. Rekursiv-Eigenschaft Ensemble KlassenVariable, Teil 1. Fundamentales NegationsAxiom. ElementAxiom. $x \subseteq y$. $x \not\subseteq y$. (Keine) TeilKlasse. TeilMengenAxiom. GleichheitsAxiom. IdentitätsSatz. Leere Menge. 0. Universum. $\mathcal{U}$. $0\mathcal{U}$Axiom. PotenzKlasse. $\mathcal{P}(x)$. PotenzMengenAxiom. Singelton. $\{p\}$. SingeltonAxiom. SingeltonIdentitätsSatz. Vereinigung. $\bigcup x$. Durchschnitt. $\bigcap x$. Binäre Vereinigung. $x \cup y$. Binärer Durchschnitt. $x \cap y$. Kommutativ-, Assoziativ-, Distributiv- und VerschmelzungsGesetze für $\cup, \cap$. Binäres SchubfachPrinzip. $\cup$LokalisierungsRegel. $\cup$Axiom. Universelles Komplement. x^C. DeMorgan-Regeln $\cup, \cap$. DistributivGesetze $\cup \bigcap$, $\cap \bigcup$. Ungeordnetes Paar. $\{x, y\}$. KlassenDifferenz. $x \setminus y$. Symmetrische KlassenDifferenz. $x \Delta y$. FundamentalSatz Δ.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

Mit der Fertigstellung des ersten Teils meines LebensWerks schaffe ich eine Zäsur in meinem im Jahr 1992 begonnenen Unterfangen, parallel zum Publizieren mathematischer Arbeiten eine Form zu kreieren, um die mir sichtbaren mathematischen Inhalte in einer mich zufrieden stellenden Weise zu dokumentieren.

Das Arbeiten am LebensWerk ist ein sehr persönliches Unterfangen, vergleichbar mit dem Zugehen auf die Quelle meiner individuellen, mathematischen Fähigkeiten.

Somit handelt es sich bei meinem LebensWerk um ein authentisches Opus, das mich in zunehmenden Maße dem Reinsten, was ich schaffen kann, näher bringt.

Die endgültige Formfindung gelingt im März 2008.

Etwa ein Jahr später sind in "Suite I - Die StrukturGebende" die mengentheoretischen Grundlagen in erste, authentische Form gebracht.

Diese erste Form basiert auf einer Zwei-Prädikatenlogik, in der Mengen und Klassen mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet werden. Dies erhöht ehrlicher Weise nicht die Lesbarkeit. Ich beschließe, zu einer einfacheren Notation zurück zu kehren. Die vor allem in Anbetracht des Volumens von Suite I umfangreiche Umarbeitung erfordert ein weiteres Jahr.

Auch ringe ich mich dazu durch, das LebensWerk mit Kommentaren zu versehen und mit Beispielen zu ergänzen. Die Beispiele zielen in erster Linie darauf ab, die in ergänzenden Bemerkungen fest gestellte "Optimalität" bereits bewiesener Sätze zu dokumentieren, indem an Hand spezieller Klassen die Unmöglichkeit, aus den gegebenen Voraussetzungen stärkere Schlussfolgerungen zu ziehen, dargelegt wird.

Dabei ist es stellenweise hilfreich, noch nicht zur Verfügung stehende Klassen - etwa ungeordnete Quadrupel oder die kanonische Kleiner-Gleich-Relation - einzusetzen.

Diese Vorgehensweise halte ich im Rahmen von Beispielen, die lediglich ergänzende Kommentare belegen sollen und somit keinen tragenden Charakter haben, für legitim.

Ein weitere Spezialität einiger Beispiele besteht darin, Nachweise spezieller Eigenschaften der präsentierten Klassen nicht nachzuweisen, sondern als richtig anzusehen *und somit dem Leser zur Verifikation zu überlassen.* Dies geschieht aus Gründen der Zeitersparnis - und dies wird sofort einsichtig, wenn etwa gesagt wird, dass die Klasse $M = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ transitiv ist.

BeweisSchritt. Die mir so wichtige FormGebung zentriert sich um eine Atomisierung von Beweisen, i.e. im Zerlegen von Beweisen in kleinstmöglich erscheinende Einzelschritte.
Damit sind Beweise einerseits wegen der ummittelbaren logischen Evidenz der

Einzelschritte, andererseits wegen der deutlichen Trennung externer HilfsSätze von lokal gültigen Aussagen sehr einfach nachvollziehbar und schnell lesbar.

Das enorme Volumen der Essays und schnelle Lesbarkeit. Meiner Erfahrung nach sind kurze, leichte, elegante Beweise nur dann gut zu lesen, wenn teilweise beträchtlicher, kontextbezogener Aufwand bei der Einarbeitung - man muss sich zuminderst erst "Einlesen" - betrieben wird - ein Aufwand, der noch dazu kaum nachhaltig ist, sondern bei jedem neuen Lesen wiederholt werden muss.
In der Form, in der die Beweise im meinem LebensWerk dargestellt sind, handelt es sich *sicher nicht* um kurze, elegante, leichte Beweise, sondern um Beweise, die so *kontextfrei* wie möglich gehalten sind. Der Preis der größtmöglichen Kontextfreiheit ist in erster Linie durch umfangreiches Volumen zu bezahlen. Dieses Volumen resultiert auch aus dem grosszügigen Schriftbild - auf einer Seite befinden sich nicht allzu viele Schriftzeichen - und aus dem Umstand, dass wirklich jeder einzelne Schritt dokumentiert ist.
Der umfangreichen Detailtreue stehte schnelle Lesbarkeit gegenüber.
Ist man zum Beispiel am Beweis eines der FixpunktSätze von TARSKI - diese stellen in gewisser Hinsicht den Höhepunkt der StrukturGebenden dar - interessiert, so kann man leicht den Zeilen folgend von den (doch noch) kontextgeschuldeten, einfachen Umformungen die tieferliegenden HilfsSätze trennen und es entweder dabei bewenden lassen oder man kann nun doch die Beweistiefe erhöhen, indem man zu den verwendeten, durchnummerierten Hilfssätzen zurückgeht und deren Beweis nachvollzieht und so lange mit diesem Procedere fortfährt, bis man die einen zufrieden stellende Beweistiefe erreicht hat.
Ich meine, dass mit dieser Einsatzmöglichkeit, die mein LebensWerk bietet, es jedem nicht einschlägig vorgebildeten Mathematiker möglich ist, einen direkten, effizienten Zugang zu jedem im LebensWerk dokumentierten Resultat zu finden.

Kein Lehrbuch. Das LebensWerk ist nicht als Lehrbuch konzipiert. Für ein KennenLernen der Mathematik gibt es deutlich besser geeignete Literatur - siehe etwa die Literaturliste der jeweiligen Suiten.

Individual-Enzyklopädie. Abgrenzung Bourbaki. In den Essays werden mir bedeutend erscheinende Aussagen der Mathematik zusammengefaßt. Das LebensWerk ist somit eine MischKreatur aus Subjektivem - was mir bekannt ist/bedeutend erscheint - und Objektivem - was in der Literatur bekannt/richtig angesehen wird. Damit ist, abgesehen von der formalen Darstellung, eine deutliche konzeptionelle Abgrenzung zu der für mich als Individuum bei Weitem unerreichbaren Enzyklopädie von Bourbaki gegeben.

Verwendung des LebensWerks. EHS. Die Quintessenz der Essays ist in den mit "EHS…", i.e. "*E*xterne *H*ilfs *S*ätze", bezeichneten Bänden dokumentiert. In diese Bänden sind nur die Resultate, aber keine Kommentare oder Beweise gesammelt. Die dort geschriebenen Aussagen werden weitgehend unentwegt beim

Nacharbeiten der EinzelSchritte der Beweise benötigt.

Vision. Die in den Essays dokumentierte, nüchterne, präzise sprachlichen Vorgehensweise soll in weiterer Folge zu einer prinzipiellen Methode in Modellierungssituationen entwickelt werden. Dabei wird das Ziel verfolgt, mit dem bis dahin entwickelten Rüstzeug bei meinem eigentlichen Arbeitsgebiet, der Modellierung mit *Differentialgleichungen* anzukommen.

Vergleich musikalische Komposition. Jeder EinzelSchritt der Beweise enspricht einem Ton, die Definitionen/EinzelAussagen eines Satzes entsprechen musikalischen Motiven und ein mathematischer Satz entspricht einem musikalischen Thema, so dass ein Beweis der Ausführung eines musikalischen Themas entspricht. Die in einem Essay thematisch zusammengefassten Sätze entsprechen einer Komposition. Mehrere Essays ergeben eine Suite. Mathematische Motive wie das Induktionsprinzip treten immer wieder auf und werden in verschiedenen Situationen neu durchkomponiert.

Strukturelles. KlassenTerme. Typisch Mathematik werden aus Klassen via spezieller Aussagen weitere Klassen konstruiert. Die Details der Konstruktion werden anerkannter Weise mit KlassenKlammern notiert. Zur Straffung der Notation werden die KlassenKlammern durchnummeriert, so dass die jeweilige Nummer als Name des KlassenTerms anzusehen ist. Es ist ganz wichtig, dass der Name stets auch eine vollständige Liste der dem jeweiligen KlassenTerm zu Grunde liegenden KlassenVariablen/Parameter mit sich führt. Beispielsweise wird ein KlassenTerm via

$$\mathsf{0.0}(x) = \{\omega : \omega \in x\}$$

eingeführt und der hier geklammerte Term “x” bedeutet, dass dem KlassenTerm “$\mathsf{0.0}(x)$” die Klasse “x” zu Grunde liegt - in der Tat ensteht “$\mathsf{0.0}(x)$” aus “x”, indem alle Mengen ω, die Element von x sind, zur Klasse “$\mathsf{0.0}(x)$” zusammengefasst werden.
Gelegentlich kommt es vor, dass einem KlassenTerm gar keine anderen Klassen zu Grunde liegen, wie dies etwa bei

$$\mathsf{0.1}() = \{\omega : \omega \neq \omega\}$$

der Fall ist. In diesen Fällen handelt es sich um Parameter der Mengenlehre, für die mitunter eine eigene Bezeichnung - im vorliegenden Fall handelt es sich um die leere Menge “0” - eingeführt wird.

Strukturelles. Axiome. Das in den Suiten verwendete Axiomen-Ensemble ist nicht minimal, sondern dient dem Ziel, einigermaßen rasch voranzuschreiten. Ich verbeuge mich vor den beeindruckenden mathematischen Leistungen, minimale Axiome-Ensembles zu kreieren.

Strukturelles. Rechtsbündige Aussagen.
Strukturelles. Indizierte BeweisSchachtelung.

Strukturelles. AussagenNummern. Zur besseren Inszenierung der in einem Beweis verwendeten Aussagen werden diese rechtsbündig geschrieben.
Die logischen Argumente, die zur Verfügbarkeit dieser Aussagen führen, werden linksbündig geschrieben.
In jedem BeweisSchritt stehen alle vorab als Axiome/Sätze/Definitionen formulierte Aussagen zur Verfügung. Darüber hinausgehend werden in vorangehenden Schritten bewiesene ZwischenAussagen eingesetzt. Zur Kenntlichmachung, dass es sich um bereits verfügbare Aussagen handelt, wird jeder ZwischenAussagen entweder mit einer fortlaufenden Nummer, die die Schachteltiefe angibt, oder mit eine AussagenNummer - etwa "`A1`" - versehen. In paralleler Weise aus vorhergenden Schritte deduzierte Aussagen werden mitunter, um die Schachteltiefe möglichst gering zu halten, mit gleicher Schachteltiefennummer, doch mit unterschiedlichen FeinabstimmungsNummern - nach dem Punkt - versehen. Beispiel (aus Essay #0):

0-18(Satz)

`a)` $0 \neq \mathcal{U}$.

$\ldots$

Beweis **0-18** `a)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **0-17**: $0 \neq \mathcal{U}$.

$\ldots$

AussagenNummern treten auf, wenn vorbereitende Überlegungen, die bereits eine gewissen Schachteltiefe erfordern, an anderer Stelle effizient eingesetzt werden sollen, so dass der Einsatz von AussagenNummern vorwiegend dem Bedürfnis nach erhöhter Lesbarkeit entspringt. Beispiel (aus #0):

0-13(Satz) (IdentitätsSatz)

$$x = \{\omega : \omega \in x\}.$$

$$\mathsf{0.0}(x) \;= \{\omega : \omega \in x\}.$$

<u>Beweis **0-13**</u>

> `Thema1.1` . . .

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \in x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \subseteq \{\omega : \omega \in x\}$"

> `Thema1.2` . . .

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{\omega : \omega \in x\} \subseteq x$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "$x \subseteq \{\omega : \omega \in x\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : \omega \in x\} \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = \{\omega : \omega \in x\}$.

□

Strukturelles. Thema. Soll eine Aussage mit einem Allquantor bewiesen werden, so wird/werden die betroffene(n) Variable(n) mit der/den AusgangsAussage(n) als "Thema" vorangestellt und der gesamte Beweisteil als gerahmte Box präsentiert. Beispiel (aus Essay #0):

> <u>**0-6(Satz)**</u>
>
> `a)` $x \subseteq x$.
>
> . . .

<u>Beweis **0-6**</u> `a)`

> `Thema1` $\alpha \in x$.
>
> Aus `Thema1` "$\alpha \in x$"
> folgt: $\alpha \in x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **2.Definition**: $x \subseteq x$.

Strukturelles. `VS` **gleich ...** Manche TeilAussagen eines Satzes beruhen auf zusätzlicher/n Voraussetzung(en).
Diese Voraussetzung(en) wird/werden dem entsprechenden Abschnitt des Beweises in Form von "`VS` gleich ..." vorangestellt. Beispiel (aus Essay #0):

0-1(Satz)

`a)` *Aus "x Unmenge" folgt "$x \notin y$".*

...

Beweis **0-1** `a)` `VS` gleich x Unmenge.

...

In einigen Sätzen werden verschiedene Aussagen als äquivalent präsentiert. Der Beweis läuft in vielen Fällen so ab, dass - eventuell unter ZugrundeLegung einer oder mehrer weiterer, im Vorspann formulierten/r Aussage(n) - die eine Aussagen aus der anderen Aussage hergeleitet wird. In jenen Fällen wird die vorausgesetzte Aussage in der Form "`VS` gleich ..." notiert. Beispiel (aus Essay #0):

0-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq y$.

`ii)` "$x \not\subseteq y$" *oder* "$y \not\subseteq x$".

Beweis **0-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \neq y$.

...

Strukturelles. Indirekter Beweis. Indirekte Beweise werden als Ausschließungsbeweise geführt, indem einzelne Aussagen eines eine Tautologie darstellenden Aussagankonglomerats zu einem Gegensatz mit bereits erhaltenen Aussagen der Essays oder allgemein richtigen Aussagen - wie "$x = x$" - geführt und mit einem "ex falso quodlibet" -Schluss in die antizipierte Richtung geleitet werden. Beispiel (aus Essay #0):

<u>0-1(Satz)</u>

...

`b)` *Aus "x Unmenge" und "y Menge" folgt "$x \neq y$".*

<u>Beweis **0-1**</u>

...

`b)` `VS` gleich $(x \text{ Unmenge}) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Es gilt: $x = y \vee x \neq y$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x = y$" und aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge" folgt: x Menge.

`3:` Es gilt `VS` gleich "x Unmenge..." .
Es gilt `2` "x Menge" .
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq y$.

`1.2.Fall` $x \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

□

Mit wem ich mich durch die Arbeit an dem LW verbunden fühle. Mit Immanuel Kant, weil er zehn Jahre lang fast nichts publizierte, um mit größmöglicher Genauigkeit das aufschrieb, was er als wichtig erachtete.

Mit Ludwig Wittgenstein der mit seiner Aussage "Alles, was gesagt werden kann, kann genau gesagt werden" den Boden bereitete, auf dem ich arbeite.

Mit Robert Musils literarischem Ulrich aus dem "Mann ohne Eigenschaften" , der im Rahmen der Parallelaktion das Generalsekretariat der Genauigkeit der Seele einrichten wollte, da hier das Bestreben, Dinge aller Lebensbereiche genauest möglich auszusprechen, merkbar ist.

Mit CG Jung, der formulierte, dass seine schriftlichen Arbeiten aus einem inneren Zwang heraus und nicht mit der Hoffnung auf weite Verbreitung entstanden.

DANKE. Ich danke meiner Frau Susanne Pfender für ihre Grosszügigkeit, mir für die Arbeit an meinem LebensWerk so unglaublich viel Zeit einzuräumen und für ihre kreative Hilfe, beim Weiterarbeiten in Bewegung zu bleiben. Mein Dank gilt Herrn Dong Le Van der beim Laufen und - vorab - zum Musizieren nicht locker ließ, interessiert nach meinem LebensWerk zu fragen und der mir dadurch das "Musikalische" klar machte, das in diesem LebensWerk steckt und was ansonsten unentdeckt geblieben wäre. Herrn Michael Neumann-Schirmbeck verdanke ich, nicht aufgegeben zu haben, indem er mich zu den gesunden Einstellungen begleitete, die in diesem Vorwort dokumentiert sind und er es mir ermöglichte, mich nicht nur in meinem LebensWerk wiederzufinden sondern es zu guter Letzt auch zur Veröffentlichung loszulassen.

Berlin, 02.09.2011.

Klasse. Menge. Unmenge. Gleichheit. Ungleichheit.
Liste der KlassenVariablen, Teil 1. **Rekursiv-Eigenschaft Ensemble KlassenVariable, Teil 1**. **Fundamentales NegationsAxiom**. **ElementAxiom**. $x \subseteq y$. $x \not\subseteq y$. **TeilKlasse**. **Keine TeilKlasse**. **TeilMengenAxiom**. **GleichheitsAxiom**. **IdentitätsSatz**. **Leere Menge**. 0. **Universum**. $\mathcal{U}$. $0\mathcal{U}$**Axiom**. $\mathcal{P}(x)$. **PotenzKlasse**. **PotenzMengenAxiom**.

Ersterstellung: 07/09/05 **Letzte Änderung: 10/06/11**

Vorbemerkung.

In den Essays werden Aussagen über *Klassen* und Mengen getroffen.

Aussagen werden durch (Sequenzen von) Symbolen in typographischem Schriftbild bezeichnet. Beispiele hierfür sind “`A`”, “$\rightarrow$)”, “`c`)”, “`ii`)”.

Mengen sind spezielle Klassen. Nicht jede Klasse ist eine Menge. Eine *Unmenge* ist eine Klasse, die keine Menge ist.

Eine mit einer KlassenVariable bezeichnete Klasse ist eine Menge oder eine Unmenge.

Klassen werden entweder als Parameter in die Essays eingeführt oder mit Hilfe von KlassenKlammern - zumeist in Abhängigkeit anderer Klassen, deren KlassenVariablen notiert werden - konstruiert.

Einige Parameter - wie die leere Menge oder das Universum - werden als KlassenKlammern, die keine freie KlassenVariablen enthalten, in die Essays eingeführt.

Andere Parameter - wie die PotenzKlasse des Universums - werden durch Belegung aller KlassenVariablen einer KlassenKlammer mit Parametern in die Essays eingeführt.

Wieder andere Parameter - wie die Zahlbereiche - werden axiomatisch als Bestandteil der Essays angesehen.

Die Liste der Parameter ensteht in sukzessiver, teils konstruktiver, teils axiomatischer Weise im Laufe der Essays.

Parameter werden stets mit eigenen, abhebenden Symbolen bezeichnet.

Liste der KlassenVariablen, Teil 1

Jedes der folgenden Symbole ist eine KlassenVariable:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
α	β	γ	δ	ϵ	ε	ζ	η	θ	ϑ	ι	κ	λ
μ	ν	ξ	ϖ	ρ	ϱ	σ	ς	τ	υ	ϕ	φ	χ
ψ	ω	Γ	Θ	Λ	Ξ	Υ	Φ	Ψ	Ω			
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$
$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{Z}$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{m}$
$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{s}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$

Rekursiv-Eigenschaft Ensemble KlassenVariable, Teil 1

Sind “$\%$” und “$\overline{\%}$” KlassenVariable
der Liste der KlassenVariablen, Teil 1,
dann ist “$\%\overline{\%}$” eine KlassenVariable.

Bemerkung. Die Liste der KlassenVariablen wird sukzessive erweitert. Nicht alle in weiteren Listen von KlassenVariablen auftretenden Symbole sind analog zur Rekursiv-Eigenschaft Ensemble KlassenVariable, Teil 1, zu weiteren KlassenVariablen kombinierbar.

Bemerkung. Falls “$\%$” eine KlassenVariable ist, dann gilt “$\%$ ist eine Klasse” und es gilt *nie* “$\%$ ist keine Klasse” .

Bemerkung. Aufgrund ihrer rekursiven Eigenschaft ist der Vorrat an KlassenVariablen “endlich unerschöplich” , i.e. es gibt einen unbeschränkten Vorrat an

KlassenVariablen. Im Speziellen gibt zu jeder endlichen Auswahl von KlassenVariablen stets eine KlassenVariable, die nicht in dieser endlichen Auswahl vorkommt.

Im Rahmen der Essays symbolisiert das Gleichheitssymbol "$=$" die Gleichheit von KlassenTermen.

Der Umgang mit "$=$" wird als bekannt vorausgesetzt.

Fundamentales NegationsAxiom

a) *"x ist eine Unmenge" genau dann, wenn "$\neg$(x ist eine Menge)".*

b) *"x ist eine Menge" genau dann, wenn "$\neg$(x ist eine Unmenge)."*

c) *"$p \notin x$" genau dann, wenn "$\neg(p \in x)$".*

d) *"$p \in x$" genau dann, wenn "$\neg(p \notin x)$".*

e) *"$x \neq y$" genau dann, wenn "$\neg(x = y)$".*

f) *"$x = y$" genau dann, wenn "$\neg(x \neq y)$".*

Bemerkung. Im Folgenden wird das **Fundamentale NegationsAxiom** ohne explizite Referenz verwendet.

Bemerkung. Im Folgenden wird, wenn "%" eine KlassenVariable ist, an Stelle von "% ist eine Unmenge" das knackigere "% Unmenge" verwendet.

Bemerkung. Im Folgenden wird, wenn "%" eine KlassenVariable ist, an Stelle von "% ist eine Menge" das knackigere "% Menge" verwendet.

Im **ElementAxiom** manifestiert sich die Konvention, dass nur Mengen als Elemente von Klassen auftreten können.
Es wird, wie bereits angedeutet, die Sprechweise "p Menge" an Stelle von "p ist eine Menge" verwendet:

<u>ElementAxiom</u>

Aus "$p \in x$" folgt "p Menge".

0-1. Erstmalig tritt in einer Schlussfolgerung - nämlich in der von `b)` - eine KlassenVariable - nämlich "y" - auf, die nicht in der Prämisse erscheint. Damit ist die Schlussfolgerung für alle Klassen gültig. Eventuell könnte auch ein Allquantor in der Schlussfolgerung verwendet werden. Dieser müsste sich über alle KlassenVariablen erstrecken. So eine Darstellung möchte ich vermeiden und setze deswegen die " freie " Notation ein.
Darüber hinausgehend wird das **Fundamentale NegationsAxiom** erstmalig eingesetzt und es wird der erste indirekte Beweis geführt:

0-1(Satz)

`a)` *Aus "$p \in x$" und "$q \notin x$" folgt "$p \neq q$".*

`b)` *Aus "p Unmenge" folgt "$p \notin x$".*

`c)` *Aus "x Unmenge" und "y Menge" folgt "$x \neq y$".*

Beweis **0-1** `a)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (q \notin x)$.

`1:` Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = q$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$p = q$" und aus `VS` gleich "$\ldots q \notin x$" folgt: $p \notin x$.

`3:` Es gilt `2` "$p \notin x$". Es gilt `VS` gleich "$p \in x \ldots$". Ex falso quodlibet folgt: $p \neq q$.

`1.2.Fall` $p \neq q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \neq q$.

<u>Beweis **0-1**</u> `b)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Es gilt: $(p \in x) \vee (p \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$p \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3:` Es gilt `2`“p Menge” .
Es gilt `VS` gleich “p Unmenge” .
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin x$.

`1.2.Fall` $p \notin x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin x$.

`c)` `VS` gleich $(x$ Unmenge$) \wedge (y$ Menge$)$.

`1:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x = y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y$ Menge”
folgt: x Menge.

`3:` Es gilt `VS` gleich “x Unmenge$\ldots$ ” .
Es gilt `2`“x Menge” .
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq q$.

`1.2.Fall` $x \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

□

0-2. Die erste Definition ist eine sprachliche Abkürzung. Es geht darum, was darunter zu verstehen ist, wenn x (k)eine TeilKlasse von y ist.
Für diese sprachliche Abkürzungen werden Symbole eingeführt: $x \subseteq y$ ($x \not\subseteq y$).
Interessanter Weise rede ich von Teil*Klassen* und nicht von Teil*Mengen*. Dies hat einen einfachen Grund: Falls "$x \subseteq y$", dann kann x durchaus eine Unmenge sein:

0-2(Definition)

1) "$x \subseteq y$" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y).$$

2) "x **TeilKlasse von** y" genau dann, wenn gilt:

$$x \subseteq y.$$

3) "$x \not\subseteq y$" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)).$$

4) "x **keine TeilKlasse von** y" genau dann, wenn gilt:

$$x \not\subseteq y.$$

0-3. Ein Resultat zur Vertiefung des Verständnisses der Notation "$\not\subseteq$":

<u>0-3(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` *x keine TeilKlasse von y.*

`ii)` *$\neg$(x TeilKlasse von y).*

`iii)` *$\neg(x \subseteq y)$.*

`iv)` *$x \not\subseteq y$.*

<u>Beweis **0-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich x keine TeilKlasse von y.

Aus `VS` gleich "x keine TeilKlasse von y"
folgt via **0-2(Def)**: $x \not\subseteq y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \not\subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-2(Def)**: $\neg(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y))$.

`2:` Aus `2`"$\neg(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y))$"
folgt via **0-2(Def)**: $\neg(x \subseteq y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\neg(x \subseteq y)$.

Aus `VS` gleich "$\neg(x \subseteq y)$"
folgt via **0-2(Def)**: $\neg$(x TeilKlasse von y).

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\neg$(x TeilKlasse von y).

`1:` Aus `VS` gleich "$\neg$(x TeilKlasse von y)"
folgt via **0-2(Def)**: $\neg(x \subseteq y)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(x \subseteq y)$"
folgt via **0-2(Def)**: $\neg(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y))$.

`3:` Aus `2`"$\neg(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y))$"
folgt via **0-2(Def)**: $x \not\subseteq y$.

`4:` Aus `3`"$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-2(Def)**: x keine TeilKlasse von y.

□

0-4. Aussage `a)` kommt ohne den Allquantor aus. Dies kürzt Einiges ab. Via `b)` wird der Umgang mit "$\subseteq$" gefestigt. Beim Beweis von `b)` wird die vorab bewiesene Aussage `a)` verwendet:

> **0-4(Satz)**
>
> `a)` *Aus* "$p \in x$" *und* "$x \subseteq y$" *folgt* "$p \in y$".
>
> `b)` *Aus* "$p \notin y$" *und* "$x \subseteq y$" *folgt* "$p \notin x$".

Beweis **0-4** `a)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (x \subseteq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y$"
folgt via **0-2(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$" und
aus `1`"$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$"
folgt: $p \in y$.

`b)` `VS` gleich $(p \notin y) \wedge (x \subseteq y)$.

`1:` Es gilt: $(p \in x) \vee (p \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$p \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in y$.

`3:` Es gilt `2`"$p \in y$".
Es gilt `VS` gleich "$p \notin y \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin x$.

`1.2.Fall` $p \notin x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin x$.

□

0-5. In `a)` tritt zum ersten Mal der in den Essays immer wieder kehrende Fall auf, dass aus dem *Nicht*Bestehen einer Aussage - hier "$x \not\subseteq y$" - die *Existenz* einer Klasse mit speziellen Eigenschaften folgt.
In `b)` wird uns Hinreichendes für das "keine TeilKlasse-Sein" gegeben.
Als beweistechnisches Debut wird im Beweis von `a)` eine aussagenlogische Konsequenz aus der Voraussetzung "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$" gezogen.
Die hier und auch andere im folgenden eingesetzten aussagenlogische Hilfsgriffe werden als bekannt vorausgesetzt:

<u>**0-5(Satz)**</u>

`a)` *Aus "$x \not\subseteq y$" folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)$".*

`b)` *Aus "$p \in x$" und "$p \notin y$" folgt "$x \not\subseteq y$".*

<u>Beweis **0-5**</u> `a)` `VS` gleich $x \not\subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-2(Def)**: $\neg(\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)$.

`b)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p \notin y)$.

`1:` Es gilt: $(x \subseteq y) \vee (x \not\subseteq y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \subseteq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $p \in y$.

`3:` Es gilt `2` "$p \in y$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots p \notin y$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \not\subseteq y$.

`1.2.Fall` $x \not\subseteq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \not\subseteq y$.

□

0-6. Jede Klasse ist TeilKlasse von sich - siehe `a)` - und das "TeilKlassen-Sein" ist transitiv, siehe `b)`.
Beim Beweis von `b)` wird erstmalig ein verfügbares Resultat - nämlich **0-4** - mit veränderten KlassenVariablen verwendet: Während in **0-4** in verkürzter Weise die Aussage "$((p \in x) \wedge (x \subseteq y)) \Rightarrow (p \in y)$" lautet, wird im vorliegenden Beweis verwendet, dass aus "$\alpha \in x$" und " $x \subseteq y$" die Aussage "$\alpha \in y$" folgt.
Derlei Zitieren mit veränderten KlassenVariablen ist etwas gewöhnungsbedürftig doch unvermeidbar.
Aussage `c)` erscheint trivial, sogar überflüssig, vereinfacht aber einige Beweise:

0-6(Satz)

`a)` $x \subseteq x$.

`b)` *Aus "$x \subseteq y$" und "$y \subseteq z$" folgt "$x \subseteq z$".*

`c)` *Aus "$x = y$" folgt "$x \subseteq y$" und "$y \subseteq x$".*

<u>Beweis **0-6**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x.$
Aus `Thema1`“$\alpha \in x$” folgt:	$\alpha \in x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq x.$

`b)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z).$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x.$
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x$” und aus `VS` gleich “$x \subseteq y \ldots$” folgt via **0-4**:	$\alpha \in y.$
`3:` Aus `2`“$\alpha \in y$” und aus `VS` gleich “$y \subseteq z$” folgt via **0-4**:	$\alpha \in z.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in z).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq z.$

`c)` `VS` gleich $x = y.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \subseteq x.$

`2.1:` Aus `1`“$x \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “$x = y$”
folgt: $x \subseteq y.$

`2.2:` Aus `1`“$x \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “$x = y$”
folgt: $y \subseteq x.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x).$

□

Durch das **TeilMengenAxiom** wird die Auffassung unterstützt, dass eher die "weniger umfangreichen" Klassen Mengen sind, da jede TeilKlasse einer Menge - die ja eine "kleinere " oder zumindest "nicht-grössere" Klasse ist - eine Menge ist:

TeilMengenAxiom

Aus "$x \subseteq y$" und "y Menge" folgt "x Menge".

0-7. Via Negation ergibt sich ohne viel Mühe aus dem **TeilMengenAxiom**, dass eine eine Unmenge umfassende Klasse eine Unmenge sein muss:

0-7(Satz)

Aus "$y \subseteq x$" und "y Unmenge" folgt "x Unmenge".

Beweis **0-7**

1: Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Menge.

2: Aus →) "$y \subseteq x$" und
aus `1.1.Fall` "x Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

3: Es gilt 2 "y Menge".
Es gilt →) "y Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: x Unmenge.

`1.2.Fall` x Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x Unmenge.

□

Das **GleichheitsAxiom** erscheint so kanonisch, dass es beim ersten Kennenlernen gerne als Trivialität angesehen wird. Dies ist aber nicht der Fall. Etwa folgt aus dem **GleichheitsAxiom** der **IdentitätsSatz**, nach dem eine Klasse genau jene Klasse ist, die sich aus den *Mengen*, die in dieser Klasse liegen, zusammensetzt:

GleichheitsAxiom

Aus "$x \subseteq y$" und "$y \subseteq x$" folgt "$x = y$".

0-8. Eine erste Konsequenz aus dem **GleichheitsAxiom** ist, dass zwei Klassen genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente haben:

0-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = y$.

`ii)` $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in y)$.

Beweis **0-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = y$.

`1:` Es gilt: $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in x)$.

`2:` Aus `1`"$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in x)$" und
aus `VS` gleich "$x = y$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in y)$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Leftrightarrow (\alpha \in y)$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$"
folgt via **0-2(Def)**: $x \subseteq y$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt via **0-2(Def)**: $y \subseteq x$.

`3:` Aus `2.1`"$x \subseteq y$" und
aus `2.2`"$y \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y$.

□

0-9. Im Beweis von **0-9** - genauer in `6` der Fallunterscheidung von "`ii)` $\Rightarrow$ `i)`" - werden erstmalig zwischenzeitlich gewonnene Resultate logisch zu einem neuen Ausdruck zusammengefasst, ohne dass diese Resultate explizit erwähnt werden. Diese die Notationen vereinfachende Massnahme wird im Folgenden öfters geschehen, wenn es sich wie im vorliegenden Fall um rein logische Aktionen ohne Hinzuziehung weiterer Hilfsresulate handelt.
Ein weiteres, weniger gravierendes beweistechnisches Debut erfolgt in `5.1` von "`ii)` $\Rightarrow$ `i)`", wo in *selektiver* Weise in "$x \subseteq x$" via "$x = y$" eine Ersetzung vorgenommen wird, um "$x \subseteq y$" - und nicht etwa "$y \subseteq y$" - zu erhalten:

0-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq y$.

`ii)` "$x \not\subseteq y$" *oder* "$y \not\subseteq x$".

Beweis **0-9** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x \neq y.$

`1:` Es gilt: $\neg((x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x))$ $\vee$ $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\neg((x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)).$

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\neg((x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x))$" folgt: $(\neg(x \not\subseteq y)) \wedge (\neg(y \not\subseteq x)).$

`3:` Aus `2` "$(\neg(x \not\subseteq y)) \wedge (\neg(y \not\subseteq x))$" folgt via **0-3**: $(\neg(\neg(x \subseteq y))) \wedge (\neg(\neg(y \subseteq x))).$

`4:` Aus `3` folgt: $(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x).$

`5:` Aus `4` "$x \subseteq y \ldots$" und aus `4` "$\ldots y \subseteq x$" folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y.$

`6:` Es gilt `5` "$x = y$".
Es gilt `VS` gleich "$x \neq y$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x).$

`1.2.Fall` $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x).$

Beweis **0-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)$"
folgt via **0-3**: $(\neg(x \subseteq y)) \vee (\neg(y \subseteq x))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\neg((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x))$.

`3:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = y$.

`4.1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`5.1:` Aus `4.1`"$x \subseteq x$" und
aus `3.1.Fall`"$x = y$"
folgt: $x \subseteq y$.

`5.2:` Aus `4.1`"$x \subseteq x$" und
aus `3.1.Fall`"$x = y$"
folgt: $y \subseteq x$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$.

`7:` Es gilt `6`"$(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$".
Es gilt `2`"$\neg((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x))$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq y$.

`3.2.Fall` $x \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

□

0-10. Im Beweis von `a)` wird aus der Gültigkeit *einer* der Aussagen, die in `ii)` von **0-9** durch "oder" miteinander verknüpft sind, auf die Gültigkeit von `i)` geschlossen. Dies ist, da `i)`, `ii)` von **0-9** äquivalent sind, logisch richtig:

0-10(Satz)

`a)` *Aus* "$x \not\subseteq y$" *folgt* "$x \neq y$".

`b)` *Aus* "$x \neq y$" *und* "$x \subseteq y$" *folgt* "$y \not\subseteq x$.

`c)` *Aus* "$p \in x$" *und* "$p \notin y$" *folgt* "$x \neq y$".

Beweis **0-10** `a)` `VS` gleich $x \not\subseteq y$.

Aus `VS` gleich "$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-9**: $x \neq y$.

`b)` `VS` gleich $(x \neq y) \wedge (x \subseteq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \neq y \ldots$"
folgt via **0-9**: $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \not\subseteq y$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-3**: $\neg(x \subseteq y)$.

`3:` Es gilt `2`"$\neg(x \subseteq y)$" ".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \not\subseteq x$.

`1.2.Fall` $y \not\subseteq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \not\subseteq x$.

`c)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p \notin y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin y$"
folgt via **0-5**: $x \not\subseteq y$.

`2:` Aus `1`"$x \not\subseteq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \neq y$.

□

0-11. Aus der Ungleichheit "$x \neq y$" folgt die Existenz einer Klasse - eigentlich, da Element einer Klasse: einer Menge - mit speziellen Eigenschaften.
Die ausssagenlogischen Manipulationen im Beweis `ii)` $\Rightarrow$ `iii)` und im Beweis `iii)` $\Rightarrow$ `i)` sind nicht ganz einfach aber dennoch richtig:

0-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq y$.

`ii)` $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y))$.

`iii)` $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \vee (\Omega \in y)) \wedge ((\Omega \notin x) \vee (\Omega \notin y))$.

Beweis **0-11** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \neq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \neq y$"
folgt via **0-9**: $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \not\subseteq y$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y))$.

`1.2.Fall` $y \not\subseteq x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$y \not\subseteq x$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \notin x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y))$.

Beweis **0-11** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y))$.

Aus `VS`
folgt: $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \vee (\Omega \in y)) \wedge ((\Omega \notin x) \vee (\Omega \notin y))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \vee (\Omega \in y)) \wedge ((\Omega \notin x) \vee (\Omega \notin y))$.

`1`: Aus `VS`
folgt: $\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y))$

`2`: Aus `1`
folgt:

$$\exists \Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)) \vee \exists \Omega : ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y)).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin y)$.

Aus `2.1.Fall`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots \Omega \notin y$"
folgt via **0-10**: $x \neq y$.

`2.2.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y)$.

`3`: Aus `2.2.Fall`"$\ldots \Omega \in y$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots \Omega \notin x \ldots$"
folgt via **0-10**: $y \neq x$.

`4`: Aus `3`
folgt: $x \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

$\square$

0-12. In **0-12** wird erstmalig ein "KlassenTerm" - nämlich "$\mathtt{0.0}(x)$ " - via "KlassenKlammer", i.e. eine Zeichenkette der Form

$$\text{"}\{\omega : \mathtt{A}\}\text{"}$$

verwendet. Hier ist "$\mathtt{A}$" eine Aussage.
Die in KlassenKlammern auftretenden Aussagen werden nach bestimmten Regeln der Aussagenlogik gebildet. Diese Regeln werden in den Essays nicht weiter dargelegt können aber etwa in

J. Kelley, *General Topology*, Springer, 1961

nachgelesen werden. Für das weitere ist wichtig, dass die Aussage

$$\text{"}\S \in \{\omega : \mathtt{A}\}\text{"},$$

wobei "§" eine KlassenVariable oder ein Parameter oder ein KlassenTerm ist, genau dann wahr ist, wenn

$$\text{"}\mathtt{A}(\omega \to \S)\text{" und "}\S \text{ Menge"}$$

gilt, wobei "$\mathtt{A}(\omega \to \S)$" jene Aussage ist, die dadurch entsteht, indem in der Aussage "$\mathtt{A}$" die KlassenVariable "ω" rigoros durch "§" ersetzt wird, wobei zusätzlich zu beachten ist, dass, wenn "§" bereits als "gebundene Variable" - einen Terminus, der hier nicht näher erläutert werden soll - in "$\mathtt{A}$" auftritt, "§" *vor* der Ersetzung durch eine andere, nicht in "$\mathtt{A}$" vorkommende KlassenVariable ersetzt wird.
Umgekehrt gilt die Aussage

$$\text{"}\S \notin \{\omega : \mathtt{A}\}\text{"}$$

genau dann, wenn "$\neg(\mathtt{A}(\omega \to \S))$" *oder* "§ Unmenge" gilt. Offenbar kann also trotz "$\S \notin \{\omega : \mathtt{A}\}$" die Aussage "$\mathtt{A}(\omega \to \S)$" zutreffen - aber *nur*, wenn "§" eine Unmenge ist.
Die erste Umsetzung dieser zweiten Regel im Umgang mit KlassenTermen erfolgt in **#1**:

0-12(Definition)

$$\mathtt{0.0}(x) = \{\omega : \omega \in x\}.$$

0-13. Im **IdentitätsSatz** wird ausgesagt, dass jede Klasse gleich jener durch einen KlassenTerm definierte Klasse ist, die genau aus den Elementen dieser Klasse besteht.
Im **IdentitätsSatz** wird auf einen vorab definierten KlassenTerm - nämlich auf "$\mathsf{0.0}(x)$ " - zurück gegriffen. Zur besseren Lesbarkeit wird/werden hier und im folgenden die Definition/en der in einem Satz/einer Definition/einem Axiom verwendete/n KlassenTerm/e bei der Formulierung des Satzes mit angegeben.
Im Beweis wird erstmalig das "Element-eines-Klassenterms-Seins" thematisiert.
So wird in `3` von `Thema1.1` aus "$\alpha \in x$" *und* "α Menge" auf "$\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}$" geschlossen.
Umgekehrt wird in `Thema1.2` aus "$\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}$" auf "$\alpha \in x$" geschlossen.
Damit kommt die im Vorspann zu **0-12** formulierte Regel in beiderlei Richtung zum Einsatz.
Schließlich wird im Beweis des **IdentitätsSatzes** - implizit - davon Gebrauch gemacht, dass ein durch einen KlassenTerm definiertes Objekt eine Klasse ist, also durch eine KlassenVariable repräsentiert wird. In der Tat wird in `Thema1.1` zunächst auf "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \in x\})$" geschlossen. Hieraus wird via Hinweis auf **0-2(Def)** die Schlussfolgerung "$x \subseteq \{\omega : \omega \in x\}$" gezogen. Dieses Argument ist streng genommen nur dann richtig, wenn es wie in **0-2(Def)** eine KlassenVariable - etwa: "y" - gibt, so dass "$y = \{\omega : \omega \in x\}$" gilt. Denn dann folgt aus "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \in x\})$" durch Ersetzung "$y = \{\omega : \omega \in x\}$" zunächst "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$", woraus sich - nun formal korrekt - via **0-2(Def)** die Aussage "$x \subseteq y$" ergibt, woraus wieder durch Ersetzung "$y = \{\omega : \omega \in x\}$" die Aussage "$x \subseteq \{\omega : \omega \in x\}$" folgt.
Klarer Weise ist diese Vorgehensweise umständlich und auf Dauer nicht zu halten. Also wird der kürzere Weg - siehe Beweis - gewählt. Dieser beruht aber darauf, dass es ein y mit "$y = \{\omega : \omega \in x\}$" gibt. Dies ist in der Tat nicht trivial sondern - eher im Gegenteil - eine der Spielregeln der Essays, siehe Vorwort.

0-13(Satz) (IdentitätsSatz)

$$x = \{\omega : \omega \in x\}.$$

$$\mathsf{0.0}(x) = \{\omega : \omega \in x\}.$$

<u>Beweis **0-13**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in x$.
2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in x$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
3: Aus Thema1.1 "$\alpha \in x$" und aus 2 "α Menge" folgt:	$\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \in x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x \subseteq \{\omega : \omega \in x\}\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}$.
Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}$" folgt:	$\alpha \in x$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{\omega : \omega \in x\} \subseteq x\text{”}}$

1.3: Aus A1 gleich "$x \subseteq \{\omega : \omega \in x\}$" und
aus A2 gleich "$\{\omega : \omega \in x\} \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = \{\omega : \omega \in x\}$.

$\square$

0-14. Die Essenz der Essays besteht natürlich nicht aus Aussagen über anonyme Klassen sondern in den Parametern, die spezielle Klassen sind.
Das Schaulaufen der Parameter beginnt mit der "kleinsten" Klasse, der leeren Menge.
Wie weit verbreitet ist die leere Menge gleich der Null. Die Null=leere Menge ist ein Parameter, für den ein eigenes Symbol - das vertraute "0" - eingeführt wird. Die leere Menge wird nicht, wie es später bei den Zahlenmengen sein wird, axiomatisch als existent angesehen, sondern es wird das übliche klassentheoretische Modell verwendet. Dabei kommt erstmalig ein KlassenTerm, der nicht von anderen KlassenVariablen abhängt - wie es es sich eben für einen Parameter geziemt - zum Einsatz:

0-14(Definition)

1) 0

$$= \mathsf{0.1}() = \{\omega : \omega \neq \omega\}.$$

2) "**$\mathfrak{C}$ leere Menge**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = 0.$$

0-15. Der zweite Parameter, der in die Essays eingeführt wird, ist das Universum "$\mathcal{U}$" . Anders als die leere *Menge* ist das Universum eine *Unmenge*. Dies wird im gleich folgenden 0$\mathcal{U}$**Axiom** so festgelegt:

0-15(Definition)

1) $\mathcal{U}$

$$= 0.2() = \{\omega : \omega = \omega\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Universum**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathcal{U}.$$

Im $0\mathcal{U}$**Axiom** wird fest gelegt, dass 0 eine Menge ist und dass $\mathcal{U}$ eine Unmenge ist. Indem $\mathcal{U}$ als Unmenge fest gelegt ist, können Widersprüche umgangen werden, die aus einem allzu sorglosen Umgang mit Mengen/Klassen folgen würden:

$0\mathcal{U}$Axiom

a) 0 *Menge.*

b) $\mathcal{U}$ *Unmenge.*

0-16. Bei dem Resultat handelt es um zwei sehr einfache Folgerungen aus **0-14(Def)** und aus **0-15(Def)**.
Erstmals wird im Beweis davon Gebrauch gemacht, dass via KlassenTerme definierte Parameter in der Tat Klassen sind, dass es also - wie in a) implizit verwendet - eine KlassenVariable - etwa "x" - gibt, so dass "$x = 0$" gilt. Erst mit dieser in den Essays stets verwendeten Konvention folgt aus "$0 = 0$" die Gleichung "$x = 0$" aus der via **0-14(Def)** die Aussage "x leere Menge" folgt, aus der sich via "$x = 0$" die Aussage "0 leere Menge" ergibt.
Wie bereits an anderer Stelle erwähnt ist die dieser Vorgehensweise zu Grunde liegende Konvention wesentlicher Bestandteil der Essays, die ohne weitere Erwähnung zu finden aus Vereinfachungsgründen immer wieder eingesetzt wird.
Wenig überraschend ist 0 die leere Menge - siehe a) - und $\mathcal{U}$ ist das Universum, siehe c).
In b) und d) wird sicher gestellt, dass es höchstens eine leere Menge und höchstens ein Universum gibt. Derlei Aussagen treten im folgenden wiederholt nach Definitionen auf:

0-16(Satz)

a) 0 *leere Menge.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ leere Menge" und "$\mathfrak{D}$ leere Menge" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

c) $\mathcal{U}$ *Universum.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ Universum" und "$\mathfrak{D}$ Universum" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

<u>Beweis</u> **0-16** `a)`

`1:` Es gilt: $0 = 0$.

`2:` Aus `1`"$0 = 0$"
folgt via **0-14(Def)**: 0 leere Menge.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ leere Menge) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ leere Menge).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ leere Menge…"
folgt via **0-14(Def)**: $\mathfrak{C} = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ leere Menge"
folgt via **0-14(Def)**: $\mathfrak{D} = 0$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = 0$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = 0$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)`

`1:` Es gilt: $\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt via **0-15(Def)**: $\mathcal{U}$ Universum.

`d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Universum) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Universum).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Universum…"
folgt via **0-15(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ Universum"
folgt via **0-15(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

0-17. Zwei später gut zu verwendende Folgerungen aus dem $0\mathcal{U}$**Axiom**:

0-17(Satz)

a) *Aus "x Menge" folgt "$x \neq \mathcal{U}$".*

b) *Aus "x Unmenge" folgt "$0 \neq x$".*

Beweis **0-17** a) VS gleich x Menge.

1: Es gilt: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \neq \mathcal{U})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = \mathcal{U}$.

2: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

3: Aus 1.1.Fall“$x = \mathcal{U}$” und aus 2“$\mathcal{U}$ Unmenge” folgt: x Unmenge.

4: Es gilt 3“x Unmenge”. Es gilt VS gleich “x Menge”. Ex falso quodlibet folgt: $x \neq \mathcal{U}$.

1.2.Fall $x \neq \mathcal{U}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \neq \mathcal{U}$.

b) VS gleich x Unmenge.

1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

3: Aus 1.1.Fall“$x = 0$” und aus 2“0 Menge” folgt: x Menge.

4: Es gilt 3“x Menge”. Es gilt VS gleich “x Unmenge”. Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

1.2.Fall $0 \neq x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $0 \neq x$.

□

0-18. Eine Liste von Eigenschaften von 0 und $\mathcal{U}$. Im Speziellen gilt - natürlich - das die Essays ansonsten zur ziemlich widersprüchlichen Trivialität machende "$0 \neq \mathcal{U}$".
Im Beweis von `b)` wird erstmalig das "Element-Sein" eines Parameters thematisiert. Es wird zunächst "$0 \in \{\omega : \omega = \omega\}$" nachgewiesen und der Beweis dieser Tatsache beruht auf den Aussagen "$0 = 0$" und "0 Menge".
Streng genommen könnte ein derartiger Schluss nur mit KlassenVariablen erfolgen. Jedoch kommt an dieser Stelle neuerlich die Konvention, dass jeder Parameter durch eine KlassenVariable dargestellt werden kann, zum Einsatz.
Auch wird im Beweis von `b)` ohne weiteren Bezug zu **0-15(Def)** die Gleichung "$\{\omega : \omega = \omega\} = \mathcal{U}$" eingesetzt. Derlei Einsätze sind immer auch als Verweis auf die Definition eines der involviereten Terme zu verstehen, ohne dass - um eine Verkürzung zu erreichen - die Zieladresse des Verweises angegeben wird:

<u>**0-18(Satz)**</u>

`a)` $0 \neq \mathcal{U}$.

`b)` $0 \in \mathcal{U}$.

`c)` $0 \subseteq x$.

`d)` $x \subseteq \mathcal{U}$.

`e)` *Aus* "$x \subseteq 0$" *folgt* "$x = 0$".

`f)` *Aus* "$\mathcal{U} \subseteq x$" *folgt* "$x = \mathcal{U}$".

<u>Beweis **0-18**</u> `a)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **0-17**: $0 \neq \mathcal{U}$.

`b)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2:` Aus "$0 = 0$" und
aus `1`"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : \omega = \omega\}$.

`3:` Aus `2`"$0 \in \{\omega : \omega = \omega\}$" und
aus "$\{\omega : \omega = \omega\} = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \in \mathcal{U}$.

<u>Beweis **0-18**</u> `c)`

`Thema1` $\alpha \in 0.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in 0$” und
aus “$0 = \{\omega : \omega \neq \omega\}$”
folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega \neq \omega\}.$

`3:` Aus `2`“$\alpha \in \{\omega : \omega \neq \omega\}$”
folgt: $\alpha \neq \alpha.$

`4:` Es gilt `3`“$\alpha \neq \alpha$” .
Es gilt “$\alpha = \alpha$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\alpha \in x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $0 \subseteq x.$

`d)`

`Thema1` $\alpha \in x.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus “$\alpha = \alpha$” und
aus `2`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega = \omega\}.$

`4:` Aus `3`“$\alpha \in \{\omega : \omega = \omega\}$” und
aus “$\{\omega : \omega = \omega\} = \mathcal{U}$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathcal{U}.$

<u>Beweis **0-18**</u> `e)` `VS` gleich $x \subseteq 0$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $0 \subseteq x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq 0$” und
aus `1`“$0 \subseteq x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = 0$.

`f)` `VS` gleich $\mathcal{U} \subseteq x$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $x \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“$x \subseteq \mathcal{U}$” und
aus `VS` gleich “$\mathcal{U} \subseteq x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = \mathcal{U}$.

$\square$

0-19. Eine Liste von Aussagen über 0 und $\mathcal{U}$.
Aussage `a)` gilt für alle KlassenVariablen. Da in diesen Situationen auf den Allquantor verzichtet wird, wird `a)` als "Formel" formuliert.
In `b)` wird gesagt, dass x die leere Menge ist, wenn kein Element von $\mathcal{U}$ - also via `d)`: keine Menge - ein Element von x ist.
Aussage `c)` sieht etwas exotisch aus, ist aber später von großem Nutzen, wenn es, meistens via indirektem Beweis darum geht, eine Klasse als leere Menge zu identifizieren.
Gemäß `d)` ist jede Menge Element von $\mathcal{U}$ und wenn jedes Element von $\mathcal{U}$ - also: jede Menge - Element von x ist, dann gilt "$x = \mathcal{U}$", siehe `e)`.
Unmengen sind nie Elemente von Klassen. Im Speziellen ist via `f)` keine Unmenge Element von $\mathcal{U}$. Im Beweis von `f)` wird mit Hilfe der Konvention "Jeder Parameter ist durch eine KlassenVariable darstellbar" von einem vorangehenden Resultat - nämlich von **0-1**`a)` - Gebrauch gemacht, indem eine KlassenVariable von **0-1**`a)` - nämlich "x" - durch einen Parameter - hier: "$\mathcal{U}$" - ersetzt wird.
Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - b) - c) - e) - f)`:

0-19(Satz)

`a)` $p \notin 0$.

`b)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \notin x)$" *folgt* "$x = 0$".

`c)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin x)$" *folgt* "$x = 0$".

`d)` *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$p \in \mathcal{U}$".

`e)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in x)$" *folgt* "$x = \mathcal{U}$".

`f)` *Aus* "p *Unmenge*" *folgt* "$p \notin \mathcal{U}$".

Beweis **0-19** a)

1: Es gilt: $(p \in 0) \vee (p \notin 0)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in 0$.

2: Aus 1.1.Fall"$p \in 0$" und aus "$0 = \{\omega : \omega \neq \omega\}$" folgt: $p \in \{\omega : \omega \neq \omega\}$.

3: Aus 3"$p \in \{\omega : \omega \neq \omega\}$" folgt: $p \neq p$.

4: Es gilt 4"$p \neq p$".
Es gilt "$p = p$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin 0$.

1.2.Fall $p \notin 0$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $p \notin 0$.

d) VS gleich p Menge.

1: Aus "$p = p$" und aus VS gleich "p Menge" folgt: $p \in \{\omega : \omega = \omega\}$.

2: Aus 1"$p \in \{\omega : \omega = \omega\}$" und aus "$\{\omega : \omega = \omega\} = \mathcal{U}$" folgt: $p \in \mathcal{U}$.

<u>Beweis **0-19**</u> `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \notin x).$

`1.1:` Es gilt: $(x \not\subseteq 0) \vee (x \subseteq 0).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x \not\subseteq 0.$

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$x \not\subseteq 0$”
folgt via **0-5**: $\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin 0).$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3`“Ω Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\Omega \in \mathcal{U}.$

`5:` Aus `4`“$\Omega \in \mathcal{U}$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \notin x)$”
folgt: $\Omega \notin x.$

`6:` Es gilt `5`“$\Omega \notin x$”.
Es gilt `2`“$\ldots \Omega \in x \ldots.$”
Ex falso quodlibet folgt: $x \subseteq 0.$

`1.1.2.Fall` $x \subseteq 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$x \subseteq 0$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$x \subseteq 0$”
folgt via **0-18**: $x = 0.$

<u>Beweis **0-19**</u> `c)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin x)$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq x) \vee (x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq x$"
folgt via **0-11**: $\exists\Omega : ((\Omega \in 0) \wedge (\Omega \notin x)) \vee ((\Omega \notin 0) \wedge (\Omega \in x))$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\Omega \notin 0$.

`4:` Aus `2`"$\ldots ((\Omega \in 0) \wedge (\Omega \notin x)) \vee ((\Omega \notin 0) \wedge (\Omega \in x))$" und
aus `3`"$\Omega \notin 0$"
folgt: $(\Omega \notin 0) \wedge (\Omega \in x)$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin x)$"
folgt: $\Omega \notin x$.

`6:` Es gilt `5`"$\Omega \notin x$".
Es gilt `4`"$\ldots \Omega \in x$".
Ex falso quodlibet folgt: $x = 0$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = 0$.

`e)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt via **0-2(Def)**: $\mathcal{U} \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U} \subseteq x$"
folgt via **0-18**: $x = \mathcal{U}$.

`f)` `VS` gleich p Unmenge.

Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **0-1**: $p \notin \mathcal{U}$.

□

0-20. Es wird einiges über nicht leere Klassen ausgesagt. Erstmalig wird in einem Beweis - hier im Beweis von `a)` - ein Existenzquantor aus einer Aussage "herausgerissen" und am Ende des Beweises vor Aussagen, die sich auf die betreffende KlassenVariable beziehen, gesetzt.
In `c)` wird erstmalig "$0 \neq x \subseteq y$" verwendet. Mit dieser Zeichenkette ist natürlich "$0 \neq x$" *und* "$x \subseteq y$" gemeint:

0-20(Satz)

`a)` *Aus* "$0 \neq x$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega \in x$".

`b)` *Aus* "$p \in x$" *folgt* "$0 \neq x$".

`c)` *Aus* "$0 \neq y \subseteq x$" *folgt* "$0 \neq x$".

`d)` *Aus* "$0 \neq x$" *folgt* "$0 \neq x \subseteq x$".

Beweis **0-20** `a)` `VS` gleich $0 \neq x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x$"
folgt via **0-11**: $\exists \Omega : ((\Omega \in 0) \wedge (\Omega \notin x)) \vee ((\Omega \notin 0) \wedge (\Omega \in x))$.

`1.2:` Via **0-19** gilt: $\Omega \notin 0$.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots ((\Omega \in 0) \wedge (\Omega \notin x)) \vee ((\Omega \notin 0) \wedge (\Omega \in x))$" und
aus `1.2`"$\Omega \notin 0$"
folgt: $(\Omega \notin 0) \wedge (\Omega \in x)$.

`3:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`b)` `VS` gleich $p \in x$.

`1:` Via **0-19** gilt: $p \notin 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in x$" und
aus `1`"$p \notin 0$"
folgt via **0-10**: $x \neq 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 \neq x$.

Beweis **0-20** `c)` `VS` gleich $0 \neq y \subseteq x.$

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq x$" und
aus `1.1.Fall` "$x = 0$"
folgt: $y \subseteq 0.$

`3:` Aus `2` "$y \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $y = 0.$

`4:` Es gilt `3` "$y = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq y \ldots$"
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x.$

`1.2.Fall` $0 \neq x.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x.$

`d)` `VS` gleich $0 \neq x.$

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x.$

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x$" und
aus `1` "$x \subseteq x$"
folgt: $0 \neq x \subseteq x.$

□

0-21. Es wird einiges über Klassen ungleich dem Universum ausgesagt.
Wie in `a)` gesagt, folgt aus "$x \neq \mathcal{U}$", dass es eine Menge gibt, die nicht Element von x ist.
Falls es umgekehrt zu einer Klasse x eine Menge y gibt, die *nicht* Element von x ist, dann ist x ungleich $\mathcal{U}$.
Aussagen `cd)` sind der Symmetrie geschuldete "$\mathcal{U}$-Version" von **0-20**`cd)`.
In `c)` tritt zum ersten Mal "$x \subseteq y \neq \mathcal{U}$" auf, was natürlich die Abkürzung für "$x \subseteq y$" *und* "$y \neq \mathcal{U}$" ist.
Aussage `e)` ist als Spezialfall von `a)` wegen der interessanten Erscheinung in die Essays aufgenommen. Gemäß `e)` gibt es zu jeder Menge x eine Menge, die *nicht* Element von x ist. Dies deutet darauf hin, dass es sehr viele Mengen gibt:

0-21(Satz)

`a)` *Aus* "$x \neq \mathcal{U}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin x)$".

`b)` *Aus* "p *Menge*" *und* "$p \notin x$" *folgt* "$x \neq \mathcal{U}$".

`c)` *Aus* "$x \subseteq y \neq \mathcal{U}$" *folgt* "$x \neq \mathcal{U}$".

`d)` *Aus* "$x \neq \mathcal{U}$" *folgt* "$x \subseteq x \neq \mathcal{U}$".

`e)` *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin x)$".

Beweis **0-21** `a)` `VS` gleich $x \neq \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **0-11**: $\exists\Omega : ((\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \mathcal{U})) \vee ((\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \mathcal{U})$
$\vee$
$\exists\Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3`"Ω Menge"
folgt via **0-19**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`5:` Es gilt `4`"$\Omega \in \mathcal{U}$".
Es gilt `2.1.Fall`"$\ldots \Omega \notin \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists\Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \in x)$.

`2.2.Fall` $\exists\Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots \Omega \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `2.2.Fall`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `3`"Ω Menge" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots \Omega \notin x \ldots$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists\Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin x)$.

`b)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \notin x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x$"
folgt via **0-10**: $\mathcal{U} \neq x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x \neq \mathcal{U}$.

Beweis **0-21** `c)` `VS` gleich $x \subseteq y \neq \mathcal{U}$.

`1:` Es gilt: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x = \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt: $\mathcal{U} \subseteq y$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U} \subseteq y$"
folgt via **0-18**: $y = \mathcal{U}$.

`4:` Es gilt `3`"$y = \mathcal{U}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots y \neq \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \neq \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq \mathcal{U}$.

`d)` `VS` gleich $x \neq \mathcal{U}$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$x \neq \mathcal{U}$"
folgt: $x \subseteq x \neq \mathcal{U}$.

`e)` `VS` gleich x Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **0-17**: $x \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$x \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin x)$.

□

0-22. Das **ElementAxiom** ergibt in Kombination mit **0-19** folgende Charakterisierung von Mengen:

0-22(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` p *Menge.*

`ii)` $p \in \mathcal{U}$.

Beweis **0-22** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich p Menge.

Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathcal{U}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

□

0-23. Via Negation ergibt sich aus **0-22** die folgende Charakterisiserung von Unmengen.
Der Beweis wird so geführt, dass die via **0-22** verfügbare Äquivalenz termweise negiert wird:

0-23(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` p *Unmenge.*

`ii)` $p \notin \mathcal{U}$.

Beweis **0-23**

`1:` Via **0-22** gilt: $(p \text{ Menge}) \Leftrightarrow (p \in \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(p \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(p \in \mathcal{U}))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(p \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (p \notin \mathcal{U})$.

□

0-24. Da nicht davon auszugehen ist, dass die Klasse aller TeilMengen einer Klasse eine Menge ist, wird in **0-22** an Stelle von "Potenz*Menge*" der richtiger scheinende Begriff "Potenz*Klasse*" verwendet.
Die "PotenzKlasse von x" wird mit "$\mathcal{P}(x)$" abgekürzt und - klarer Weise - via KlassenTerm in die Essays eingeführt:

0-24(Definition)

1) $\mathcal{P}(x)$

$$= 0.3(x) = \{\omega : \omega \subseteq x\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **PotenzKlasse von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathcal{P}(x).$$

0-25. Es werden zwei einfache Folgerungen aus **0-24(Def)** gezogen:

0-25(Satz)

a) *$\mathcal{P}(x)$ PotenzKlasse von x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ PotenzKlasse von x" und "$\mathfrak{D}$ PotenzKlasse von x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **0-25** a)

Aus "$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-24(Def)**: $\mathcal{P}(x)$ PotenzKlasse von x.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ PotenzKlasse von x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ PotenzKlasse von x).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ PotenzKlasse von $x\ldots$"
folgt via **0-24(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(x)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ PotenzKlasse von x"
folgt via **0-24(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(x)$.

2: Aus 1.1"$\mathfrak{C} = \mathcal{P}(x)$" und
aus 1.2"$\mathfrak{D} = \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

Vom intuitiven Standpunkt aus erscheint die PotenzKlasse einer Klasse x stets aus wesentlich mehr Elementen zu bestehen als x.
Also ist bei der Intuition keine Hilfe bei Beantwortung der Frage zu holen, ob es eine *Menge* gibt, deren die PotenzKlasse eine *Unmenge* ist.
Gemäß **PotenzMengenAxiom** kann dies nicht sein:

PotenzMengenAxiom

Aus "x Menge" folgt "$\mathcal{P}(x)$ Menge".

0-26. Wie erwartet gilt "$y \in \mathcal{P}(x)$" genau dann, wenn y eine Teil*Menge* von x ist:

0-26(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $y \in \mathcal{P}(x)$.

`ii)` "$y \subseteq x$" *und* "y *Menge*".

Beweis **0-26** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $y \in \mathcal{P}(x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **ElementAxiom**: y Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathcal{P}(x)$" und
aus "$\mathcal{P}(x) = \{\omega : \omega \subseteq x\}$"
folgt: $y \in \{\omega : \omega \subseteq x\}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \{\omega : \omega \subseteq x\}$"
folgt: $y \subseteq x$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1`
folgt: $(y \subseteq x) \wedge (y \text{ Menge})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt: $y \in \{\omega : \omega \subseteq x\}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \{\omega : \omega \subseteq x\}$" und
aus "$\mathcal{P}(x) = \{\omega : \omega \subseteq x\}$"
folgt: $y \in \mathcal{P}(x)$.

□

0-27. Die vielleicht erwartete Aussage "$x \in \mathcal{P}(x)$" gilt interessanter Weise genau dann, wenn x eine Menge ist:

0-27(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathcal{P}(x)$.

`ii)` x *Menge.*

Beweis **0-27** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in \mathcal{P}(x)$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich x Menge.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **0-26**: $x \in \mathcal{P}(x)$.

□

0-28. Es werden einige Eigenschaften von PotenzKlassen angegeben.
Wegen "$0 \in \mathcal{P}(x)$", siehe `a)`, gilt auch "$0 \neq \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$", siehe `b)`.
Gemäß `c)` kann $\mathcal{P}(x)$ nicht durch Bildung von TeilKlassen von Elementen von $\mathcal{P}(x)$ verlassen werden.
Die Bildung von PotenzKlassen ist gemäß `d)` ein $\subseteq$isotoner Vorgang.
Interessanter Weise gilt - via `e)` - "$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$", so dass sich einerseits die noch nicht sehr lange Liste der Parameter durch "$\mathcal{P}(\mathcal{U})$" *nicht* verlängert und sich andererseits "$\mathcal{P}(\mathcal{U})$" als Unmenge entpuppt, siehe `f)`.

0-28(Satz)

`a)` $0 \in \mathcal{P}(x)$.

`b)` $0 \neq \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`c)` *Aus* "$z \subseteq y$" *und* "$y \in \mathcal{P}(x)$" *folgt* "$z \in \mathcal{P}(x)$".

`d)` *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(y)$".

`e)` $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

`f)` $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ *Unmenge.*

Beweis **0-28** `ab)`

`1.1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

`2.a):` Aus `1.2`"$0 \subseteq x$" und
aus `1.1`"0 Menge"
folgt via **0-26**: $0 \in \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `2.a)`"$0 \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathcal{P}(x)$.

`4.b):` Aus `3`"$0 \neq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

<u>Beweis **0-28**</u> `c)` `VS` gleich $(z \subseteq y) \wedge (y \in \mathcal{P}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots y \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $(y \subseteq x) \wedge (y \text{ Menge})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq y \dots$" und
aus `1`"$\dots y$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: z Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq y \dots$" und
aus `1`"$y \subseteq x \dots$"
folgt via **0-6**: $z \subseteq x$.

`3:` Aus `2.2`"$z \subseteq x$" und
aus `2.1`"z Menge"
folgt via **0-26**: $z \in \mathcal{P}(x)$.

`d)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \subseteq x \dots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq y$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \subseteq y$" und
aus `2`"$\dots \alpha$ Menge"
folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(y)$.

Beweis **0-28** `ef)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Via **0-18** gilt: $\alpha \subseteq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.2`"$\alpha \subseteq \mathcal{U}$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{U}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$"

`1.e):` Aus `A1` gleich "$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$"
folgt via **0-18**: $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

`1.2:` Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2.f):` Aus `1.e)`"$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$" und
aus `1.2`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ Unmenge.

$\square$

0-29. Wenn jedes Element aus y eine TeilKlasse von x ist, dann ist y eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$:

0-29(Satz)

Aus "$\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq x)$" *folgt* "$y \subseteq \mathcal{P}(x)$".

Beweis **0-29** `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq x)$.

`Thema1` $\beta \in y$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\beta \in y$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\beta \in y$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq x)$"
folgt: $\beta \subseteq x$.

`3:` Aus `2.2` "$\beta \subseteq x$" und
aus `2.1` "β Menge"
folgt via **0-26**: $\beta \in \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in y) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{P}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $y \subseteq \mathcal{P}(x)$.

□

0-30. Die Aussage folgt via Negation aus **0-26**:

0-30(Satz)

Aus "$y \not\subseteq x$" *folgt* "$y \notin \mathcal{P}(x)$".

Beweis **0-30** `VS` gleich $y \not\subseteq x$.

`1:` Es gilt: $(y \in \mathcal{P}(x)) \vee (y \notin \mathcal{P}(x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$y \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $(y \subseteq x) \wedge (y \text{ Menge})$.

`3:` Es gilt `2`"$y \subseteq x \ldots$".
Es gilt `VS` gleich "$y \not\subseteq x$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \notin \mathcal{P}(x)$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathcal{P}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \notin \mathcal{P}(x)$.

□

Singelton. $\{p\}$.
SingeltonAxiom.
SingeltonIdentitätsSatz.
Vereinigung. $\bigcup x$.
Durchschnitt. $\bigcap x$.

Ersterstellung: 07/09/05 **Letzte Änderung: 07/04/11**

1-1. Mit der hier gegebenen Definition wird von der klassischen, in **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961, zu findenden Definition von Singelton p *für Unmengen* abgewichen. In der klassischen Definition wäre Singelton p für jede Unmenge gleich $\mathcal{U}$.
Gegenüber dem klassischen Zugang finde ich **1-1(Def)** vor allem in Hinblick auf **1-4** attraktiver: Wird versucht, aus etwas allzu Umfangreichem - nämlich einer Unmenge - via Singelton-Bildung eine auf jeden Fall deutlich weniger umfangreiche Menge zu machen, so verschwindet die urpsrüngliche Unmenge buchstäblich im Nichts - Singelton Unmenge ist gleich der leeren Menge.
Anders formuliert landet man, wenn man von einer Unmenge ausgeht, durch Singelton-Bildung am Anfang der Mengenlehre.
Die von der klassischen Definition abweichende **1-1(Def)** zieht Einiges nach sich. Unter anderem kann nun nicht mehr auf das klassische, in **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961, formulierte, mengentheoretisches Modell für geordnete Paare - geordnete Paare werden später präsentiert - zurück gegriffen werden.
Dies ist nicht weiter bedenklich, da im Rahmen der Essays geordnete Paare als eigenständige Entitäten angesehen werden, womit mengentheoretische Modelle obsolet sind:

1-1(Definition)

1) $\{p\}$

$$= 1.0(p) = \{\omega : \omega = p\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Singelton** p" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \{p\}.$$

1-2. Wenig überraschend gilt:

1-2(Satz)

a) $\{p\}$ *Singelton* p.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *Singelton* p" *und* "$\mathfrak{D}$ *Singelton* p" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **1-2** a)

1: Es gilt: $\{p\} = \{p\}$.

2: Aus 1 "$\{p\} = \{p\}$"
folgt via **1-1(Def)**: $\{p\}$ Singelton p.

b) VS gleich $(\mathfrak{C}$ Singelton $p) \wedge (\mathfrak{D}$ Singelton $p)$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Singelton $p \ldots$"
folgt via **1-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \{p\}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Singelton p"
folgt via **1-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \{p\}$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = \{p\}$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = \{p\}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

Auf Grund des **SingeltonAxioms** ist Singelton p eine Menge:

SingeltonAxiom

$$\{p\}\ \textit{Menge.}$$

1-3. Falls p eine Menge ist, dann hat Singelton p die erwarteten Eigenschaften. Im Beweis von **1-3** wird erstmalig die Aussage "$p = p$" nicht mehr als eigener logischer Beweisschritt, sondern als stets verfügbares Resultat angesehen:

1-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` p *Menge.*

`ii)` $p \in \{p\}$.

`iii)` $0 \neq \{p\}$.

Beweis **1-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus “$p = p$” und
aus `VS` gleich “p Menge”
folgt: $p \in \{\omega : \omega = p\}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \{\omega : \omega \in p\}$” und
aus “$\{\omega : \omega = p\} = \{p\}$”
folgt: $p \in \{p\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $p \in \{p\}$.

Aus `VS` gleich “$p \in \{p\}$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \{p\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \{p\}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq \{p\}$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{p\}$.

`2.1:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in \{p\}$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in \{p\}$” und
aus “$\{p\} = \{\omega : \omega = p\}$”
folgt: $\Omega \in \{\omega : \omega = p\}$.

`3:` Aus `2.2`“$\Omega \in \{\omega : \omega = p\}$”
folgt: $\Omega = p$.

`4:` Aus `3`“$\Omega = p$” und
aus `2.1`“Ω Menge”
folgt: p Menge.

$\square$

1-4. Via Negation ergibt sich aus **1-3** ein korrespondierendes Resultat für Unmengen. Interessanter Weise ist Singelton p gleich der leeren Menge, wenn "p" eine Unmenge ist:

1-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` p *Unmenge.*

`ii)` $p \notin \{p\}$.

`iii)` $\{p\} = 0$.

Beweis **1-4**

`1:` Via **1-3** gilt: $(p \text{ Menge}) \Leftrightarrow (p \in \{p\}) \Leftrightarrow (0 \neq \{p\})$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(p \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(p \in \{p\})) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq \{p\}))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(p \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (p \notin \{p\}) \Leftrightarrow (\{p\} = 0)$.

□

1-5. Da 0 eine Menge ist und da $\mathcal{U}$ eine Unmenge ist ergibt sich ohne viel Mühe aus **1-3** und **1-4**:

1-5(Satz)

a) $0 \in \{0\}$.

b) $0 \neq \{0\}$.

c) $\mathcal{U} \notin \{\mathcal{U}\}$.

d) $\{\mathcal{U}\} = 0$.

Beweis **1-5**

1.1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

1.2: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2.a): Aus 1.1 "0 Menge"
folgt via **1-3**: $0 \in \{0\}$.

2.b): Aus 1.1 "0 Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{0\}$.

2.c): Aus 1.2 "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\mathcal{U} \notin \{\mathcal{U}\}$.

2.d): Aus 1.2 "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{\mathcal{U}\} = 0$.

□

1-6. Diese an sich wenig überraschende Aussage verkürzt einige Beweise, da sich im Speziellen der Nachweis von "y Menge" erübrigt:

1-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \in \{p\}$.

`ii)` *"$q = p$" und "p Menge".*

`iii)` *"$q = p$" und "q Menge".*

Beweis **1-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $q \in \{p\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$q \in \{p\}$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$q \in \{p\}$" und
aus "$\{p\} = \{\omega : \omega = p\}$"
folgt: $q \in \{\omega : \omega = p\}$.

`2:` Aus `1.2`"$q \in \{\omega : \omega = p\}$"
folgt: $q = p$.

`3:` Aus `2`"$q = p$" und
aus `1.1`"q Menge"
folgt: p Menge.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(q = p) \wedge (p \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(q = p) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q = p \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt: q Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$q = p \ldots$" und
aus `1`"q Menge"
folgt: $(q = p) \wedge (q \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(q = p) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q = p \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt: $q \in \{\omega : \omega = p\}$.

`2:` Aus `1`"$q \in \{\omega : \omega = p\}$" und
aus "$\{\omega : \omega = p\} = \{p\}$"
folgt: $q \in \{p\}$.

$\square$

1-7. Via Negation ergibt sich aus **1-6**:

1-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \notin \{p\}$.

`ii)` *"$q \neq p$" oder "p Unmenge".*

`iii)` *"$q \neq p$" oder "q Unmenge".*

Beweis **1-7**

`1:` Via **1-6** gilt:

$$q \in \{p\} \Leftrightarrow (q = p) \wedge (p \text{ Menge}) \Leftrightarrow (q = p) \wedge (q \text{ Menge}).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$\neg(q \in \{p\}) \Leftrightarrow \neg((q = p) \wedge (p \text{ Menge})) \Leftrightarrow \neg((q = p) \wedge (q \text{ Menge})).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$\neg(q \in \{p\}) \Leftrightarrow (\neg(q = p)) \vee (\neg(p \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(q = p) \vee (\neg(q \text{ Menge})).$$

`4:` Aus `3` folgt:

$$q \notin \{p\} \Leftrightarrow (q \neq p) \vee (p \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (q \neq p) \vee (q \text{ Unmenge})$$

□

1-8. Die folgende Aussage ergibt sich als Kombination von **1-6**, **SingeltonAxiom** und **0-26**:

1-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $p \in x$.

Dann folgt:

a) $\{p\} \subseteq x$.

b) $\{p\} \in \mathcal{P}(x)$.

Beweis **1-8** a)

`Thema1` $\alpha \in \{p\}$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in \{p\}$" folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

3: Aus 2"$\alpha = p$" und aus $\rightarrow)$"$p \in x$" folgt: $\alpha \in x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{p\} \subseteq x$.

b)

1.1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

1.2: Aus $\rightarrow)$"$p \in x$" folgt via des bereits bewiesenen a): $\{p\} \subseteq x$.

2: Aus 1.2"$\{p\} \subseteq x$" und aus 1.1"$\{p\}$ Menge" folgt via **0-26**: $\{p\} \in \mathcal{P}(x)$.

$\square$

1-9. Falls “p” und “q” Unmengen sind, dann gilt “$\{p\} = 0$” und “$\{q\} = 0$”, also auch “$\{p\} = \{q\}$”. Hieraus ergibt sich für *ungleiche* Unmengen “p” und “q” die Gleichheit von Singelton p und Singelton q. Also kann, wenn “p” und “q” Unmengen sind, aus “$\{p\} = \{q\}$” *nicht* auf “$p = q$” geschlossen werden.
Anders ist die Situation wenn “p” eine Menge ist.
In diesem Fall gilt nämlich der **SingeltonIdentitätsSatz**:

1-9(Satz) (SingeltonIdentitätsSatz)

Aus “p Menge” und ...

`a)` *... und “$\{p\} = \{q\}$” folgt “$p = q$”.*

`b)` *... und “$\{p\} = \{q\}$” folgt “q Menge”.*

`c)` *... und “$\{p\} \neq \{q\}$” folgt “$p \neq q$”.*

`d)` *... und “$p \neq q$” folgt “$\{p\} \neq \{q\}$”.*

`e)` *... und “q Unmenge” folgt “$\{p\} \neq \{q\}$”.*

Beweis **1-9** `ab)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\{p\} = \{q\})$.

`1:` Aus `VS` gleich “p Menge...”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \{p\}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots\{p\} = \{q\}$”
folgt: $p \in \{q\}$.

`3.a):` Aus `2`“$p \in \{q\}$”
folgt via **1-6**: $p = q$.

`4.b):` Aus `VS` gleich “p Menge...” und
aus `3.a)`“$p = q$”
folgt: q Menge.

Beweis **1-9** `c)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\{p\} \neq \{q\})$.

`1:` Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = q$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$p = q$"
folgt: $\{p\} = \{q\}$.

`3:` Es gilt `2`"$\{p\} = \{q\}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots \{p\} \neq \{q\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \neq q$.

`1.2.Fall` $p \neq q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \neq q$.

`d)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \neq q)$.

`1:` Es gilt: $(\{p\} = \{q\}) \vee (\{p\} \neq \{q\})$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{p\} = \{q\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "p Menge…" und
aus `1.1.Fall`"$\{p\} = \{q\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p = q$.

`3:` Es gilt `2`"$p = q$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots p \neq q$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{p\} \neq \{q\}$.

`1.2.Fall` $\{p\} \neq \{q\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{p\} \neq \{q\}$.

<u>Beweis **1-9**</u> `e)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge ..."
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... q Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{q\} = 0$.

`2:` Via **0-19** gilt: $p \notin 0$.

`3:` Aus `2`"$p \notin 0$" und
aus `1.2`"$\{q\} = 0$"
folgt: $p \notin \{q\}$.

`4:` Aus `1.1`"$p \in \{p\}$" und
aus `3`"$p \notin \{q\}$"
folgt via **0-10**: $\{p\} \neq \{q\}$.

□

1-10. Die einzig möglichen TeilKlassen von "$\{y\}$" sind die *Mengen* 0 und $\{y\}$. Ob es sich hierbei um *verschiedene* Mengen handelt, hängt via **1-3** und **1-4** davon ab, ob "y" eine Menge oder eine Unmenge ist.
Im Beweis von **1-10** wird erstmalig eine andere als die kanonische Reihenfolge gewählt. Statt dessen ist die BeweisReihenfolge "`i)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `i)`". Derlei Abweichungen werden gewählt, wenn die Beweise dadurch kürzer oder einfacher werden:

1-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $y \subseteq \{p\}$.

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha = p)$.

`iii)` "$y = 0$" *oder* "$y = \{p\}$".

Beweis **1-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $y \subseteq \{p\}$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq y) \vee (y = 0)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $0 \neq y$.

`1:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq y$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in y$.

`2:` Aus `1`“$\Omega \in y$” und
aus `VS` gleich “$y \subseteq \{p\}$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in \{p\}$.

`3:` Aus `2`“$\Omega \in \{p\}$”
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`4:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in y$” und
aus `3`“$\Omega = p$”
folgt: $p \in y$.

`5:` Aus `4`“$p \in y$”
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq y$.

`6:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq \{p\}$” und
aus `5`“$\{p\} \subseteq y$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y = \{p\}$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(y = 0) \vee (y = \{p\})$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $y = 0$.

Aus `1.2.Fall`“$y = 0$”
folgt: $(y = 0) \vee (y = \{p\})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(y = 0) \vee (y = \{p\})$.

Beweis **1-10** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(y = 0) \vee (y = \{p\})$.

`Thema1` $\alpha \in y$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in y$"
folgt via **0-20**: $0 \neq y$.

3: Aus `VS` gleich "$(y = 0) \vee (y = \{p\})$" und
aus 2 "$0 \neq y$"
folgt: $y = \{p\}$.

4: Aus `Thema1` "$\alpha \in y$" und
aus 3 "$y = \{p\}$"
folgt: $\alpha \in \{p\}$.

5: Aus 4 "$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha = p)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha = p)$.

`Thema1` $\beta \in y$.

2.1: Aus `Thema1` "$\beta \in y$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

2.2: Aus `Thema1` "$\beta \in y$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha = p)$"
folgt: $\beta = p$.

3: Aus 2.2 "$\beta = p$" und
aus 2.1 "β Menge"
folgt via **1-6**: $\beta \in \{p\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in y) \Rightarrow (\beta \in \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $y \subseteq \{p\}$.

□

1-11. Die Vereinigung und der Durchschnitt einer Klasse ist via neuer KlassenTerme definiert. Ähnlich wie bei der PotenzKlasse von x werden bei Vereinigung und Durchschnitt von x der KlassenVariable "x" eigene Symbole - nämlich "$\bigcup$" und "$\bigcap$" - vorangestellt. Ebenfalls ähnlich wie bei der PotenzKlasse von x hängen die Vereinigung und Durchschnitt von x definierenden KlassenTerme *genau* von "x" ab:

1-11(Definition)

1) $\bigcup x$

$$= 1.1(x) = \{\omega : (\exists\Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Vereinigung von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \bigcup x.$$

3) $\bigcap x$

$$= 1.2(x) = \{\omega : (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}.$$

4) "$\mathfrak{C}$ **Durchschnitt von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \bigcap x.$$

1-12. Es folgt eine Zusammenfassung grundlegender Resultate über die Vereinigung.
Erstmals wird in einem Beweis aus einer Prämisse - hier in c) die Prämisse "$(w \in p) \wedge (p \in x)$" - auf die Existenz einer in der Prämisse genannten Variablen - hier "p" - geschlossen, indem "$\exists p : w \in p$" gefolgert wird. Dies ist ein bemerkenswerter, immer wieder auftretender Vorgang:

1-12(Satz)

a) $\bigcup x$ *Vereinigung von* x.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *Vereinigung von* x" *und* "$\mathfrak{D}$ *Vereinigung von* x" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) *Aus* "$w \in \bigcup x$" *folgt* "$\exists \Omega : (w \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$".

d) *Aus* "$w \in p$" *und* "$p \in x$" *folgt* "$w \in \bigcup x$".

e) *Aus* "$w \notin \bigcup x$" *und* "$p \in x$" *folgt* "$w \notin p$".

f) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \notin \alpha)$" *folgt* "$w \notin \bigcup x$".

<u>Beweis **1-12**</u> `a)`

Aus "$\bigcup x = \bigcup x$" folgt via **1-11(Def)**: $\bigcup x$ Vereinigung von x.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Vereinigung von x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Vereinigung von x).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Vereinigung von $x \ldots$"
folgt via **1-11(Def)**: $\mathfrak{C} = \bigcup x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Vereinigung von x"
folgt via **1-11(Def)**: $\mathfrak{D} = \bigcup x$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \bigcup x$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \bigcup x$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $w \in \bigcup x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \bigcup x$" und
aus "$\bigcup x = \{\omega : (\exists \Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (w \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

`d)` `VS` gleich $(w \in p) \wedge (p \in x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in p \ldots$"
folgt via **MengenAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in p \ldots$"
folgt: $\exists p : w \in p$.

`2:` Aus `1.2`"$\exists p \ldots$",
aus `VS` gleich "$(w \in p) \wedge (p \in x)$"
folgt: $\exists p : (w \in p) \wedge (p \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\exists p : (w \in p) \wedge (p \in x)$" und
aus `1.1`"w Menge"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}$.

`4:` Aus `3`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}$" und
aus "$\bigcup x = \{\omega : (\exists \Omega : (\omega \in \Omega) \wedge (\Omega \in x))\}$"
folgt: $w \in \bigcup x$.

Beweis **1-12** `e)` `VS` gleich $(w \notin \bigcup x) \wedge (p \in x)$.

`1:` Es gilt: $(w \in p) \vee (w \notin p)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $w \in p$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$w \in p$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \in x$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $w \in \bigcup x$.

`3:` Es gilt `2`“$w \in \bigcup x$” .
Es gilt `VS` gleich “$w \notin \bigcup x \ldots$” .
Ex falso quodlibet folgt: $w \notin p$.

`1.2.Fall` $w \notin p$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $w \notin p$.

`f)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \notin \alpha)$.

`1:` Es gilt: $(w \in \bigcup x) \vee (w \notin \bigcup x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $w \in \bigcup x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$w \in \bigcup x$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\exists \Omega : (w \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \notin \alpha)$”
folgt: $w \notin \Omega$.

`4:` Es gilt `3`“$w \notin \Omega$” .
Es gilt `2`“$\ldots w \in \Omega \ldots$” .
Ex falso quodlibet folgt: $w \notin \bigcup x$.

`1.2.Fall` $w \notin \bigcup x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $w \notin \bigcup x$.

□

1-13. Mit **1-13** liegt eine Zusammenfassung grundlegender Resultate über den Durchschnitt vor.
Anders als in **1-12** bei der Vereinigung - wo die Vereinigung der leeren Menge keine besondere Behandlung erfährt - Durchschnitt der leeren Menge ein besonderes Exemplar - nämlich, wie via **1-14** zu sehen ist, gleich $\mathcal{U}$ -, das für Ausnahmeregelungen sorgt.
Im Beweis von `f)` wird erstmalig von der in der Einleitung von **0-12** angesprochenen Regelung im Umgang von "$\S \notin \{\omega : \mathtt{A}\}$" - hier "$w \notin \bigcap x$", also nach Ersetzung "$w \notin \{\omega : (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$" - Gebrauch gemacht.
Im Beweis von `f)` wird eine Negation der Form "$\neg(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow \ldots)$ gleich $\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg \ldots)$" verwendet:

1-13(Satz)

`a)` $\bigcap x$ *Durchschnitt von* x.

`b)` *Aus* "$\mathfrak{C}$ *Durchscnitt von* x" *und* "$\mathfrak{D}$ *Durchschnitt von* x" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

`c)` *Aus* "$w \in \bigcap x$" *und* "$p \in x$" *folgt* "$w \in p$".

`d)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)$" *und* "$w$ *Menge*" *folgt* "$w \in \bigcap x$.

`e)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)$" *und* "$0 \neq x$" *folgt* "$w \in \bigcap x$.

`f)` *Aus* "$w \notin \bigcap x$" *folgt* "$\exists\Omega : (w \notin \Omega) \wedge (\Omega \in x)$" *oder* "$w$ *Unmenge*".

`g)` *Aus* "$w \notin \bigcap x$" *und* "w *Menge*" *folgt* "$\exists\Omega : (w \notin \Omega) \wedge (\Omega \in x)$".

`h)` *Aus* "$w \notin p$" *und* "$p \in x$" *folgt* "$w \notin \bigcap x$".

<u>Beweis</u> **1-13** `a)`

Aus "$\bigcap x = \bigcap x$" folgt via **1-11(Def)**: $\bigcap x$ Durchschnitt von x.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Durchschnitt von x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Durchschnitt von x).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Durchschnitt von $x \ldots$"
folgt via **1-11(Def)**: $\mathfrak{C} = \bigcap x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Durchschnitt von x"
folgt via **1-11(Def)**: $\mathfrak{D} = \bigcap x$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \bigcap x$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \bigcap x$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $(w \in \bigcap x) \wedge (p \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \bigcap x \ldots$" und
aus "$\bigcap x = \{\omega : (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$" und
aus `2`"$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)$"
folgt: $w \in p$.

`d)` `VS` gleich $(\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)) \wedge (w$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w$ Menge"
folgt: $w \in \{\omega : (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$" und
aus "$\bigcap x = \{\omega : (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$" folgt: $w \in \bigcap x$.

<u>Beweis **1-13**</u> `e)` `VS` gleich $(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)) \wedge (0 \neq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha) \ldots$"
folgt: $w \in \Omega$.

`3:` Aus `2`"$w \in \Omega$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha)$" und
aus `3`"w Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $w \in \bigcap x$.

`f)` `VS` gleich $w \notin \bigcap x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \notin \bigcap x$" und
aus "$\bigcap x = \{\omega : (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$"
folgt: $w \notin \{\omega : (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \notin \{\omega : (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\omega \in \alpha))\}$"
folgt: $(\neg(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \in \alpha))) \vee (w \text{ Unmenge})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (w \notin \Omega)) \vee (w \text{ Unmenge})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\exists\Omega : (w \notin \Omega) \wedge (\Omega \in x)) \vee (w \text{ Unmenge})$.

`g)` `VS` gleich $(w \notin \bigcap x) \wedge (w \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \notin \bigcap x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:
$(\exists\Omega : (w \notin \Omega) \wedge (\Omega \in x)) \vee (w \text{ Unmenge})$.

`2:` Aus `1`"$(\exists\Omega : (w \notin \Omega) \wedge (\Omega \in x)) \vee (w \text{ Unmenge})$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w$ Menge"
folgt: $\exists\Omega : (w \notin \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

Beweis **1-13** `h)` `VS` gleich $(w \notin p) \wedge (p \in x)$.

`1:` Es gilt: $(w \in \bigcap x) \vee (w \notin \bigcap x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $w \in \bigcap x$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$w \in \bigcap x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $w \in p$.

`3:` Es gilt `2` "$w \in p$".
Es gilt `VS` gleich "$w \notin p \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $w \notin \bigcap x$.

`1.2.Fall` $w \notin \bigcap x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $w \notin \bigcap x$.

$\square$

1-14. Eine Zusammenstellung spezieller Vereinigungen und Durchschnitte. Es kommen die leere Menge, das Universum und Singeltons vor.
Während die Resultate "$\bigcup 0 = 0$" - die Vereinigung der "kein-elementigen Menge" ist leer - und "$\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$" - die Vereinigung des Universums ist das Universum - und "$\bigcap \mathcal{U} = 0$" - keine Menge ist in allen Mengen enthalten - wenig verblüffen ist die Aussage "$\bigcap 0 = \mathcal{U}$ vermutlich ein wenig gewöhnungsbedürftig.
Immerhin wird via "$\bigcap 0 = \mathcal{U}$" behauptet, dass *jede Menge* Element von *jedem Element* der leeren Menge ist. Der Gewöhnungsbedarf dieser Aussage ist leicht nachvollziehbar, beruht doch der Beweis von "$\bigcap 0 = \mathcal{U}$" auf einer direkt kaum fasssbaren "ex-falso-quodlibet" -Argumentation:
Da es keine Menge gibt, die Element der leeren Menge ist, ist auch jede Menge ein Element von jedem Element der leeren Menge.
Das ist Logik.
In **1-14** wird ferner deutlich, dass zwischen "Singelton Menge" und "Singelton Unmenge" eklatanten Unterschiede bestehen.
Im Beweis von `ij)` wird erstmalig eine "GleichheitsKette" verwendet. Das heißt, es werden an einem Term mehrere - vorab gerechtfertigte oder allgemein gültige - die Gleichheit erhaltende Manipulationen durchgeführt und es wird bei jeder Manipulation die Aussage, auf Grund derer diese Manipulation möglich ist, zitiert. Durch den Einsatz von derlei "GleichheitsKetten" verkürzen sich viele Beweise.
Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - d) - e) - g) - f) - h) - i) - j) - k) - l) - m) - n)`:

...

...

1-14(Satz)

a) $\bigcup 0 = 0$.

b) $\bigcap 0 = \mathcal{U}$.

c) $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

d) $\bigcap \mathcal{U} = 0$.

e) $\bigcup\{p\} \subseteq p$.

f) $p \subseteq \bigcap\{p\}$.

g) *Aus "p Menge" folgt "$\bigcup\{p\} = p$".*

h) *Aus "p Menge" folgt "$\bigcap\{p\} = p$".*

i) *Aus "p Unmenge" folgt "$\bigcup\{p\} = 0$".*

j) *Aus "p Unmenge" folgt "$\bigcap\{p\} = \mathcal{U}$".*

k) $\bigcup\{0\} = 0$.

l) $\bigcap\{0\} = 0$.

m) $\bigcup\{\mathcal{U}\} = 0$.

n) $\bigcap\{\mathcal{U}\} = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **1-14**</u> a)

`Thema1` $\alpha \in \bigcup 0.$

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \bigcup 0$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in 0).$

3: Es gilt 2"$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \bigcup 0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup 0) \Rightarrow (\alpha \notin \bigcup 0).$

Konsequenz via **0-19**: $\bigcup 0 = 0.$

b)

1: Es gilt: $(\bigcap 0 \neq \mathcal{U}) \vee (\bigcap 0 = \mathcal{U}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\bigcap 0 \neq \mathcal{U}.$

2: Aus `1.1.Fall` "$\bigcap 0 \neq \mathcal{U}$"
folgt via **0-21**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin \bigcap 0).$

3: Aus 2"$\ldots \Omega \notin \bigcap 0$" und
2"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt via **1-13**: $\exists \Psi : (\Psi \in 0) \wedge (\Omega \notin \Psi).$

4: Es gilt 3"$\ldots \Psi \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Psi \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\bigcap 0 = \mathcal{U}.$

`1.2.Fall` $\bigcap 0 = \mathcal{U}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\bigcap 0 = \mathcal{U}.$

Beweis **1-14** `c)`

`Thema1` α Menge.

`2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\alpha\}$ Menge.

`3.1:` Aus `Thema1`"α Menge"
folgt via **1-3**: $\alpha \in \{\alpha\}$.

`3.2:` Aus 2"$\{\alpha\}$ Menge"
folgt via **0-19**: $\{\alpha\} \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha \in \{\alpha\}$" und
aus `3.2`"$\{\alpha\} \in \mathcal{U}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \text{ Menge}) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-19**: $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`d)`

`1:` Es gilt: $(0 \neq \bigcap \mathcal{U}) \vee (\bigcap \mathcal{U} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \bigcap \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \bigcap \mathcal{U}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \bigcap \mathcal{U}$.

`2.2:` Via **0-18** gilt: $0 \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega \in \bigcap \mathcal{U}$" und
aus `2.2`"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via **1-13**: $\Omega \in 0$.

`4:` Es gilt 3"$\Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\bigcap \mathcal{U} = 0$.

`1.2.Fall` $\bigcap \mathcal{U} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\bigcap \mathcal{U} = 0$.

<u>Beweis **1-14**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \bigcup\{p\}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \bigcup\{p\}$”
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{p\})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \{p\}$”
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$” und
aus `3`“$\Omega = p$”
folgt: $\alpha \in p$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{p\}) \Rightarrow (\alpha \in p)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup\{p\} \subseteq p$

`g)` `VS` gleich p Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in p$.

`2:` Aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`3:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in p$” und
aus `2`“$p \in \{p\}$”
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup\{p\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup\{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} p \subseteq \bigcup\{p\} \text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\bigcup\{p\} \subseteq p$.

`2:` Aus `1.2`“$\bigcup\{p\} \subseteq p$” und
aus `A1` gleich “$p \subseteq \bigcup\{p\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup\{p\} = p$.

<u>Beweis **1-14** `f)`</u>

`Thema1` $\alpha \in p$.

`Thema2.1` $\beta \in \{p\}$.

`3:` Aus `Thema2.1` "$\beta \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $\beta = p$.

`4:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p$" und
aus `3` "$\beta = p$"
folgt: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `2.2` "α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap \{p\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $p \subseteq \bigcap \{p\}$

<u>Beweis **1-14**</u> `h)` `VS` gleich p Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \bigcap\{p\}$.
`2:` Aus `VS` gleich "p Menge" folgt via **1-3**:	$p \in \{p\}$.
`3:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \bigcap\{p\}$" und aus `2`"$p \in \{p\}$" folgt via **1-13**:	$\alpha \in p$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap\{p\}) \Rightarrow (\alpha \in p)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\bigcap\{p\} \subseteq p\text{"}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $p \subseteq \bigcap\{p\}$.

`2:` Aus `A1` gleich "$\bigcap\{p\} \subseteq p$" und
aus `1.2`"$p \subseteq \bigcap\{p\}$" folgt
via **GleichheitsAxiom**: $\bigcap\{p\} = p$.

`ij)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`2.1:` $\bigcup\{p\} \stackrel{1}{=} \bigcup 0 \stackrel{\text{a)}}{=} 0$.

`2.2:` $\bigcap\{p\} \stackrel{1}{=} \bigcap 0 \stackrel{\text{b)}}{=} \mathcal{U}$.

`3.i):` Aus `2.1`
folgt: $\bigcup\{p\} = 0$.

`3.j):` Aus `2.2`
folgt: $\bigcap\{p\} = \mathcal{U}$.

<u>Beweis</u> **1-14** `kl)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2.k):` Aus `1`“0 Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\bigcup\{0\} = 0$.

`2.l):` Aus `1`“0 Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\bigcap\{0\} = 0$.

`mn)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2.m):` Aus `1`“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\bigcup\{\mathcal{U}\} = 0$.

`2.n):` Aus `1`“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\bigcap\{\mathcal{U}\} = \mathcal{U}$.

$\square$

1-15. Weitere Eigenschaften von Vereinigung und Durchschnitt, im Vergleich mit **1-12** und **1-13** sozusagen "etwas höhere Algebra mit $\bigcup$ und $\bigcap$".
Interessanter Weise gilt "$\bigcap x \subseteq \bigcup x$" via **1-14** - wonach "$\bigcup 0 = 0$" und "$\bigcap 0 = \mathcal{U}$" - und via `c)` genau dann, wenn "$0 \neq x$":

1-15(Satz)

`a)` *Aus "$p \in x$" folgt "$\bigcap x \subseteq p$".*

`b)` *Aus "$p \in x$" folgt "$p \subseteq \bigcup x$".*

`c)` *Aus "$0 \neq x$" folgt "$\bigcap x \subseteq \bigcup x$".*

`d)` *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$\bigcup x \subseteq \bigcup y$".*

`e)` *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$\bigcap y \subseteq \bigcap x$".*

`f)` *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq w)$" folgt "$\bigcup x \subseteq w$".*

`g)` *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \subseteq \alpha)$" folgt "$w \subseteq \bigcap x$".*

`h)` *Aus "$p \in x$" und "$\bigcup x \subseteq w$" folgt "$p \subseteq w$".*

`i)` *Aus "$p \in x$" und "$w \subseteq \bigcap x$" folgt "$w \subseteq p$".*

`j)` *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists \beta : (\alpha \subseteq \beta) \wedge (\beta \in y))$" folgt "$\bigcup x \subseteq \bigcup y$".*

`k)` *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists \beta : (\beta \subseteq \alpha) \wedge (\beta \in y))$" folgt "$\bigcap y \subseteq \bigcap x$".*

Beweis **1-15** `a)` `VS` gleich $p \in x$.

`Thema1` $\alpha \in \bigcap x$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in \bigcap x$" und
aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in p$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap x) \Rightarrow (\alpha \in p)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcap x \subseteq p$.

Beweis **1-15** `b)` `VS` gleich $p \in x$.

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in p$.
>
> Aus `Thema1`"$\alpha \in p$" und
> aus `VS` gleich "$p \in x$"
> folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $p \subseteq \bigcup x$.

`c)` `VS` gleich $0 \neq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\bigcap x \subseteq \Omega$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\Omega \subseteq \bigcup x$.

`3:` Aus `2.1`"$\bigcap x \subseteq \Omega$" und
aus `2.2`"$\Omega \subseteq \bigcup x$"
folgt via **0-6**: $\bigcap x \subseteq \bigcup x$.

`d)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \bigcup x$.
>
> `2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \bigcup x$"
> folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.
>
> `3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x$" und
> aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
> folgt via **0-4**: $\Omega \in y$.
>
> `4:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
> aus `3`"$\Omega \in y$" und
> folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup x) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup x \subseteq \bigcup y$.

<u>Beweis **1-15**</u> `e)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \bigcap y$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta \in x$.

`3:` Aus `Thema2.1`“$\beta \in x$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y$”
folgt via **0-4**: $\beta \in y$.

`4:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \bigcap y$” und
aus `3`“$\beta \in y$”
folgt via **1-13**: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | “$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$”

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \bigcap y$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$” und
aus `2.2`“α Menge”
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap y) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcap y \subseteq \bigcap x$.

<u>Beweis **1-15** `f)`</u> `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq w)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \bigcup x$.

`2:` Aus `Thema1`"$\beta \in \bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega : (\beta \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq w)$"
folgt: $\Omega \subseteq w$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \beta \in \Omega \ldots$" und
aus `3`"$\Omega \subseteq w$"
folgt via **0-4**: $\beta \in w$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in \bigcup x) \Rightarrow (\beta \in w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup x \subseteq w$.

Beweis **1-15** `g)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \subseteq \alpha)$.

`Thema1` $\beta \in w$.

`Thema2.1` $\gamma \in x$.

`3:` Aus `Thema2.1`“$\gamma \in x$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (w \subseteq \alpha)$”
folgt: $w \subseteq \gamma$.

`4:` Aus `Thema1`“$\beta \in w$” und
aus `3`“$w \subseteq \gamma$”
folgt via **0-4**: $\beta \in \gamma$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | “$\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$”

`2.2:` Aus `Thema1`“$\beta \in w$”
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`3:` Aus `A1` gleich “$\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$” und
aus `2.2`“β Menge”
folgt via **1-13**: $\beta \in \bigcap x$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in w) \Rightarrow (\beta \in \bigcap x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $w \subseteq \bigcap x$.

Beweis **1-15** `h)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (\bigcup x \subseteq w)$.

`Thema1` $\alpha \in p$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p$" und
aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup x$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \bigcup x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \bigcup x \subseteq w$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in w$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p) \Rightarrow (\alpha \in w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $p \subseteq w$.

`i)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (w \subseteq \bigcap x)$.

`Thema1` $\alpha \in w$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \subseteq \bigcap x$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \bigcap x$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \bigcap x$" und
aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in p$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in w) \Rightarrow (\alpha \in p)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $w \subseteq p$.

Beweis **1-15** `j)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\beta : (\alpha \subseteq \beta) \wedge (\beta \in y))$.

`Thema1` $\gamma \in \bigcup x$.

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in \bigcup x$”
folgt via **1-12**: $\exists\Omega : (\gamma \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots\Omega \in x$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\beta : (\alpha \subseteq \beta) \wedge (\beta \in y))$”
folgt: $\exists\Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\Psi \in y)$.

`4:` Aus `2`“$\ldots\gamma \in \Omega\ldots$” und
aus `3`“$\ldots\Omega \subseteq \Psi\ldots$”
folgt via **0-4**: $\gamma \in \Psi$.

`5:` Aus `4`“$\gamma \in \Psi$” und
aus `3`“$\ldots\Psi \in y$”
folgt via **1-12**: $\gamma \in \bigcup y$.

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma : (\gamma \in \bigcup x) \Rightarrow (\gamma \in \bigcup y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup x \subseteq \bigcup y$.

Beweis **1-15** `k)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\beta : (\beta \subseteq \alpha) \wedge (\beta \in y)).$

`Thema1` $\gamma \in \bigcap y.$

`Thema2.1` $\delta \in x.$

`3:` Aus `Thema2.1`"$\delta \in x$" und
aus `VS` gleich
"$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\beta : (\beta \subseteq \alpha) \wedge (\beta \in y))$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \delta) \wedge (\Omega \in y).$

`4:` Aus `Thema1`"$\gamma \in \bigcap y$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in y$"
folgt via **1-13**: $\gamma \in \Omega.$

`5:` Aus `4`"$\gamma \in \Omega$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \subseteq \delta \ldots$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \delta.$

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall\delta : (\delta \in x) \Rightarrow (\gamma \in \delta)$"

`2.2:` Aus `Thema1`"$\gamma \in \bigcap y$"
folgt via **ElementAxiom**: γ Menge.

`3:` Aus `A1` gleich "$\forall\delta : (\delta \in x) \Rightarrow (\gamma \in \delta)$" und
aus `2.2`"γ Menge"
folgt via **1-13**: $\gamma \in \bigcap x.$

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma : (\gamma \in \bigcap y) \Rightarrow (\gamma \in \bigcap x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcap y \subseteq \bigcap x.$

$\square$

1-16. Die via **1-15** antizipierte Sonderrolle von "$\bigcap 0$" wird manifestiert. Bemerkenswerter Weise ist "$\bigcap x$ Unmenge" äquivalent zu "$\bigcap x = \mathcal{U}$" . Die hier auftretende Sonderrolle von $\mathcal{U}$ als Unmenge begegnet immer wieder:

1-16(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = 0$.

`ii)` $\bigcap x = \mathcal{U}$.

`iii)` $\bigcap x$ *Unmenge.*

Beweis **1-16** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x = 0$.

1: $\bigcap x \stackrel{\texttt{VS}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

2: Aus 1 folgt: $\bigcap x = \mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\bigcap x = \mathcal{U}$.

1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ eine Unmenge.

2: Aus `VS` gleich "$\bigcap x = \mathcal{U}$" und aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge" folgt: $\bigcap x$ Unmenge.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\bigcap x$ Unmenge.

1: Es gilt: $(0 \neq x) \vee (x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq x$.

2: Aus `1.1.Fall`"$0 \neq x$" folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

3.1: Aus 2"$\ldots \Omega \in x$" folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

3.2: Aus 2"$\ldots \Omega \in x$" folgt via **1-15**: $\bigcap x \subseteq \Omega$.

4: Aus 3.2"$\bigcap x \subseteq \Omega$" und aus 3.1"$\Omega$ Menge" folgt via **TeilmengenAxiom**: $\bigcap x$ Menge.

5: Es gilt 4"$\bigcap x$ Menge". Es gilt `VS` gleich "$\bigcap x$ Unmenge". Ex falso quodlibet folgt: $x = 0$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = 0$.

□

1-17. Interessanter Weise ist "$\bigcap x$" genau dann eine Menge, wenn "$0 \neq x$". Den Spezialfall "$\bigcap x \neq \mathcal{U}$" für "$0 \neq x$" kann gelassen zur Kenntnis genommen werden. **1-17** ergibt sich via Negation aus **1-16**:

1-17(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x$.

ii) $\bigcap x \neq \mathcal{U}$.

iii) $\bigcap x$ *Menge.*

Beweis **1-17**

1: Via **1-16** gilt: $(x = 0) \Leftrightarrow (\bigcap x = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\bigcap x \text{ Unmenge})$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x = 0)) \Leftrightarrow (\neg(\bigcap x = \mathcal{U})) \Leftrightarrow (\neg(\bigcap x \text{ Unmenge}))$.

3: Aus 2 folgt: $(0 \neq x) \Leftrightarrow (\bigcap x \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\bigcap x \text{ Menge})$.

$\square$

1-18. Sowohl **1-16** als auch **1-17** beziehen sich auf den Durchschnitt. Klarer Weise gibt es von beiden Aussagen auch "Vereinigungsversionen". Für uns ist nur die "Vereinigungsversion" von **1-16** von Interesse. Gleichsam als Nebenprodukt ergibt sich, dass "0" und "$\{0\}$" die einzigen TeilKlassen von "$\{0\}$" sind - womit **1-10** für "$\{0\}$" spezialisiert wird:

1-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\bigcup x = 0$.

`ii)` $x \subseteq \{0\}$.

`iii)` *"$x = 0$" oder "$x = \{0\}$".*

Beweis **1-18** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcup x = 0.$

`Thema1` $\alpha \in x.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x$"
folgt via **1-15**: $\alpha \subseteq \bigcup x.$

`3:` Aus `2`"$\alpha \subseteq \bigcup x$" und
aus `VS` gleich "$\bigcup x = 0$"
folgt: $\alpha \subseteq 0.$

`4:` Aus `3`"$\alpha \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\alpha = 0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = 0).$

Konsequenz via **1-10**: $x \subseteq \{0\}.$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x \subseteq \{0\}.$

Aus `VS` gleich "$x \subseteq \{0\}$"
folgt via **1-10**: $(x = 0) \vee (x = \{0\}).$

Beweis **1-18** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (x = \{0\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

2: Via **1-14** gilt: $\bigcup 0 = 0$.

3: Aus `1.1.Fall` "$x = 0$" und
aus 2 "$\bigcup 0 = 0$"
folgt: $\bigcup x = 0$.

`1.2.Fall` $x = \{0\}$.

2: Via **1-14** gilt: $\bigcup \{0\} = 0$.

3: Aus `1.2.Fall` "$x = \{0\}$" und
aus 2 "$\bigcup \{0\} = 0$"
folgt: $\bigcup x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\bigcup x = 0$.

□

1-19 Elementare Resultate über Vereinigung und Durchschnitt im Zusammenhang mit PotenzKlassen. Klarer Weise können `a)` und `c)` zu einer Äquivalenzaussage kombiniert werden. Bei einer Überarbeitung der Essays stellt sich aber heraus, dass dies die Lesbarkeit bei späterem Zitieren erschwert. Also werden gelegentlich Äquivalenzen in Folgerungen zerlegt.
Aus "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$" folgt nicht bedenkenlos "$\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$" - klarer Weise muss für diese Schlussfolgerung die Aussage "$\bigcup x$ Menge" gelten.
Da aus der Prämisse "$\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$" via **ElementAxiom** "$\bigcup x$ Menge" folgt, können `b)` und `d)` auch als Äquivalenz formuliert werden. Dass in `d)` auf die Schlussfolgerung "$\bigcup x$ Menge" verzichtet wird, liegt daran, dass die Angabe derart direkter Folgerungen aus dem **ElementAxiom** die Lesbarkeit erschweren und kaum etwas zum Verständnis beitragen.
In `ef)` tritt die Sonderrolle von $\bigcap 0$ auf: Nur wenn "$0 \neq x \subseteq \mathcal{P}(w)$" gilt, folgt bedenkenlos "$\bigcap x \subseteq w$" und "$\bigcap x \in \mathcal{P}(w)$" . Via `g)` ist - wenig überraschend - die Vereinigung von $\mathcal{P}(x)$ stets gleich x. Gemäß `h)` ist der Durchschnitt von $\mathcal{P}(x)$ gleich der leeren Menge - und dies ist auch im Fall "$x = 0$" gültig:

1-19(Satz)

`a)` *Aus "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$" folgt "$\bigcup x \subseteq w$".*

`b)` *Aus "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$" und "$\bigcup x$ Menge" folgt "$\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$".*

`c)` *Aus "$\bigcup x \subseteq w$" folgt "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$".*

`d)` *Aus "$\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$" folgt "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$".*

`e)` *Aus "$0 \neq x \subseteq \mathcal{P}(w)$" folgt "$\bigcap x \subseteq w$".*

`f)` *Aus "$0 \neq x \subseteq \mathcal{P}(w)$" folgt "$\bigcap x \in \mathcal{P}(w)$".*

`g)` $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$.

`h)` $\bigcap \mathcal{P}(x) = 0$.

<u>Beweis **1-19**</u> `a)` `VS` gleich $x \subseteq \mathcal{P}(w)$.

`Thema1`	$\alpha \in \bigcup x$.
`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \bigcup x$" folgt via **1-12**:	$\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.
`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x$" und aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$" folgt via **0-4**:	$\Omega \in \mathcal{P}(w)$.
`4:` Aus `3`"$\Omega \in \mathcal{P}(w)$" folgt via **0-26**:	$\Omega \subseteq w$.
`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und aus `4`"$\Omega \subseteq w$" folgt via **0-4**:	$\alpha \in w$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup x) \Rightarrow (\alpha \in w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup x \subseteq w$.

`b)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathcal{P}(w)) \wedge (\bigcup x \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathcal{P}(w) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\bigcup x \subseteq w$.

`2:` Aus `1`"$\bigcup x \subseteq w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \bigcup x$ Menge"
folgt via **0-26**: $\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$.

<u>Beweis **1-19**</u> `c)` `VS` gleich $\bigcup x \subseteq w$.

`Thema1` $\alpha \in x$.

`Thema2.1` $\beta \in \alpha$.

Aus `Thema2.1`"$\beta \in \alpha$" und
aus `Thema1`"$\alpha \in x$"
folgt via **1-12**: $\beta \in \bigcup x$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \beta : (\beta \in \alpha) \Rightarrow (\beta \in \bigcup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\alpha \subseteq \bigcup x$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$\alpha \subseteq \bigcup x$" und
aus `VS` gleich "$\bigcup x \subseteq w$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq w$.

`2.3:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2.2`"$\alpha \subseteq w$" und
aus `2.3`"α Menge"
folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(w)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(w))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathcal{P}(w)$.

`d)` `VS` gleich $\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$"
folgt via **0-26**: $\bigcup x \subseteq w$.

`2:` Aus `1`"$\bigcup x \subseteq w$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \subseteq \mathcal{P}(w)$.

Beweis **1-19** `e)` `VS` gleich $0 \neq x \subseteq \mathcal{P}(w)$.

`Thema1` $\alpha \in \bigcap x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \ldots$” folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`3.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \bigcap x$” und aus `2`“$\ldots \Omega \in x$” folgt via **1-13**: $\alpha \in \Omega$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x$” und aus `VS` gleich “$\ldots x \subseteq \mathcal{P}(w)$” folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathcal{P}(w)$.

`4:` Aus `3.2`“$\Omega \in \mathcal{P}(w)$” folgt via **0-26**: $\Omega \subseteq w$.

`5:` Aus `3.1`“$\alpha \in \Omega$” und aus `4`“$\Omega \subseteq w$” folgt via **0-4**: $\alpha \in w$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap x) \Rightarrow (\alpha \in w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcap x \subseteq w$.

`f)` `VS` gleich $0 \neq x \subseteq \mathcal{P}(w)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \subseteq \mathcal{P}(w)$” folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\bigcap x \subseteq w$.

`1.2:` Aus →) “$0 \neq x \ldots$” folgt via **1-17**: $\bigcap x$ Menge.

`2:` Aus `1.1`“$\bigcap x \subseteq w$” und aus `1.2`“$\bigcap x$ Menge” folgt via **0-26**: $\bigcap x \in \mathcal{P}(w)$.

Beweis **1-19** `g)`

`1.1:` Via **0-6** gilt: $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: `A1` "$\bigcup \mathcal{P}(x) \subseteq x$"

`Thema1.2` $\alpha \in x$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
folgt via **1-8**: $\{\alpha\} \in \mathcal{P}(x)$.

`3.1:` Aus `2.1`"α Menge"
folgt via **1-3**: $\alpha \in \{\alpha\}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\{\alpha\} \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **1-15**: $\{\alpha\} \subseteq \bigcup \mathcal{P}(x)$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha \in \{\alpha\}$" und
aus `3.2`"$\{\alpha\} \subseteq \bigcup \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \bigcup \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup \mathcal{P}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$x \subseteq \bigcup \mathcal{P}(x)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\bigcup \mathcal{P}(x) \subseteq x$" und
aus `A2` gleich "$x \subseteq \bigcup \mathcal{P}(x)$" folgt
via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$.

`h)`

`1:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1`"$0 \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **1-15**: $\bigcap \mathcal{P}(x) \subseteq 0$.

`3:` Aus `2`"$\bigcap \mathcal{P}(x) \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\bigcap \mathcal{P}(x) = 0$.

□

1-20. Im Spezialfall "w Menge" folgt aus "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$" stets "$\bigcup x$ Menge" und somit via **1-19** auch "$\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$".
Eine weitere Prämisse - nämlich "x Menge" - für die selben Schlussfolgerungen stünde zur Verfügung, wenn das "**VereinigungsAxiom**" - wonach für jede Menge "x" auch "$\bigcup x$" eine Menge ist - in die Essays einführt worden wäre. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

1-20(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \subseteq \mathcal{P}(w)$.

$\rightarrow$) w *Menge.*

Dann folgt:

`a)` $\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$.

`b)` $\bigcup x$ *Menge.*

Beweis **1-20**

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup x \subseteq w$.

`2.b):` Aus 1 "$\bigcup x \subseteq w$" und
aus $\rightarrow$) "w Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\bigcup x$ Menge.

`3.a):` Aus $\rightarrow$) "$x \subseteq \mathcal{P}(w)$" und
aus 2 "$\bigcup x$ Menge"
folgt via **1-19**: $\bigcup x \in \mathcal{P}(w)$.

$\square$

Binäre Vereinigung. $x \cup y$.
Binärer Durchschnitt. $x \cap y$.
KommutativGesetz $\cup$. **KG**$\cup$.
KommutativGesetz $\cap$. **KG**$\cap$.
AssoziativGesetz $\cup$. **AG**$\cup$.
AssoziativGesetz $\cap$. **AG**$\cap$.
Binäres SchubfachPrinzip.
$\cup$**Axiom**.
DistributivGesetze $\cap\cup$. **DG**$\cap\cup$.
DistributivGesetze $\cup\cap$. **DG**$\cup\cap$.
VerschmelzungsGesetz $\cup\cap$. **VG**$\cup\cap$.
VerschmelzungsGesetz $\cap\cup$. **VG**$\cap\cup$.
$\cup$**LokalisierungsRegel**.

Ersterstellung: 07/09/05 **Letzte Änderung: 09/06/11**

2-1. In **#1** werden Vereinigung und Durchschnitt *einer Klasse* in die Essays eingebracht. Nun werden *binäre* Vereinung und *binärer* Durchschnitt *zweier Klassen* definiert:

2-1(Definition)

1) $x \cup y$

$$= 2.0(x, y) = \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **binäre Vereinigung von** x **und** y"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x \cup y.$$

3) $x \cap y$

$$= 2.1(x, y) = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}.$$

4) "$\mathfrak{C}$ **binärer Durchschnitt von** x **und** y"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x \cap y.$$

2-2. Eine Zusammenfassung elementarer Eigenschaften der binären Vereinigung und des binären Durchschnitts. Klarer Weise könnten `cde)` zu einer Äquivalenz ausgebaut werden. Mangels Bedeutung für das Weitere wird hierauf verzichtet. Ähnlich verhält es sich bei `ijk)`. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - d) - e) - f) - g) - h) - i) - l) - j) - k)`:

2-2(Satz)

a) *$x \cup y$ binäre Vereinigung von x und y.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ binäre Vereinigung von x und y" und "$\mathfrak{D}$ binäre Vereinigung von x und y" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

c) *Aus "$p \in x \cup y$" folgt "$p \in x$" oder "$p \in y$".*

d) *Aus "$p \in x$" folgt "$p \in x \cup y$".*

e) *Aus "$p \in y$" folgt "$p \in x \cup y$".*

f) *Aus "$p \in x$" oder "$p \in y$" folgt "$p \in x \cup y$".*

g) *$x \cap y$ binärer Durchschnitt von x und y.*

h) *Aus "$\mathfrak{C}$ binärer Durchschnitt von x und y" und "$\mathfrak{D}$ binärer Durchschnitt von x und y" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

i) *Aus "$p \in x$" und "$p \in y$" folgt "$p \in x \cap y$".*

j) *Aus "$p \in x \cap y$" folgt "$p \in x$".*

k) *Aus "$p \in x \cap y$" folgt "$p \in y$".*

l) *Aus "$p \in x \cap y$" folgt "$p \in x$" und "$p \in y$".*

<u>Beweis **2-2**</u> `a)`

Aus "$x \cup y = x \cup y$"
folgt via **2-1(Def)**: $x \cup y$ binäre Vereinigung von x und y.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ binäre Vereinigung von x und y)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ binäre Vereinigung von x und y).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ binäre Vereinigung von x und y ..."
folgt via **2-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x \cup y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... $\mathfrak{D}$ binäre Vereinigung von x und y"
folgt via **2-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x \cup y$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = x \cup y$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = x \cup y$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $p \in x \cup y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cup y$" und
aus "$x \cup y = \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p \in x) \vee (p \in y)$.

`d)` `VS` gleich $p \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $(p \in x) \vee (p \in y)$.

`2:` Aus `1.2`"$(p \in x) \vee (p \in y)$" und
aus `1.1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$" und
aus "$x \cup y = \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$"
folgt: $p \in x \cup y$.

<u>Beweis</u> **2-2** `e)` `VS` gleich $p \in y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in y$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $(p \in x) \vee (p \in y)$.

`2:` Aus `1.2`"$(p \in x) \vee (p \in y)$" und
aus `1.1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$" und
aus "$x \cup y = \{\omega : (\omega \in x) \vee (\omega \in y)\}$"
folgt: $p \in x \cup y$.

`f)` `VS` gleich $(p \in x) \vee (p \in y)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p \in x) \vee (p \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in x$.

Aus `1.1.Fall`"$p \in x$"
folgt via dem bereits bewiesenen `d)`: $p \in x \cup y$.

`1.2.Fall` $p \in y$.

Aus `1.2.Fall`"$p \in y$"
folgt via dem bereits bewiesenen `e)`: $p \in x \cup y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \in x \cup y$.

<u>Beweis **2-2**</u> `g)`

Aus “$x \cap y = x \cap y$”
folgt via **2-1(Def)**: $x \cap y$ binärer Durchschnitt von x und y.

`h)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ binärer Durchschnitt von x und y)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ binärer Durchschnitt von x und y).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ binärer Durchschnitt von x und $y \ldots$”
folgt via **2-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x \cap y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots \mathfrak{D}$ binärer Durchschnitt von x und y”
folgt via **2-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x \cap y$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathfrak{C} = x \cap y$” und
aus `1.2`“$\mathfrak{D} = x \cap y$”
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`i)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$(p \in x) \wedge (p \in y)$” und
aus `1`“p Menge”
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}$.

`3:` Aus `2`“$p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}$” und
aus “$x \cap y = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}$”
folgt: $p \in x \cap y$.

`ljk)` `VS` gleich $p \in x \cap y$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in x \cap y$” und
aus “$x \cap y = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}$.

`2.l):` Aus `1`“$p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \in y)\}$”
folgt: $(p \in x) \wedge (p \in y)$.

`3.j):` Aus `2.l)`
folgt: $p \in x$.

`3.k):` Aus `2.l)`
folgt: $p \in y$.

$\square$

2-3. ... ist eine im Folgenden immer wieder verwendete Negations-Version von **2-2**, mit der notwendige und hinreichende Bedingungen pur Verfügung stehen, wann eine Klasse *nicht* in der binären Vereinigung/dem binären Durchschnitt pweier Klassen liegt:

2-3(Satz)

a) *Aus* "$p \notin x \cup y$" *folgt* "$p \notin x$".

b) *Aus* "$p \notin x \cup y$" *folgt* "$p \notin y$".

c) *Aus* "$p \notin x$" *und* "$p \notin y$" *folgt* "$p \notin x \cup y$".

d) *Aus* "$p \notin x \cap y$" *folgt* "$p \notin x$" *oder* "$p \notin y$".

e) *Aus* "$p \notin x$" *folgt* "$p \notin x \cap y$".

f) *Aus* "$p \notin y$" *folgt* "$p \notin x \cap y$".

Beweis **2-3** ab)

1.1: Via **2-2** gilt: $(p \in x) \Rightarrow (p \in x \cup y)$.

1.2: Via **2-2** gilt: $(p \in y) \Rightarrow (p \in x \cup y)$.

2.1: Aus 1.1
folgt: $(\neg(p \in x \cup y)) \Rightarrow (\neg(p \in x))$.

2.2: Aus 1.2
folgt: $(\neg(p \in x \cup y)) \Rightarrow (\neg(p \in y))$.

3.a): Aus 2.1
folgt: $(p \notin x \cup y) \Rightarrow (p \notin x)$.

3.b): Aus 2.2
folgt: $(p \notin x \cup y) \Rightarrow (p \notin y)$.

Beweis **2-3** c)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in x \cup y) \Rightarrow ((p \in x) \vee (p \in y))$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg((p \in x) \vee (p \in y))) \Rightarrow (\neg(p \in x \cup y))$.

3: Aus 2
folgt: $((\neg(p \in x) \wedge (\neg(p \in y)))) \Rightarrow (\neg(p \in x \cup y))$.

4: Aus 3
folgt: $((p \notin x) \wedge (p \notin y)) \Rightarrow (p \notin x \cup y)$.

d)

1: Via **2-2** gilt: $((p \in x) \wedge (p \in y)) \Rightarrow (p \in x \cap y)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in x \cap y)) \Rightarrow (\neg((p \in x) \wedge (p \in y)))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin x \cap y) \Rightarrow ((\neg(p \in x)) \vee (\neg(p \in y)))$.

4: Aus 3
folgt: $(p \notin x \cap y) \Rightarrow ((p \notin x) \vee (p \notin y))$.

e)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in x \cap y) \Rightarrow (p \in x)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in x)) \Rightarrow (\neg(p \in x \cap y))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin x) \Rightarrow (p \notin x \cap y)$.

f)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in x \cap y) \Rightarrow (p \in y)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in y)) \Rightarrow (\neg(p \in x \cap y))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin y) \Rightarrow (p \notin x \cap y)$.

$\square$

2-4. Die **KommutativGesetze** $\cup$ **und** $\cap$ sagen aus, dass die Vereinigung von "x" und "y" gleich der Vereinigung von "y" und "x" ist und dass der Durchschnitt von "x" und "y" gleich dem Durchschnitt von "y" und "x" ist.
Diese VertauschungsRegeln - die im Folgenden als "**KG**$\cup$" und "**KG**$\cap$" zitiert werden - erfordern einen relativ langatmigen Beweis, der auf das **Gleichheits-Axiom** zurück greifen muss:

2-4(Satz) (**KG**$\cup$**: KommutativGesetz** $\cup$,
KG$\cap$**: KommutativGesetz** $\cap$)

a) $x \cup y = y \cup x$.

b) $x \cap y = y \cap x$.

Beweis **2-4** a)

`Thema1.1` $\alpha \in x \cup y$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in x$.

Aus `2.1.Fall` "$\alpha \in x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in y \cup x$.

`2.2.Fall` $\alpha \in y$.

Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in y \cup x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in y \cup x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in y \cup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \cup y \subseteq y \cup x$"

Beweis **2-4** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in y \cup x$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in y \cup x$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \vee (\alpha \in x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in y$.

Aus `2.1.Fall` "$\alpha \in y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup y$.

`2.2.Fall` $\alpha \in x$.

Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in x \cup y$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in y \cup x) \Rightarrow (\alpha \in x \cup y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \cup y \subseteq y \cup x$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \cup y \subseteq y \cup x$" und
aus `A2` gleich "$y \cup x \subseteq x \cup y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cup y = y \cup x$.

<u>Beweis **2-4**</u> `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in x \cap y.$

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x \cap y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x.$

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x \cap y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in y.$

`3:` Aus `2.1`“$\alpha \in x$” und
aus `2.2`“$\alpha \in y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in y \cap x.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap y) \Rightarrow (\alpha \in y \cap x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$x \cap y \subseteq y \cap x$”

`Thema1.2` $\alpha \in y \cap x.$

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in y \cap x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in y.$

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in y \cap x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x.$

`3:` Aus `2.2`“$\alpha \in x$” und
aus `2.1`“$\alpha \in y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap y.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y \cap x) \Rightarrow (\alpha \in x \cap y).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` “$y \cap x \subseteq x \cap y$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$x \cap y \subseteq y \cap x$” und
aus `A2` gleich “$y \cap x \subseteq x \cap y$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cap y = y \cap x.$

□

2-5. Die **AssoziativGesetze** $\cup$ **und** $\cap$ sagen aus, dass bei der Bildung der binären Vereinigung/des binären Durchschnitts von drei Klassen umgeklammert werden kann. Das AssoziativGesetz $\cup$ wird im Folgenden mit "**AG**$\cup$" zitiert und das AssoziativGesetz $\cap$ wird im Folgenden mit "**AG**$\cap$" zitiert.
Der Beweis beruht auf korrespondierenden "AssoziativEigenschaften" der logischen Verknüpfungen "$\vee$" und "$\wedge$". Die Langatmigkeit der Beweisführung ist der Notwendigkeit, auf das **GleichheitsAxiom** zurück greifen zu müssen geschuldet:

2-5(Satz) (AG$\cup$: AssoziativGesetz $\cup$, AG$\cap$: AssoziativGesetz $\cap$)

a) $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z.$

b) $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z.$

Beweis **2-5** a)

Thema1.1 $\qquad \alpha \in x \cup (y \cup z).$

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in x \cup (y \cup z)$"
folgt via **2-2**: $\qquad (\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cup z).$

3: Aus 2 "$(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cup z)$"
folgt via **2-2**: $\qquad (\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z)).$

4: Aus 3
folgt: $\qquad ((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \vee (x \in z).$

5: Aus 4 "$((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \vee (\alpha \in z)$"
folgt via **2-2**: $\qquad (\alpha \in x \cup y) \vee (\alpha \in z).$

6: Aus 5 "$(\alpha \in x \cup y) \vee (\alpha \in z)$"
folgt via **2-2**: $\qquad \alpha \in (x \cup y) \cup z.$

Ergo Thema1.1: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in x \cup (y \cup z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cup y) \cup z).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ A1 | "$x \cup (y \cup z) \subseteq (x \cup y) \cup z$"

Beweis **2-5** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in (x \cup y) \cup z.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (x \cup y) \cup z$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cup y) \vee (\alpha \in z).$

`3:` Aus `2`"$(\alpha \in x \cup y) \vee (\alpha \in z)$"
folgt via **2-2**: $((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \vee (\alpha \in z).$

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z)).$

`5:` Aus `4`"$(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z))$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cup z).$

`6:` Aus `5`"$(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cup z)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup (y \cup z).$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y) \cup z) \Rightarrow (\alpha \in x \cup (y \cup z)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$(x \cup y) \cup z \subseteq x \cup (y \cup z)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \cup (y \cup z) \subseteq (x \cup y) \cup z$" und
aus `A2` gleich "$(x \cup y) \cup z \subseteq x \cup (y \cup z)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z.$

<u>Beweis **2-5** `b)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x \cap (y \cap z)$.

`2:` Aus `Thema1.1` “$\alpha \in x \cap (y \cap z)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cap z)$.

`3:` Aus `2` “$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cap z)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge ((\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y)) \wedge (\alpha \in z)$.

`5:` Aus `4` “$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y)) \wedge (\alpha \in z)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cap y) \wedge (\alpha \in z)$.

`6:` Aus `5` “$(\alpha \in x \cap y) \wedge (\alpha \in z)$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x \cap y) \cap z$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap (y \cap z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y) \cap z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$x \cap (y \cap z) \subseteq (x \cap y) \cap z$”

Beweis **2-5** `b)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in (x \cap y) \cap z$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (x \cap y) \cap z$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cap y) \wedge (\alpha \in z)$.

`3:` Aus `2`"$(\alpha \in x \cap y) \wedge (\alpha \in z)$"
folgt via **2-2**: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y)) \wedge (\alpha \in z)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \in x) \wedge ((\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z))$.

`5:` Aus `4`"$(\alpha \in x) \wedge ((\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z))$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cap z)$.

`6:` Aus `5`"$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cap z)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap (y \cap z)$.

Ergo `Thema1.2`":" $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cap y) \cap z) \Rightarrow (\alpha \in x \cap (y \cap z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$(x \cap y) \cap z \subseteq x \cap (y \cap z)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \cap (y \cap z) \subseteq (x \cap y) \cap z$" und
aus `A2` gleich "$(x \cap y) \cap z \subseteq x \cap (y \cap z)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.

$\square$

2-6. So trivial das **Binäre SchubfachPrinzip** auch ist, es kürzt in dieser knackigen Formulierung spätere Beweise deutlich ab, da der zu Grunde liegende - triviale - logische Schluss nicht mehr ausgeführt werden muss:

2-6(Satz) (Binäres SchubfachPrinzip)

a) *Aus* "$p \in x \cup y$" *und* "$p \notin x$" *folgt* "$p \in y$".

b) *Aus* "$p \in x$" *und* "$p \notin x \cap y$" *folgt* "$p \notin y$".

Beweis **2-6** a) VS gleich $(p \in x \cup y) \wedge (p \notin x)$.

1: Aus VS gleich "$p \in x \cup y \ldots$"
folgt via **2-2**: $(p \in x) \vee (p \in y)$.

2: Aus 1"$(p \in x) \vee (p \in y)$" und
aus VS gleich "$\ldots p \notin x$"
folgt: $p \in y$.

b) VS gleich $(p \in x) \wedge (p \notin x \cap y)$.

1: Es gilt: $(p \in y) \vee (p \notin y)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in y$.

2: Aus VS gleich "$p \in x \ldots$" und
aus 1.1.Fall"$p \in y$"
folgt via **2-2**: $p \in x \cap y$.

3: Es gilt 2"$p \in x \cap y$".
Es gilt VS gleich "$\ldots p \notin x \cap y$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin y$.

1.2.Fall $p \notin y$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $p \notin y$.

□

2-7. Wird eine Klasse mit einer anderen Klasse binär vereinigt, so entsteht eine grössere Klasse. Wird eine Klasse mit einer anderen Klasse binär geschnitten, so entsteht eine kleinere Klasse. Der binärer Durchschnitt zweier Klassen ist eine TeilKlasse der binären Vereinigung dieser beiden Klassen:

2-7(Satz)

a) *“$x \subseteq x \cup y$” und “$y \subseteq x \cup y$”.*

b) *“$x \cap y \subseteq x$” und “$x \cap y \subseteq y$”.*

c) $x \cap y \subseteq x \cup y$.

Beweis **2-7** a)

`Thema1.1` $\alpha \in x$.

Aus `Thema1.1` “$\alpha \in x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup y$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in x \cup y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$x \subseteq x \cup y$”

`Thema1.2` $\alpha \in y$.

Aus `Thema1.2` “$\alpha \in y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup y$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \in x \cup y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$y \subseteq x \cup y$”

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: $(x \subseteq x \cup y) \wedge (y \subseteq x \cup y)$.

Beweis **2-7** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in x \cap y.$
Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x \cap y$” folgt via **2-2**:	$\alpha \in x.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap y) \Rightarrow (\alpha \in x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x \cap y \subseteq x\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in x \cap y.$
Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x \cap y$” folgt via **2-2**:	$\alpha \in y.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap y) \Rightarrow (\alpha \in y).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}x \cap y \subseteq y\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: $(x \cap y \subseteq x) \wedge (x \cap y \subseteq y).$

`c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x \cap y \subseteq x.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \subseteq x \cup y.$

`2:` Aus `1.1`“$x \cap y \subseteq x$” und
aus `1.2`“$x \subseteq x \cup y$”
folgt via **0-6**: $x \cap y \subseteq x \cup y.$

$\square$

Gemäß **2-7** wird aus einer Klasse durch binäre Vereinigung mit einer anderen Klasse eine größere Klasse. Somit ist auf Grund der bisherigen Axiome im Umgang mit "Menge" nicht zu entscheiden, ob auf diese Weise aus der binären Vereinigung zweier Mengen eine Unmenge entstehen kann oder nicht. Dass dies nicht der Fall ist sagt das $\cup$**Axiom** aus:

$\cup$**Axiom**

Aus "x Menge" und "y Menge" folgt "$x \cup y$ Menge".

2-8. Als unmittelbare Konsequenz aus dem $\cup$**Axiom** kann festgehalten werden, dass durch die binäre Vereinigung zweier Klassen nur dann eine Unmenge entstehen kann, wenn wenigstens eine der beteiligten Klassen eine Unmenge ist:

2-8(Satz)

Aus "$x \cup y$ Unmenge" folgt "x Unmenge" oder "y Unmenge".

Beweis **2-8**

1: Via $\cup$**Axiom** gilt: $((x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})) \Rightarrow (x \cup y \text{ Menge}).$

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x \cup y \text{ Menge})) \Rightarrow (\neg((x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge}))).$

3: Aus 2 folgt: $(x \cup y \text{ Unmenge}) \Rightarrow ((\neg(x \text{ Menge})) \vee (\neg(y \text{ Menge}))).$

4: Aus 3 folgt: $(x \cup y \text{ Unmenge}) \Rightarrow ((x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge})).$

□

2-9. Eine Zusammenstellung elementarer "MontonieEigenschaften" der binären Vereinigungs- und Durchschnittsbildung:

2-9(Satz)

a) *Aus* "$x \cup y \subseteq z$" *folgt* "$x \subseteq z$" *und* "$y \subseteq z$".

b) *Aus* "$z \subseteq x \cap y$" *folgt* "$z \subseteq x$" *und* "$z \subseteq y$".

c) *Aus* "$0 \neq z \subseteq x \cap y$" *folgt* "$0 \neq z \subseteq x$" *und* "$0 \neq z \subseteq y$".

Beweis **2-9** a) VS gleich $x \cup y \subseteq z$.

1.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

1.2: Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

2.1: Aus 1.1 "$x \subseteq x \cup y$" und
aus VS gleich "$x \cup y \subseteq z$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq z$.

2.2: Aus 1.2 "$y \subseteq x \cup y$" und
aus VS gleich "$x \cup y \subseteq z$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq z$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq z)$.

b) VS gleich $z \subseteq x \cap y$.

1.1: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

1.2: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

2.1: Aus VS gleich "$z \subseteq x \cap y$" und
aus 1.1 "$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $z \subseteq x$.

2.2: Aus VS gleich "$z \subseteq x \cap y$" und
aus 1.2 "$x \cap y \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $z \subseteq y$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(z \subseteq x) \wedge (z \subseteq y)$.

<u>Beweis</u> **2-9** `c)` `VS` gleich $0 \neq z \subseteq x \cap y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq x \cap y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $z \subseteq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq x \cap y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $z \subseteq y$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq z \ldots$" und
aus `1.1`"$z \subseteq x$"
folgt: $0 \neq z \subseteq x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq z \ldots$" und
aus `1.2`"$z \subseteq y$"
folgt: $0 \neq z \subseteq y$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(0 \neq z \subseteq x) \wedge (0 \neq z \subseteq y)$.

□

2-10. Das "TeilKlassenSein" ist mit binärer Vereinigungs- und Durchschnittsbildung verknüpft:

2-10(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v) *sind äquivalent:*

i) $x \subseteq y$.

ii) $x \cup y = y$.

iii) $y \cup x = y$.

iv) $x \cap y = x$.

v) $y \cap x = x$.

Beweis **2-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x \cup y$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\alpha \in x$.

Aus `2.1.Fall`"$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\alpha \in y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\alpha \in y$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \cup y \subseteq y$"

`1.2:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq y \cup x$.

`2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`3:` Aus `1.2`"$y \subseteq y \cup x$" und
aus `2`"$y \cup x = x \cup y$"
folgt: $y \subseteq x \cup y$.

`4:` Aus `A1` gleich "$x \cup y \subseteq y$" und
aus `3`"$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cup y = y$.

Beweis **2-10** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \cup y = y$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`2:` Aus `1`"$y \cup x = x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y = y$"
folgt: $y \cup x = y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $y \cup x = y$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x \cap y \subseteq x\text{”}}$

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
> folgt via **2-2**: $\alpha \in y \cup x$.
>
> `3:` Aus `2`"$\alpha \in y \cup x$" und
> aus `VS` gleich "$y \cup x = y$"
> folgt: $\alpha \in y$.
>
> `4:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$" und
> aus `3`"$\alpha \in y$"
> folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap y$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in x \cap y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}x \subseteq x \cap y\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \cap y \subseteq x$" und
aus `A2` gleich "$x \subseteq x \cap y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cap y = x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $x \cap y = x$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap x = x \cap y$.

`2:` Aus `1`"$y \cap x = x \cap y$" und
aus `VS` gleich "$x \cap y = y$"
folgt: $y \cap x = y$.

Beweis **2-10** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $y \cap x = x$.

`1`: Via **2-7** gilt: $y \cap x \subseteq y$.

`2`: Aus `VS` gleich “$y \cap x = x$” und
aus `1`“$y \cap x \subseteq y$”
folgt: $x \subseteq y$.

$\square$

2-11. Es wird der Vollständigkeit halber die NegationsVersion von **2-10** angegeben:

2-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \not\subseteq y$.

`ii)` $x \cup y \neq y$.

`iii)` $y \cup x \neq y$.

`iv)` $x \cap y \neq x$.

`v)` $y \cap x \neq x$.

Beweis **2-11**

`1:` Via **2-10** gilt:

$$(x \subseteq y) \Leftrightarrow (x \cup y = y) \Leftrightarrow (y \cup x = y) \Leftrightarrow (x \cap y = x) \Leftrightarrow (y \cap x = x).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(x \subseteq y)) \Leftrightarrow (\neg(x \cup y = y)) \Leftrightarrow (\neg(y \cup x = y)) \Leftrightarrow (\neg(x \cap y = x)) \Leftrightarrow (\neg(y \cap x = x)).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$(\neg(x \subseteq y)) \Leftrightarrow (x \cup y \neq y) \Leftrightarrow (y \cup x \neq y) \Leftrightarrow (x \cap y \neq x) \Leftrightarrow (y \cap x \neq x).$$

`4:` Aus `3`
folgt via **0-3**:

$$(x \not\subseteq y) \Leftrightarrow (x \cup y \neq y) \Leftrightarrow (y \cup x \neq y) \Leftrightarrow (x \cap y \neq x) \Leftrightarrow (y \cap x \neq x).$$

$\square$

2-12. Die binäre Vereinigung zweier (nicht notwendiger Weise verschiedener) TeilKlassen von “y” ist eine TeilKlasse von y.
Ist “x” eine TeilKlasse zweier (nicht notwendiger Weise verschiedener) Klassen, so ist x eine TeilKlasse des binären Durchschnitts dieser Klasse(n):

2-12(Satz)

a) *Aus* “$x \subseteq z$” *und* “$y \subseteq z$” *folgt* “$x \cup y \subseteq z$”.

b) *Aus* “$z \subseteq x$” *und* “$z \subseteq y$” *folgt* “$z \subseteq x \cap y$”.

Beweis **2-12** `a)` `VS` gleich $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq z)$.

`Thema1` $\alpha \in x \cup y$.

`2:` Aus `Thema1` “$\alpha \in x \cup y$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in x$.

Aus `2.1.Fall` “$\alpha \in x$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq z \ldots$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2.Fall` $\alpha \in y$.

Aus `2.2.Fall` “$\alpha \in y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in z$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \cup y \subseteq z$.

Beweis **2-12** `b)` `VS` gleich $(z \subseteq x) \wedge (z \subseteq y)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in z$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in z$” und
aus `VS` gleich “$z \subseteq x \ldots$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in x$.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in z$” und
aus `VS` gleich “$\ldots z \subseteq y$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in y$.

`3:` Aus `2.1`“$\alpha \in x$” und
aus `2.2`“$\alpha \in y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in x \cap y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $z \subseteq x \cap y$.

$\square$

2-13. Weitere "MonotonieEigenschaften" von binärer Vereinigung und binärem Durchschnitt:

2-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \subseteq z$.

$\rightarrow$) $y \subseteq w$.

Dann folgt:

a) $x \cup y \subseteq z \cup w$.

b) $x \cap y \subseteq z \cap w$.

Beweis **2-13** `a)`

`Thema1` $\alpha \in x \cup y$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in x$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$\alpha \in x$" und
aus →) "$x \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`4:` Aus `3` "$\alpha \in z$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in z \cup w$.

`2.2.Fall` $\alpha \in y$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in y$" und
aus →) "$y \subseteq w$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in w$.

`4:` Aus `3` "$\alpha \in w$"
folgt via **2-2**: $x \in z \cup w$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in z \cup w$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in z \cup w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \cup y \subseteq z \cup w$.

<u>Beweis **2-13**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x \cap y$.
`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \cap y$” folgt via **2-2**:	$\alpha \in x$.
`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \cap y$” folgt via **2-2**:	$\alpha \in y$.
`3.1:` Aus `2.1`“$\alpha \in x$” und aus →) “$x \subseteq z$” folgt via **0-4**:	$\alpha \in z$.
`3.2:` Aus `2.2`“$\alpha \in y$” und aus →) “$y \subseteq w$” folgt via **0-4**:	$\alpha \in w$.
`4:` Aus `3.1`“$\alpha \in z$” und aus `3.2`“$\alpha \in w$” folgt via **2-2**:	$\alpha \in z \cap w$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap y) \Rightarrow (\alpha \in z \cap w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \cap y \subseteq z \cap w$.

□

2-14. Die binäre Vereinigung von "x" und "x" und der binärer Durchschnitt von "x" und "x" ist jeweils "x" . Für diese nicht allzu unerwarteten Aussagen findet sich dank der Vorarbeiten ein rascher Beweis - womit sich das lange Warten vielleicht gelohnt hat:

2-14(Satz)

a) $x \cup x = x$.

b) $x \cap x = x$.

Beweis **2-14**

1: Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

2.a): Aus 1"$x \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $x \cup x = x$.

2.b): Aus 1"$x \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $x \cap x = x$.

□

2-15. Das “TeilKlassenSein” vererbt sich sowohl gegenüber binärer Vereinigung als auch gegenüber binärem Durchschnitt “auf beiden Seiten der Inklusion” :

2-15(Satz)

Es gelte:

→) $x \subseteq z$.

Dann folgt:

a) $x \cup y \subseteq z \cup y$.

b) $x \cap y \subseteq z \cap y$.

<u>Beweis **2-15**</u> `a)`

`Thema1` $\alpha \in x \cup y$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in x$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$\alpha \in x$" und
aus →) "$x \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in z$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in z \cup y$.

`2.2.Fall` $\alpha \in y$.

Aus `2.2.Fall`"$\alpha \in y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in z \cup y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in z \cup y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in z \cup y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \cup y \subseteq z \cup y$.

<u>Beweis **2-15** `b)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \cap y.$

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \cap y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x.$

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \cap y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in y.$

`3:` Aus `2.1`"$\alpha \in x$" und
aus →)"$x \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z.$

`4:` Aus `3`"$\alpha \in z$" und
aus `2.2`"$\alpha \in y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in z \cap y.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap y) \Rightarrow (\alpha \in z \cap y).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \cap y \subseteq z \cap y.$

$\square$

2-16. Zwei im Hinblick darauf, dass durch binäres Vereinigen eine Klasse grösser, aber durch binäres Schneiden eine Klasse kleiner wird, wenig überraschende Aussagen:

2-16(Satz)

Es gelte:

→) $x \subseteq y$.

Dann folgt:

a) $x \subseteq y \cup z$.

b) $x \cap z \subseteq y$.

Beweis **2-16** a)

1: Via **2-7** gilt: $y \subseteq y \cup z$.

2: Aus →) "$x \subseteq y$" und
aus 1 "$y \subseteq y \cup z$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq y \cup z$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $x \cap z \subseteq x$.

2: Aus 1 "$x \cap z \subseteq x$" und
aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $x \cap z \subseteq y$.

□

2-17. Vier elementare Aussagen über binäre Vereinigung/binären Durchschnitt, wenn die leere Menge oder das Universum involviert ist:

<u>**2-17(Satz)**</u>

a) *“$0 \cup x = x$” und “$x \cup 0 = x$”.*

b) *“$0 \cap x = 0$” und “$x \cap 0 = 0$”.*

c) *“$\mathcal{U} \cup x = \mathcal{U}$” und “$x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$”.*

d) *“$\mathcal{U} \cap x = x$” und “$x \cap \mathcal{U} = x$”.*

<u>Beweis **2-17** `ab)`</u>

1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

2.1: Aus 1“$0 \subseteq x$”
folgt via **2-10**: $0 \cup x = x$.

2.2: Aus 1“$0 \subseteq x$”
folgt via **2-10**: $0 \cap x = 0$.

3.1: Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup 0 = 0 \cup x$.

3.2: Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap 0 = 0 \cap x$.

4.1: Aus 3.1“$x \cup 0 = 0 \cup x$” und
aus 2.1“$0 \cup x = x$”
folgt: $x \cup 0 = x$.

4.2: Aus 3.2“$x \cap 0 = 0 \cap x$” und
aus 2.2“$0 \cap x = 0$”
folgt: $x \cap 0 = 0$.

5.a): Aus 2.1“$0 \cup x = x$” und
aus 4.1“$x \cup 0 = x$”
folgt: $(0 \cup x = x) \wedge (x \cup 0 = x)$.

5.b): Aus 2.2“$0 \cap x = 0$” und
aus 4.2“$x \cap 0 = 0$”
folgt: $(0 \cap x = 0) \wedge (x \cap 0 = 0)$.

Beweis **2-17** `cd)`

`1:` Via **0-18** gilt: $x \subseteq \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1`"$x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $\mathcal{U} \cup x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1`"$x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.3:` Aus `1`"$x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $\mathcal{U} \cap x = x$.

`2.4:` Aus `1`"$x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $x \cap \mathcal{U} = x$.

`3.c):` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathcal{U} \cup x = \mathcal{U}) \wedge (x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U})$.

`3.d):` Aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $(\mathcal{U} \cap x = x) \wedge (x \cap \mathcal{U} = x)$.

□

2-18. Wenn die binäre Vereinigung zweier (nicht notwendiger Weise verschiedener) Klassen eine TeilKlasse/gleich der leeren Menge ist, dann ist jede involvierte Klasse gleich der leeren Menge.
Die "$\mathcal{U}$Version" hiervon lautet:
Wenn das Universum eine TeilKlasse von/gleich dem binären Durchschnitt zweier (nicht notwendiger Weise verschiedener) Klassen ist, dann ist jede involvierte Klasse gleich dem Universum.
Via Negation ergibt sich hieraus:
Ist die binäre Vereinigung zweier (nicht notwendiger Weise verschiedener) Klassen ungleich dem Universum, dann ist jede dieser beiden Klassen ungleich dem Universum.
Ist der binärer Durchschnitt zweier (nicht notwendiger Weise verschiedener) Klassen ungleich der leeren Menge, dann ist jede dieser beiden Klassen ungleich der leeren Menge:

2-18(Satz)

a) *Aus* "$x \cup y \subseteq 0$" *folgt* "$x = 0$".

b) *Aus* "$x \cup y = 0$" *folgt* "$x = 0$".

c) *Aus* "$x \cup y \subseteq 0$" *folgt* "$y = 0$".

d) *Aus* "$x \cup y = 0$" *folgt* "$y = 0$".

e) *Aus* "$\mathcal{U} \subseteq x \cap y$" *folgt* "$x = \mathcal{U}$".

f) *Aus* "$x \cap y = \mathcal{U}$" *folgt* "$x = \mathcal{U}$".

g) *Aus* "$\mathcal{U} \subseteq x \cap y$" *folgt* "$y = \mathcal{U}$".

h) *Aus* "$x \cap y = \mathcal{U}$" *folgt* "$y = \mathcal{U}$".

i) *Aus* "$x \cup y \neq \mathcal{U}$" *folgt* "$x \neq \mathcal{U}$".

j) *Aus* "$x \cup y \neq \mathcal{U}$" *folgt* "$y \neq \mathcal{U}$".

k) *Aus* "$0 \neq x \cap y$" *folgt* "$0 \neq x$".

l) *Aus* "$0 \neq x \cap y$" *folgt* "$0 \neq y$".

<u>Beweis **2-18**</u> `a)` `VS` gleich $x \cup y \subseteq 0$.

`1:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`2:` Aus `1` "$x \subseteq x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y \subseteq 0$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq 0$.

`3:` Aus `2` "$x \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $x = 0$.

`b)` `VS` gleich $x \cup y = 0$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \cup y \subseteq x \cup y$.

`2:` Aus `1` "$x \cup y \subseteq x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y = 0$"
folgt: $x \cup y \subseteq 0$.

`3:` Aus `2` "$x \cup y \subseteq 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x = 0$.

`c)` `VS` gleich $x \cup y \subseteq 0$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`2:` Aus `1` "$y \cup x = x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y \subseteq 0$"
folgt: $y \cup x \subseteq 0$.

`3:` Aus `2` "$y \cup x \subseteq 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $y = 0$.

`d)` `VS` gleich $x \cup y = 0$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`2:` Aus `1` "$y \cup x = x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y = 0$"
folgt: $y \cup x = 0$.

`3:` Aus `2` "$y \cup x = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $y = 0$.

Beweis **2-18** `e)` `VS` gleich $\mathcal{U} \subseteq x \cap y$.

`1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathcal{U} \subseteq x \cap y$" und
aus `1`"$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathcal{U} \subseteq x$.

`3:` Aus 2"$\mathcal{U} \subseteq x$"
folgt via **0-18**: $x = \mathcal{U}$.

`f)` `VS` gleich $x \cap y = \mathcal{U}$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \cap y \subseteq x \cap y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \cap y = \mathcal{U}$" und
aus `1`"$x \cap y \subseteq x \cap y$"
folgt: $\mathcal{U} \subseteq x \cap y$.

`3:` Aus 2"$\mathcal{U} \subseteq x \cap y$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x = \mathcal{U}$.

`g)` `VS` gleich $\mathcal{U} \subseteq x \cap y$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y = y \cap x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathcal{U} \subseteq x \cap y$" und
aus `1`"$x \cap y = y \cap x$"
folgt: $\mathcal{U} \subseteq y \cap x$.

`3:` Aus 2"$\mathcal{U} \subseteq y \cap x$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $y = \mathcal{U}$.

`h)` `VS` gleich $x \cap y = \mathcal{U}$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap x = x \cap y$.

`2:` Aus `1`"$y \cap x = x \cap y$" und
aus `VS` gleich "$x \cap y = \mathcal{U}$"
folgt: $y \cap x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$y \cap x = \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $y = \mathcal{U}$.

Beweis **2-18** `ij)` `VS` gleich $x \cup y \neq \mathcal{U}$.

`1:` Es gilt: $(x = \mathcal{U}) \vee (y = \mathcal{U})$ $\vee$ $(x \neq \mathcal{U}) \wedge (y \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = \mathcal{U}) \vee (y = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$x = \mathcal{U}$" folgt: $x \cup y = \mathcal{U} \cup y$.

`3:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cup y = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `2`"$x \cup y = \mathcal{U} \cup y$" und aus `3`"$\mathcal{U} \cup y = \mathcal{U}$" folgt: $x \cup y = \mathcal{U}$.

`5:` Es gilt `4`"$x \cup y = \mathcal{U}$". Es gilt `VS` gleich "$x \cup y \neq \mathcal{U}$". Ex falso quodlibet folgt: $(x \neq \mathcal{U}) \wedge (y \neq \mathcal{U})$.

`1.1.2.Fall` $y = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`"$y = \mathcal{U}$" folgt: $x \cup y = x \cup \mathcal{U}$.

`3:` Via **2-17** gilt: $x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `2`"$x \cup y = x \cup \mathcal{U}$" und aus `3`"$x \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$" folgt: $x \cup y = \mathcal{U}$.

`5:` Es gilt `4`"$x \cup y = \mathcal{U}$". Es gilt `VS` gleich "$x \cup y \neq \mathcal{U}$". Ex falso quodlibet folgt: $(x \neq \mathcal{U}) \wedge (y \neq \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \neq \mathcal{U}) \wedge (y \neq \mathcal{U})$.

...

<u>Beweis</u> **2-18** `ij)` `VS` gleich $x \cup y \neq \mathcal{U}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(x \neq \mathcal{U}) \wedge (y \neq \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$(x \neq \mathcal{U}) \wedge (y \neq \mathcal{U})$"

`2.i):` Aus `A1` folgt: $x \neq \mathcal{U}$.

`2.j):` Aus `A1` folgt: $y \neq \mathcal{U}$.

Beweis **2-18** `kl)` `VS` gleich $0 \neq x \cap y$.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (y = 0) \vee (0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$x = 0$” folgt: $x \cap y = 0 \cap y$.

`3:` Via **2-17** gilt: $0 \cap y = 0$.

`4:` Aus `2`“$x \cap y = 0 \cap y$” und aus `3`“$0 \cap y = 0$” folgt: $x \cap y = 0$.

`5:` Es gilt `4`“$x \cap y = 0$” . Es gilt `VS` gleich “$0 \neq x \cap y$” . Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`1.1.2.Fall` $y = 0$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`“$y = 0$” folgt: $x \cap y = x \cap 0$.

`3:` Via **2-17** gilt: $x \cap 0 = 0$.

`4:` Aus `2`“$x \cap y = 0 \cap x$” und aus `3`“$x \cap 0 = 0$” folgt: $x \cap y = 0$.

`5:` Es gilt `4`“$x \cap y = 0$” . Es gilt `VS` gleich “$0 \neq x \cap y$” . Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

...

<u>Beweis</u> **2-18** `kl)` `VS` gleich $0 \neq x \cap y$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$"

`2.k):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq x$.

`2.l):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq y$.

□

2-19. Erste KlassenAlgebra mit $\cap$ zur späteren Verwendung:

2-19(Satz)

a) $x \cap (x \cap y) = x \cap y$.

b) $(x \cap y) \cap (x \cap z) = x \cap (y \cap z)$.

Beweis **2-19** a)

1: $$x \cap (x \cap y) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} (x \cap x) \cap y \overset{\mathbf{2-14}}{=} x \cap y.$$

2: Aus 1 folgt: $$x \cap (x \cap y) = x \cap y.$$

b)

1: $$(x \cap y) \cap (x \cap z) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} x \cap (y \cap (x \cap z)) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} x \cap ((y \cap x) \cap z)$$
$$\overset{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap ((x \cap y) \cap z) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} x \cap (x \cap (y \cap z)) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} (x \cap x) \cap (y \cap z)$$
$$\overset{\mathbf{2-14}}{=} x \cap (y \cap z).$$

2: Aus 1 folgt: $$(x \cap y) \cap (x \cap z) = x \cap (y \cap z).$$

□

2-20. Ähnlich wie **AG**$\cup$ und **AG**$\cap$ beruhen die **DistributivGesetze** $\cup\cap$ - hier ist die Reihenfolge "$\cup, \cap$" wichtig - auf entsprechenden Eigenschaften der logischen Verknüpfungen $\vee$ und $\wedge$. Beide **DistributivGesetze** $\cup\cap$ werden via "**DG**$\cup\cap$" - auch hier ist die Reihenfolge "$\cup\cap$" von Bedeutung - zitiert. Dies ist mit einiger Sicherheit kein Anlass zur Verwirrung, da aus dem Kontext oder dem Ergebnis der Umformung hervorgeht, ob es sich bei dem zitierten Resultat um `a)` oder um `b)` handelt:

2-20(Satz) (**DG**$\cup\cap$: **DistributivGesetze** $\cup\cap$)

`a)` $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

`b)` $(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z)$.

Beweis **2-20** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in x \cup (y \cap z)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x \cup (y \cap z)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cap z)$.

`3:` Aus `2`"$(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cap z)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \wedge ((\alpha \in x) \vee (\alpha \in z))$.

`5:` Aus `4`"$((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \wedge ((\alpha \in x) \vee (\alpha \in z))$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cup y) \wedge (\alpha \in x \cup z)$.

`6:` Aus `5`"$(\alpha \in x \cup y) \wedge (\alpha \in x \cup z)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup (y \cap z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cup y) \cap (x \cup z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \cup (y \cap z) \subseteq (x \cup y) \cap (x \cup z)$"

<u>Beweis</u> **2-20** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cup y) \wedge (\alpha \in x \cup z)$.

`3:` Aus `2`"$(\alpha \in x \cup y) \wedge (\alpha \in x \cup z)$"
folgt via **2-2**: $((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \wedge ((\alpha \in x) \vee (\alpha \in z))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z))$.

`5:` Aus `4`"$(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z))$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cap z)$.

`6:` Aus `5`"$(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cap z)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup (y \cap z)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall x : (\alpha \in (x \cup y) \cap (x \cup z)) \Rightarrow (\alpha \in x \cup (y \cap z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\middle|\, \text{“}(x \cup y) \cap (x \cup z) \subseteq x \cup (y \cap z)\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \cup (y \cap z) \subseteq (x \cup y) \cap (x \cup z)$" und
aus `A2` gleich "$(x \cup y) \cap (x \cup z) \subseteq x \cup (y \cap z)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

`b)`

`1:`
$$(x \cap y) \cup z \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} z \cup (x \cap y) \overset{\mathbf{a)}}{=} (z \cup x) \cap (z \cup y) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \cup z) \cap (z \cup y) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \cup z) \cap (y \cup z).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z)$.

□

2-21. Ähnlich wie **AG**$\cap$ und **AG**$\cup$ beruhen die **DistributivGesetze** $\cap\cup$ - hier ist die Reihenfolge "$\cap, \cup$" wichtig - auf entsprechenden Eigenschaften der logischen Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$. Beide **DistributivGesetze** $\cap\cup$ werden via "**DG**$\cap\cup$" - auch hier ist die Reihenfolge "$\cap\cup$" von Bedeutung - zitiert. Dies ist mit einiger Sicherheit kein Anlass zur Verwirrung, da aus dem Kontext oder dem Ergebnis der Umformung hervorgeht, ob es sich bei dem zitierten Resultat um `a)` oder um `b)` handelt:

2-21(Satz) (DG$\cap\cup$: DistributivGesetze $\cap\cup$)

`a)` $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`b)` $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$.

Beweis **2-21** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in x \cap (y \cup z)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x \cap (y \cup z)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cup z)$.

`3:` Aus 2 "$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cup z)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge ((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z))$.

`4:` Aus 3
folgt: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in z))$.

`5:` Aus 4 "$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in z))$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cap y) \vee (\alpha \in x \cap z)$.

`6:` Aus 5 "$(\alpha \in x \cap y) \vee (\alpha \in x \cap z)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap (y \cup z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y) \cup (x \cap z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \cap (y \cup z) \subseteq (x \cap y) \cup (x \cap z)$"

<u>Beweis **2-21**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad \alpha \in (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in (x \cap y) \cup (x \cap z)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \cap y) \vee (\alpha \in x \cap z)$.

`3:` Aus `2`“$(\alpha \in x \cap y) \vee (\alpha \in x \cap z)$”
folgt via **2-2**: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in z))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \in x) \wedge ((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z))$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha \in x) \wedge ((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z))$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cup z)$.

`6:` Aus `5`“$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y \cup z)$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap (y \cup z)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall x : (\alpha \in (x \cap y) \cup (x \cap z)) \Rightarrow (\alpha \in x \cap (y \cup z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}(x \cap y) \cup (x \cap z) \subseteq x \cap (y \cup z)\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$x \cap (y \cup z) \subseteq (x \cap y) \cup (x \cap z)$” und
aus `A2` gleich “$(x \cap y) \cup (x \cap z) \subseteq x \cap (y \cup z)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`b)`

`1:` $(x \cup y) \cap z \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} z \cap (x \cup y) \stackrel{\text{a)}}{=} (z \cap x) \cup (z \cap y) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap z) \cup (z \cap y)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap z) \cup (y \cap z)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$.

□

2-22. Das **VerschmelzungsGesetz** $\cup\cap$ werden auch auf Grund der ansprechenden Form in die Essays aufgenommen. Die Reihenfolge "$\cup, \cap$" ist wichtig, da es auch ein VerschmelzungsGesetz mit vertauschten Rollen von binärer Vereinigung und binärem Durchschnitt gibt, siehe **2-23**.
Das **VerschmelzungsGesetz** $\cup\cap$ wird als "**VG**$\cup\cap$" zitiert. Auch hier kommt es bei "$\cup\cap$" auf die Reihenfolge an:

2-22(Satz) (VG$\cup\cap$: VerschmelzungsGesetz $\cup\cap$)

$$x \cup (x \cap y) = x.$$

Beweis **2-22**

1: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

2: Aus 1"$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $x \cup (x \cap y) = x$.

□

2-23. Das **VerschmelzungsGesetz** $\cap\cup$ wird auch auf Grund der ansprechenden Form in die Essays aufgenommen. Die Reihenfolge "$\cap, \cup$" ist wichtig, da es auch ein VerschmelzungsGesetz mit vertauschten Rollen von binärer Vereinigung und binärem Durchschnitt gibt, siehe **2-22**.
Das **VerschmelzungsGesetz** $\cap\cup$ wird als "**VG**$\cap\cup$" zitiert. Auch hier kommt es bei "$\cap\cup$" auf die Reihenfolge an:

2-23(Satz) (VG$\cap\cup$: VerschmelzungsGesetz $\cap\cup$)

$$x \cap (x \cup y) = x.$$

Beweis **2-23**

1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1"$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **2-10**: $x \cap (x \cup y) = x$.

□

2-24. Weitere Folgerungen aus dem $\cup$**Axiom**:

2-24(Satz)

a) *Aus "x Unmenge" folgt "$x \cup y$ Unmenge" und "$y \cup x$ Unmenge".*

b) *Aus "x Menge" folgt "$x \cap y$ Menge" und "$y \cap x$ Menge".*

Beweis **2-24** a) VS gleich x Unmenge.

1.1: Es gilt: $(x \cup y \text{ Menge}) \vee (x \cup y \text{ Unmenge})$

Fallunterscheidung

1.1.1.Fall $x \cup y$ Menge.

2.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2.2: Aus 2.1"$x \subseteq x \cup y$" und
aus 1.1.1.Fall"$x \cup y$ Menge" folgt
via **TeilmengenAxiom**: x Menge.

3: Es gilt 2.2"x Menge".
Es gilt VS gleich "x Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $x \cup y$ Unmenge.

1.1.2.Fall $x \cup y$ Unmenge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$x \cup y$ Unmenge"

1.2: Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup y = y \cup x$.

2: Aus A1 gleich "$x \cup y$ Unmenge" und
aus 1.2"$x \cup y = y \cup x$"
folgt: $y \cup x$ Unmenge.

3: Aus A1 gleich "$x \cup y$ Unmenge" und
aus 2"$y \cup x$ Unmenge"
folgt: $(x \cup y \text{ Unmenge}) \wedge (y \cup x \text{ Unmenge})$.

Beweis **2-24** `b)` `VS` gleich x Menge.

`1:` Via **2-7** gilt: $(x \cap y \subseteq x) \wedge (y \cap x \subseteq x)$.

`2.1:` Aus `1` "$x \cap y \subseteq x \dots$" und
aus →) "x Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x \cap y$ Menge.

`2.2:` Aus `1` "$\dots y \cap x \subseteq x$" und
aus →) "x Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $y \cap x$ Menge.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \cap y \text{ Menge}) \wedge (y \cap x \text{ Menge})$.

□

2-25. Die $\cup$**LokalisierungsRegel** ist vom gleichen Geist wie das **Binäre SchubfachPrinzip** beseelt. Nur handelt es sich hier um die Lokalisierung einer Klasse als *TeilKlasse* einer anderen Klasse - und nicht, wie beim **Binären Schubfach-Prinzip** um das Erkennen einer Klasse als *Element* einer anderen Klasse:

2-25(Satz) **($\cup$LokalisierungsRegel)**

Aus "$x \subseteq y \cup z$" *und* "$x \cap y = 0$" *folgt* "$x \subseteq z$".

Beweis **2-25** `VS` gleich $(x \subseteq y \cup z) \wedge (x \cap y = 0)$.

`Thema1` $\alpha \in x$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y \cup z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y \cup z$.

3: Aus 2"$\alpha \in y \cup z$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \vee (\alpha \in z)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha \in y$.

4: Aus `Thema1`"$\alpha \in x$" und
aus `3.1.Fall`"$\alpha \in y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap y$.

5: Aus 5"$\alpha \in x \cap y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cap y = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

6: Es gilt 5"$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in z$.

`3.2.Fall` $\alpha \in z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in z$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq z$.

□

2-26. KlassenAlgebra via **DG**$\cap\cup$ unter Einbeziehung von $\subseteq$, $\cap$ und 0 zur späteren Verwendung. Die Schlussfolgerung von `a)` ist natürlich *nicht* allgemein gültig. Als Indiz für diese Feststellung ist die Aussage `b)`, in der unter der zu der Prämisse von `a)` geradezu "komplementären" Voraussetzung - "$x \cap y = 0$" versus "$x \subseteq y$" - eine ganz andere Gleichung mit "$(x \cup z) \cap y$" gefolgert wird. In `c)` wird unter der Prämisse, dass "x" eine TeilKlasse einer binären Vereinigung ist, die Klasse "x" als binäre Vereinigung von jeweiligen TeilKlassen der an der binären Vereinigung beteiligten Klassen geschrieben:

2-26(Satz)

`a)` *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$(x \cup z) \cap y = x \cup (z \cap y)$".*

`b)` *Aus "$x \cap y = 0$" folgt "$(x \cup z) \cap y = z \cap y$".*

`c)` *Aus "$z \subseteq x \cup y$" folgt "$z = (z \cap x) \cup (z \cap y)$".*

Beweis **2-26** `a)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-10**: $x \cap y = x$.

`2:` $(x \cup z) \cap y \overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap y) \cup (z \cap y) \overset{1}{=} x \cup (z \cap y)$.

`3:` Aus 2
folgt: $(x \cup z) \cap y = x \cup (z \cap y)$.

`b)` `VS` gleich $x \cap y = 0$.

`1:` $(x \cup z) \cap y \overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap y) \cup (z \cap y) \overset{\texttt{VS}}{=} 0 \cup (z \cap y) \overset{\mathbf{2-17}}{=} z \cap y$.

`2:` Aus 1
folgt: $(x \cup z) \cap y = z \cap y$.

`c)` `VS` gleich $z \subseteq x \cup y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq x \cup y$"
folgt via **2-10**: $(x \cup y) \cap z = z$.

`2:` $z \overset{1}{=} (x \cup y) \cap z \overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap z) \cup (y \cap z) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (z \cap x) \cup (y \cap z) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (z \cap x) \cup (z \cap y)$.

`3:` Aus 2
folgt: $z = (z \cap x) \cup (z \cap y)$.

□

2-27. Elementare KlassenAlgebra mit $\cup, \cap$ in einer PotenzKlasse:

> <u>**2-27(Satz)**</u>
>
> a) *Aus* "$x \in \mathcal{P}(w)$" *und* "$y \in \mathcal{P}(w)$" *folgt* "$x \cup y \in \mathcal{P}(w)$".
>
> b) *Aus* "$x \in \mathcal{P}(w)$" *folgt* "$x \cap y \in \mathcal{P}(w)$".

<u>Beweis **2-27**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathcal{P}(w)) \wedge (y \in \mathcal{P}(w))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathcal{P}(w) \ldots$"
folgt via **0-26**: $(x \subseteq w) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathcal{P}(w)$"
folgt via **0-26**: $(y \subseteq w) \wedge (y \text{ Menge})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \subseteq w \ldots$" und
aus `1.2`"$y \subseteq w \ldots$"
folgt via **2-12**: $x \cup y \subseteq w$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots x$ Menge" und
aus `1.2`"$\ldots y$ Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $x \cup y$ Menge.

`3:` Aus `2.1`"$x \cup y \subseteq w$" und
aus `2.2`"$x \cup y$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \cup y \in \mathcal{P}(w)$.

`b)` `VS` gleich $x \in \mathcal{P}(w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathcal{P}(w)$"
folgt via **0-26**: $(x \subseteq w) \wedge (x \text{ Menge})$.

`2.1:` Aus `1`"$x \subseteq w \ldots$"
folgt via **2-16**: $x \cap y \subseteq w$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x$ Menge"
folgt via **2-24**: $x \cap y$ Menge.

`3:` Aus `2.1`"$x \cap y \subseteq w$" und
aus `2.2`"$x \cap y$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \cap y \in \mathcal{P}(w)$.

□

2-28. Einige “Menge-Aussagen” über die binäre Vereinigung von Singeltons und Klassen, die im Zusammenhang mit “$\cup$induktiven” und “endlichen” Klasse - diese Termini werden in **#28** präzisiert - eine Rolle spielen:

2-28(Satz)

a) *Aus “p Menge” folgt “$p \in \{p\} \cup x$”.*

b) *Aus “p Menge” und “$\{p\} \cup x = x$” folgt “$p \in x$”.*

c) *Aus “x Menge” folgt “$\{p\} \cup x$ Menge”.*

Beweis **2-28** a) VS gleich p Menge.

1: Aus VS gleich “p Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

2: Aus 1“$p \in \{p\}$”
folgt via **2-2**: $p \in \{p\} \cup x$.

b) VS gleich (p Menge) $\wedge$ ($\{p\} \cup x = x$).

1: Aus VS gleich “$\ldots \{p\} \cup x = x$”
folgt via **2-10**: $\{p\} \subseteq x$.

2: Aus VS gleich “p Menge…”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

3: Aus 2“$p \in \{p\}$” und
aus 1“$\{p\} \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $p \in x$.

c) VS gleich x Menge.

1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

2: Aus 1“$\{p\}$ Menge” und
aus VS gleich “x Menge”
folgt via $\cup$**Axiom**: $\{p\} \cup x$ Menge.

□

2-29. Ein Kriterium für "$0 \neq \{p\} \cap x$" :

2-29(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x$.

`ii)` $0 \neq \{p\} \cap x$.

Beweis **2-29** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\{p\} \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $\{p\} \cap x = \{p\}$.

`2.2:` Aus `1.2`"p Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `2.1`"$\{p\} \cap x = \{p\}$"
folgt: $0 \neq \{p\} \cap x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq \{p\} \cap x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{p\} \cap x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{p\} \cap x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{p\} \cap x$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \{p\}) \wedge (\Omega \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `3`"$\Omega = p$"
folgt: $p \in x$.

□

2-30. Ein Kriterium für "$\{p\} \cap x = 0$":

2-30(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\{p\} \cap x = 0$.

`ii)` $p \notin x$.

`iii)` *"p Unmenge" oder "$p \notin x$".*

Beweis **2-30** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\{p\} \cap x = 0$.

`1:` Via **2-29** gilt: $(p \in x) \Rightarrow (0 \neq \{p\} \cap x)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(p \in x)) \vee (0 \neq \{p\} \cap x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\{p\} \cap x = 0))$.

`4:` Aus `3`"$(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\{p\} \cap x = 0))$" und
aus `VS` gleich "$\{p\} \cap x = 0$"
folgt: $\neg(p \in x)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $p \notin x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $p \notin x$.

Aus `VS`
folgt: $(p \text{ Unmenge}) \vee (p \notin x)$.

Beweis **2-30** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \vee (p \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Unmenge.

Aus `1.1.Fall` "p Unmenge"
folgt via **0-1**: $p \notin x$.

`1.2.Fall` $p \notin x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$p \notin x$"

`1.3`: Via **2-29** gilt: $(0 \neq \{p\} \cap x) \Rightarrow (p \in x)$.

`2`: Aus `1.3`
folgt: $(\neg(0 \neq \{p\} \cap x)) \vee (p \in x)$.

`3`: Aus `2`
folgt: $(\{p\} \cap x = 0) \vee (p \in x)$.

`4`: Aus `3`
folgt: $(\{p\} \cap x = 0) \vee (\neg(\neg(p \in x)))$.

`5`: Aus `4`
folgt: $(\{p\} \cap x = 0) \vee (\neg(p \notin x))$.

`6`: Aus `5` "$(\{p\} \cap x = 0) \vee (\neg(p \notin x))$" und
aus `A1` gleich "$p \notin x$"
folgt: $\{p\} \cap x = 0$.

$\square$

2-31. Drei notwendige Bedingungen für "$0 \neq \{p\} \cap x$" :

2-31(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \neq \{p\} \cap x$.

Dann folgt:

a) p *Menge.*

b) $\{p\} \cup x = x$.

c) $\{p\} \cap x = \{p\}$.

Beweis **2-31**

1: Aus $\rightarrow$) "$0 \neq \{p\} \cap x$"
folgt via **2-29**: $p \in x$.

2.a): Aus 1 "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2.1: Aus 1 "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

3.b): Aus 2.1 "$\{p\} \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $\{p\} \cup x = x$.

3.c): Aus 2.1 "$\{p\} \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $\{p\} \cap x = \{p\}$.

$\square$

2-32. Falls "p" eine Unmenge ist, dann gilt via **1-4** die Gleichung "$\{p\} = 0$" und in diesem Fall sind weder "$\{p\} \cup x$" noch "$\{p\} \cap x$" das, was vielleicht erwartet wurde:

2-32(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) p *Unmenge.*

Dann folgt:

a) $\{p\} \cup x = x$.

b) $\{p\} \cap x = \{p\}$.

Beweis **2-32**

1: Aus VS gleich "p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

2.1: $\{p\} \cup x \stackrel{1}{=} 0 \cup x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x$.

2.2: $\{p\} \cap x \stackrel{1}{=} 0 \cap x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0 \stackrel{1}{=} \{p\}$.

3.a): Aus 2.1
folgt: $\{p\} \cup x = x$.

3.b): Aus 2.2
folgt: $\{p\} \cap x = x$.

□

2-33. Es folgen einige Aussagen über $\{p\}\cap\{q\}$. Aussagen `abc)` können zu einem Kriterium für "$\{p\}\cap\{q\}=0$" kombiniert werden. Aussagen `de)` können zu einem Kriterium für "$0\neq\{p\}\cap\{q\}$" kombiniert werden. Die Beweis-Reihenfolge ist `d) - a) - b) - c) - e)`:

2-33(Satz)

`a)` *Aus "$p\neq q$" folgt "$\{p\}\cap\{q\}=0$".*

`b)` *Aus "p Unmenge" oder "q Unmenge" folgt "$\{p\}\cap\{q\}=0$".*

`c)` *Aus "$\{p\}\cap\{q\}=0$" folgt "p Unmenge" oder "q Unmenge" oder "$(p\neq q)\wedge(p$ Menge$)\wedge(q$ Menge$)$".*

`d)` *Aus "$0\neq\{p\}\cap\{q\}$" folgt "$p=q$" und "p Menge" und "q Menge".*

`e)` *Aus "$p=q$" und "p Menge" folgt "$0\neq\{p\}\cap\{q\}$".*

Beweis **2-33** `d)` `VS` gleich $0\neq\{p\}\cap\{q\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0\neq\{p\}\cap\{q\}$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega:\Omega\in\{p\}\cap\{q\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots\Omega\in\{p\}\cap\{q\}$"
folgt via **2-2**: $(\Omega\in\{p\})\wedge(\Omega\in\{q\})$.

`3.1:` Aus `2`"$\Omega\in\{p\}\ldots$"
folgt via **1-6**: $(\Omega=p)\wedge(p$ Menge$)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots\Omega\in\{q\}$"
folgt via **1-6**: $(\Omega=q)\wedge(q$ Menge$)$.

`4:` Aus `3.1`"$\Omega=p\ldots$" und
aus `3.2`"$\Omega=q\ldots$"
folgt: $p=q$.

`5:` Aus `4`,
aus `3.1`"$\ldots p$ Menge" und
aus `3.2`"$\ldots q$ Menge"
folgt: $(p=q)\wedge(p$ Menge$)\wedge(q$ Menge$)$.

Beweis **2-33** `a)` `VS` gleich $p \neq q$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq \{p\} \cap \{q\}) \vee (\{p\} \cap \{q\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{p\} \cap \{q\}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq \{p\} \cap \{q\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $p = q$.

`3:` Es gilt `2`“$p = q$” .
Es gilt `VS` gleich “$p \neq q$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`1.2.Fall` $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`b)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“p Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` $\{p\} \cap \{q\} \stackrel{2}{=} 0 \cap \{q\} \stackrel{2-17}{=} 0$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`1.2.Fall` q Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`“p Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{q\} = 0$.

`3:` $\{p\} \cap \{q\} \stackrel{2}{=} \{p\} \cap 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

<u>Beweis</u> **2-33** `c)` `VS` gleich $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$

$\vee$

$(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

Aus `1.1.Fall`
folgt:
$$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee ((p \neq q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})).$$

...

Beweis **2-33** `c)` `VS` gleich $\{p\} \cap \{q\} = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}).$

`2.1:` Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $p = q.$

`3:` Aus `1.2.Fall`“p Menge...” folgt via **1-3**: $p \in \{p\}.$

`4:` Aus `3`“$p \in \{p\}$” und aus `2.1.1.Fall`“$p = q$” folgt: $p \in \{q\}.$

`5:` Aus `3`“$p \in \{p\}$” und aus `4`“$p \in \{q\}$” folgt via **2-2**: $p \in \{p\} \cap \{q\}.$

`6:` Aus `5`“$p \in \{p\} \cap \{q\}$” folgt via **0-20**: $0 \neq \{p\} \cap \{q\}.$

`7:` Es gilt `6`“$0 \neq \{p\} \cap \{q\}$”. Es gilt `VS` gleich “$\{p\} \cap \{q\} = 0$”. Ex falso quodlibet folgt: $p \neq q.$

`2.1.2.Fall` $p \neq q.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` “$p \neq q$”

`2.2:` Aus `A1` und aus `1.2.Fall` folgt: $(p \neq q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}).$

`3:` Aus `2.2` folgt:

$$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee ((p \neq q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee ((p \neq q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})).$$

Beweis **2-33** `e)` `VS` gleich $(p = q) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$p = q \ldots$"
folgt: $p \in \{q\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{p\}$" und
aus `2`"$p \in \{q\}$"
folgt via **2-2**: $p \in \{p\} \cap \{q\}$.

`4:` Aus `3`"$p \in \{p\} \cap \{q\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{p\} \cap \{q\}$.

□

2-34. Bislang wurden in den Essays "Vereinigungen" und "binäre Vereinigungen" und "Durchschnitte" und "binärer Durchschnitte" verwendet. Mit **2-34** liegen vier Aussagen vor, wie diese Konzepte miteinander kombinieren.
Gemäß folgender Beispiele sind die über **2-33** hinausgehenden Aussagen "$(\bigcup x)\cap(\bigcup y) = \bigcup(x\cap y)$" und "$\bigcap(x\cap y) = (\bigcap x)\cup(\bigcap y)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>2-34(Satz)</u>

a) $\bigcup(x \cup y) = (\bigcup x) \cup (\bigcup y)$.

b) $\bigcap(x \cup y) = (\bigcap x) \cap (\bigcap y)$.

c) $\bigcup(x \cap y) \subseteq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$.

d) $(\bigcap x) \cup (\bigcap y) \subseteq \bigcap(x \cap y)$.

<u>Beweis **2-34**</u> `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \bigcup(x \cup y).$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \bigcup(x \cup y)$”
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in x \cup y).$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x \cup y$”
folgt via **2-2**: $(\Omega \in x) \vee (\Omega \in y).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega \in x$

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$” und
aus `3.1.Fall`“$\Omega \in x$”
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup x.$

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \bigcup x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\bigcup x) \cup (\bigcup y).$

`3.2.Fall` $\Omega \in y.$

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$” und
aus `3.2.Fall`“$\Omega \in y$”
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup y.$

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \bigcup y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\bigcup x) \cup (\bigcup y).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (\bigcup x) \cup (\bigcup y).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup(x \cup y)) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcup x) \cup (\bigcup y)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$\bigcup(x \cup y) \subseteq (\bigcup x) \cup (\bigcup y)$”

Beweis **2-34** `a)` ...

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.2`"$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **1-15**: $\bigcup x \subseteq \bigcup(x \cup y)$.

`2.2:` Aus `1.3`"$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **1-15**: $\bigcup y \subseteq \bigcup(x \cup y)$.

`3:` Aus `2.1`"$\bigcup x \subseteq \bigcup(x \cup y)$" und
aus `2.2`"$\bigcup y \subseteq \bigcup(x \cup y)$"
folgt via **2-12**: `A2` | "$(\bigcup x) \cup (\bigcup y) \subseteq \bigcup(x \cup y)$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$\bigcup(x \cup y) \subseteq (\bigcup x) \cup (\bigcup y)$" und
aus `A2` gleich "$(\bigcup x) \cup (\bigcup y) \subseteq \bigcup(x \cup y)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup(x \cup y) = (\bigcup x) \cup (\bigcup y)$.

`b)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **1-15**: $\bigcap(x \cup y) \subseteq \bigcap x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **1-15**: $\bigcap(x \cup y) \subseteq \bigcap y$.

`3:` Aus `2.1`"$\bigcap(x \cup y) \subseteq \bigcap x$" und
aus `2.2`"$\bigcap(x \cup y) \subseteq \bigcap y$"
folgt via **2-12**: `A1` | "$\bigcap(x \cup y) \subseteq (\bigcap x) \cap (\bigcap y)$"

<u>Beweis **2-34**</u> `b)` ...

`Thema1.3` $\alpha \in (\bigcap x) \cap (\bigcap y)$.

`2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in (\bigcap x) \cap (\bigcap y)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \bigcap x) \wedge (\alpha \in \bigcap y)$.

`Thema3` $\beta \in x \cup y$.

`4:` Aus `Thema3`"$\beta \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in x) \vee (\beta \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\beta \in x$.

Aus 2"$\alpha \in \bigcap x \ldots$" und
aus `4.1.Fall`"$\beta \in x$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \beta$.

`4.2.Fall` $\beta \in y$.

Aus 2"$\ldots \alpha \in \bigcap y$" und
aus `4.2.Fall`"$\beta \in y$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \beta$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema3`: `A2` | "$\forall \beta : (\beta \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

`3:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in (\bigcap x) \cap (\bigcap y)$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`4:` Aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in x \cup y) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `3`"α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap(x \cup y)$.

...

Beweis **2-34** `b)` ...

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcap x) \cap (\bigcap y)) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap (x \cup y)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“}(\bigcap x) \cap (\bigcap y) \subseteq \bigcap (x \cup y)\text{”}}$

`1.4:` Aus `A1` gleich “$\bigcap (x \cup y) \subseteq (\bigcap x) \cap (\bigcap y)$” und
aus `A3` gleich “$(\bigcap x) \cap (\bigcap y) \subseteq \bigcap (x \cup y)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcap (x \cup y) = (\bigcap x) \cap (\bigcap y).$

`c)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x.$

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y.$

`2.1:` Aus `1.1`“$x \cap y \subseteq x$”
folgt via **1-15**: $\bigcup (x \cap y) \subseteq \bigcup x.$

`2.2:` Aus `1.2`“$x \cap y \subseteq y$”
folgt via **1-15**: $\bigcup (x \cap y) \subseteq \bigcup y.$

`3:` Aus `2.1`“$\bigcup (x \cap y) \subseteq \bigcup x$” und
aus `2.2`“$\bigcup (x \cap y) \subseteq \bigcup y$”
folgt via **2-12**: $\bigcup (x \cap y) \subseteq (\bigcup x) \cap (\bigcup y).$

`d)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x.$

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y.$

`2.1:` Aus `1.1`“$x \cap y \subseteq x$”
folgt via **1-15**: $\bigcap x \subseteq \bigcap (x \cap y).$

`2.2:` Aus `1.2`“$x \cap y \subseteq y$”
folgt via **1-15**: $\bigcap y \subseteq \bigcap (x \cap y).$

`3:` Aus `2.1`“$\bigcap x \subseteq \bigcap (x \cap y)$” und
aus `2.2`“$\bigcap y \subseteq \bigcap (x \cap y)$”
folgt via **2-12**: $(\bigcap x) \cup (\bigcap y) \subseteq \bigcap (x \cap y).$

$\square$

2-35. Unter Bezug auf **2-36(BSP)** und **2-37(BSP)** können die Inklusionen von **2-34**`cd` *nicht* ohne Weiteres in Gleichungen übergeführt werden:

2-35.Bemerkung

- Die Gleichung
  "$\bigcup(x \cap y) = (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Gleichung
  "$(\bigcap x) \cup (\bigcap y) = \bigcap(x \cap y)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

2-36. Im ersten Beispiel der Essays wird begründet, warum nicht zu erwarten ist, dass in **2-34**c) die Inklusion "$\subseteq$" durch Gleichheit ersetzbar ist. Dabei wird auf spätere Konzepte - nämlich auf ungeordnete Paare und deren binären Durchschnitt - Bezug genommen. Dies halte ich wegen des ausschließlich illustrativen Charakters der Beispiele für gerechtfertigt. Auch wird - damit das Beispiel "gültig" ist - implizit vorausgesetzt, dass es mindestens zwei verschiedene Mengen gibt. Dies ist in dieser Form auch noch nicht bewiesen, doch ist davon auszugehen, dass dies eine vernünftige Annahme ist. Die Ausarbeitung der Details von **2-36** erfolgt nicht in diesem Essay:

2-36.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{\{p, q\}\}$.

$\rightarrow$) $y = \{\{p\}, \{q\}\}$.

Dann folgt:

a) $x \cap y = 0$.

b) $\bigcup x = \{p, q\}$.

c) $\bigcup y = \{p, q\}$.

d) $\bigcup(x \cap y) = 0$.

e) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \{p, q\}$.

f) $\bigcup(x \cap y) \neq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$.

2-37. Im folgenden Beispiel wird begründet, warum nicht zu erwarten ist, dass in **2-34**`d)` die Inklusion "$\subseteq$" durch Gleichheit ersetzbar ist. Dabei wird auf spätere Konzepte - nämlich auf ungeordnete Paare und deren binären Durchschnitt - Bezug genommen. Auch wird - damit das Beispiel "gültig" ist - implizit vorausgesetzt, dass es mindestens zwei verschiedene Mengen gibt. Dies ist in dieser Form auch noch nicht bewiesen, doch ist davon auszugehen, dass dies eine vernünftige Annahme ist. Die Ausarbeitung der Details von **2-37** erfolgt nicht in diesem Essay:

2-37.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{\{p, q\}\}$.

$\rightarrow$) $y = \{\{p\}, \{q\}\}$.

Dann folgt:

`a)` $x \cap y = 0$.

`b)` $\bigcap x = \{p, q\}$.

`c)` $\bigcap y = 0$.

`d)` $\bigcap(x \cap y) = \mathcal{U}$.

`e)` $(\bigcap x) \cup (\bigcap y) = \{p, q\}$.

`f)` $(\bigcap x) \cup (\bigcap y) \neq \bigcap(x \cap y)$.

2-38. Zur späteren Verwendung wird einiges an "höherstelliger" KlassenAlgebra mit $\cup$ und $\cap$ zur Verfügung gestellt. Einige Formeln würden sich durch die Einführung drei- und vierstelliger Vereinigungen und Durchschnitte in der Darstellung verkürzen. Der damit einhergehende Aufwand, diese Konzepte in die Essays einzuführen ist aber - wie die Erfahrung mit einer früheren Version der Essays zeigt - relativ hoch. Deshalb wird die Benutzung von "$\cup$" und "$\cap$" als *binären* "Operationen" beibehalten:

2-38(Satz)

a) $x \cup (y \cup z) = y \cup (z \cup x)$.

b) $x \cap (y \cap z) = y \cap (z \cap x)$.

c) $(x \cup y) \cup (z \cup w) = (x \cup z) \cup (w \cup y)$.

d) $(x \cap y) \cap (z \cap w) = (x \cap z) \cap (w \cap y)$.

e) $(x \cup y) \cap (z \cup w) = ((x \cap z) \cup (y \cap z)) \cup ((x \cap w) \cup (y \cap w))$.

f) $(x \cap y) \cup (z \cap w) = ((x \cup z) \cap (y \cup z)) \cap ((x \cup w) \cap (y \cup w))$.

Beweis **2-38** a)

1: $$x \cup (y \cup z) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (y \cup z) \cup x \overset{\mathbf{AG}\cup}{=} y \cup (z \cup x).$$

2: Aus 1
folgt: $$x \cup (y \cup z) = y \cup (z \cup x).$$

b)

1: $$x \cap (y \cap z) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (y \cap z) \cap x \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} y \cap (z \cap x).$$

2: Aus 1
folgt: $$x \cap (y \cap z) = y \cap (z \cap x).$$

c)

1: $$(x\cup y)\cup(z\cup w) \overset{\mathbf{AG}\cup}{=} x\cup(y\cup(z\cup w)) \overset{\mathbf{a)}}{=} x\cup(z\cup(w\cup y)) \overset{\mathbf{AG}\cup}{=} (x\cup z)\cup(w\cup y).$$

2: Aus 1
folgt: $$(x \cup y) \cup (z \cup w) = (x \cup z) \cup (w \cup y).$$

d)

1: $$(x\cap y)\cap(z\cap w) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} x\cap(y\cap(z\cap w)) \overset{\mathbf{a)}}{=} x\cap(z\cap(w\cap y)) \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} (x\cap z)\cap(w\cap y).$$

2: Aus 1
folgt: $$(x \cap y) \cap (z \cap w) = (x \cap z) \cap (w \cap y).$$

e)

1: $$\begin{aligned}(x \cup y) \cap (z \cup w) &\overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} ((x \cup y) \cap z) \cup ((x \cup y) \cap w)\\ &\overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} ((x \cap z) \cup (y \cap z)) \cup ((x \cap w) \cup (y \cap w)).\end{aligned}$$

2: Aus 1
folgt: $$(x \cup y) \cap (z \cup w) = ((x \cap z) \cup (y \cap z)) \cup ((x \cap w) \cup (y \cap w)).$$

f)

1: $$\begin{aligned}(x \cap y) \cup (z \cap w) &\overset{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} ((x \cap y) \cup z) \cap ((x \cap y) \cup w)\\ &\overset{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} ((x \cup z) \cap (y \cup z)) \cap ((x \cup w) \cap (y \cup w)).\end{aligned}$$

2: Aus 1
folgt: $$(x \cap y) \cup (z \cap w) = ((x \cup z) \cap (y \cup z)) \cap ((x \cup w) \cap (y \cup w)).$$

□

Universelles Komplement. x^C.
Keine DeMorgan-Regeln $\bigcup\bigcap$.
DeMorgan-Regeln $\cup\cap$. **DM**$\cup\cap$.
DeMorgan-Regeln $\cap\cup$. **DM**$\cap\cup$.

Ersterstellung: 21/11/06 **Letzte Änderung: 07/04/11**

3-1. Das **universelle Komplement** einer Klasse besteht genau aus jenen *Mengen*, die *nicht* Element dieser Klasse sind:

3-1(Definition)

1) x^C

$$= 3.0(x) = \{\omega : \omega \notin x\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **universelles Komplement von** x"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x^C.$$

3-2. Erste, elementare Aussagen rund um das **universelle Komplement**. Interessanter Weise ist "$p \notin x$" *nicht* hinreichend für "$p \in x^C$" - es muss hierfür noch "p Menge" gelten:

3-2(Satz)

a) *x^C universelles Komplement von x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ universelles Komplement von x" und "$\mathfrak{D}$ universelles Komplement von x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

c) *Aus "$p \in x^C$" folgt "$p \notin x$".*

d) *Aus "$p \notin x$" und "p Menge" folgt "$p \in x^C$".*

<u>Beweis</u> **3-2** `a)`

Aus "$x^C = x^C$"
folgt via **3-1(Def)**: x^C universelles Komplement von x.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ universelles Komplement von x)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ universelles Komplement von x).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ universelles Komplement von $x \ldots$"
folgt via **3-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x^C$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ universelles Komplement von x"
folgt via **3-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x^C$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = x^C$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = x^C$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $p \in x^C$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x^C$" und
aus "$x^C = \{\omega : \omega \notin x\}$"
folgt: $p \in \{\omega : \omega \notin x\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : \omega \notin x\}$"
folgt: $p \notin x$.

`d)` `VS` gleich $(p \notin x) \wedge (p$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt: $p \in \{\omega : \omega \notin x\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : \omega \notin x\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \notin x\} = x^C$"
folgt: $p \in x^C$.

□

3-3. Einiges rund um "$p \notin x^C$" :

3-3(Satz)

a) *Aus "$p \notin x^C$" folgt "$p \in x$" oder "p Unmenge".*

b) *Aus "$p \notin x^C$" und "p Menge" folgt "$p \in x$".*

c) *Aus "$p \in x$" folgt "$p \notin x^C$".*

Beweis **3-3** a) VS gleich $p \notin x^C$.

1: Aus VS gleich "$p \notin x^C$" und
aus "$x^C = \{\omega : \omega \notin x\}$"
folgt: $p \notin \{\omega : \omega \notin x\}$.

2: Aus 1"$p \notin \{p : p \notin x\}$"
folgt: $(\neg(p \notin x)) \vee (p \text{ Unmenge})$.

3: Aus 2
folgt: $(p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})$.

b) VS gleich $(p \notin x^C) \wedge (p \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "$p \notin x^C \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})$.

2: Aus 1"$(p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})$" und
aus VS gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt: $p \in x$.

c) VS gleich $p \in x$.

1: Aus VS
folgt: $\neg(p \notin x)$.

2: Aus 1"$\neg(p \notin x)$"
folgt: $p \notin \{\omega : \omega \notin x\}$.

3: Aus 2"$p \notin \{\omega : \omega \notin x\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \notin x\} = x^C$"
folgt: $p \notin x^C$.

□

3-4. In `a)` wird die "InvolutionsEigenschaft" des universellen Komplements formuliert. Zwei "MonotonieEigenschaften" des universellen Komplements sind in `b)` und `c)` zu finden. Aus der Gleichheit der universellen Komplemente folgt die Gleichheit der zu Grunde liegenden Klassen, siehe `d)`. Da die umgekehrte Folgerung trivial richtig ist - gleiche Klassen haben gleiches universelles Komplement - wird diese Aussage zwar nicht in die Essays aufgenommen, doch kann die Äquivalenz, wonach zwei Klassen genau dann gleich sind, wenn ihre universellen Komplemente gleich sind, registriert werden:

3-4(Satz)

`a)` $(x^C)^C = x$.

`b)` *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$y^C \subseteq x^C$".*

`c)` *Aus "$x^C \subseteq y^C$" folgt "$y \subseteq x$".*

`d)` *Aus "$x^C = y^C$" folgt "$x = y$".*

Beweis **3-4** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (x^C)^C$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x^C)^C$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x^C)^C$"
folgt via **3-2**: $\alpha \notin x^C$.

`3:` Aus `2.2` "$\alpha \notin x^C$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **3-3**: $\alpha \in x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x^C)^C) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x^C)^C \subseteq x$"

Beweis **3-4** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`
folgt: $\neg(\alpha \notin x)$.

`3:` Aus `2.2` "$\neg(\alpha \notin x)$"
folgt: $\alpha \notin \{\omega : \omega \notin x\}$.

`4:` Aus `3` "$\alpha \notin \{\omega : \omega \notin x\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \notin x\} = x^C$"
folgt: $\alpha \notin x^C$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \notin x^C$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in (x^C)^C$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in (x^C)^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x \subseteq (x^C)^C$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(x^C)^C \subseteq x$" und
aus `A2` gleich "$x \subseteq (x^C)^C$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x^C)^C = x$.

Beweis **3-4** `b)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`Thema1` $\alpha \in y^C$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in y^C$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in y^C$"
folgt via **3-2**: $\alpha \notin y$.

`2.3:` Es gilt: $(\alpha \notin x^C) \vee (\alpha \in x^C)$.

`Fallunterscheidung`

`2.3.1.Fall` $\alpha \notin x^C$.

`3:` Aus `2.3.1.Fall` "$\alpha \notin x^C$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **3-3**: $\alpha \in x$.

`4:` Aus `3` "$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y$.

`5:` Es gilt `4` "$\alpha \in y$".
Es gilt `2.2` "$\alpha \notin y$."
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in x^C$.

`2.3.2.Fall` $\alpha \in x^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in x^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y^C) \Rightarrow (\alpha \in x^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $y^C \subseteq x^C$.

<u>Beweis **3-4**</u> `c)` `VS` gleich $x^C \subseteq y^C$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x^C \subseteq y^C$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(y^C)^C \subseteq (x^C)^C$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(y^C)^C = y$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^C)^C = x$.

`2:` Aus `1.1`"$(y^C)^C \subseteq (x^C)^C$" und
aus `1.2`"$(y^C)^C = y$"
folgt: $y \subseteq (x^C)^C$.

`4:` Aus `3`"$y \subseteq (x^C)^C$" und
aus `1.3`"$(x^C)^C = x$"
folgt: $y \subseteq x$.

`d)` `VS` gleich $x^C = y^C$.

`1:` Aus "$(x^C)^C = (x^C)^C$" und
aus `VS` gleich "$x^C = y^C$"
folgt: $(x^C)^C = (y^C)^C$.

`2.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^C)^C = x$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(y^C)^C = y$.

`3:` Aus `1`"$(x^C)^C = (y^C)^C$" und
aus `2.1`"$(x^C)^C = x$"
folgt: $x = (y^C)^C$.

`4:` Aus `3`"$x = (y^C)^C$" und
aus `2.2`"$(y^C)^C = y$"
folgt: $x = y$.

□

3-5. Zwei Klassen sind genau dann ungleich, wenn ihre universellen Komplemente ungleich sind:

3-5(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $x \neq y$.

ii) $x^C \neq y^C$.

<u>Beweis **3-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \neq y$.

`1:` Es gilt: $(x^C = y^C) \vee (x^C \neq y^C)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x^C = y^C$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x^C = y^C$" folgt via **3-4**: $x = y$.

`3:` Es gilt `2`"$x = y$". Es gilt `VS` gleich "$x \neq y$". Ex falso quodlibet folgt: $x^C \neq y^C$.

`1.2.Fall` $x^C \neq y^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x^C \neq y^C$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x^C \neq y^C$.

`1:` Es gilt $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

`2:` Aus "$x^C = x^C$" und aus `1.1.Fall` "$x = y$" folgt: $x^C = y^C$.

`3:` Es gilt `2`"$x^C = y^C$". Es gilt `VS` gleich "$x^C \neq y^C$". Ex falso quodlibet folgt: $x \neq y$.

`1.2.Fall` $x \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

□

3-6. Gemäß `a)` ist die binäre Vereinigung einer Klasse und ihres universellen Komplements gleich dem Universum. Wie in `b)` gesagt, ist der binäre Durchschnitt einer Klasse und ihres universellen Komplements gleich der leeren Menge. Vor dem Hintergrund von `a)` und `b)` und im Hinblick auf das $0\mathcal{U}$**Axiom** und das $\cup$**Axiom** ist es wenig verwunderlich, dass eine Klasse oder ihr universelles Komplement eine Unmenge ist - siehe `c)` - und dass somit das universelle Komplement einer *Menge* eine Unmenge ist und ausserdem gilt `d)`: Falls das universelle Komplement einer Klasse eine Menge ist, dann ist die zu Grunde liegende Klasse eine Unmenge.
Durch **3-6** wird keineswegs die Möglichkeit ausgeschlossen, dass eine Unmenge gibt, deren Komplement ebenfalls eine Unmenge ist. Es kann sogar erwartet werden, dass es Unmengen gibt, deren Komplement ebenfalls eine Unmenge ist:

3-6(Satz)

`a)` $x \cup x^C = \mathcal{U}$.

`b)` $x \cap x^C = 0$.

`c)` *“x Unmenge” oder “x^C Unmenge”.*

`d)` *Aus “x Menge” folgt “x^C Unmenge”.*

`e)` *Aus “x^C Menge” folgt “x Unmenge”.*

<u>Beweis **3-6**</u> `a)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Es gilt: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha \in x$.

Aus `3.1.Fall` "$\alpha \in x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup x^C$.

`3.2.Fall` $\alpha \notin x$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$\alpha \notin x$" und
aus `2` "α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in x^C$.

`5:` Aus `4` "$x \in x^C$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cup x^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in x \cup x^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in x \cup x^C)$.

Konsequenz via **0-19**: $x \cup x^C = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **3-6** `b)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x \cap x^C$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \cap x^C$” folgt via **2-2**:	$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in x^C)$.
`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in x^C$” folgt via **3-2**:	$\alpha \notin x$.
`4:` Es gilt `2`“$\alpha \in x \ldots$”. Es gilt `3`“$\alpha \notin x$”. Ex falso quodlibet folgt:	$\alpha \notin x \cap x^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap x^C) \Rightarrow (\alpha \notin x \cap x^C)$.

Konsequenz via **0-19**: $x \cap x^C = 0$.

`c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \cup x^C = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `1.1`“$x \cup x^C = \mathcal{U}$” und
aus `1.2`“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt: $x \cup x^C$ Unmenge.

`3:` Aus `2`“$x \cup x^C$ Unmenge”
folgt via **2-8**: $(x$ Unmenge$) \vee (x^C$ Unmenge$)$.

`d)` `VS` gleich x Menge.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x$ Unmenge$) \vee (x^C$ Unmenge$)$.

`2:` Aus `1`“$(x$ Unmenge$) \vee (x^C$ Unmenge$)$” und
aus `VS` gleich “x Menge”
folgt: x^C Unmenge.

`e)` `VS` gleich x^C Menge.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x$ Unmenge$) \vee (x^C$ Unmenge$)$.

`2:` Aus `1`“$(x$ Unmenge$) \vee (x^C$ Unmenge$)$” und
aus `VS` gleich “x^C Menge”
folgt: x Unmenge.

$\square$

3-7. x ist genau dann eine TeilKlasse von y^C, wenn $x \cap y = 0$ und dies ist genau dann der Fall, wenn y eine TeilKlasse von x^C ist. Im Beweis `ii)` $\Rightarrow$ `iii)` wird erstmalig eine Umformungskette verwendet, in der Gleichheitszeichen und Inklusionen auftreten. Auf Grund dieser Umformumngskette wird fest gestellt, dass der erste Term eine TeilKlasse des letzten Terms ist. Die Rechtfertigung ist durch die allgemeine ErsetzungsRegel, wonach gleiche Terme durch gleiche Terme ersetzt werden können und in einer mehrfachen - im vorliegenden Fall: gar keiner - Anwendung der "TransitivitätsEigenschaft" von $\subseteq$ - siehe **0-6** - gegeben:

3-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \subseteq y^C$.

`ii)` $y \subseteq x^C$.

`iii)` $x \cap y = 0$.

<u>Beweis **3-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \subseteq y^C$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y^C$”
folgt via **3-4**: $(y^C)^C \subseteq x^C$.

`2:` Via **3-4** gilt: $(y^C)^C = y$.

`3:` Aus `2`“$(y^C)^C = y$” und
aus `1`“$(y^C)^C \subseteq x^C$”
folgt: $y \subseteq x^C$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $y \subseteq x^C$.

`1:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x^C$”
folgt via **2-15**: $y \cap x \subseteq x^C \cap x$.

`2:` $$x \cap y \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} y \cap x \stackrel{\mathbf{1}}{\subseteq} x^C \cap x \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap x^C \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} 0.$$

`3:` Aus `2`“$x \cap y \ldots \subseteq \ldots 0$”
folgt via **0-18**: $x \cap y = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \cap y = 0$.

`1:` $$x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \mathcal{U} \cap x \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} (y \cup y^C) \cap x \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (y \cap x) \cup (y^C \cap x) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap y) \cup (y^C \cap x)$$
$$\stackrel{\texttt{VS}}{=} 0 \cup (y^C \cap x) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} y^C \cap x \stackrel{\mathbf{2-7}}{\subseteq} y^C.$$

`2:` Aus `1`“$x \ldots \subseteq y^C$”
folgt: $x \subseteq y^C$.

□

3-8. Der binäre Durchschnitt von x und y ist genau dann nicht leer, wenn x *keine* TeilKlasse von y^C ist und dies ist genau dann der Fall, wenn y *keine* TeilKlasse von x^C ist:

3-8(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $x \not\subseteq y^C$.

ii) $y \not\subseteq x^C$.

iii) $0 \neq x \cap y$.

Beweis **3-8**

1: Via **3-7** gilt: $(x \subseteq y^C) \Leftrightarrow (y \subseteq x^C) \Leftrightarrow (x \cap y = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x \subseteq y^C)) \Leftrightarrow (\neg(y \subseteq x^C)) \Leftrightarrow (\neg(x \cap y = 0))$.

3: Aus 2
folgt via **0-3**: $(x \not\subseteq y^C) \Leftrightarrow (\neg(y \subseteq x^C)) \Leftrightarrow (\neg(x \cap y = 0))$.

4: Aus 3
folgt via **0-3**: $(x \not\subseteq y^C) \Leftrightarrow (y \not\subseteq x^C) \Leftrightarrow (\neg(x \cap y = 0))$.

5: Aus 4
folgt: $(x \not\subseteq y^C) \Leftrightarrow (y \not\subseteq x^C) \Leftrightarrow (0 \neq x \cap y)$.

□

3-9. Das universelle Komplement der leeren Menge ist das Universum, dessen universelles Komplement gleich der leeren Menge ist:

3-9(Satz)

a) $0^C = \mathcal{U}$.

b) $\mathcal{U}^C = 0$.

Beweis **3-9** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Via **0-19** gilt: $\alpha \notin 0$.

`3:` Aus `2.2` "$\alpha \notin 0$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in 0^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in 0^C)$.

Konsequenz via **0-19**: $0^C = \mathcal{U}$.

`b)`

`1:` $\mathcal{U}^C \stackrel{\texttt{a)}}{=} (0^C)^C \stackrel{\mathbf{3-4}}{=} 0$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathcal{U}^C = 0$.

□

3-10. Als erste Folgerung aus **3-5** und **3-7** ergibt sich, dass eine Klasse genau dann ungleich der leeren Menge ist, wenn ihr universelles Komplement ungleich dem Universum ist:

3-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$.

`ii)` $x^C \neq \mathcal{U}$.

Beweis **3-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x$" folgt via **3-5**: $0^C \neq x^C$.

`2:` Via **3-9** gilt: $0^C = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`"$0^C \neq x^C$" und aus `2`"$0^C = \mathcal{U}$" folgt: $\mathcal{U} \neq x^C$.

`4:` Aus `3` folgt: $x^C \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x^C \neq \mathcal{U}$.

`1:` Via **3-9** gilt: $0^C = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x^C \neq \mathcal{U}$" und aus `1`"$0^C = \mathcal{U}$" folgt: $x^C \neq 0^C$.

`3:` Aus `2`"$x^C \neq 0^C$" folgt via **3-5**: $x \neq 0$.

`4:` Aus `3` folgt: $0 \neq x$.

□

3-11. Als zweite Folgerung aus **3-5** und **3-7** ergibt sich, dass eine Klasse genau dann ungleich dem Universum ist, wenn ihr universelles Komplement ungleich der leeren Menge ist:

3-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq \mathcal{U}$.

`ii)` $0 \neq x^C$.

Beweis **3-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \neq \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **3-5**: $x^C \neq \mathcal{U}^C$.

`2:` Via **3-9** gilt: $\mathcal{U}^C = 0$.

`3:` Aus `1`"$x^C \neq \mathcal{U}^C$" und
aus `2`"$\mathcal{U}^C = 0$"
folgt: $x^C \neq 0$.

`4:` Aus `3`
folgt: $0 \neq x^C$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq x^C$.

`1:` Via **3-9** gilt: $\mathcal{U}^C = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x^C$" und
aus `1`"$\mathcal{U}^C = 0$"
folgt: $\mathcal{U}^C \neq x^C$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U}^C \neq x^C$"
folgt via **3-5**: $\mathcal{U} \neq x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \neq \mathcal{U}$.

□

3-12. Nach $\mathsf{0.0}(x) = \{\omega : \omega \in x\} \overset{\mathbf{0-13}}{=} x$ wird mit " $\mathsf{3.1}(x) = \{\lambda^C : \lambda \in x\}$ " erstmalig ein KlassenTerm ohne abkürzende Schreibweise in die Essays eingeführt. Derlei "unabgekürzte" KlassenTerme treten im Folgenden immer wieder auf. Wenn "unabgekürzte" KlassenTerme außerhalb ihrer Definition zum Einsatz kommen, dann wird zur Erhöhung der Lesbarkeit im Kontext deren Definition wiederholt und die Nummer der Definition angegeben.
In Definition **3-10** wird außerdem mit "$\{\lambda^C : \lambda \in x\}$" erstmalig von einer "abkürzenden Notation" Gebrauch gemacht. Damit wird von den üblichen Konstruktionselementen von KlassenKlammern abgewichen. Die "abkürzende Notation" wird im Laufe der Essays immer wieder eingesetzt. Sie hat den Vorteil, dass schneller kommuniziert wird, was die definierenden Eigenschaften des jeweiligen KlassenTerms sind. Der Nachteil liegt darin, dass die "abkürzende Notation" möglicherweise missverständlich ist. Dem begegne ich durch zwei Massnahmen: Erstens wird bei jeder Definition eines KlassenTerms mit "abkürzender Notation" die vollständige Definition angegeben. Zweitens wird bei jedem Einsatz außerhalb der Definition die Code-Nummer der Definition im Kontext angegeben, so dass mit geringem Aufwand die genaue Definition nachgelesen werden kann:

3-12(Definition)

$$\mathsf{3.1}(x) = \{\lambda^C : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = \Omega^C))\}.$$

3-13. Dass die Klasse $\{\lambda^C : \lambda \in x\}$ gemäß `a)` gleich der leeren Menge ist überrascht im Hinblick auf **3-6** - wonach λ oder λ^C eine Unmenge ist - nicht. In den Aussagen `b)` und `c)` wird gemäß `a)` nochmals Vereinigung und Durchschnitt der leeren Menge angegeben.
In **3-13** tritt mit "$\{\lambda^C : \lambda \in x\}$" zum ersten Mal *in einem Satz* ein KlassenTerm auf, der keine eigene Abkürzung hat. Entsprechend wird die Definition dieses KlassenTerms in **3-13** mitaufgenommen und auf die Stelle von dessen Definition - nämlich **3-12(Def)** - verwiesen.
Bei "$\{\lambda^C : \lambda \in x\}$" von der vorab zu **3-12(Def)** angesprochenen "abkürzenden Notation" Gebrauch gemacht. Indem auf **3-12(Def)** verwiesen wird, ist die genaue Definition von "$\{\lambda^C : \lambda \in x\}$" leicht zu finden:

3-13(Satz)

`a)` $\{\lambda^C : \lambda \in x\} = 0.$

`b)` $\bigcup\{\lambda^C : \lambda \in x\} = 0.$

`c)` $\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in x\} = \mathcal{U}.$

3-12(Def) $\{\lambda^C : \lambda \in x\}.$

Beweis **3-13** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\lambda^C : \lambda \in x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^C : \lambda \in x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^C : \lambda \in x\}$" und
aus "$\{\lambda^C : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = \Omega^C))\}$"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = \Omega^C))\}$.

`3:` Aus `2.2`"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = \Omega^C))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha = \Omega^C)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`5:` Aus `4`"Ω Menge"
folgt via **3-6**: Ω^C Unmenge.

`6:` Aus `3`"$\ldots \alpha = \Omega^C$" und
aus `5`"Ω^C Unmenge"
folgt: α Unmenge.

`7:` Es gilt `6`"α Unmenge".
Es gilt `2.1`"α Menge".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda^C : \lambda \in x\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^C : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda^C : \lambda \in x\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{\lambda^C : \lambda \in x\} = 0$.

`b)`

`1:` $\bigcup\{\lambda^C : \lambda \in x\} \stackrel{\text{a)}}{=} \bigcup 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} 0$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\bigcup\{\lambda^C : \lambda \in x\} = 0$.

`c)`

`1:` $\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in x\} \stackrel{\text{a)}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in x\} = \mathcal{U}$.

□

3-14. Unter Vorwegnahme folgender Sätze - die auch als “ausgearbeitete Beispiele” angesehen werden können - wird fest gestellt, dass es keine DeMorgan-Regeln $\bigcup, \bigcap$ gibt:

3-14.Bemerkung

- Die Gleichung
  “$(\bigcup x)^C = \bigcap\{\lambda^C : \lambda \in x\}$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Gleichung
  “$(\bigcap x)^C = \bigcup\{\lambda^C : \lambda \in x\}$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

3-15. Es gibt kein allgemeines DeMorgan-Gesetz von der Form “universelles Komplement der Vereinigung gleich dem Durchschnitt der Komplemente” - wie hier zu sehen ist belegt dies via Singelton-Bildung jede nichtleere Menge.
Ein korrespondierendes DeMorgan-Gesetz ist jedoch für *binäre* Vereinigung und *binären* Durchschnitt verfügbar, siehe **DM$\cup\cap$** in **3-17**.
In **3-12** wird die in **3-12(Def)** für eine allgemeine KlassenVariable “x” definierte Klasse “ `3.1`(p) ” für Singelton p betrachtet. Diese Klasse würde entsprechend der in **3-12(Def)** verwendeten Notation mit “ `3.1`$(\{p\})$ ” bezeichnet werden. Die hier vor sich gehende Ersetzung ist natürlich zulässig, weil die in den Essays verwendeten KlassenTerme - zum Beispiel Singelton p - stets Klassen sind und somit durch KlassenVariable repräsentierbar sind.
Demnach ist “$\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = \mathcal{U}$” von `b)` bereits aus **3-13** bekannt (und voraussetzungsfrei gültig) - im Beweis wird auch lediglich auf **3-13** verwiesen.
Aussage `a)` ist via **1-14** für *alle* Mengen - also auch für die leere Menge - gültig, `c)` ist gemäß **3-10** für jede *nichtleere* Klasse gültig und - wie soeben angesprochen - ist `b)` voraussetzungsfrei gültig .
Die unter geringeren Voraussetzungen gültigen Aussagen `abc)` werden in **3-15** aufgenommen, um das zentrale Anliegen von **3-15** - nämlich dem Nachweis der *Nichtverfügbarkeit* des angesprochenen DeMorgan-Regelns via Ungleichung `d)` - besser nachzuvollziehbar zu machen. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - a) - d)`:

3-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \neq p$.

$\rightarrow$) p *Menge.*

Dann folgt:

`a)` $(\bigcup\{p\})^C = p^C$.

`b)` $\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = \mathcal{U}$.

`c)` $p^C \neq \mathcal{U}$.

`d)` $(\bigcup\{p\})^C \neq \bigcap\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\})$.

3-12(Def) $\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\}$.

Beweis **3-15**

`1.1:` Aus →) “p Menge”
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = p$.

`1.b):` Via **3-13** gilt: $\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = \mathcal{U}$.

`1.c):` Aus `VS` gleich “$0 \neq p \ldots$”
folgt via **3-10**: $p^C \neq \mathcal{U}$.

`2.a):` Aus `1.1` “$\bigcup\{p\} = p$” und
aus “$p^C = p^C$”
folgt: $(\bigcup\{p\})^C = p^C$.

`3:` Aus `2.a)` “$(\bigcup\{p\})^C = p^C$” und
aus `1.c)` “$p^C \neq \mathcal{U}$”
folgt: $(\bigcup\{p\})^C \neq \mathcal{U}$.

`4.d):` Aus `3` “$(\bigcup\{p\})^C \neq \mathcal{U}$” und
aus `1.b)` “$\bigcap\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = \mathcal{U}$”
folgt: $(\bigcup\{p\})^C \neq \bigcap\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\}$.

□

3-16. Es gibt kein allgemeines DeMorgan-Gesetz von der Form "universelles Komplement des Durchschnitts gleich der Vereinigung der Komplemente" - wie hier zu sehen ist belegt dies jede Menge via Singelton-Bildung.
Ein korrespondierendes DeMorgan-Gesetz ist jedoch für *binären* Durchschnitt und *binäre* Vereinigung verfügbar, siehe **DM∩∪** in **3-18**.
In **3-16** wird wie in **3-15** die in **3-12(Def)** für eine allgemeine KlassenVariable "p" definierte Klasse " 3.1(p) " für Singelton p betrachtet. Dies wird vorab zu **3-15** ausführlicher diskutiert, so dass sich hier weitere Kommentare erübrigen.
Aussage a) ist via **1-14** gültig und b) ist bereits aus **3-13** bekannt (und voraussetzungsfrei gültig) - im Beweis wird auch lediglich auf **3-13** verwiesen. Aussagen a) und b) werden dennoch in **3-16** aufgenommen, damit Ungleichung d) - in der sich manifestiert, dass es kein allgemeines DeMorgan der angesprochenen Form gibt - größere Präsenz erlangt. Die Beweis-Reihenfolge ist b) - a) - c) - d):

3-16(Satz)

Es gelte:

→) *p Menge.*

Dann folgt:

a) $(\bigcap\{p\})^C = p^C$.

b) $\bigcup\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = 0$.

c) $p^C \neq 0$.

d) $(\bigcap\{p\})^C \neq \bigcup\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\}$.

3-12(Def) $\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\}$.

<u>Beweis **3-16**</u>

`1.1:` Aus →) "p Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{p\} = p$.

`1.2:` Aus →) "p Menge"
folgt via **3-6**: p^C Unmenge.

`1.b):` Via **3-13** gilt: $\bigcup\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = 0$.

`2.a):` Aus `1.1` "$\bigcap\{p\} = p$" und
aus "$p^C = p^C$"
folgt: $(\bigcap\{p\})^C = p^C$.

`3:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`4.c):` Aus `1.2` "p^C Unmenge" und
aus `3` "0 Menge"
folgt via **0-1**: $p^C \neq 0$.

`5:` Aus `2.a)` "$(\bigcap\{p\})^C = p^C$" und
aus `4.c)` "$p^C \neq 0$"
folgt: $(\bigcap\{p\})^C \neq 0$.

`6.d):` Aus `5` "$(\bigcap\{p\})^C \neq 0$"
und aus `1.b)` "$\bigcup\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\} = 0$"
folgt: $(\bigcap\{p\})^C \neq \bigcup\{\lambda^C : \lambda \in \{p\}\}$.

□

3-17. Die Kernaussage der **DeMorgan Regeln** $\cup\cap$ ist in `a)` zu finden. Demnach ist das universelle Komplement der binären Vereinigung gleich dem binären Durchschnitt der universellen Komplemente.
Eine sich hieraus via **3-4** schnell ergebende Konsequenz ist `b)`.
In **3-14** ist die Reihenfolge $\cup, \cap$ von Bedeutung. Es gibt auch DeMorgan Regeln $\cap\cup$. Diese sind in **3-18** zu finden:

3-17(Satz) **(DM$\cup\cap$: DeMorgan Regeln $\cup\cap$)**

`a)` $(x \cup y)^C = x^C \cap y^C$.

`b)` $(x^C \cup y^C)^C = x \cap y$.

Beweis **3-17** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cup y)^C$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in (x \cup y)^C$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in (x \cup y)^C$”
folgt via **3-2**: $\alpha \notin x \cup y$.

`3:` Aus `2.2`“$\alpha \notin x \cup y$”
folgt via **2-3**: $(\alpha \notin x) \wedge (\alpha \notin y)$.

`4.1:` Aus `3`“$\alpha \notin x \ldots$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **3-2**: $\alpha \in x^C$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \alpha \notin y$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **3-2**: $\alpha \in y^C$.

`5:` Aus `4.1`“$\alpha \in x^C$” und
aus `4.2`“$\alpha \in y^C$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x^C \cap y^C$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y)^C) \Rightarrow (\alpha \in x^C \cap y^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$(x \cup y)^C \subseteq x^C \cap y^C$”

Beweis **3-17** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in x^C \cap y^C$.
`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x^C \cap y^C$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x^C \cap y^C$” folgt via **2-2**:	$(\alpha \in x^C) \wedge (\alpha \in y^C)$.
`3.1:` Aus `2.2`“$\alpha \in x^C \ldots$” folgt via **3-2**:	$\alpha \notin x$.
`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots \alpha \in y^C$” folgt via **3-2**:	$\alpha \notin y$.
`4:` Aus `3.1`“$\alpha \notin x$” und aus `3.2`“$\alpha \notin y$” folgt via **2-3**:	$\alpha \notin x \cup y$.
`5:` Aus `4`“$\alpha \notin x \cup y$” und aus `2.1`“α Menge” folgt via **3-2**:	$\alpha \in (x \cup y)^C$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x^C \cap y^C) \Rightarrow (\alpha \in (x \cup y)^C))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} x^C \cap y^C \subseteq (x \cup y)^C \text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$(x \cup y)^C \subseteq x^C \cap y^C$” und
aus `A2` gleich “$x^C \cap y^C \subseteq (x \cup y)^C$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cup y)^C = x^C \cap y^C$.

<u>Beweis **3-17** `b)`</u>

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^C \cup y^C)^C = (x^C)^C \cap (y^C)^C$.

`2.1:` Via **3-4** gilt: $(x^C)^C = x$.

`2.2:` Via **3-4** gilt: $(y^C)^C = y$.

`3:` Aus `1` “ $(x^C \cup y^C)^C = (x^C)^C \cap (y^C)^C$ ” und
aus `2.1` “ $(x^C)^C = x$ ”
folgt: $(x^C \cup y^C)^C = x \cap (y^C)^C$.

`4:` Aus `3` “ $(x^C \cup y^C)^C = x \cap (y^C)^C$ ” und
aus `2.2` “ $(y^C)^C = y$ ”
folgt: $(x^C \cup y^C)^C = x \cap y$.

□

3-18. Die Kernaussage der **DeMorgan Regeln** $\cap\cup$ ist in `a)` zu finden. Demnach ist das universelle Komplement des binären Durchschnitts gleich der binären Vereinigung der universellen Komplemente.
Eine sich hieraus via **3-4** schnell ergebende Konsequenz ist `b)`.
In **3-15** ist die Reihenfolge $\cap, \cup$ von Bedeutung. Es gibt auch DeMorgan Regeln $\cup\cap$. Diese sind in **3-17** zu finden:

3-18(Satz) (DM$\cap\cup$: DeMorgan Regeln $\cap\cup$)

`a)` $(x \cap y)^C = x^C \cup y^C$.

`b)` $(x^C \cap y^C)^C = x \cup y$.

Beweis **3-18** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cap y)^C$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \cap y)^C$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \cap y)^C$"
folgt via **3-2**: $\alpha \notin x \cap y$.

`3:` Aus `2.2` "$\alpha \notin x \cap y$"
folgt via **2-3**: $(\alpha \notin x) \vee (\alpha \notin y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha \notin x$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$\alpha \notin x$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in x^C$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \in x^C$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x^C \cup y^C$.

`3.2.Fall` $\alpha \notin y$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$\alpha \notin y$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in y^C$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \in y^C$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x^C \cup y^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in x^C \cup y^C$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y)^C) \Rightarrow (\alpha \in x^C \cup y^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \cap y)^C \subseteq x^C \cup y^C$"

<u>Beweis **3-18**</u> `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in x^C \cup y^C$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x^C \cup y^C$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x^C \cup y^C$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x^C) \vee (\alpha \in y^C)$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $\alpha \in x^C$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall`"$\alpha \in x^C$"
folgt via **3-2**: $\alpha \notin x$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \notin x$"
folgt via **2-3**: $\alpha \notin x \cap y$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \notin x \cap y$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in (x \cap y)^C$.

`2.2.2.Fall` $\alpha \in y^C$.

`3:` Aus `2.2.2.Fall`"$\alpha \in y^C$"
folgt via **3-2**: $\alpha \notin y$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \notin y$"
folgt via **2-3**: $\alpha \notin x \cap y$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \notin x \cap y$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **3-2**: $\alpha \in (x \cap y)^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (x \cap y)^C$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x^C \cup y^C) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y)^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x^C \cup y^C \subseteq (x \cap y)^C$"

...

<u>Beweis</u> **3-18** `a)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich “$(x \cap y)^C \subseteq x^C \cup y^C$” und
aus `A2` gleich “$x^C \cup y^C \subseteq (x \cap y)^C$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cap y)^C = x^C \cup y^C$.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^C \cap y^C)^C = (x^C)^C \cup (y^C)^C$.

`2.1:` Via **3-4** gilt: $(x^C)^C = x$.

`2.2:` Via **3-4** gilt: $(y^C)^C = y$.

`3:` Aus `1` “$(x^C \cap y^C)^C = (x^C)^C \cup (y^C)^C$” und
aus `2.1` “$(x^C)^C = x$”
folgt: $(x^C \cap y^C)^C = x \cup (y^C)^C$.

`4:` Aus `3` “$(x^C \cap y^C)^C = x \cup (y^C)^C$” und
aus `2.2` “$(y^C)^C = y$”
folgt: $(x^C \cap y^C)^C = x \cup y$.

$\square$

3-19. Ein wenig KlassenAlgebra mit universellem Komplement, $\cup$ und $\cap$:

3-19(Satz)

a) $x \cup (y \cap x^C) = x \cup y$.

b) $(x \cup y) \cup (z \cap y^C) = x \cup (y \cup z)$.

Beweis **3-19** a)

1: Via **DG**$\cup\cap$ gilt: $x \cup (y \cap x^C) = (x \cup y) \cap (x \cup x^C)$.

2: Via **3-6** gilt: $x \cup x^C = \mathcal{U}$.

3: $x \cup (x^C \cap y) \stackrel{1}{=} (x \cup y) \cap (x \cup x^C) \stackrel{2}{=} (x \cup y) \cap \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \cup y$.

4: Aus 3 folgt: $x \cup (x^C \cap y) = x \cup y$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $y \cup (z \cap y^C) = y \cup z$.

2: $(x \cup y) \cup (z \cap y^C) \stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} x \cup (y \cup (z \cap y^C)) \stackrel{1}{=} x \cup (y \cup z)$.

3: Aus 2 folgt: $(x \cup y) \cup (z \cap y^C) = x \cup (y \cup z)$.

$\square$

DistributivGesetz $\cup\bigcap$. DG$\cup\bigcap$.
DistributivGesetz $\cap\bigcup$. DG$\cap\bigcup$.
Ungeordnetes Paar. $\{x, y\}$.

Ersterstellung: 07/09/05 **Letzte Änderung: 08/04/11**

4-1. In $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$ wird zum ersten Mal in den Essays eine Klasse betrachtet, deren Elemente durch eine binäre Operation - hier die binäre Vereinigung - einer “ festen ” Klasse mit den Elementen einer gegebenen Klasse entstehen. Derlei Konstruktionen trete immer wieder auf.
Klarer Weise kommt bei der Definition von $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$ die “ abkürzende Notation” zum Tragen, die seit **#3** bekannt ist.
Bei der Zuordnung der KlassenVariablen in “ $\mathsf{4.0}(x, q)$ ” scheint es in Bezug auf “ $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$” zu einer Vertauschung der Reihenfolge zu kommen. Dies ist nicht der Fall, da sich hier und im Folgenden die Reihenfolge der KlassenVariablen in den “ KlassenTermNummern” stets auf die vollständige Definition des KlassenTerms bezieht und einer ab sofort fest geschriebenen Konvention folgend bei derlei vollständigen Definitionen die letzte Aussage stets eine die gebundene Variable des KlassenTerms definierende Aussage ist. Im vorliegenden Fall führt die Umsetzung dieser Regel auf $\mathsf{4.0}(x, q) = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}$ und hier kommt erst “ x” und dann “ q” . Also liegt kein Fehler vor, sondern es kommt eine Konvention zum Tragen:

4-1(Definition)

$$\mathsf{4.0}(x, q) = \{q \cup \lambda : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}.$$

4-2. In `a)` findet sich Notwendiges für “$x \in \{q \cup \lambda : \lambda \in p\}$”. In `b)` findet sich Hinreichendes für “$p \cup x \in \{p \cup \lambda : \lambda \in q\}$”. Im Beweis wird, da die Variable “Ω” anderwertig vergeben ist, in der zitierten Definition von `4.0`$(()\, x, q)$ die gebundene Variable durch “Ψ” ersetzt:

4-2(Satz)

`a)` *Aus* “$p \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$” *folgt* “$\exists \Omega : (p = q \cup \Omega) \wedge (\Omega \in x)$”.

`b)` *Aus* “*q Menge*” *und* “$p \in x$” *folgt* “$q \cup p \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$”.

4-1(Def) $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

<u>Beweis **4-2**</u> `a)` `VS` gleich $$p \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}.$$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$" und
aus "$\{q \cup \lambda : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}$"
folgt: $$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}.$$

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}$"
folgt: $$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p = q \cup \Omega).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$\exists \Omega : (p = q \cup \Omega) \wedge (\Omega \in x).$$

`b)` `VS` gleich $$(q \text{ Menge}) \wedge (p \in x).$$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$"
folgt: $$\exists p : p \in x.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $$p \text{ Menge}.$$

`2:` Aus `VS` gleich "q Menge..." und
aus `1.2`"p Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $$q \cup p \text{ Menge}.$$

`3:` Aus `1.2`"$\exists p : p \in x$" und
aus "$q \cup p = q \cup p$"
folgt: $$\exists p : (p \in x) \wedge (q \cup p = q \cup p).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (q \cup p = q \cup \Omega).$$

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (q \cup p = q \cup \Omega)$" und
aus `2`"$q \cup p$ Menge"
folgt: $$q \cup p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}.$$

`6:` Aus `5`"$q \cup p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cup \Omega))\} = \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$"
folgt: $$q \cup p \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}.$$

□

4-3. Beim Beweis von **4-2** keimt der Verdacht, nun kommt die Gewissheit:

4-3(Satz)

Aus "q Unmenge" folgt "$\{q \cup \lambda : \lambda \in x\} = 0$".

4-1(Def) $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

Beweis **4-3** `VS` gleich q Unmenge.

`Thema1` $\alpha \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$"
folgt via **4-2**: $\exists \Omega : (\alpha = q \cup \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

`3:` Aus `VS` gleich "q Unmenge"
folgt via **2-24**: $q \cup \Omega$ Unmenge.

`4:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = q \cup \Omega \ldots$" und
aus `3`"$q \cup \Omega$ Unmenge"
folgt: α Unmenge.

`5:` Es gilt `4`"α Unmenge".
Es gilt `2.1`"α Menge".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{q \cup \lambda : \lambda \in x\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\} = 0$.

$\square$

4-4. Das **DistributivGesetz** $\cup\bigcap$ ist nicht uneingeschränkt verfügbar. Im Gegensatz dazu ist das DistributivGesetz $\cap\bigcup$ - das in **4-7** zu finden ist - allgemein gültig. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - a) - d)`:

4-4(Satz) (DG$\cup\bigcap$: Distributivgesetz $\cup\bigcap$)

`a)` $q\cup\bigcap x\subseteq\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}$.

`b)` *Aus "q Unmenge" folgt "$\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}=\mathcal{U}$"*

`c)` *Aus "q Unmenge" und "$q\cup\bigcap x=\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}$" folgt "$q\cup\bigcap x=\mathcal{U}$".*

`d)` *Aus "q Menge" folgt "$q\cup\bigcap x=\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}$".*

4-1(Def) $\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}$.

Beweis **4-4** `b)` `VS` gleich q Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "q Unmenge"
folgt via **4-3**: $\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}=0$.

`2:` $\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}\stackrel{1}{=}\bigcap 0\stackrel{\mathbf{1-14}}{=}\mathcal{U}$.

`3:` Aus 2
folgt: $\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}=\mathcal{U}$.

`c)` `VS` gleich $(q\text{ Unmenge})\wedge(q\cup\bigcap x=\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "q Unmenge…"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}=\mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "…$q\cup\bigcap x=\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}$" und
aus `1`"$\bigcap\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}=\mathcal{U}$"
folgt: $q\cup\bigcap x=\mathcal{U}$.

<u>Beweis **4-4**</u> `a)`

`Thema1` $\alpha \in q \cup \bigcap x.$

`Thema2.1` $\beta \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}.$

`3:` Aus `Thema2.1`“$\beta \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$”
folgt via **4-2**: $\exists \Omega : (\beta = q \cup \Omega) \wedge (\Omega \in x).$

`4.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in q \cup \bigcap x$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in q) \vee (\alpha \in \bigcap x).$

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $\alpha \in q.$

Aus `4.1.1.Fall`“$\alpha \in q$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in q \cup \Omega.$

`4.1.2.Fall` $\alpha \in \bigcap x.$

`5:` Aus `4.1.2.Fall`“$\alpha \in \bigcap x$” und
aus `3`“$\ldots \Omega \in x$”
folgt via **1-13**: $\alpha \in \Omega.$

`6:` Aus `5`“$\alpha \in \Omega$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in q \cup \Omega.$

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: `A1` | “$\alpha \in q \cup \Omega$”

`4.2:` Aus `A1` gleich “$\alpha \in q \cup \Omega$” und
aus `3`“$\ldots \beta = q \cup \Omega \ldots$”
folgt: $\alpha \in \beta.$

Ergo `Thema2.1`: `A2` | “$\forall \beta : (\beta \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$”

...

...

<u>Beweis **4-4** `a)`</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in q \cup \bigcap x.$

...

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in q \cup \bigcap x$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `A2` gleich
"$\forall \beta : (\beta \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `2.2` "α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in q \cup \bigcap x) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $q \cup \bigcap x \subseteq \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}.$

<u>Beweis **4-4**</u> `d)` `VS` gleich q Menge.

`Thema1.1` $\alpha \in \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Es gilt: $(\alpha \in q) \vee (\alpha \notin q)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha \in q$.

Aus `3.1.Fall`“$\alpha \in q$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in q \cup \bigcap x$.

`3.2.Fall` $\alpha \notin q$.

`Thema4.1` $\beta \in x$.

`5:` Aus `VS` gleich “q Menge” und
aus `Thema4.1`“$\beta \in x$”
folgt via **4-2**: $q \cup \beta \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

`6:` Aus `Thema1.1`
“$\alpha \in \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$” und
aus `5`“$q \cup \beta \in \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$”
folgt via **1-13**: $\alpha \in q \cup \beta$.

`7:` Aus `6`“$\alpha \in q \cup \beta$” und
aus `3.2.Fall`“$\alpha \notin q$”
folgt via **Binäres SchubfachPrinzip**:
$\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema4.1`: `A1` “$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$”

`4.2:` Aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$” und
aus `2`“α Menge”
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap x$.

`5:` Aus `4.2`“$\alpha \in \bigcap x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in q \cup \bigcap x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in q \cup \bigcap x$.

...

Beweis **4-4** `d)` `VS` gleich q Menge.

...

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in q \cup \bigcap x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\} \subseteq q \cup \bigcap x$"

`1.2`: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $q \cup \bigcap x \subseteq \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

`2`: Aus `1.2`"$q \cup \bigcap x \subseteq \{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$" und
aus `A2` gleich "$\bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\} \subseteq q \cup \bigcap x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $q \cup \bigcap x = \bigcap\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$.

$\square$

4-5. Der KlassenTerm $\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$ ist ähnlich wie $\{q \cup \lambda : \lambda \in x\}$ (siehe **4-1(Def)**) definiert:

4-5(Definition)

$$\mathtt{4.1}(x, q) = \{q \cap \lambda : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\}.$$

4-6. Notwendiges für "$p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$" ist in `a)` zu finden. In `b)` steht Hinreichendes für "$q \cap p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$" :

4-6(Satz)

`a)` *Aus* "$p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (p = q \cap \Omega) \wedge (\Omega \in x)$".

`b)` *Aus* "$p \in x$" *folgt* "$q \cap p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$".

4-5(Def) $\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$.

Beweis **4-6** `a)` `VS` gleich $p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$” und
aus “$\{q \cap \lambda : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\}$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p = q \cap \Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (p = q \cap \Omega) \wedge (\Omega \in x)$.

`b)` `VS` gleich $p \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p \in x$”
folgt: $\exists p : p \in x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$p \in x$” und
aus “$q \cap p = q \cap p$”
folgt: $(p \in x) \wedge (q \cap p = q \cap p)$.

`2.1:` Aus `1.1`“p Menge”
folgt via **2-24**: $p \cap q$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2`“$\exists p \ldots$” und
aus `1.3`“$(p \in x) \wedge (q \cap p = q \cap p)$”
folgt: $\exists p : (p \in x) \wedge (q \cap p = q \cap p)$.

`3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $q \cap p = p \cap q$.

`4:` Aus `3`“$q \cap p = p \cap q$” und
aus `2.1`“$p \cap q$ Menge”
folgt: $q \cap p$ Menge.

`5:` Aus `2.2`“$\exists p : (p \in x) \wedge (q \cap p = q \cap p)$” und
aus `4`“$q \cap p$ Menge”
folgt: $q \cap p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\}$.

`6:` Aus `5`“$q \cap p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = q \cap \Omega))\} = \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$”
folgt: $q \cap p \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$.

□

4-7. Das **DistributivGesetz** $\cap\bigcap$ ist anders als das DistributivGesetz $\cup\bigcap$ - siehe **4-4** - ohne Weiteres gültig:

4-7(Satz) (DG$\cap\bigcup$: Distributivgesetz $\cap\bigcup$)

$$q\cap\bigcup x=\bigcup\{q\cap\lambda:\lambda\in x\}.$$

4-5(Def) $\{q\cap\lambda:\lambda\in x\}$.

Beweis **4-7**

`Thema1.1` $\alpha\in q\cap\bigcup x$.

2: Aus `Thema1.1`"$\alpha\in q\cap\bigcup x$"
folgt via **2-2**: $(\alpha\in q)\wedge(\alpha\in\bigcup x)$.

3: Aus 2"$\ldots\alpha\in\bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega:(\alpha\in\Omega)\wedge(\Omega\in x)$.

4.1: Aus 2"$\alpha\in q\ldots$" und
aus 3"$\ldots\alpha\in\Omega\ldots$"
folgt via **2-2**: $\alpha\in q\cap\Omega$.

4.2: Aus 3"$\ldots\Omega\in x$"
folgt via **4-6**: $q\cap\Omega\in\{q\cap\lambda:\lambda\in x\}$.

5: Aus 4.1"$\alpha\in q\cap\Omega$" und
aus 4.2"$q\cap\Omega\in\{q\cap\lambda:\lambda\in x\}$"
folgt via **1-12**: $\alpha\in\bigcup\{q\cup\lambda:\lambda\in x\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in q\cap\bigcup x)\Rightarrow(\alpha\in\bigcup\{q\cap\lambda:\lambda\in x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$q\cap\bigcup x\subseteq\bigcup\{q\cap\lambda:\lambda\in x\}$"

Beweis **4-7**

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$"
folgt via **1-12**:
$$\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}).$$

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$"
folgt via **4-6**: $\exists \Psi : (\Omega = q \cap \Psi) \wedge (\Psi \in x)$.

4: Aus 2 "$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus 3 "$\ldots \Omega = q \cap \Psi \ldots$"
folgt: $\alpha \in q \cap \Psi$.

5: Aus 4 "$\alpha \in q \cap \Psi$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in q) \wedge (\alpha \in \Psi)$.

6: Aus 5 "$\ldots \alpha \in \Psi$" und
aus 3 "$\ldots \Psi \in x$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup x$.

7: Aus 5 "$\alpha \in q \ldots$" und
aus 6 "$\alpha \in \bigcup x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in q \cap \bigcup x$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in q \cap \bigcup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\} \subseteq q \cap \bigcup x\text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$q \cap \bigcup x \subseteq \bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$" und
aus A2 gleich "$\bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\} \subseteq q \cap \bigcup x$"
folgt: $q \cap \bigcup x = \bigcup\{q \cap \lambda : \lambda \in x\}$.

□

4-8. Ähnlich wie bei der Definition von Singelton p wird im Rahmen der Essays bei der Definition des **ungeordneten Paares von** p **und** q von der klassischen, in **J. Kelleq**, *General Topology*, Springer, 1961, zu findenden Definition abgewichen.
In der klassischen Definition wäre das ungeordnete Paar $\{p, q\}$ gleich $\{p\} \cup \{q\}$ mit klassischer Definition von Singelton p und Singelton q.
In den Essays wird einer auf dem logischen "$\vee$" basierender Zugang gewählt, den ich gegenüber dem klassischen Zugang wegen der Kürze der Notation ansprechender finde.
Mit den "Essay-Definitionen" von "Singelton p" (und "Singelton q") und des "ungeordneten Paares von p und q" steht - via **4-11** - auch die "klassische DefinitionsFormel $\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$" in den Essays zur Verfügung.
Unterschiede zwischen klassischen und "essayistischen" ungeordneten Paaren treten genau dann auf, wenn mindestens eine der involvierten Klasse eine Unmenge ist:

4-8(Definition)

1) $\{p, q\}$

$$= 4.2(p, q) = \{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **ungeordnetes Paar von** p **und** q"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \{p, q\}.$$

4-9. Einige elementare Eigenschaften ungeordneter Paare. Es deuten sich die Sonderrollen von Unmengen an:

4-9(Satz)

a) *$\{p,q\}$ ungeordnetes Paar von p und q.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ ungeordnetes Paar von p und q" und "$\mathfrak{D}$ ungeordnetes Paar von p und q" folgt "$\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$".*

c) *Aus "$w\in\{p,q\}$" folgt "$w=p$" oder "$w=q$".*

d) *Aus "p Menge" folgt "$p\in\{p,q\}$".*

e) *Aus "q Menge" folgt "$q\in\{p,q\}$".*

Beweis **4-9** a)

Aus "$\{p,q\}=\{p,q\}$"
folgt via **4-8(Def)**: $\{p,q\}$ ungeordnetes Paar von p und q.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ ungeordnetes Paar von p und q) $\wedge$($\mathfrak{D}$ ungeordnetes Paar von p und q)

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ ungeordnetes Paar von p und $q\ldots$"
folgt via **4-8(Def)**: $\mathfrak{C}=\{p,q\}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ ungeordnetes Paar von p und q"
folgt via **4-8(Def)**: $\mathfrak{D}=\{p,q\}$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C}=\{p,q\}$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D}=\{p,q\}$"
folgt: $\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$.

c) VS gleich $w\in\{p,q\}$.

1: Aus VS gleich "$w\in\{p,q\}$" und
aus "$\{p,q\}=\{\omega:(\omega=p)\vee(\omega=q)\}$"
folgt: $w\in\{\omega:(\omega=p)\vee(\omega=q)\}$.

2: Aus 1 "$w\in\{\omega:(\omega=p)\vee(\omega=q)\}$"
folgt: $(w=p)\vee(w=q)$.

Beweis **4-9** `d)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus "$p = p$"
folgt: $(p = p) \vee (p = q)$.

`2:` Aus `1`"$(p = p) \vee (p = q)$" und
aus `VS` gleich "p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\} = \{p, q\}$"
folgt: $p \in \{p, q\}$.

`e)` `VS` gleich q Menge.

`1:` Aus "$q = q$"
folgt: $(q = p) \vee (q = q)$.

`2:` Aus `1`"$(q = p) \vee (q = q)$" und
aus `VS` gleich "q Menge"
folgt: $q \in \{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\}$.

`3:` Aus `2`"$q \in \{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega = p) \vee (\omega = q)\} = \{p, q\}$"
folgt: $q \in \{p, q\}$.

$\square$

4-10. Ein Kriterium für "$0 \neq \{p, q\}$" :

4-10(Satz)

Die Ausssagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq \{p, q\}$.

`ii)` "$p \in \{p, q\}$" *oder* "$q \in \{p, q\}$".

`iii)` "p *Menge*" *oder* "q *Menge*".

Beweis **4-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \{p, q\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{p, q\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{p, q\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{p, q\}$"
folgt via **4-9**: $(\Omega = p) \vee (\Omega = q)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\Omega = p$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{p, q\}$" und
aus `2.1.Fall`"$\Omega = p$"
folgt: $p \in \{p, q\}$.

`4:` Aus `3`"$p \in \{p, q\}$"
folgt: $(p \in \{p, q\}) \vee (q \in \{p, q\})$.

`2.2.Fall` $\Omega = q$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{p, q\}$" und
aus `2.2.Fall`"$\Omega = q$"
folgt: $q \in \{p, q\}$.

`4:` Aus `3`"$q \in \{p, q\}$"
folgt: $(p \in \{p, q\}) \vee (q \in \{p, q\})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(p \in \{p, q\}) \vee (q \in \{p, q\})$.

<u>Beweis **4-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \in \{p, q\}) \vee (q \in \{p, q\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \{p, q\}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$p \in \{p, q\}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3:` Aus 2
folgt: $(p \text{ Menge}) \vee (q \text{ Menge})$.

`1.2.Fall` $q \in \{p, q\}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$q \in \{p, q\}$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`3:` Aus 2
folgt: $(p \text{ Menge}) \vee (q \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (q \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \vee (q \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p Menge"
folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

`3:` Aus 2"$p \in \{p, q\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{p, q\}$.

`1.2.Fall` q Menge.

`2:` Aus `1.2.Fall`"q Menge"
folgt via **4-9**: $q \in \{p, q\}$.

`3:` Aus 2"$q \in \{p, q\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{p, q\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq \{p, q\}$.

□

4-11. Gemäß `a)` gilt "$\{p,p\} = \{p\}$", so dass, wenn ungeordnete Paare etwas anderes als Singeltons sein sollen, notwendiger Weise unterschiedliche Klassen im Spiel sein müssen. In `b)` wird die vorab zur **4-8(Def)** erwähnte Regel "$\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$" zur Verfügung gestellt. Interessanter Weise schadet hierfür die unkonventielle Definition ungeordneter Paare - siehe **4-8(Def)** - keineswegs. Die "KommutativRegel $\{p,q\} = \{q,p\}$" von `c)` konnte vermutlich auch auf Grund der Namensgebung *ungeordnetes* Paar antizipiert werden. Via **SingeltonAxiom** ist jedes Singelton eine Menge und via $\cup$**Axiom** ist die binäre Vereinigung von Mengen eine Menge. Werden diese beiden Aussagen mit `b)` zum Beweis von `d)` kombiniert so folgt, dass jedes ungeordnete Paar eine Menge ist. Die Beweisreihenfolge ist `b) - a - c) - d)`:

4-11(Satz)

`a)` $\{p,p\} = \{p\}$.

`b)` $\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

`c)` $\{p,q\} = \{q,p\}$.

`d)` $\{p,q\}$ *Menge.*

Beweis **4-11** `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{p, q\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{p, q\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{p, q\}$”
folgt via **4-9**: $(\alpha = p) \vee (\alpha = q)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha = p$.

`4:` Aus `3.1.Fall`“$\alpha = p$” und
aus `2`“α Menge”
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{p\}$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \{p\}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{p\} \cup \{q\}$.

`3.2.Fall` $\alpha = q$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\alpha = q$” und
aus `2`“α Menge”
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{q\}$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \{q\}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{p\} \cup \{q\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{p\} \cup \{q\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p\} \cup \{q\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\{p, q\} \subseteq \{p\} \cup \{q\}$”

Beweis **4-11** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{p\} \cup \{q\}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{p\} \cup \{q\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{p\} \cup \{q\}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p\}) \vee (\alpha \in \{q\})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $\alpha \in \{p\}$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $(\alpha = p) \wedge (p \text{ Menge})$.

`5:` Aus `4` "$\ldots p$ Menge"
folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

`6:` Aus `4` "$\alpha = p \ldots$" und
aus `5` "$p \in \{p, q\}$"
folgt: $\alpha \in \{p, q\}$.

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $\alpha \in \{q\}$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$\alpha \in \{q\}$"
folgt via **1-6**: $(\alpha = q) \wedge (q \text{ Menge})$.

`5:` Aus `4` "$\ldots q$ Menge"
folgt via **4-9**: $q \in \{p, q\}$.

`6:` Aus `4` "$\alpha = q \ldots$" und
aus `5` "$q \in \{p, q\}$"
folgt: $\alpha \in \{p, q\}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$
In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \{p, q\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\} \cup \{q\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p, q\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} \{p\} \cup \{q\} \subseteq \{p, q\} \text{”}}$

...

Beweis **4-11** `b)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\{p,q\} \subseteq \{p\} \cup \{q\}$” und
aus `A2` gleich “$\{p\} \cup \{q\} \subseteq \{p,q\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

`a)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{p,p\} = \{p\} \cup \{p\}$.

`2:` Via **2-14** gilt: $\{p\} \cup \{p\} = \{p\}$.

`3:` Aus `1`“$\{p,p\} = \{p\} \cup \{p\}$” und
aus `2`“$\{p\} \cup \{p\} = \{p\}$”
folgt: $\{p,p\} = \{p\}$.

`c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{q,p\} = \{q\} \cup \{p\}$.

`2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $\{p\} \cup \{q\} = \{q\} \cup \{p\}$.

`3:` Aus `1.1`“$\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$” und
aus `2`“$\{p\} \cup \{q\} = \{q\} \cup \{p\}$”
folgt: $\{p,q\} = \{q\} \cup \{p\}$.

`4:` Aus `3`“$\{p,q\} = \{q\} \cup \{p\}$” und
aus `1.2`“$\{q,p\} = \{q\} \cup \{p\}$”
folgt: $\{p,q\} = \{q,p\}$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

`1.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`1.3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

`2:` Aus `1.2`“$\{p\}$ Menge” und
aus `1.3`“$\{q\}$ Menge”
folgt via $\cup$**Axiom**: $\{p\} \cup \{q\}$ Menge.

`3:` Aus `1.1`“$\{p,q\} = \{p\} \cup \{q\}$” und
aus `2`“$\{p\} \cup \{q\}$ Menge”
folgt: $\{p,q\}$ Menge.

$\square$

4-12. Bei Anwesenheit von mindestens einer Unmenge reduziert sich jedes ungeordnete Paar auf ein Singelton:

4-12(Satz)

a) *Aus "p Unmenge" folgt "$\{p, q\} = \{q\}$".*

b) *Aus "q Unmenge" folgt "$\{p, q\} = \{p\}$".*

Beweis **14** a) VS gleich p Unmenge.

1: Aus VS gleich "p Unmenge" folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

2: $\{p, q\} \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \{p\} \cup \{q\} \stackrel{\mathbf{1}}{=} 0 \cup \{q\} \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \{q\}$.

3: Aus 2 folgt: $\{p, q\} = \{q\}$.

b) VS gleich q Unmenge.

1: Aus VS gleich "q Unmenge" folgt via **1-4**: $\{q\} = 0$.

2: $\{p, q\} \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \{p\} \cup \{q\} \stackrel{\mathbf{1}}{=} \{p\} \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \{p\}$.

3: Aus 2 folgt: $\{p, q\} = \{p\}$.

$\square$

4-13. Durch Negation ergibt sich aus **4-10** ein Kriterium für "$\{p,q\} = 0$" :

<u>**4-13(Satz)**</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\{p,q\} = 0$.

`ii)` *"p Unmenge" und "q Unmenge".*

<u>Beweis **4-13**</u>

`1:` Via **4-10** gilt: $(0 \neq \{p,q\}) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \vee (q \text{ Menge}))$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(0 \neq \{p,q\})) \Leftrightarrow (\neg((p \text{ Menge}) \vee (q \text{ Menge})))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(\{p,q\} = 0) \Leftrightarrow ((\neg(p \text{ Menge})) \wedge (\neg(q \text{ Menge})))$.

`4:` Aus `3` folgt: $(\{p,q\} = 0) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Unmenge}))$.

$\square$

4-14. Ähnlich wie in **1-8** aus der Aussage "$p \in x$" die Aussage "$\{p\} \subseteq x$" folgt, gilt für ungeordnete Paare:

4-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $p \in x$.

$\rightarrow$) $q \in x$.

Dann folgt:

a) $\{p, q\} \subseteq x$.

b) $\{p, q\} \in \mathcal{P}(x)$.

Beweis **4-14**

1.1: Aus $\rightarrow$) "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$q \in x$"
folgt via **1-8**: $\{q\} \subseteq x$.

1.3: Via **4-11** gilt: $\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

1.4: Via **4-11** gilt: $\{p, q\}$ Menge.

2: Aus 1.1 "$\{p\} \subseteq x$" und
aus 1.2 "$\{q\} \subseteq x$"
folgt via **2-12**: $\{p\} \cup \{q\} \subseteq x$.

3.a): Aus 1.3 "$\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$" und
aus 2 "$\{p\} \cup \{q\} \subseteq x$"
folgt: $\{p, q\} \subseteq x$.

4.b): Aus 3.a) "$\{p, q\} \subseteq x$" und
aus 1.4 "$\{p, q\}$ Menge"
folgt via **0-26**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}(x)$.

$\square$

4-15. Es geht um "$\bigcup\{p,q\}$". Die Gleichung "$\bigcup\{p,q\} = p \cup q$" ist nicht allgemein verfügbar. Es werden hinreichende Bedingungen für "$\bigcup\{p,q\} = p \cup q$" und "$\bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$" angegeben:

4-15(Satz)

a) $\bigcup\{p,q\} \subseteq p \cup q$.

b) $\bigcup\{p,q\} = (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\})$.

c) *Aus "p Menge" und "q Menge" folgt "*$\bigcup\{p,q\} = p \cup q$*".*

d) *Aus "p Unmenge" und "q Menge" folgt "*$q = \bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$*".*

e) *Aus "p Menge" und "q Unmenge" folgt "*$p = \bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$*".*

f) *Aus "p Unmenge" und "q Unmenge" folgt "*$0 = \bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$*".*

<u>Beweis **4-15**</u> `a)`

`Thema1` $\alpha \in \bigcup\{p, q\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \bigcup\{p, q\}$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{p, q\})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \{p, q\}$"
folgt via **4-9**: $(\Omega = p) \vee (\Omega = q)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega = p$.

`4:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3.1.Fall` "$\Omega = p$"
folgt: $\alpha \in p$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \in p$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in p \cup q$.

`3.2.Fall` $\Omega = q$.

`4:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3.2.Fall` "$\Omega = q$"
folgt: $\alpha \in q$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \in q$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in p \cup q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in p \cup q$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{p, q\}) \Rightarrow (\alpha \in p \cup q)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup\{p, q\} \subseteq p \cup q$.

`b)`

`1:` $\bigcup\{p, q\} \stackrel{\textbf{4-11}}{=} \bigcup(\{p\} \cup \{q\}) \stackrel{\textbf{2-34}}{=} (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\bigcup\{p, q\} = (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\})$.

Beweis **4-15** `c)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{q\} = q$.

`2:` $$\bigcup\{p,q\} \stackrel{\text{b)}}{=} (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.1}{=} p \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.2}{=} p \cup q.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $\bigcup\{p,q\} = p \cup q$.

`d)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge…"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{q\} = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p Unmenge…"
folgt via **2-24**: $p \cup q$ Unmenge.

`2.1:` $$\bigcup\{p,q\} \stackrel{\text{b)}}{=} (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.1}{=} 0 \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.2}{=} 0 \cup q \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} q.$$

`2.2:` Aus `1.3`"$p \cup q$ Unmenge" und
aus `VS` gleich "…q Menge"
folgt via **0-1**: $p \cup q \neq q$.

`3:` Aus `2.1`"$\bigcup\{p,q\} = \ldots = q$" und
aus `2.2`"$p \cup q \neq q$"
folgt: $p \cup q \neq \bigcup\{p,q\}$.

`4:` Aus `2.1`"$\bigcup\{p,q\} = \ldots = q$" und
aus `3`"$p \cup q \neq \bigcup\{p,q\}$"
folgt: $q = \bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$.

<u>Beweis</u> **4-15** `e) VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q Unmenge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{q\} = 0$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "…q Unmenge"
folgt via **2-24**: $q \cup p$ Unmenge.

`2.1:` $\bigcup\{p,q\} \stackrel{\text{b)}}{=} (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.1}{=} p \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.2}{=} p \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} p$.

`2.2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $p \cup q = q \cup p$.

`3:` Aus `2.2`"$p \cup q = q \cup p$" und
aus `1.3`"$q \cup p$ Unmenge"
folgt: $p \cup q$ Unmenge.

`4:` Aus `3`"$p \cup q$ Unmenge" und
aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via **0-1**: $p \cup q \neq p$.

`5:` Aus `2.1`"$\bigcup\{p,q\} = \ldots = p$" und
aus `4`"$p \cup q \neq p$"
folgt: $p \cup q \neq \bigcup\{p,q\}$.

`6:` Aus `2.1`"$\bigcup\{p,q\} = \ldots = p$" und
aus `5`"$p \cup q \neq \bigcup\{p,q\}$"
folgt: $p = \bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$.

<u>Beweis **4-15**</u> `f)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge…"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q Unmenge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{q\} = 0$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p Unmenge…"
folgt via **2-24**: $p \cup q$ Unmenge.

`1.4:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2.1:` $$\bigcup\{p,q\} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} (\bigcup\{p\}) \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.1}{=} 0 \cup (\bigcup\{q\}) \stackrel{1.2}{=} 0 \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-18}}{=} 0.$$

`2.2:` Aus `1.3`"$p \cup q$ Unmenge" und
aus `1.4`"0 Menge"
folgt via **0-1**: $p \cup q \neq 0$.

`3:` Aus `2.1`"$\bigcup\{p,q\} = \ldots = 0$" und
aus `2.2`"$p \cup q \neq 0$"
folgt: $0 = \bigcup\{p,q\} \neq p \cup q$.

□

4-16. Ein Kriterium für "$\bigcup\{p, q\} = p \cup q$" . Der Beweis `ii)` $\Rightarrow$ `i)` ist kürzer als der Beweis `i)` $\Rightarrow$ `ii)`:

4-16(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\bigcup\{p, q\} = p \cup q$.

`ii)` *"p Menge" und "q Menge".*

Beweis **4-16** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup\{p, q\} = p \cup q$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.2.Fall` $(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Menge})$" folgt via **4-15**: $\bigcup\{p, q\} \neq p \cup q$.

`3:` Es gilt `2`"$\bigcup\{p, q\} \neq p \cup q$". Es gilt `VS` gleich "$\bigcup\{p, q\} = p \cup q$". Ex falso quodlibet folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.3.Fall` $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`2:` Aus `1.3.Fall`"$(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$" folgt via **4-15**: $\bigcup\{p, q\} \neq p \cup q$.

`3:` Es gilt `2`"$\bigcup\{p, q\} \neq p \cup q$". Es gilt `VS` gleich "$\bigcup\{p, q\} = p \cup q$". Ex falso quodlibet folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.4.Fall` $(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`2:` Aus `1.4.Fall`"$(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$" folgt via **4-15**: $\bigcup\{p, q\} \neq p \cup q$.

`3:` Es gilt `2`"$\bigcup\{p, q\} \neq p \cup q$". Es gilt `VS` gleich "$\bigcup\{p, q\} = p \cup q$". Ex falso quodlibet folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

<u>Beweis</u> **4-16** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

Aus `VS` gleich "$(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$"
folgt via **4-15**: $\bigcup\{p,q\} = p \cup q$.

$\square$

4-17. Es geht um “$\bigcap\{p,q\}$” . Die Gleichung “$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$” ist gültig, wenn p, q Mengen sind. Andernfalls wird in **4-17** der Term “$\bigcap\{p,q\}$” berechnet, ohne auf die Gültigkeit von “$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$” weiter einzugehen. Dies deutet darauf hin, dass eine Diskussion dieser Gleichung komplizierter ist als das Pendent mit “$\bigcup$” , das in **4-16** recht zufrieden stellend untersucht wird. Falls p *oder* q eine Unmenge ist, so wird die Gleichung “$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$” in **4-22** diskutiert:

4-17(Satz)

a) $p \cap q \subseteq \bigcap\{p,q\}$.

b) $\bigcap\{p,q\} = (\bigcap\{p\}) \cap (\bigcap\{q\})$.

c) *Aus “p Menge” und “q Menge” folgt* “$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$”.

d) *Aus “p Unmenge” und “q Menge” folgt* “$\bigcap\{p,q\} = q$”.

e) *Aus “p Menge” und “q Unmenge” folgt* “$\bigcap\{p,q\} = p$”.

f) *Aus “p Unmenge” und “q Unmenge” folgt* “$\bigcap\{p,q\} = \mathcal{U}$”.

Beweis **4-17** `a)`

`Thema1` $\alpha \in p \cap q.$

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p \cap q$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p \cap q$" folgt via **2-2**: $(\alpha \in p) \wedge (\alpha \in q).$

`Thema3.1` $\beta \in \{p, q\}.$

`4:` Aus `Thema3.1` "$\beta \in \{p, q\}$" folgt via **4-9**: $(\beta = p) \vee (\beta = q).$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\beta = p.$

Aus `2.2` "$\alpha \in p \ldots$" und aus `4.1.Fall` "$\beta = p$" folgt: $\alpha \in \beta.$

`4.2.Fall` $\beta = q.$

Aus `2.2` "$\ldots \alpha \in q$" und aus `4.2.Fall` "$\beta = q$" folgt: $\alpha \in \beta.$

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \beta.$

Ergo `Thema3`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in \{p, q\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

`3.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \{p, q\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und aus `2.1` "$\alpha$ Menge" folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap \{p, q\}$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \cap q) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap \{p, q\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $p \cap q \subseteq \bigcap \{p, q\}.$

<u>Beweis **4-17**</u> `b)`

`1:` $$\bigcap\{p,q\}\stackrel{\mathbf{4-11}}{=}\bigcap(\{p\}\cup\{q\})\stackrel{\mathbf{2-34}}{=}(\bigcap\{p\})\cap(\bigcap\{q\}).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$\bigcap\{p,q\}=(\bigcap\{p\})\cap(\bigcap\{q\}).$$

`c)` `VS` gleich $$(p \text{ Menge})\wedge(q \text{ Menge}).$$

`1.1:` Aus `VS` gleich “p Menge... ”
folgt via **1-14**: $$\bigcap\{p\}=p.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich “... q Menge”
folgt via **1-14**: $$\bigcap\{q\}=q.$$

`2:` $$\bigcap\{p,q\}\stackrel{\text{b)}}{=}(\bigcap\{p\})\cap(\bigcap\{q\})\stackrel{1.1}{=}p\cap(\bigcap\{q\})\stackrel{1.2}{=}p\cap q.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$\bigcap\{p,q\}=p\cap q.$$

`d)` `VS` gleich $$(p \text{ Unmenge})\wedge(q \text{ Menge}).$$

`1.1:` Aus `VS` gleich “p Unmenge... ”
folgt via **1-14**: $$\bigcap\{p\}=\mathcal{U}.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich “... q Menge”
folgt via **1-14**: $$\bigcap\{q\}=q.$$

`2:` $$\bigcap\{p,q\}\stackrel{\text{b)}}{=}(\bigcap\{p\})\cap(\bigcap\{q\})\stackrel{1.1}{=}\mathcal{U}\cap(\bigcap\{q\})\stackrel{1.2}{=}\mathcal{U}\cap q\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}q.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$\bigcap\{p,q\}=q.$$

`e)` `VS` gleich $$(p \text{ Menge})\wedge(q \text{ Unmenge}).$$

`1.1:` Aus `VS` gleich “p Menge... ”
folgt via **1-14**: $$\bigcup\{p\}=p.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich “... q Unmenge”
folgt via **1-14**: $$\bigcap\{q\}=\mathcal{U}.$$

`2:` $$\bigcap\{p,q\}\stackrel{\text{b)}}{=}(\bigcap\{p\})\cap(\bigcap\{q\})\stackrel{1.1}{=}p\cap(\bigcap\{q\})\stackrel{1.2}{=}p\cap\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}p.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$\bigcap\{p,q\}=p.$$

<u>Beweis</u> **4-17** `f)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \wedge (q \text{ Unmenge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge…"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{p\} = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q Unmenge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{q\} = \mathcal{U}$.

`2:` $\bigcap\{p, q\} \overset{\text{b)}}{=} (\bigcap\{p\}) \cap (\bigcap\{q\}) \overset{1.1}{=} \mathcal{U} \cap (\bigcap\{q\}) \overset{1.2}{=} \mathcal{U} \cap \mathcal{U} \overset{\mathbf{2-17}}{=} \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\bigcap\{p, q\} = \mathcal{U}$.

□

4-18. Ein Kriterium für "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$", wenn p eine Unmenge und q eine Menge ist:

4-18(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) p *Unmenge.*

$\rightarrow$) q *Menge.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

`ii)` $q \subseteq p$.

Beweis **4-18** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "p Unmenge" und
aus $\rightarrow$) "q Menge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{p,q\} = q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$" und
aus `1`"$\bigcap\{p,q\} = q$"
folgt: $p \cap q = q$.

`3:` Aus `2`"$p \cap q = q$"
folgt via **2-10**: $q \subseteq p$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $q \subseteq p$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "p Unmenge" und
aus $\rightarrow$) "q Menge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{p,q\} = q$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$q \subseteq p$"
folgt via **2-10**: $p \cap q = q$.

`3:` Aus `1.1`"$\bigcap\{p,q\} = q$" und
aus `1.2`"$p \cap q = q$"
folgt: $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

$\square$

4-19. Ein Kriterium für "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$", wenn p eine Menge und q eine Unmenge ist:

4-19(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *p Menge.*

$\rightarrow$) *q Unmenge.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

`ii)` $p \subseteq q$.

Beweis **4-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

`1:` Aus $\rightarrow$)"p Menge" und
aus $\rightarrow$)"q Unmenge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{p,q\} = p$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$" und
aus `1`"$\bigcap\{p,q\} = p$"
folgt: $p \cap q = p$.

`3:` Aus `2`"$p \cap q = p$"
folgt via **2-10**: $p \subseteq q$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p \subseteq q$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"p Menge" und
aus $\rightarrow$)"q Unmenge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{p,q\} = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \subseteq q$"
folgt via **2-10**: $p \cap q = p$.

`3:` Aus `1.1`"$\bigcap\{p,q\} = p$" und
aus `1.2`"$p \cap q = p$"
folgt: $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

$\square$

4-20. Gemäß **4-17** gilt "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$", wenn p, q Mengen sind. In **4-18** und **4-19** wird die Gültigkeit von "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$" in jenen Fällen untersucht, in denen *genau eine* der Klassen p und q eine Unmenge ist. In **4-20** wird nun gezeigt, dass "$\bigcap\{p,q\} \neq p \cap q$" gilt, wenn p eine nicht leere Menge und q das universelle Komplement von p ist. Dies ist Aussage `a)`. Aussagen `b)` und `c)` machen `a)` besser nachvollziehbar. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - b) - a)`:

4-20(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \neq p$.

$\rightarrow$) *p Menge.*

Dann folgt:

`a)` $\bigcap\{p, p^C\} \neq p \cap p^C$.

`b)` $\bigcap\{p, p^C\} = p$.

`c)` $p \cap p^C = 0$.

Beweis **4-20**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "p Menge"
folgt via **3-6**: p^C Unmenge.

`1.c):` Via **3-6** gilt: $p \cap p^C = 0$.

`2.1:` Aus `1.c)` "$p \cap p^C = 0$" und
aus $\rightarrow$) "$0 \neq p$"
folgt: $p \cap p^C \neq p$.

`2.b):` Aus $\rightarrow$) "p Menge" und
aus `1.1` "p^C Unmenge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{p, p^C\} = p$.

`3.a):` Aus `2.b)` "$\bigcap\{p, p^C\} = p$" und
aus `2.1` "$p \cap p^C \neq p$"
folgt: $\bigcap\{p, p^C\} \neq p \cap p^C$.

□

4-21. Die Gleichung "$\bigcap\{p,q\} = p\cap q$" ist - im Gegensatz zum "Vereinigungs-Pendent", siehe **4-16** - auch für Unmengen p,q möglich. Etwa kann $p = q = \mathcal{U}$ betrachtet werden. Dass dies auch der einzig mögliche Fall ist, ist in **4-22** thematisiert:

4-21(Satz)

$$\bigcap\{\mathcal{U},\mathcal{U}\} = \mathcal{U}\cap\mathcal{U}.$$

Beweis **4-21**

`1.1`: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`1.2`: Via **2-14** gilt: $\mathcal{U}\cap\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2`: Aus `1.1`"$\mathcal{U}$ Unmenge" und
aus `1.1`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{\mathcal{U},\mathcal{U}\} = \mathcal{U}$.

`3`: Aus `2`"$\bigcap\{\mathcal{U},\mathcal{U}\} = \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{U}\cap\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $\bigcap\{\mathcal{U},\mathcal{U}\} = \mathcal{U}\cap\mathcal{U}$.

□

4-22. Der einzige Fall, in dem "$\bigcap\{p, q\} = p \cap q$" für Unmengen p, q gilt, ist $p = q = \mathcal{U}$:

4-22(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *p Unmenge.*

$\rightarrow$) *q Unmenge.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcap\{p, q\} = p \cap q$.

`ii)` $p = q = \mathcal{U}$.

Beweis **4-22** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

`1:` Aus →) "p Unmenge" und
aus →) "q Unmenge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{p,q\} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\bigcap\{p,q\} = \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap\{p,q\} = p \cap q$"
folgt: $p \cap q = \mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2`"$p \cap q = \mathcal{U}$"
folgt via **2-18**: $p = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2`"$p \cap q = \mathcal{U}$"
folgt via **2-18**: $q = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $p = q = \mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p = q = \mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $p = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $q = \mathcal{U}$.

`2:` $$\bigcap\{p,q\} \stackrel{1.1}{=} \bigcap\{\mathcal{U},q\} \stackrel{1.2}{=} \bigcap\{\mathcal{U},\mathcal{U}\} \stackrel{\mathbf{4-21}}{=} \mathcal{U} \cap \mathcal{U} \stackrel{1.1}{=} p \cap \mathcal{U} \stackrel{1.2}{=} p \cap q.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $\bigcap\{p,q\} = p \cap q$.

□

KlassenDifferenz. $x \setminus y$.
Symmetrische KlassenDifferenz. $x \Delta y$.
FundamentalSatz Δ. **FS**Δ.

Ersterstellung: 07/09/05 **Letzte Änderung: 08/04/11**

5-1. Die **KlassenDifferenz von** x **und** y besteht aus genau jenen Mengen, die Element von x, aber kein Element von y sind:

5-1(Definition)

1) $x \setminus y$

$$= \mathsf{5.0}(x, y) = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **KlassenDifferenz von** x **und** y"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x \setminus y.$$

5-2. Es folgen zwei einfache Eigenschaften der KlassenDifferenz von x und y:

5-2(Satz)

a) *$x \setminus y$ KlassenDifferenz von x und y.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ KlassenDifferenz von x und y"
und "$\mathfrak{D}$ KlassenDifferenz von x und y"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **5-2** a) Aus "$x \setminus y = x \setminus y$"
folgt via **5-1(Def)**: $x \setminus y$ KlassenDifferenz von x und y.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ KlassenDifferenz von x und y)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ KlassenDifferenz von x und y).

1.1: Aus →) "$\mathfrak{C}$ KlassenDifferenz von x und $y \ldots$"
folgt via **5-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x \setminus y$.

1.2: Aus →) "$\ldots \mathfrak{D}$ KlassenDifferenz von x und y"
folgt via **5-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x \setminus y$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = x \setminus y$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = x \setminus y$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

5-3. Es ist dem **ElementAxiom** zu verdanken, dass das "Element-Sein" in der KlassenDifferenz von x und y ohnes explizites Einfordern irgend einer "Mengen-Eigenschaft" gewährleistet ist:

5-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x \setminus y$.

`ii)` "$p \in x$" *und* "$p \notin y$".

Beweis **5-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in x \setminus y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \setminus y$" und
aus "$x \setminus y = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\}$"
folgt: $(p \in x) \wedge (p \notin y)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p \notin y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p \in x) \wedge (p \notin y)$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)\} = x \setminus y$"
folgt: $p \in x \setminus y$.

□

5-4. Via Negation ergibt sich aus **5-3** ein Kriterium für "$p \notin x \setminus y$" :

5-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin x \setminus y$.

`ii)` "$p \notin x$" *oder* "$p \in y$".

Beweis **5-4**

`1:` Via **5-3** gilt: $$(p \in x \setminus y) \Leftrightarrow ((p \in x) \wedge (p \notin y)).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(\neg(p \in x \setminus y)) \Leftrightarrow (\neg((p \in x) \wedge (p \in y))).$$

`3:` Aus `2` folgt: $$(\neg(p \in x \setminus y)) \Leftrightarrow ((\neg(p \in x)) \vee (\neg(p \notin y))).$$

`4:` Aus `3` folgt: $$(p \notin x \setminus y) \Leftrightarrow ((\neg(p \in x)) \vee (\neg(p \notin y))).$$

`5:` Aus `4` folgt: $$(p \notin x \setminus y) \Leftrightarrow ((p \notin x) \vee (p \in y)).$$

□

5-5. Erste elementare - insbesondere: Monotonie- - Eigenschaften der Klassen-Differenz. Die Beweisreihenfolge ist `a) - b) - c) - f) - d) - e)`:

5-5(Satz)

`a)` $x \setminus x = 0$.

`b)` $x \setminus y \subseteq x$.

`c)` $x \setminus y \subseteq y^C$.

`d)` *Aus "$x \subseteq z$" folgt "$x \setminus y \subseteq z \setminus y$".*

`e)` *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$z \setminus y \subseteq z \setminus x$".*

`f)` *Aus "$x \subseteq w$" und "$z \subseteq y$" folgt "$x \setminus y \subseteq w \setminus z$".*

Beweis **5-5** `a)`

`Thema1` $\alpha \in x \setminus x$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x \setminus x$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin x)$.

`3:` Es gilt `2` "$\alpha \in x \ldots$".
Es gilt `2` "$\ldots \alpha \notin x$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x \setminus x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus x) \Rightarrow (\alpha \notin x \setminus x)$.

Konsequenz via **0-19**: $x \setminus x = 0$.

<u>Beweis **5-5**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x \setminus y$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \setminus y$” folgt via **5-3**:	$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.
`3:` Aus `2` folgt:	$\alpha \in x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \setminus y \subseteq x$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x \setminus y$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \setminus y$” folgt via **5-3**:	$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.
`3:` Aus `2`“$\alpha \in x \ldots$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha \notin y$” und aus `3`“α Menge” folgt via **3-2**:	$\alpha \in y^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \in y^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \setminus y \subseteq y^C$.

<u>Beweis **5-5**</u> `f)` `VS` gleich $(x \subseteq w) \wedge (z \subseteq y)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \setminus y$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \setminus y$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.

`3.1:` Aus `2`“$\alpha \in x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq w \ldots$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in w$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha \notin y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots z \subseteq y$”
folgt via **0-4**: $\alpha \notin z$.

`4:` Aus `3.1`“$\alpha \in w$” und
aus `3.2`“$\alpha \notin z$”
folgt via **5-3**: $\alpha \in w \setminus z$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \in w \setminus z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \setminus y \subseteq w \setminus z$.

`d)` `VS` gleich $x \subseteq z$.

`1:` Via **0-6** gilt: $y \subseteq y$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq z$” und
aus `1`“$y \subseteq y$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $x \setminus y \subseteq z \setminus y$.

`e)` `VS` gleich “$x \subseteq y$”

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `1`“$z \subseteq z$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $z \setminus y \subseteq z \setminus x$.

□

5-6. Im folgenden Satz wird ein Kriterium für "$x \setminus y = 0$" gegeben. Wenig überraschender Weise ist "$x \setminus y = 0$" äquivalent zu "$x \subseteq y$" . Etwas unerwarteter ist die Einsicht, dass diese beiden Aussagen zu "$x \setminus y \subseteq y \setminus x$" äquivalent sind:

5-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \setminus y = 0$.

`ii)` $x \subseteq y$.

`iii)` $x \setminus y \subseteq y \setminus x$.

Beweis **5-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \setminus y = 0.$

`Thema1` $\alpha \in x.$

2: Es gilt: $(\alpha \notin y) \vee (\alpha \in y).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \notin y.$

3: Aus `Thema1`"$\alpha \in x$" und
aus `2.1.Fall`"$\alpha \notin y$"
folgt via **5-3**: $\alpha \in x \setminus y.$

4: Aus 3"$\alpha \in x \setminus y$" und
aus `VS` gleich "$x \setminus y = 0$"
folgt: $\alpha \in 0.$

5: Es gilt 4"$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in y.$

`2.2.Fall` $\alpha \in y.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in y.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq y.$

Beweis **5-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \setminus y$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \setminus y$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y$.

`4:` Es gilt `3`"$\alpha \in y$".
Es gilt `2`"$\ldots \alpha \notin y$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in y \setminus x$.

Ergo `Thema1`: $\forall x : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \in y \setminus x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \setminus y \subseteq y \setminus x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \setminus y \subseteq y \setminus x$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \setminus y$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \setminus y$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \setminus y$" und
aus `VS` gleich "$x \setminus y \subseteq y \setminus x$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y \setminus x$.

`3:` Aus `2.2`"$\alpha \in y \setminus x$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \notin x)$.

`4:` Es gilt `2.1`"$\alpha \in x \ldots$".
Es gilt `3`"$\ldots \alpha \notin x$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x \setminus y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \notin x \setminus y)$.

Konsequenz via **0-19**: $x \setminus y = 0$.

$\square$

5-7. Via Negation ergibt sich aus **5-6** ein Kriterium für “$0 \neq x \setminus y$” :

5-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \setminus y$.

`ii)` $x \not\subseteq y$.

`iii)` $x \setminus y \not\subseteq y \setminus x$.

Beweis **5-7**

`1:` Via **5-6** gilt: $(x \setminus y = 0) \Leftrightarrow (x \subseteq y) \Leftrightarrow (x \setminus y \subseteq y \setminus x)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(x \setminus y = 0)) \Leftrightarrow (\neg(x \subseteq y)) \Leftrightarrow (\neg(x \setminus y \subseteq y \setminus x))$.

`3:` Aus `2` folgt via **0-3**: $(0 \neq x \setminus y) \Leftrightarrow (x \not\subseteq y) \Leftrightarrow (x \setminus y \not\subseteq y \setminus x)$.

□

5-8. Nun wird ein Kriterium für "$x \setminus y = y \setminus x$" gegeben. Interessanter Weise gilt diese Gleichung genau dann, wenn $x = y$. Auf Grund dieser Tatsache könnte die Aussage von **5-8** auch als "Anti-Symmetrie" der KlassenDifferenz bezeichnet werden:

5-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \setminus y = y \setminus x$.

`ii)` "$x \setminus y = 0$" *und* "$y \setminus x = 0$".

`iii)` $x = y$.

<u>Beweis **5-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \setminus y = y \setminus x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x \setminus y$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x \setminus y$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x \setminus y$” und
aus `VS` gleich “$x \setminus y = y \setminus x$”
folgt: $\alpha \in y \setminus x$.

`3:` Aus `2.2`“$\alpha \in y \setminus x$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \notin x)$.

`4:` Es gilt `3`“$\ldots \alpha \notin x$”.
Es gilt `2.1`“$\alpha \in x \ldots$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x \setminus y$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \notin x \setminus y)$.

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x \setminus y = 0\text{”}}$

`1.2:` Aus `A1` gleich “$x \setminus y = 0$” und
aus `VS` gleich “$x \setminus y = y \setminus x$”
folgt: $y \setminus x = 0$.

`2:` Aus `A1` gleich “$x \setminus y = 0$” und
aus `1.2`“$y \setminus x = 0$”
folgt: $(x \setminus y = 0) \wedge (y \setminus x = 0)$.

Beweis **5-8** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \setminus y = 0) \wedge (y \setminus x = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \setminus y = 0 \ldots$"
folgt via **5-6**: $x \subseteq y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \setminus x = 0$"
folgt via **5-6**: $y \subseteq x$.

`2:` Aus `1.1`"$x \subseteq y$" und
aus `1.2`"$y \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x = y$.

`1.1:` $x \setminus y \stackrel{\texttt{VS}}{=} y \setminus y \stackrel{\mathbf{5-5}}{=} 0.$

`1.2:` $y \setminus x \stackrel{\texttt{VS}}{=} y \setminus y \stackrel{\mathbf{5-5}}{=} 0.$

`2:` Aus `1.1`"$x \setminus y = \ldots = 0$" und
aus `1.2`"$y \setminus x = \ldots = 0$"
folgt: $x \setminus y = y \setminus x$.

□

5-9. Via Negation ergibt sich aus **5-8** ein Kriterium für "$x \setminus y \neq y \setminus x$" :

<u>5-9(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \setminus y \neq y \setminus x$.

`ii)` "$x \setminus y \neq 0$" *oder* "$y \setminus x \neq 0$".

`iii)` $x \neq y$.

<u>Beweis **5-9**</u>

`1:` Via **5-8** gilt: $$(x \setminus y = y \setminus x) \Leftrightarrow ((x \setminus y = 0) \wedge (y \setminus x = 0)) \Leftrightarrow (x = y).$$

`2:` Aus `1` folgt:
$$(\neg(x \setminus y = y \setminus x)) \Leftrightarrow (\neg((x \setminus y = 0) \wedge (y \setminus x = 0))) \Leftrightarrow (\neg(x = y)).$$

`3:` Aus `2` folgt: $$(x \setminus y \neq y \setminus x) \Leftrightarrow ((\neg(x \setminus y = 0)) \vee (\neg(y \setminus x = 0))) \Leftrightarrow (x \neq y).$$

`4:` Aus `3` folgt: $$(x \setminus y \neq y \setminus x) \Leftrightarrow ((x \setminus y \neq 0) \vee (y \setminus x \neq 0)) \Leftrightarrow (x \neq y).$$

□

5-10. Ein wenig KlassenAlgebra mit der KlassenDifferenz und $\cup, \cap$ und dem universellen Komplement. Wie in `a)` gesagt, ist die binäre KlassenDifferenz von x und y gleich dem binären Durchschnitt von x und dem universellen Komplement von y. Im Sinne einer minimalistischen Theorie klassenalgebraischer Manipulationen könnte demnach auf die binäre KlassenDifferenz verzichtet werden, wenn nur binärer Durchschnitt und universelles Komplement zur Verfügung stehen. Minimalistische Ambitionen liegen aber nicht vor:

5-10(Satz)

`a)` $x \setminus y = x \cap y^C$.

`b)` $x \cap (x \setminus y) = x \setminus y$.

`c)` $y \cap (x \setminus y) = 0$.

`d)` $(x \cup y) \setminus y = x \setminus y$.

`e)` $x \setminus (x \cap y) = x \setminus y$.

`f)` $(x \setminus y)^C = x^C \cup y$.

`g)` $x^C \setminus y^C = y \setminus x$.

`h)` *Aus* "$z \subseteq x \cup y$" *folgt* "$z \setminus x \subseteq y \setminus x$" *und* "$z \setminus y \subseteq x \setminus y$".

`i)` *Aus* "$x \cap y \subseteq z$" *folgt* "$x \setminus z \subseteq x \setminus y$".

`j)` *Aus* "$z \subseteq x$" *und* "$z \cap y = 0$" *folgt* "$z \subseteq x \setminus y$".

Beweis **5-10** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\qquad\qquad$ $\alpha \in x \setminus y$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x \setminus y$"
folgt via **ElementAxiom**: $\qquad$ α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x \setminus y$"
folgt via **5-3**: $\qquad$ $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha \notin y$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **3-2**: $\qquad$ $\alpha \in y^C$.

`4:` Aus `2.2`"$\alpha \in x \ldots$" und
aus `3`"$\alpha \in y^C$"
folgt via **2-2**: $\qquad$ $\alpha \in x \cap y^C$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad$ $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus y) \Rightarrow (\alpha \in x \cap y^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}x \setminus y \subseteq x \cap y^C\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad\qquad$ $\alpha \in x \cap y^C$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \cap y^C$"
folgt via **2-2**: $\qquad$ $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in y^C)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in y^C$"
folgt via **3-2**: $\qquad$ $\alpha \notin y$.

`4:` Aus `2`"$\alpha \in x \ldots$" und
aus `3`"$\alpha \notin y$"
folgt via **5-3**: $\qquad$ $\alpha \in x \setminus y$.

Ergo `Thema1.2`: $\qquad$ $\forall x : (\alpha \in x \cap y^C) \Rightarrow (\alpha \in x \setminus y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}x \cap y^C \subseteq x \setminus y\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \setminus y \subseteq x \cap y^C$" und
aus `A2` gleich "$x \cap y^C \subseteq x \setminus y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\qquad$ $x \setminus y = x \cap y^C$.

<u>Beweis</u> **5-10** b)

1: Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq x.$

2: Aus 1"$x \setminus y \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $x \cap (x \setminus y) = x \setminus y.$

c)

1: Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq y^C.$

2: Aus 1"$x \setminus y \subseteq y^C$"
folgt via **2-15**: $(x \setminus y) \cap y \subseteq y^C \cap y.$

3: $y \cap (x \setminus y) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \setminus y) \cap y \stackrel{2}{\subseteq} y^C \cap y \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} y \cap y^C \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} 0.$

4: Aus 3"$y \cap (x \setminus y) \ldots \subseteq \ldots 0$"
folgt via **0-18**: $y \cap (x \setminus y) = 0.$

d)

1: $(x \cup y) \setminus y \stackrel{\text{a)}}{=} (x \cup y) \cap y^C \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap y^C) \cup (y \cap y^C)$
$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} (x \cap y^C) \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \cap y^C \stackrel{\text{a)}}{=} x \setminus y.$

2: Aus 1
folgt: $(x \cup y) \setminus y = \ldots = x \setminus y.$

e)

1: $x \setminus (x \cap y) \stackrel{\text{a)}}{=} x \cap (x \cap y)^C \stackrel{\mathbf{DM}\cap\cup}{=} x \cap (x^C \cup y^C) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap x^C) \cup (x \cap y^C)$
$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} 0 \cup (x \cap y^C) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \cap y^C \stackrel{\text{a)}}{=} x \setminus y.$

2: Aus 1
folgt: $x \setminus (x \cap y) = x \setminus y.$

<u>Beweis</u> **5-10** `f)`

`1:` $$(x \setminus y)^C \stackrel{\text{a)}}{=} (x \cap y^C)^C \stackrel{\mathbf{DM}\cap\cup}{=} x^C \cup (y^C)^C \stackrel{\mathbf{3-4}}{=} x^C \cup y.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(x \setminus y)^C = x^C \cup y.$$

`g)`

`1:` $$x^C \setminus y^C \stackrel{\text{a)}}{=} x^C \cap (y^C)^C \stackrel{\mathbf{3-4}}{=} x^C \cap y \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} y \cap x^C \stackrel{\text{a)}}{=} y \setminus x.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$x^C \setminus y^C = y \setminus x.$$

`h)` `VS` gleich $$z \subseteq x \cup y.$$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq x \cup y$"
folgt via **5-5**: $$z \setminus x \subseteq (x \cup y) \setminus x.$$

`1.2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $$x \cup y = y \cup x.$$

`2.1:` $$(x \cup y) \setminus x \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (y \cup x) \setminus x \stackrel{\text{d)}}{=} y \setminus x.$$

`2.2:` $$(y \cup x) \setminus y \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \cup y) \setminus y \stackrel{\text{d)}}{=} x \setminus y.$$

`2.3:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq x \cup y$" und
aus `1.2`"$x \cup y = y \cup x$"
folgt: $$z \subseteq y \cup x.$$

`3.1:` Aus `1.1`"$z \setminus x \subseteq (x \cup y) \setminus x$" und
aus `2.1`"$(x \cup y) \setminus x = \ldots = y \setminus x$"
folgt: $$z \setminus x \subseteq y \setminus x.$$

`3.2:` Aus `2.3`"$z \subseteq y \cup x$"
folgt via **5-5**: $$z \setminus y \subseteq (y \cup x) \setminus y.$$

`4:` Aus `3.2`"$z \setminus y \subseteq (y \cup x) \setminus y$" und
aus `2.2`"$(y \cup x) \setminus y = \ldots = x \setminus y$"
folgt: $$z \setminus y \subseteq x \setminus y.$$

`5:` Aus `3.1`"$z \setminus x \subseteq y \setminus x$" und
aus `4`"$z \setminus y \subseteq x \setminus y$"
folgt: $$(z \setminus x \subseteq y \setminus x) \wedge (z \setminus y \subseteq x \setminus y).$$

<u>Beweis</u> **5-10** `i)` `VS` gleich $x \cap y \subseteq z$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cap y \subseteq z$"
folgt via **5-5**: $x \setminus z \subseteq x \setminus (x \cap y)$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $x \setminus (x \cap y) = x \setminus y$.

`3:` Aus `1`"$x \setminus z \subseteq x \setminus (x \cap y)$" und
aus `2`"$x \setminus (x \cap y) = x \setminus y$"
folgt: $x \setminus z \subseteq x \setminus y$.

`j)` `VS` gleich $(z \subseteq x) \wedge (z \cap y = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \cap y = 0$"
folgt via **3-7**: $z \subseteq y^C$.

`2:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"$z \subseteq y^C$"
folgt via **2-12**: $z \subseteq x \cap y^C$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \setminus y = x \cap y^C$.

`4:` Aus `2`"$z \subseteq x \cap y^C$" und
aus `3`"$x \setminus y = x \cap y^C$"
folgt: $z \subseteq x \setminus y$.

$\square$

5-11 Im folgenden Satz werden Aussagen über binäre KlassenDifferenzen, die 0 oder $\mathcal{U}$ enthalten, getroffen. Aussage `a)` ist bereits seit **5-5** bekannt, passt aber hervorragend in den aktuellen Kontext, so dass sie trotz Wiederholung aufgenommen wird:

5-11(Satz)

`a)` $x \setminus x = 0$.

`b)` $x \setminus 0 = x$.

`c)` $0 \setminus x = 0$.

`d)` $\mathcal{U} \setminus x = x^C$.

`e)` $x \setminus \mathcal{U} = 0$.

Beweis **5-11** `a)`

Via **5-5** gilt: $x \subseteq x$.

`b)`

`1:` $x \setminus 0 \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \cap 0^C \overset{\mathbf{3-9}}{=} x \cap \mathcal{U} \overset{\mathbf{2-17}}{=} x$.

`2:` Aus `1` folgt: $x \setminus 0 = x$.

`c)`

`1:` $0 \setminus x \overset{\mathbf{5-10}}{=} 0 \cap x^C \overset{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`2:` Aus `1` folgt: $0 \setminus x = 0$.

`d)`

`1:` $\mathcal{U} \setminus x \overset{\mathbf{5-10}}{=} \mathcal{U} \cap x^C \overset{\mathbf{2-17}}{=} x^C$.

`2:` Aus `1` folgt: $\mathcal{U} \setminus x = x^C$.

`e)`

`1:` $x \setminus \mathcal{U} \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \cap \mathcal{U}^C \overset{\mathbf{3-9}}{=} x \cap 0 \overset{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`2:` Aus `1` folgt: $x \setminus \mathcal{U} = 0$.

$\square$

5-12. Es wird einiges über die zweifache Anwendung der KlassenDifferenz bewiesen. Gemäß **5-12** ist strikt zwischen "$x \setminus (y \setminus z)$" und "$(x \setminus y) \setminus z$" zu unterscheiden. Im Beweis von `b)` erscheint "$x \cap (y \cup z)^C$". Hiermit ist - natürlich - "$x \cap ((y \cup z)^C)$" gemeint. Von dieser genaueren Notation wird Abstand genommen, um die nachfolgende Manipulation unter Hinweis auf **5-11** transparenter zu gestalten. Die hier auftretende Mehrdeutigkeitsproblematik - es könnte "$x \cap (y \cup z)^C$" ja auch "$(x \cap (y \cup z))^C$" bedeuten - ist eine der unangenehmen Eigenschaft beim Einsatz von Abkürzungen, hier von "^{C}" für das universelle Komplement. Denn streng genommen müsste bei jeder neuen Abkürzung eine Liste von Regeln - vergleichbar der elemenararithmesischen Regel "Punktrechnung vor Strichrechnung" - erstellt werden, wie diese neue Abkürzung im Zusammentreffen mit anderen Abkürzungen zu gebrauchen ist. Im Speziellen müssten Regeln für die Reihenfolge der Anwendungen der hinter den Abkürzungen stehenden Manipulationen formuliert werden. Dass darauf in den Essays verzichtet wird liegt daran, dass ich noch anderes vorhabe als lange Regellisten zu erstellen. Dennoch sollte die Gefahr der Mehrdeutigkeit stets im Auge behalten werden und es sollten an "kritischen" Stellen entsprechende Kommentare erfolgen:

5-12(Satz)

`a)` $x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z)$.

`b)` $(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z)$.

`c)` $(x \setminus y) \setminus z = (x \setminus z) \setminus y$.

<u>Beweis</u> **<u>5-12</u>** `a)`

`1:` $x \setminus (y \setminus z) \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \cap (y \setminus z)^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \cap (y^C \cup z) \overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap y^C) \cup (x \cap z)$
$\overset{\mathbf{5-10}}{=} (x \setminus y) \cup (x \cap z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z).$

`b)`

`1:` $(x \setminus y) \setminus z \overset{\mathbf{5-10}}{=} (x \setminus y) \cap z^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} (x \cap y^C) \cap z^C \overset{\mathbf{AG}\cap}{=} x \cap (y^C \cap z^C)$
$\overset{\mathbf{DM}\cup\cap}{=} x \cap (y \cup z)^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \setminus (y \cup z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z).$

`c)`

`1:` $(x \setminus y) \setminus z \overset{\texttt{b)}}{=} x \setminus (y \cup z) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} x \setminus (z \cup y) \overset{\texttt{b)}}{=} (x \setminus z) \setminus y.$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \setminus y) \setminus z = (x \setminus z) \setminus y.$

$\square$

5-13. Hinreichendes für "$y = x \setminus \{p\}$":

<u>5-13(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $p \notin y$.

$\rightarrow$) $y \subseteq x$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \neq p)) \Rightarrow (\alpha \in y)$".

Dann folgt "$y = x \setminus \{p\}$".

<u>Beweis **5-13**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in y$.

2: Es gilt: $(\beta = p) \vee (\beta \neq p)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\beta = p$.

3: Aus 2.1.Fall“$\beta = p$” und
Thema1.1“$\beta \in y$”
folgt: $p \in y$.

4: Es gilt 3“$p \in y$”.
Es gilt →)“$p \notin y$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\beta \in x \setminus \{p\}$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\beta \neq p$.

3.1: Aus 2.2.Fall“$\beta \neq p$”
folgt via **1-7**: $\beta \notin \{p\}$.

3.2: Aus Thema1.1“$\beta \in y$” und
aus →)“$y \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $\beta \in x$.

4: Aus 3.2“$\beta \in x$” und
aus 3.1“$\beta \notin \{p\}$”
folgt via **5-3**: $\beta \in x \setminus \{p\}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\beta \in x \setminus \{p\}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \beta : (\beta \in y) \Rightarrow (\beta \in x \setminus \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}y \subseteq x \setminus \{p\}\text{”}}$

<u>Beweis **5-13**</u> ...

`Thema1.2` $\beta \in x \setminus \{p\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in x \setminus \{p\}$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`" "$\beta \in x \setminus \{p\}$" "
folgt via **5-3**: $(\beta \in x) \wedge (\beta \notin \{p\})$.

`3:` Aus `2.2`"... $\beta \notin \{p\}$"
folgt via **1-7**: $(\beta \neq p) \vee (\beta$ Unmenge$)$.

`4:` Aus `3`"$(\beta \neq p) \vee (\beta$ Unmenge$)$" und
aus `2.1`"β Menge"
folgt: $\beta \neq p$.

`5:` Aus `2.2`"$\beta \in x \ldots$",
aus `4`"$\beta \neq p$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \neq p)) \Rightarrow (\alpha \in y)$"
folgt: $\beta \in y$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in x \setminus \{p\}) \Rightarrow (\beta \in y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$x \setminus \{p\} \subseteq y$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$y \subseteq x \setminus \{p\}$" und
aus `A2` gleich "$x \setminus \{p\} \subseteq y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y = x \setminus \{p\}$.

□

5-14. Es gilt - klarer Weise - "$p \notin x \setminus \{p\}$" :

5-14(Satz)

$$p \notin x \setminus \{p\}.$$

Beweis **5-14**

1: Es gilt: $(p \in x \setminus \{p\}) \vee (p \notin x \setminus \{p\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in x \setminus \{p\}$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$p \in x \setminus \{p\}$" folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2.2: Aus 1.1.Fall "$p \in x \setminus \{p\}$" folgt via **5-3**: $(p \in x) \wedge (p \notin \{p\})$.

3: Aus 2.1 "p Menge" folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

4: Es gilt 3 "$p \in \{p\}$" .
Es gilt 2.2 "$\ldots p \notin \{p\}$" .
Ep falso quodlibet folgt: $p \notin x \setminus \{p\}$.

`1.2.Fall` $p \notin x \setminus \{p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin x \setminus \{p\}$.

□

5-15. Im folgenden Satz wird ein - nahe liegendes - Kriterium für "$q \in x \setminus \{p\}$" gegeben:

5-15(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \in x \setminus \{p\}$.

`ii)` "$q \in x$" *und* "$q \neq p$".

Beweis **5-11** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $q \in x \setminus \{p\}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$q \in x \setminus \{p\}$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$q \in x \setminus \{p\}$"
folgt via **5-3**: $(q \in x) \wedge (q \notin \{p\})$.

`2`: Aus `1`"$\ldots q \notin \{p\}$"
folgt via **1-7**: $(q \neq p) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`3`: Aus `2`"$(q \neq p) \vee (q \text{ Unmenge})$"
und `1.1`"q Menge"
folgt: $q \neq p$.

`4`: Aus `1.2`"$q \in x \ldots$" und
aus `3`"$q \neq p$"
folgt: $(q \in x) \wedge (q \neq p)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(q \in x) \wedge (q \neq p)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots q \neq p$"
folgt via **1-7**: $q \notin \{p\}$.

`2`: Aus `VS` gleich "$q \in x \ldots$" und
aus `1`"$q \notin \{p\}$"
folgt via **5-3**: $q \in x \setminus \{p\}$.

□

5-16. Via Negation ergibt sich aus **5-15** ein Kriterium für “$q \notin x \setminus \{p\}$” :

5-16(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \notin x \setminus \{p\}$.

`ii)` “$q \notin x$” *oder* “$q = p$”.

Beweis **5-16**

`1:` Via **5-15** gilt: $$(q \in x \setminus \{p\}) \Leftrightarrow ((q \in x) \wedge (q \neq p)).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(\neg(q \in x \setminus \{p\})) \Leftrightarrow (\neg((q \in x) \wedge (q \neq p))).$$

`3:` Aus `2` folgt: $$(\neg(q \in x \setminus \{p\})) \Leftrightarrow ((\neg(q \in x) \vee (\neg(q \neq p)))).$$

`4:` Aus `3` folgt: $$(q \notin x \setminus \{p\}) \Leftrightarrow ((q \notin x) \vee (q = p)).$$

$\square$

5-17. Es gilt $p \notin x$ genau dann, wenn $x = x \setminus \{p\}$:

5-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin x$.

`ii)` $x = x \setminus \{p\}$.

Beweis **5-17** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \notin x$.

`Thema1.1` $\alpha \in x$.

`2`: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$p \notin x$"
folgt via **0-1**: $\alpha \neq p$.

`3`: Aus `2` "$\alpha \neq p$"
folgt via **1-7**: $\alpha \notin \{p\}$.

`4`: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x$" und
aus `3` "$\alpha \notin \{p\}$"
folgt via **5-3**: $\alpha \in x \setminus \{p\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in x \setminus \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \subseteq x \setminus \{p\}$"

`1.2`: Via **5-5** gilt: $x \setminus \{p\} \subseteq x$.

`2`: Aus `A1` gleich "$x \subseteq x \setminus \{p\}$" und
aus `1.2` "$x \setminus \{p\} \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = x \setminus \{p\}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x = x \setminus \{p\}$.

`1`: Via **5-14** gilt: $p \notin x \setminus \{p\}$.

`2`: Aus `1` "$p \notin x \setminus \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$x = x \setminus \{p\}$"
folgt: $p \notin x$.

□

5-18. Via Negation ergibt sich aus **5-12**, dass $p \in x$ genau dann gilt, wenn $x \neq x \setminus \{p\}$:

5-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x$.

`ii)` $x \neq x \setminus \{p\}$.

Beweis **5-18**

`1:` Via **5-17** gilt: $(p \notin x) \Leftrightarrow (x = x \setminus \{p\})$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(p \notin x)) \Leftrightarrow (\neg(x = x \setminus \{p\}))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(p \in x) \Leftrightarrow (x \neq x \setminus \{p\})$.

□

5-19. Falls $p \in x$, dann gilt via **5-18** die Aussage $x \neq x \setminus \{p\}$. Gemäß des folgenden Satzes gilt $x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$ genau dann, wenn "$p \in x$ *oder* p Unmenge" :

5-19(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$p \in x$" oder "p Unmenge".*

`ii)` $x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

Beweis **5-19** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $(p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x$.

2: Es gilt: $(\alpha \in \{p\}) \vee (\alpha \notin \{p\})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\alpha \in \{p\}$.

Aus 2.1.Fall"$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\alpha \notin \{p\}$.

3: Aus Thema1.1"$\alpha \in x$" und
aus 2.2.Fall"$\alpha \notin \{p\}$"
folgt via **5-3**: $\alpha \in x \setminus \{p\}$.

4: Aus 3"$\alpha \in x \setminus \{p\}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \{p\} \cup (x \setminus \{p\}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x \subseteq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})\text{”}}$

1.2: Aus VS gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

1.3: Via **5-5** gilt: $x \setminus \{p\} \subseteq x$.

2: Aus 1.2"$\{p\} \subseteq x$" und
aus 1.3"$x \setminus \{p\} \subseteq x$"
folgt via **2-12**: $\{p\} \cup (x \setminus \{p\}) \subseteq x$.

3: Aus A1 gleich "$x \subseteq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$" und
aus 2"$\{p\} \cup (x \setminus \{p\}) \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

Beweis **5-19** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`3:` Aus `2` "$p \in \{p\}$"
folgt via **2-2**: $p \in \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

`4:` Aus `3` "$p \in \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$" und
aus `VS` gleich "$x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$"
folgt: $p \in x$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(p \in x) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

Aus `1.2.Fall` "p Unmenge"
folgt: $(p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})$.

□

5-20. Aus **5-19** ergibt sich via Negation der folgende Satz:

5-20(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) *"$p \notin x$" und "p Menge".*

ii) $x \neq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

Beweis **5-20**

1: Via **5-19** gilt: $((p \in x) \vee (p \text{ Unmenge})) \Leftrightarrow (x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\}))$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((p \in x) \vee (p \text{ Unmenge}))) \Leftrightarrow (\neg(x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})))$.

3: Aus 2 folgt: $((\neg(p \in x)) \wedge (\neg(p \text{ Unmenge}))) \Leftrightarrow (\neg(x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})))$.

4: Aus 3 folgt: $((p \notin x) \wedge (p \text{ Menge})) \Leftrightarrow (x \neq \{p\} \cup (x \setminus \{p\}))$.

□

5-21 Da stets $p \in x$ oder $p \notin x$ gilt, ergibt sich aus **5-17** und **5-19** die folgende, universelle Aussage:

5-21(Satz)

$$\text{“}x = x \setminus \{p\}\text{” } \textit{oder} \text{ “}x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})\text{”}.$$

Beweis **5-21**

1: Es gilt: $(p \in x) \vee (p \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in x$.

2: Aus `1.1.Fall`“$p \in x$”
folgt via **5-19**: $x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

3: Aus 2
folgt: $(x = x \setminus \{p\}) \vee (x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\}))$.

`1.2.Fall` $p \notin x$.

2: Aus `1.2.Fall`“$p \notin x$”
folgt via **5-17**: $x = x \setminus \{p\}$.

3: Aus 2
folgt: $(x = x \setminus \{p\}) \vee (x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\}))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = x \setminus \{p\}) \vee (x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\}))$.

□

5-22. Es werden nun dreei Aussagen rund um binäre Vereinigung, KlassenDifferenz und binären Durchschnitt bewiesen. Im Speziellen folgt, dass es stets möglich ist, die binäre Vereinigung von x und y als binäre Vereinigung von Klassen mit leerem binärem Durchschnitt darzustellen:

5-22(Satz)

a) $x = (x \cap y) \cup (x \setminus y)$.

b) $x \cup y = x \cup (y \setminus x)$.

c) $x \cup y = y \cup (x \setminus y)$.

Beweis **5-22** a)

1: $(x \cap y) \cup (x \setminus y) \overset{\mathbf{5-10}}{=} (x \cap y) \cup (x \cap y^C)$ $\overset{\mathbf{2-38}}{=} ((x \cup x) \cap (y \cup x)) \cap ((y \cup x) \cap (y \cup y^C))$ $\overset{\mathbf{2-14}}{=} (x \cap (y \cup x)) \cap ((y \cup x) \cap (y \cup y^C)) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \cap (x \cup y)) \cap ((x \cup y) \cap (y \cup y^C))$ $\overset{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} x \cap ((x \cup y) \cap (y \cup y^C)) \overset{\mathbf{3-6}}{=} x \cap ((x \cup y) \cap \mathcal{U}) \overset{\mathbf{2-17}}{=} x \cap (x \cup y) \overset{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} x$.

2: Aus 1 "$(x \cap y) \cup (x \setminus y) = \ldots = x$" folgt: $x = (x \cap y) \cup (x \setminus y)$.

b)

1: $x \cup (y \setminus x) \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \cup (y \cap x^C) \overset{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (x \cup y) \cap (x \cup x^C) \overset{\mathbf{3-6}}{=} (x \cup y) \cap \mathcal{U} \overset{\mathbf{2-17}}{=} x \cup y$.

2: Aus 1 "$x \cup (y \setminus x) = \ldots = x \cup y$" folgt: $x \cup y = x \cup (y \setminus x)$.

c)

1: $y \cup (x \setminus y) \overset{\text{b)}}{=} y \cup x \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} x \cup y$.

2: Aus 1 "$y \cup (x \setminus y) = \ldots = x \cup y$" folgt: $x \cup y = y \cup (x \setminus y)$.

□

5-23. Die **symmetrische KlassenDifferenz** von x und y ist, wie sich im **FundamentalSatz** Δ zeigt, gleich der symmetrischen KlassenDifferenz von y und x, so dass das Attribut "symmetrisch" gerechtfertigt ist. Die symmetrische KlassenDifferenz von x und y besteht, wie sich in **5-26** zeigt und wie an Hand der Definition antizipiert werden kann, genau aus jenen Mengen, die Element **genau in einer** der beiden Klassen x und y sind. Bei der Übernahme des Symbols "Δ" aus der Literatur für die symmetrische KlassenDifferenz war ich etwas zögerlich, denn ich hätte diesen großen griechischen Buchstaben lieber als Kürzel für den Laplace-Operator reserviert. Also muss dieser durch ein anderes Symbol repräsentiert werden:

5-23(Definition)

1) $x\Delta y$
$= \mathsf{5.1}(x, y) = \{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\}.$

2) "$\mathfrak{C}$ **symmetrische KlassenDifferenz von** x **und** y"
genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x\Delta y.$$

5-24. Die folgenden Aussagen sind kaum überraschend:

5-24(Satz)

a) *$x\Delta y$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y"*
und "$\mathfrak{D}$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **5-24** a) Aus "$x\Delta y = x\Delta y$"
folgt via **5-24(Def)**: $x\Delta y$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y).

1.1: Aus →) "$\mathfrak{C}$ symmetrische KlassenDifferenz von x und $y \ldots$"
folgt via **5-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x\Delta y$.

1.2: Aus →) "$\ldots \mathfrak{D}$ symmetrische KlassenDifferenz von x und y"
folgt via **5-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x\Delta y$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = x\Delta y$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = x\Delta y$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

5-25. Es wird ein Kriterium für "$p \in x\Delta y$" bewiesen:

5-25(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x\Delta y$.

`ii)` "$(p \in x) \wedge (p \notin y)$" *oder* "$(p \notin x) \wedge (p \in y)$".

Beweis **5-25** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in x\Delta y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x\Delta y$" und
aus "$x\Delta y = \{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\}$"
folgt: $((p \in x) \wedge (p \notin y)) \vee ((p \notin x) \wedge (p \in y))$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $((p \in x) \wedge (p \notin y)) \vee ((p \notin x) \wedge (p \in y))$.

`1.1:` Nach `VS` gilt: $((p \in x) \wedge (p \notin y)) \vee ((p \notin x) \wedge (p \in y))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $(p \in x) \wedge (p \notin y)$.

Aus `1.1.1.Fall`"$p \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.1.2.Fall` $(p \notin x) \wedge (p \in y)$.

Aus `1.1.2.Fall`"$\ldots p \in y$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "p Menge"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((p \in x) \wedge (p \notin y)) \vee ((p \notin x) \wedge (p \in y))$" und
aus `A1` gleich "p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\}$.

`2:` Aus
`1.2`"$p \in \{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\}$" und
aus "$\{\omega : ((\omega \in x) \wedge (\omega \notin y)) \vee ((\omega \notin x) \wedge (\omega \in y))\} = x\Delta y$"
folgt: $p \in x\Delta y$.

□

5-26. Via Negation folgt aus **5-25** ein Kriterium für "$p \notin x\Delta y$" :

5-26(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin x\Delta y$.

`ii)` "$(p \in x) \wedge (p \in y)$" *oder* "$(p \notin x) \wedge (p \notin y)$".

Beweis **5-26**

`1:` Via **5-25** gilt: $(p \in x\Delta y) \Leftrightarrow (((p \in x) \wedge (p \notin y)) \vee ((p \notin x) \wedge (p \in y)))$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(p \in x\Delta y)) \Leftrightarrow (\neg(((p \in x) \wedge (p \notin y)) \vee ((p \notin x) \wedge (p \in y))))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(\neg(p \in x\Delta y)) \Leftrightarrow ((\neg((p \in x) \wedge (p \notin y))) \wedge (\neg((p \notin x) \wedge (p \in y))))$.

`4:` Aus `3` folgt:
$$(\neg(p \in x\Delta y)) \Leftrightarrow (((\neg(p \in x)) \vee (\neg(p \notin y))) \wedge ((\neg(p \notin x)) \vee (\neg(p \in y))))$$.

`5:` Aus `4` folgt: $(p \notin x\Delta y) \Leftrightarrow (((p \notin x) \vee (p \in y)) \wedge ((p \in x) \vee (p \notin y)))$.

`6:` Aus `5` folgt: $(p \notin x\Delta y) \Leftrightarrow (((p \in x) \wedge (p \in y)) \vee ((p \notin x) \vee (p \notin y)))$.

$\square$

5-27. Es finden sich hier vier Versionen, wie " $x\Delta y$" mit $\cup, \cap, \setminus$ und dem universellen Komplement ausgedrückt werden kann. Der im Beweis von `d)` vorkommende Term " $(x \cup y) \cap (x \cap y)^C$" ist gleich " $(x \cup y) \cap ((x \cap y)^C)$" :

5-27(Satz)

`a)` $x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

`b)` $x\Delta y = (x \cap y^C) \cup (x^C \cap y)$.

`c)` $x\Delta y = (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C)$.

`d)` $x\Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$.

<u>Beweis **5-27**</u> `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in x\Delta y.$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x\Delta y$"
folgt via **5-25**:
$$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y)).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y).$

`3:` Aus `2.1.Fall`"$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)$"
folgt via **5-3**: $\alpha \in x \setminus y.$

`4:` Aus `3`"$\alpha \in x \setminus y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$

`2.2.Fall` $(\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y).$

`3:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots \alpha \in y$" und
aus `2.2.Fall`"$\alpha \notin x \ldots$"
folgt via **5-3**: $\alpha \in y \setminus x.$

`4:` Aus `3`"$\alpha \in y \setminus x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$

`Ende Fallunterscheidung`
In beiden Fällen gilt: $\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x\Delta y) \Rightarrow (\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x\Delta y \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$"

Beweis **5-27** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$

2: Aus Thema1.2"$\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \setminus y) \vee (\alpha \in y \setminus x).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\alpha \in x \setminus y.$

3: Aus 2.1.Fall"$\alpha \in x \setminus y$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y).$

4: Aus 3
folgt: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y)).$

5: Aus 4"$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y))$"
folgt via **5-25**: $\alpha \in x\Delta y.$

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\alpha \in y \setminus x.$

3: Aus 2.2.Fall"$\alpha \in y \setminus x$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \notin x).$

4: Aus 3
folgt: $(\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y).$

5: Aus 4
folgt: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y)).$

6: Aus 5"$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y))$"
folgt via **5-25**: $\alpha \in x\Delta y.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in x\Delta y.$

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \Rightarrow (\alpha \in x\Delta y).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}(x \setminus y) \cup (y \setminus x) \subseteq x\Delta y\text{"}}$

...

<u>Beweis</u> **5-27** `a)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x\Delta y \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$" und
aus `A2` gleich "$(x \setminus y) \cup (y \setminus x) \subseteq x\Delta y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

`b)`

`1:` $x\Delta y \stackrel{\text{a)}}{=} (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} (x \cap y^C) \cup (y \setminus x) \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} (x \cap y^C) \cup (y \cap x^C)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap y^C) \cup (x^C \cap y)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x\Delta y = (x \cap y^C) \cup (x^C \cap y)$.

`c)`

`1:` $x\Delta y \stackrel{\text{b)}}{=} (x \cap y^C) \cup (x^C \cap y) \stackrel{\mathbf{2-34}}{=} ((x \cup x^C) \cap (y^C \cup x^C)) \cap ((x \cup y) \cap (y^C \cup y))$
$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} (\mathcal{U} \cap (y^C \cup x^C)) \cap ((x \cup y) \cap (y^C \cup y))$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} (y^C \cup x^C) \cap ((x \cup y) \cap (y^C \cup y))$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (x^C \cup y^C) \cap ((x \cup y) \cap (y^C \cup y))$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} ((x \cup y) \cap (y^C \cup y)) \cap (x^C \cup y^C)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} ((y^C \cup y) \cap (x \cup y)) \cap (x^C \cup y^C)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} ((y \cup y^C) \cap (x \cup y)) \cap (x^C \cup y^C)$
$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} (\mathcal{U} \cap (x \cup y)) \cap (x^C \cup y^C)$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x\Delta y = (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C)$.

`d)`

`1:` $x\Delta y \stackrel{\text{c)}}{=} (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C) \stackrel{\mathbf{DM}\cap\cup}{=} (x \cup y) \cap (x \cap y)^C \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} (x \cup y) \setminus (x \cap y)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x\Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$.

□

5-28. Fünf Aussagen über symmetrische KlassenDifferenzen und Inklusionen. Insbesondere folgt via **d)** aus "$x \subseteq z$" und "$y \subseteq z$", dass die symmetrische KlassenDifferenz von x und z eine TeilKlasse von y ist. Die "duale" Aussage hierzu ist in e) zu finden. Demnach folgt aus "$z \subseteq x$" und "$y \subseteq x$", dass die symmetrische KlassenDifferenz von x und y eine TeilKlasse des universellen Komplements von z ist:

5-28(Satz)

a) *"$x \setminus y \subseteq x\Delta y$" und "$y \setminus x \subseteq x\Delta y$".*

b) *"$x\Delta y \subseteq x \cup y$" und "$x\Delta y \subseteq y \cup x$".*

c) *"$x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C$" und "$x\Delta y \subseteq y^C \cup x^C$".*

d) *Aus "$x \subseteq z$" und "$y \subseteq z$" folgt "$x\Delta y \subseteq z$".*

e) *Aus "$z \subseteq x$" und "$z \subseteq y$" folgt "$x\Delta y \subseteq z^C$".*

Beweis **5-28** a)

1: Via **5-27** gilt: $x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

2.1: Via **2-7** gilt: $x \setminus y \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

2.2: Via **2-7** gilt: $y \setminus x \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

3.1: Aus 2.1 "$x \setminus y \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$" und
aus 1 "$x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$"
folgt: $x \setminus y \subseteq x\Delta y$.

3.2: Aus 2.2 "$y \setminus x \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$" und
aus 1 "$x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$"
folgt: $y \setminus x \subseteq x\Delta y$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $(x \setminus y \subseteq x\Delta y) \wedge (y \setminus x \subseteq x\Delta y)$.

<u>Beweis</u> **5-28** `b)`

`1:` Via **5-27** gilt: $x\Delta y = (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C)$.

`2:` Via **2-7** gilt: $(x \cup y) \cap (x^C \cup y^C) \subseteq x \cup y$.

`3:` Aus `1` "$x\Delta y = (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C)$" und
aus `2` "$(x \cup y) \cap (x^C \cup y^C) \subseteq x \cup y$"
folgt: $x\Delta y \subseteq x \cup y$.

`4:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup y = y \cup x$.

`5:` Aus `3` "$x\Delta y \subseteq x \cup y$" und
aus `4` "$x \cup y = y \cup x$"
folgt: $x\Delta y \subseteq y \cup x$.

`6:` Aus `3` "$x\Delta y \subseteq x \cup y$" und
aus `5` "$x\Delta y \subseteq y \cup x$"
folgt: $(x\Delta y \subseteq x \cup y) \wedge (x\Delta y \subseteq y \cup x)$.

`c)`

`1:` $x\Delta y \overset{\mathbf{5-27}}{=} (x \cup y) \cap (x^C \cup y^C) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (x^C \cup y^C) \cap (x \cup y)$.

`2:` Via **2-7** gilt: $(x^C \cup y^C) \cap (x \cup y) \subseteq x^C \cup y^C$.

`3:` Aus `1` "$x\Delta y = \ldots = (x^C \cup y^C) \cap (x \cup y)$" und
aus `2.2` "$(x^C \cup y^C) \cap (x \cup y) \subseteq x^C \cup y^C$"
folgt: $x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C$.

`4:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x^C \cup y^C = y^C \cup x^C$.

`5:` Aus `3` "$x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C$" und
aus `4` "$x^C \cup y^C = y^C \cup x^C$"
folgt: $x\Delta y \subseteq y^C \cup x^C$.

`6:` Aus `3` "$x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C$" und
aus `5` "$x\Delta y \subseteq y^C \cup x^C$"
folgt: $(x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C) \wedge (x\Delta y \subseteq y^C \cup x^C)$.

<u>Beweis **5-28**</u> `d)` `VS` gleich $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq z)$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x\Delta y \subseteq x \cup y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq z$"
folgt via **2-12**: $x \cup y \subseteq z$.

`2:` Aus `1.1`"$x\Delta y \subseteq x \cup y$" und
aus `1.2`"$x \cup y \subseteq z$"
folgt via **0-6**: $x\Delta y \subseteq z$.

`e)` `VS` gleich $(z \subseteq x) \wedge (z \subseteq y)$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq x \ldots$"
folgt via **3-4**: $x^C \subseteq z^C$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq y$"
folgt via **3-4**: $y^C \subseteq z^C$.

`2:` Aus `1.2`"$x^C \subseteq z^C$" und
aus `1.3`"$y^C \subseteq z^C$"
folgt via **2-12**: $x^C \cup y^C \subseteq z^C$.

`3:` Aus `1.1`"$x\Delta y \subseteq x^C \cup y^C$" und
aus `2`"$x^C \cup y^C \subseteq z^C$"
folgt via **0-6**: $x\Delta y \subseteq z^C$.

$\square$

5-29. Es folgt ein Kriterium für die Gleichheit von symmetrischer KlassenDifferenz und KlassenDifferenz:

5-29(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x\Delta y = x \setminus y$.

`ii)` $y \subseteq x$.

Beweis **5-29** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x\Delta y = x \setminus y$.

`1:` $(y \setminus x) \cup (x \setminus y) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} x\Delta y \stackrel{\mathtt{VS}}{=} x \setminus y$.

`2:` Aus `1`"$(y \setminus x) \cup (x \setminus y) = \ldots = x \setminus y$"
folgt via **2-10**: $y \setminus x \subseteq x \setminus y$.

`4:` Aus `3`"$y \setminus x \subseteq x \setminus y$"
folgt via **5-5**: $y \subseteq x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $y \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x$"
folgt via **5-5**: $y \setminus x = 0$.

`2:` $x\Delta y \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \stackrel{1}{=} (x \setminus y) \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \setminus y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x\Delta y = x \setminus y$.

□

5-30. Via Negation ergibt sich aus **5-30** ein Kriterium für die Ungleichheit von symmetrischer KlassenDifferenz und KlassenDifferenz:

5-30(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x\Delta y \neq x \setminus y$.

`ii)` $y \not\subseteq x$.

Beweis **5-30**

`1:` Via **5-29** gilt: $(x\Delta y = x \setminus y) \Leftrightarrow (y \subseteq x)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(x\Delta y = x \setminus y)) \Leftrightarrow (\neg(y \subseteq x))$.

`3:` Aus `2` folgt via **0-3**: $(x\Delta y \neq x \setminus y) \Leftrightarrow (y \not\subseteq x)$.

□

5-31. Eine Manipulation von "$x\Delta(y\Delta z)$", die beim Beweis vom **Fundamental-Satz** Δ hilfreich ist:

5-31(Satz)

$$x\Delta(y\Delta z) = ((x\cup(y\cup z))\cap(x\cup(y^C\cup z^C))) \\ \cap((x^C\cup(y\cup z^C))\cap(x^C\cup(y^C\cup z))).$$

Beweis **5-31**

$$\begin{aligned}
x\Delta(y\Delta z) &\overset{\mathbf{5-27}}{=} x\Delta((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C))\\
&\overset{\mathbf{5-27}}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap(x^C\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C))^C)\\
&\overset{\mathbf{DM}\cap\cup}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap(x^C\cup((y\cup z)^C\cup((y^C\cup z^C)^C)))\\
&\overset{\mathbf{DM}\cup\cap}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap(x^C\cup((y^C\cap z^C)\cup((y^C\cup z^C)^C)))\\
&\overset{\mathbf{DM}\cup\cap}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap(x^C\cup((y^C\cap z^C)\cup(y\cap z)))\\
&\overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap(x^C\cup((y\cap z)\cup(y^C\cap z^C)))\\
&\overset{\mathbf{AG}\cup}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap((x^C\cup(y\cap z))\cup(y^C\cap z^C))\\
&\overset{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap(((x^C\cup y)\cap(x^C\cup z))\cup(y^C\cap z^C))\\
&\overset{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\\
&\qquad\cap(((x^C\cup y)\cup(y^C\cap z^C))\cap((x^C\cup z)\cup(y^C\cap z^C)))\\
&\overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\\
&\qquad\cap(((x^C\cup y)\cup(z^C\cap y^C))\cap((x^C\cup z)\cup(y^C\cap z^C)))\\
&\overset{\mathbf{3-19}}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap((x^C\cup(y\cup z^C))\cap((x^C\cup z)\cup(y^C\cap z^C)))\\
&\overset{\mathbf{3-19}}{=} (x\cup((y\cup z)\cap(y^C\cup z^C)))\cap((x^C\cup(y\cup z^C))\cap(x^C\cup(z\cup y^C)))\\
&\overset{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} ((x\cup(y\cup z))\cap(x\cup(y^C\cup z^C)))\cap((x^C\cup(y\cup z^C))\cap(x^C\cup(z\cup y^C)))\\
&\overset{\mathbf{KG}\cup}{=} ((x\cup(y\cup z))\cap(x\cup(y^C\cup z^C)))\cap((x^C\cup(y\cup z^C))\cap(x^C\cup(y^C\cup z))).
\end{aligned}$$

$\square$

5-32. Im **FundamentalSatz** Δ sind die drei wichtigsten ManipulationsRegeln für die symmetrische KlassenDifferenz zusammengefasst. Via `a)` gilt "$x\Delta x = 0$", gemäß `b)` ist die symmetrische KlassenDifferenz "kommutativ" und in `c)` wird die "Assoziativität" der symmetrischen KlassenDifferenz fest gestellt. Der Beweis von `c)` ist am aufwändigsten:

5-32(Satz) (FSΔ: FundamentalSatz Δ)

`a)` $x\Delta x = 0.$

`b)` $x\Delta y = y\Delta x.$

`c)` $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z.$

<u>Beweis</u> **5-32** a)

1: $$x\Delta x \overset{\mathbf{5-27}}{=} (x \setminus x) \cup (x \setminus x) \overset{\mathbf{5-5}}{=} 0 \cup (x \setminus x) \overset{\mathbf{2-17}}{=} x \setminus x \overset{\mathbf{5-5}}{=} 0.$$

2: Aus 1
folgt: $$x\Delta x = 0.$$

b)

1: $$x\Delta y \overset{\mathbf{5-27}}{=} (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (y \setminus x) \cup (x \setminus y) \overset{\mathbf{5-27}}{=} y\Delta x.$$

2: Aus 1
folgt: $$x\Delta y = y\Delta x.$$

c)

1: $$(x\Delta y)\Delta z \overset{\texttt{b)}}{=} z\Delta(x\Delta y)$$
$$\overset{\mathbf{5-31}}{=} ((z \cup (x \cup y)) \cap (z \cup (x^C \cup y^C))) \cap ((z^C \cup (x \cup y^C)) \cap (z^C \cup (x^C \cup y)))$$
$$\overset{\mathbf{2-38}}{=} ((x \cup (y \cup z)) \cap (z \cup (x^C \cup y^C))) \cap ((z^C \cup (x \cup y^C)) \cap (z^C \cup (x^C \cup y)))$$
$$\overset{\mathbf{2-38}}{=} ((x \cup (y \cup z)) \cap (x^C \cup (y^C \cup z))) \cap ((z^C \cup (x \cup y^C)) \cap (z^C \cup (x^C \cup y)))$$
$$\overset{\mathbf{2-38}}{=} ((x \cup (y \cup z)) \cap (x^C \cup (y^C \cup z))) \cap ((x \cup (y^C \cup z^C)) \cap (z^C \cup (x^C \cup y)))$$
$$\overset{\mathbf{2-38}}{=} ((x \cup (y \cup z)) \cap (x^C \cup (y^C \cup z))) \cap ((x \cup (y^C \cup z^C)) \cap (x^C \cup (y \cup z^C)))$$
$$\overset{\mathbf{2-38}}{=} ((x \cup (y \cup z)) \cap (x \cup (y^C \cup z^C))) \cap ((x^C \cup (y \cup z^C)) \cap (x^C \cup (y^C \cup z)))$$
$$\overset{\mathbf{5-31}}{=} x\Delta(y\Delta z).$$

2: Aus 1
folgt: $$(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z).$$

3: Aus 2
folgt: $$x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z.$$

□

5-33. Hier ist ein Kriterium für "$x\Delta y = 0$" zu finden:

5-33(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x\Delta y = 0.$

`ii)` $x = y.$

Beweis **5-33** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x\Delta y = 0.$

`1:` Via **5-27** gilt: $x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$

`2:` Aus `1`"$x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$" und
aus `VS` gleich "$x\Delta y = 0$"
folgt: $(x \setminus y) \cup (y \setminus x) = 0.$

`3.1:` Aus `2`"$(x \setminus y) \cup (y \setminus x) = 0$"
folgt via **2-18**: $x \setminus y = 0.$

`3.2:` Aus `2`"$(x \setminus y) \cup (y \setminus x) = 0$"
folgt via **2-18**: $y \setminus x = 0.$

`4.1:` Aus `3.1`"$x \setminus y = 0$"
folgt via **5-6**: $x \subseteq y.$

`4.2:` Aus `3.2`"$y \setminus x = 0$"
folgt via **5-6**: $y \subseteq x.$

`5:` Aus `4.1`"$x \subseteq y$" und
aus `4.2`"$y \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y.$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x = y.$

`1:` $x\Delta y \overset{\texttt{VS}}{=} y\Delta y \overset{\textbf{5-5}}{=} 0.$

`2:` Aus `1`
folgt: $x\Delta y = 0.$

□

5-34. Via Negation ergibt sich aus **5-33**, dass "$0 \neq x\Delta y$" äquivalent ist zu "$x \neq y$". Also kann - in gewisser Weise - die "Abweichung von $x\Delta y$ von 0" als "Mass für die Ungleichheit von x und y" angesehen werden:

5-34(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x\Delta y$.

ii) $x \neq y$.

Beweis **5-34**

1: Via **5-33** gilt: $(x\Delta y = 0) \Leftrightarrow (x = y)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x\Delta y = 0)) \Leftrightarrow (\neg(x = y))$.

3: Aus 2 folgt: $(0 \neq x\Delta y) \Leftrightarrow (x \neq y)$.

□

5-35. Nun werden $0\Delta x$ und $\mathcal{U}\Delta x$ berechnet:

5-35(Satz)

a) $0\Delta x = x$.

b) $\mathcal{U}\Delta x = x^C$.

Beweis **5-35** a)

1: $$0\Delta x \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (0 \setminus x) \cup (x \setminus 0) \stackrel{\mathbf{5-11}}{=} 0 \cup (x \setminus 0) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \setminus 0 \stackrel{\mathbf{5-11}}{=} x.$$

2: Aus 1 folgt: $$0\Delta x = x.$$

b)

1: $$\mathcal{U}\Delta x \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (\mathcal{U} \setminus x) \cup (x \setminus \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{5-11}}{=} x^C \cup (x \setminus \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{5-11}}{=} x^C \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x^C.$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathcal{U}\Delta x = x^C.$$

$\square$

5-36. Hier sind drei Resultate über die KlassenDifferenz und über die symmetrische KlassenDifferenz im Kontext von Potenzklassen zu finden:

5-36(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathcal{P}(w)$" *folgt* "$x \setminus y \in \mathcal{P}(w)$".

b) *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$x \setminus y \in \mathcal{P}(x)$".

c) *Aus* "$x \in \mathcal{P}(w)$" *und* "$y \in \mathcal{P}(w)$" *folgt* "$x \Delta y \in \mathcal{P}(w)$".

Beweis **5-36** a) VS gleich $x \in \mathcal{P}(w)$.

1: Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq x$.

2: Aus 1"$x \setminus y \subseteq x$" und
aus VS gleich "$x \in \mathcal{P}(w)$"
folgt via **0-28**: $x \setminus y \in \mathcal{P}(w)$.

b) VS gleich x Menge.

1: Aus VS gleich "x Menge"
folgt via **0-27**: $x \in \mathcal{P}(x)$.

2: Aus 1"$x \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $x \setminus y \in \mathcal{P}(x)$.

c) VS gleich $(x \in \mathcal{P}(w)) \wedge (y \in \mathcal{P}(w))$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathcal{P}(w) \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots y \in \mathcal{P}(w)$"
folgt via **2-27**: $x \cup y \in \mathcal{P}(w)$.

2: Via **5-28** gilt: $x \Delta y \subseteq x \cup y$.

3: Aus 2"$x \Delta y \subseteq x \cup y$" und
aus 1"$x \cup y \in \mathcal{P}(w)$"
folgt via **0-28**: $x \Delta y \in \mathcal{P}(w)$.

□

5-37. Es folgen zwei Aussagen über binäre Vereinigung, binären Durchschnitt und symmetrische KlassenDifferenz. Im Speziellen folgt, dass die binäre Vereinigung zweier Klassen x und y in "symmetrischer" Weise als binäre Vereinigung zweier Klassen mit leerem binären Durchschnitt dargestellt werden kann:

5-37(Satz)

a) $(x \cap y) \cap (x \Delta y) = 0$.

b) $x \cup y = (x \cap y) \cup (x \Delta y)$.

Beweis **5-37** a)

1: $(x \cap y) \cap (x \Delta y) \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (x \cap y) \cap ((x \cup y) \setminus (x \cap y)) \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} 0$.

2: Aus 1 folgt: $(x \cap y) \cap (x \Delta y) = 0$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1 "$x \cap y \subseteq x \cup y$" folgt via **2-10**: $(x \cup y) \cup (x \cap y) = x \cup y$.

3: $(x \cap y) \cup (x \Delta y) \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (x \cap y) \cup ((x \cup y) \setminus (x \cap y)) \stackrel{\mathbf{5-22}}{=} (x \cup y) \cup (x \cap y) \stackrel{2}{=} x \cup y$.

4: Aus 3 "$(x \cap y) \cup (x \Delta y) = \ldots = x \cup y$" folgt: $x \cup y = (x \cap y) \cup (x \Delta y)$.

□

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.