Suite I - Die StrukturGebende

Teil 4: Essays 22-33

$f : D \to B$ **bijektiv. Bijektion. BijektionsLemma. FunktionsAxiom. SingeltonKlasse.** E_{sngltn}**. SingeltonUniversum.** $\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$**. SingeltonFunktion.** $\{.\}_E$**. Universelle SingeltonFunktion.** $\{.\}$**. (Nicht-)** $\cup$**induktive Klasse. Endlich. EndlichkeitsAxiom. Universum der (nichtleeren) endlichen Klassen.** $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$**.** $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$**.** $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$**Induktion.** $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$**Induktion. Unendlich. RelationsNotation.** M**_vermehrend.** M**_verringernd. Reflexiv. Irreflexiv. Transitiv. AntiSymmetrisch. Symmetrisch. Konnex.** M**_Kette. Liste der KlassenVariablen, Teil 2.** `HO`**-Notation. (AntiSymmetrische) Halbordnung in** z**. (Nichtleere) Endliche TeilKlasse.** $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$**.** $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$**.** $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$**Induktion.** $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$**Induktion.**

Andreas Unterreiter

13. September 2011

$f : D \to B$ **bijektiv**.
Bijektion.

Ersterstellung: 11/10/05 **Letzte Änderung: 21/04/11**

22-1. $f : D \to B$ ist genau dann **bijektiv**, wenn f injektiv ist und wenn $B = \mathsf{ran}\, f$. An dieser Begriffsbildung fällt auf, dass sie a priori auf Funktionen beschränkt ist. Eine eng verwandte Begriffsbildung nennt f **Bijektion**, wenn $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv ist:

22-1(Definition)

1) "$f : D \to B$ **bijektiv**" genau dann, wenn gilt:

$$f : D \to B.$$

$$\wedge$$

$$\mathsf{ran}\, f = B.$$

$$\wedge$$

$$f \text{ injektiv.}$$

2) "f **Bijektion**" genau dann, wenn gilt:

$$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f \text{ bijektiv.}$$

22-2. Wenn $f : D \to B$ und $f : C \to A$ bijektiv sind, dann $D = C$ und $B = A$. Falls $f : D \to B$ bijektiv ist, dann ist f eine Bijektion:

22-2(Satz)

a) *Aus "$f : D \to B$ bijektiv" und "$f : C \to A$ bijektiv" folgt "$D = C$" und "$B = A$".*

b) *Aus "$f : D \to B$ bijektiv" folgt "f Bijektion".*

<u>Beweis **22-2**</u> `a)` `VS` gleich $(f : D \to B \text{ bijektiv}) \wedge (f : C \to A \text{ bijektiv})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B$ bijektiv..."
folgt via **22-1(Def)**: $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...$f : C \to A$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(f : C \to A) \wedge (\mathsf{ran}\, f = A)$.

`2.1:` Aus `1.1`"...$\mathsf{ran}\, f = B$" und
aus `1.2`"...$\mathsf{ran}\, f = A$"
folgt: $B = A$.

`2.2:` Aus `1.1`"$f : D \to B$..."
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2.3:` Aus `1.2`"$f : C \to A$..."
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = C$.

`3:` Aus `2.2`"$\mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `2.3`"$\mathsf{dom}\, f = C$"
folgt: $D = C$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.1`
folgt: $(D = C) \wedge (B = A)$.

`b)` `VS` gleich $f : D \to B$ bijektiv.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B) \wedge (f \text{ injektiv})$.

`2:` Aus `1`"$f : D \to B$..."
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

`3:` Aus `2`"f Funktion"
folgt via **21-3**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `3`"$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$",
aus "$\mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1`"...f injektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv.

`5:` Aus `4`"$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: f Bijektion.

□

22-3. $f : D \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn f eine Bijektion ist und $D = \mathsf{dom}\, f$ und $B = \mathsf{ran}\, f$ gilt:

22-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $f : D \to B$ *bijektiv.*

`ii)` *“f Bijektion” und “$\mathsf{dom}\, f = D$” und “$\mathsf{ran}\, f = B$”.*

Beweis **22-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $f : D \to B$ bijektiv.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$f : D \to B$ bijektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$f : D \to B$ bijektiv”
folgt via **22-2**: f Bijektion.

`2:` Aus `1.1`“$f : D \to B \ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`3:` Aus `1.2`“f Bijektion”,
aus `2`“$\mathsf{dom}\, f = D$” und
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{ran}\, f = B$”
folgt: $(f \text{ Bijektion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(f \text{ Bijektion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

`1:` Aus `VS` gleich “f Bijektion…”
folgt via **22-1(Def)**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv.

`2:` Aus `1`“$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$”
folgt: $f : D \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv.

`3:` Aus `2`“$f : D \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{ran}\, f = B$”
folgt: $f : D \to B$ bijektiv.

$\square$

22-4. Gemäß folgendem Kriterium ist die Injektivität das Wesentliche einer Bijektion:

22-4(Satz)

i) *f Bijektion.*

ii) *"f Funktion" und "f injektiv".*

Beweis **22-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich f Bijektion.

1: Aus VS gleich "f Bijektion"
folgt via **22-1(Def)**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv.

2: Aus 1"$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f) \wedge (f$ injektiv$)$.

3: Aus 2"$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

4: Aus 3"f Funktion" und
aus 2"$\ldots f$ injektiv"
folgt: $(f$ Funktion$) \wedge (f$ injektiv$)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(f$ Funktion$) \wedge (f$ injektiv$)$.

1: Aus VS gleich "f Funktion…"
folgt via **21-3**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$.

2: Aus 1"$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$",
aus "$\mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, f$" und
aus VS gleich "$\ldots f$ injektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv.

3: Aus 2"$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: f Bijektion.

□

22-5. f ist genau dann eine Bijektion, wenn f eine Funktion ist und wenn f^{-1} eine Bijektion ist und dies ist genau dann der Fall, wenn f eine Relation ist und wenn f^{-1} eine Bijektion ist. Im Speziellen ergibt sich hieraus: wenn f eine Bijektion ist, dann ist f^{-1} eine Bijektion:

22-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *f Bijektion.*

`ii)` *"f Funktion" und "f^{-1} Bijektion".*

`iii)` *"f Relation" und "f^{-1} Bijektion".*

Beweis **22-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f Bijektion.

`1:` Aus `VS` gleich "f Bijektion"
folgt via **22-4**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$.

`2.1:` Aus `1`"f Funktion"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots f$ injektiv"
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`3:` Aus `2.2`"f^{-1} Funktion" und
aus `2.1`"f^{-1} injektiv"
folgt via **22-4**: f^{-1} Bijektion.

`4:` Aus `1`"f Funktion$\ldots$" und
aus `3`"f^{-1} Bijektion"
folgt: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} \text{ Bijektion})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} \text{ Bijektion})$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2:` Aus `1`"f Relation" und
aus `VS` gleich "$\ldots f^{-1}$ Bijektion"
folgt: $(f \text{ Relation}) \wedge (f^{-1} \text{ Bijektion})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(f \text{ Relation}) \wedge (f^{-1} \text{ Bijektion})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f^{-1}$ Bijektion"
folgt via **22-4**: $(f^{-1} \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} \text{ injektiv})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Relation$\ldots$" und
aus `1`"$\ldots f^{-1}$ injektiv"
folgt via **18-19**: f Funktion.

`2.2:` Aus `1`"f^{-1} Funktion $\ldots$"
folgt via **19-1**: f injektiv.

`3:` Aus `2.1`"f Funktion" und
aus `2.2`"f injektiv"
folgt via **22-4**: f Bijektion.

$\square$

22-6. Ähnlich wie **22-5** ist $f : D \to B$ genau dann bijektiv, wenn f eine Funktion ist und $f^{-1} : B \to D$ bijektiv ist und dies ist genau dann der Fall, wenn f eine Relation ist und $f^{-1} : B \to B$ bijektiv ist. Im Speziellen gilt also: wenn $f : D \to B$ bijektiv ist, dann ist $f^{-1} : B \to D$ bijektiv:

22-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $f : D \to B$ *bijektiv.*

`ii)` *“f Funktion” und “$f^{-1} : B \to D$ bijektiv”.*

`iii)` *“f Relation” und “$f^{-1} : B \to D$ bijektiv”.*

<u>Beweis **22-6**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $f : D \to B$ bijektiv.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B$ bijektiv"
folgt via **22-3**: $(f \text{ Bijektion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

`2:` Aus `1` "f Bijektion…"
folgt via **22-5**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} \text{ Bijektion})$.

`3:` Aus `2` "…f^{-1} Bijektion"
folgt via **22-1(Def)**: $f^{-1} : \mathsf{dom}\,(f^{-1}) \to \mathsf{ran}\,(f^{-1})$ bijektiv.

`4.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\, f$.

`4.2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\, f$.

`5.1:` Aus `4.1` "$\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1` "…$\mathsf{ran}\, f = B$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = B$.

`5.2:` Aus `4.2` "$\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\, f$" und
aus `1` "…$\mathsf{dom}\, f = D$…"
folgt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D$.

`6:` Aus `3` "$f^{-1} : \mathsf{dom}\,(f^{-1}) \to \mathsf{ran}\,(f^{-1})$ bijektiv" und
aus `5.1` "$\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = B$"
folgt: $f^{-1} : B \to \mathsf{ran}\,(f^{-1})$ bijektiv.

`7:` Aus `6` "$f^{-1} : B \to \mathsf{ran}\,(f^{-1})$ bijektiv" und
aus `5.2` "$\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D$"
folgt: $f^{-1} : B \to D$ bijektiv.

`8:` Aus `2` "f Funktion…" und
aus `7` "$f^{-1} : B \to D$ bijektiv"
folgt: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} : B \to D \text{ bijektiv})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} : B \to D \text{ bijektiv})$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2:` Aus `1` "f Relation" und
aus `VS` gleich "…$f^{-1} : B \to D$ bijektiv"
folgt: $(f \text{ Relation}) \wedge (f^{-1} : B \to D \text{ bijektiv})$.

Beweis **22-6** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(f \text{ Relation}) \wedge (f^{-1} : B \to D \text{ bijektiv})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f^{-1} : B \to D$ bijektiv"
folgt via **22-3**: $(f^{-1} \text{ Bijektion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = B) \wedge (\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Relation…" und
aus `1`"f^{-1} Bijektion…"
folgt via **22-5**: f Bijektion.

`2.2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\,f$.

`2.3:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\,f$.

`3.1:` Aus `2`"f Bijektion"
folgt via **22-1(Def)**: $f : \mathsf{dom}\,f \to \mathsf{ran}\,f$ bijektiv.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\,f$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\,(f^{-1}) = B \ldots$"
folgt: $\mathsf{ran}\,f = B$.

`3.3:` Aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\,f$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D$"
folgt: $\mathsf{dom}\,f = D$.

`4:` Aus `3.1`"$f : \mathsf{dom}\,f \to \mathsf{ran}\,f$ bijektiv" und
aus `3.3`"$\mathsf{dom}\,f = D$"
folgt: $f : D \to \mathsf{ran}\,f$ bijektiv.

`5:` Aus `4`"$f : D \to \mathsf{ran}\,f$ bijektiv" und
aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,f = B$"
folgt: $f : D \to B$ bijektiv.

$\square$

22-7. Falls $f : D \to B$ bijektiv ist, dann gilt $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_B$, $f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_D$ und für alle $\alpha \in D$ gilt $f^{-1}(f(\alpha)) = (f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha$ und für alle $\beta \in B$ gilt $f(f^{-1}(\beta)) = (f \circ f^{-1})(\beta) = \beta$. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - d)`:

22-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $f : D \to B$ *bijektiv.*

Dann folgt:

`a)` $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_B$.

`b)` $\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (f(f^{-1}(\beta)) = (f \circ f^{-1})(\beta) = \beta)$.

`c)` $f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_D$.

`d)` $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f^{-1}(f(\alpha)) = (f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha)$.

<u>Beweis **22-7**</u>

`1.1:` Aus →)"$f : D \to B$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

`1.2:` Aus →)"$f : D \to B$ bijektiv"
folgt via **22-6**: $f^{-1} : B \to D$ bijektiv.

`2.1:` Aus `1.1`"$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

`2.2:` Aus `1.2`"$f^{-1} : B \to D$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(f^{-1} : B \to D) \wedge (\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D)$.

`3.1:` Aus `2.1`"f Funktion"
folgt via **20-20**: $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$f^{-1} : B \to D$"
folgt via **21-1(Def)**: f^{-1} Funktion.

`3.3:` Aus `2.2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D$.

`4.a):` Aus `3.1`"$f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{ran}\, f = B$"
folgt: $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_B$.

`4.1:` Aus `3.2`"f^{-1} Funktion"
folgt via **20-20**: $f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,(f^{-1})}$.

`5:` Aus `2.1`"f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`6:` Aus `5`"f Relation"
folgt via **13-3**: $f = (f^{-1})^{-1}$.

`7:` $f^{-1} \circ f \stackrel{6}{=} f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} \stackrel{4.1}{=} \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,(f^{-1})} \stackrel{3.3}{=} \mathsf{id}_D$.

`8.c):` Aus `7`
folgt: $f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_D$.

...

<u>Beweis **22-7**</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema9.1}}$ $\beta \in B.$

`10:` Aus `Thema9.1`"$\beta \in B$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_B(\beta) = \beta.$

`11:` $(f \circ f^{-1})(\beta) \overset{\text{4.a)}}{=} \mathsf{id}_B(\beta) \overset{\text{10}}{=} \beta.$

`12:` Aus `2.1`"f Funktion" und
aus `3.2`"f^{-1} Funktion"
folgt via **18-46**: $(f \circ f^{-1})(\beta) = f(f^{-1}(\beta)).$

`13:` Aus `11`"$(f \circ f^{-1})(\beta) = \ldots = \beta$" und
aus `12`"$(f \circ f^{-1})(\beta) = f(f^{-1}(\beta))$"
folgt: $f(f^{-1}(\beta)) = (f \circ f^{-1})(\beta) = \beta.$

Ergo `Thema9.1`: `A1` "$\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (f(f^{-1}(\beta)) = (f \circ f^{-1})(\beta) = \beta)$"

$\boxed{\texttt{Thema9.2}}$ $\alpha \in D.$

`10:` Aus `Thema9.1`"$\alpha \in D$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_D(\alpha) = \alpha.$

`11:` $(f^{-1} \circ f)(\alpha) \overset{\text{8.c)}}{=} \mathsf{id}_D(\alpha) \overset{\text{10}}{=} \alpha.$

`12:` Aus `3.2`"f^{-1} Funktion" und
aus `2.1`"f Funktion"
folgt via **18-46**: $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha)).$

`13:` Aus `11`"$(f^{-1} \circ f)(\alpha) = \ldots = \alpha$" und
aus `12`"$(f^{-1} \circ f)(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha))$"
folgt: $f^{-1}(f(\alpha)) = (f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha.$

Ergo `Thema9.2`: `A2` "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f^{-1}(f(\alpha)) = (f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha)$"

...

<u>Beweis **22-7**</u>

...

`10.b):` Aus `A1`
folgt: $$\forall\beta : (\beta \in B) \Rightarrow (f(f^{-1}(\beta)) = (f \circ f^{-1})(\beta) = \beta).$$

`10.d):` Aus `A2`
folgt: $$\forall\alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f^{-1}(f(\alpha)) = (f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha).$$

$\square$

22-8. Jede TeilKlasse einer Bijektion ist eine Bijektion. Im Speziellen ist jede Einschränkung einer Bijektion eine Bijektion:

22-8(Satz)

Aus "f Bijektion" und ...

`a)` *... "$g \subseteq f$" folgt "g Bijektion".*

`b)` *... "g Einschränkung von f auf E" folgt "g Bijektion".*

Beweis **22-8** `a)` `VS` gleich $(f \text{ Bijektion}) \wedge (g \subseteq f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Bijektion..."
folgt via **22-4**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$.

`2.1:` Aus `1`"f Funktion ..." und
aus `VS` gleich "...$g \subseteq f$"
folgt via **18-36**: g Funktion.

`2.2:` Aus `1`"...f injektiv" und
aus `VS` gleich "...$g \subseteq f$"
folgt via **8-4**: g injektiv.

`3:` Aus `2.1`"g Funktion" und
aus `2.2`"g injektiv"
folgt via **22-4**: g Bijektion.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Bijektion}) \wedge (g \text{ Einschränkung von } f \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "...g Einschränkung von f auf E"
folgt via **15-3**: $g \subseteq f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Bijektion..." und
aus `1`"$g \subseteq f$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: g Bijektion.

□

22-9. Falls f Bijektion, dann sind $f \cap g$ und $f \setminus g$ Bijektionen. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

22-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *f Bijektion.*

Dann folgt:

`a)` *"$f \cap g$ Bijektion" und "$g \cap f$ Bijektion".*

`b)` *$f \setminus g$ Bijektion.*

Beweis **22-9**

`1.1:` Via **2-7** gilt: $f \cap g \subseteq f$.

`1.2:` Via **5-5** gilt: $f \setminus g \subseteq f$.

`2.1:` Aus $\rightarrow$)"f Bijektion" und
aus `1.1`"$f \cap g \subseteq f$"
folgt via **22-8**: $f \cap g$ Bijektion.

`2.b):` Aus $\rightarrow$)"f Bijektion" und
aus `1.2`"$f \setminus g \subseteq f$"
folgt via **22-8**: $f \setminus g$ Bijektion.

`3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $g \cap f = f \cap g$.

`4:` Aus `3`"$g \cap f = f \cap g$" und
aus `2.1`"$f \cap g$ Bijektion"
folgt: $g \cap f$ Bijektion.

`5:` Aus `2.1` und
aus `4`
folgt: $(f \circ g \text{ Bijektion}) \wedge (g \circ f \text{ Bijektion})$.

$\square$

22-10. Die Komposition von Bijektionen ist eine Bijektion:

<u>22-10(Satz)</u>

Aus "f Bijektion" und "g Bijektion" folgt "$f \circ g$ Bijektion".

<u>Beweis **22-10**</u> `VS` gleich $(f \text{ Bijektion}) \wedge (g \text{ Bijektion})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Bijektion…"
folgt via **22-4**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "g Bijektion…"
folgt via **22-4**: $(g \text{ Funktion}) \wedge (g \text{ injektiv})$.

`2.1:` Aus `1.1`"f Funktion…" und
aus `1.2`"g Funktion…"
folgt via **18-46**: $f \circ g$ Funktion.

`2.2:` Aus `1.1`"…f injektiv" und
aus `1.2`"…g injektiv"
folgt via **14-9**: $f \circ g$ injektiv.

`3:` Aus `2.1`"$f \circ g$ Funktion" und
aus `2.2`"$f \circ g$ injektiv"
folgt via **22-4**: $f \circ g$ Bijektion.

□

22-11. Die EIdentitäten sind Bijektionen, genauer gesagt ist $\mathsf{id}_E : E \to E$ bijektiv. Im Speziellen ist $\mathsf{id} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ bijektiv:

22-11(Satz)

a) $\mathsf{id}_E : E \to E$ *bijektiv.*

b) $\mathsf{id} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *bijektiv.*

Beweis **22-11** a)

1.1: Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_E : E \to E.$

1.2: Via **20-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E.$

1.3: Via **20-12** gilt: id_E injektiv.

2: Aus 1.1 "$\mathsf{id}_E : E \to E$",
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E$" und
aus 1.3 "id_E injektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $\mathsf{id}_E : E \to E$ bijektiv.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ bijektiv.

2: Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}.$

3: Aus 1 "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$" und
aus 2 "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $\mathsf{id} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ bijektiv.

□

BijektionsLemma.

Ersterstellung: 11/07/06 **Letzte Änderung: 21/04/11**

23-1. Wie im folgenden **BijektionsLemma** fest gestellt, gibt es zu jeder Funktion f und zu jeder TeilKlasse B von $\mathsf{ran}\, f$ *wenn* $f^{-1}[\{\alpha\}]$ *für alle* $\alpha \in B$ *eine Menge ist* eine Klasse $D \subseteq \mathsf{dom}\, f$ - genauer: D ist eine TeilKlasse des Urbilds von B unter f - so dass die Einschränkung g von f auf D die Eigenschaft hat, als $g : D \to B$ bijektiv zu sein. Also ungenau gesagt, fungiert jede TeilKlasse des Bild-Bereichs von f, wenn sie die soeben formulierte "Mengen-Forderung" erfüllt, als Bild-Bereich der bijektiven Einschränkung von f auf eine geeignete TeilKlasse des Definitions-Bereichs von f:

23-1(Satz) (BijektionsLemma)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Dann gibt es g, D *so dass gilt:*

e.1) $g : D \to B$ *bijektiv.*

e.2) $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$.

e.3) $g \circ f^{-1} = \mathsf{id}_B$.

e.4) $D \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

e.5) $D \subseteq f^{-1}[B]$.

e.6) g *Einschränkung von* f *auf* D.

<u>Beweis **23-1**</u>

`1:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge) ”
folgt via **21-47**: $\exists G :$

$$G : B \to \mathsf{dom}\, f$$

$$\wedge \quad G \text{ injektiv}$$

$$\forall \gamma : (\gamma \in B) \Rightarrow (\gamma = f(G(\gamma)))$$

$$\wedge \quad f \circ G = \mathsf{id}_B.$$

`2.1:` Es gilt: $\exists D : D = \mathsf{ran}\, G.$

`2.2:` Es gilt: $\exists g : g = G^{-1}.$

`2.3:` Aus `1`“ $\ldots G : B \to \mathsf{dom}\, f \ldots$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(G \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, G = B) \wedge (\mathsf{ran}\, G \subseteq \mathsf{dom}\, f).$

`2.4:` Aus `1`“ $\ldots f \circ G = \mathsf{id}_B$ ”
folgt: $(f \circ G)^{-1} = (\mathsf{id}_B)^{-1}.$

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\mathsf{ran}\, G = D.$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $g = G^{-1}.$

`3.3:` Aus `2.3`
folgt: $\mathsf{dom}\, G = B.$

`3.4:` Aus `2.3`“ G Funktion… ” und
aus `1`“ $\ldots G$ injektiv… ”
folgt via **22-4**: G Bijektion.

`3.5:` Aus `2.1`“ $\ldots D = \mathsf{ran}\, G$ ”
und aus `2.3`“ $\ldots \mathsf{ran}\, G \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt: $D \subseteq \mathsf{dom}\, f.$

…

<u>Beweis **23-1**</u>

...

`4.1:` Aus `3.4`“G Bijektion”,
aus `3.3`“$\mathsf{dom}\, G = B$” und
aus `3.1`“$\mathsf{ran}\, G = D$”
folgt via **22-3**: $G : B \to D$ bijektiv.

`4.2:` $$g \circ f^{-1} \stackrel{3.2}{=} (G^{-1}) \circ f^{-1} \stackrel{\mathbf{14-8}}{=} (f \circ G)^{-1} \stackrel{2.4}{=} (\mathsf{id}_B)^{-1} \stackrel{\mathbf{20-12}}{=} \mathsf{id}_B.$$

`5:` Aus `4.1`“$G : B \to D$ bijektiv”
folgt via **22-6**: $G^{-1} : D \to B$ bijektiv.

`6:` Aus `5`“$G^{-1} : D \to B$ bijektiv” und
aus `3.2`“$g = G^{-1}$”
folgt: $g : D \to B$ bijektiv.

`7:` Aus `6`“ $g : D \to B$ bijektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $g : D \to B$.

> `Thema8.1` $\beta \in D$.
>
> `9:` Aus `7`“$g : D \to B$” und
> aus `Thema8.1`“$\beta \in D$”
> folgt via **21-4**: $g(\beta) \in B$.
>
> `10:` Aus `9`“$g(\beta) \in B$” und
> aus `1`“$\ldots \forall \gamma : (\gamma \in B) \Rightarrow (\gamma = f(G(\gamma))) \ldots$”
> folgt: $g(\beta) = f(G(g(\beta)))$.
>
> `11:` Aus `4.1`“$G : B \to D$ bijektiv” und
> aus `Thema8.1`“$\beta \in D$”
> folgt via **22-7**: $G(G^{-1}(\beta)) = \beta$.
>
> `12:` $$g(\beta) \stackrel{10}{=} f(G(g(\beta))) \stackrel{3.2}{=} f(G(G^{-1}(\beta))) \stackrel{11}{=} f(\beta).$$
>
> `13:` Aus `12`
> folgt: $g(\beta) = f(\beta)$.

Ergo `Thema8.1`: `A1` | “$\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$”

...

<u>Beweis **23-1**</u>

...

`Thema8.2` $\gamma \in D$.

`9:` Aus `Thema7.2`"$\gamma \in D$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$"
folgt: $g(\gamma) = f(\gamma)$.

`10:` Aus `7`"$g : D \to B$" und
aus `Thema8.2`"$\gamma \in D$"
folgt via **21-4**: $g(\gamma) \in B$.

`11:` Aus `9`"$g(\gamma) = f(\gamma)$" und
aus `10`"$g(\gamma) \in B$"
folgt: $f(\gamma) \in B$.

`12:` Aus →)"f Funktion" und
aus `11`"$f(\gamma) \in B$"
folgt via **18-29**: $\gamma \in f^{-1}[B]$.

Ergo `Thema8.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in D) \Rightarrow (\gamma \in f^{-1}[B])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$D \subseteq f^{-1}[B]$"

`8.3:` Aus `7`"$g : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(g \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = D)$.

`9:` Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$" und
aus `8.3`"$\ldots \mathsf{dom}\, g = D$"
folgt: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$.

`10:` Aus →)"f Funktion"
aus `8.3`"g Funktion..." und
aus `9`"$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$"
folgt via **18-49**: g Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$.

`11:` Aus `10`"g Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$" und
aus `8.3`"$\ldots \mathsf{dom}\, g = D$"
folgt: g Einschränkung von f auf D.

...

<u>Beweis **23-1**</u>

...

`12:` Aus `2.2`“$\exists g\ldots$”,
aus `2.1`“$\exists D\ldots$”,
aus `6`“$g: D\to B$ bijektiv”,
aus `A1` gleich “$\forall\beta: (\beta\in D)\Rightarrow (g(\beta)=f(\beta))$”,
aus `4.2`“$g\circ f^{-1}=\ldots=\mathsf{id}_B$”,
aus `3.5`“$D\subseteq \mathsf{dom}\, f$”,
aus `A2` gleich “$D\subseteq f^{-1}[B]$” und
aus `11`“g Einschränkung von f auf D”
folgt: $\exists g, D:$

$$g: D\to B \text{ bijektiv}$$

$$\wedge\quad \forall\beta: (\beta\in D)\Rightarrow (g(D)=f(D))$$

$$\wedge\quad g\circ f^{-1}=\mathsf{id}_B$$

$$\wedge\quad D\subseteq \mathsf{dom}\, f$$

$$\wedge\quad D\subseteq f^{-1}[B]$$

$$\wedge\quad g \text{ Einschränkung von } f \text{ auf } D.$$

□

Funktion: $E\cap$Verschiebung.

Ersterstellung: 16/09/05 **Letzte Änderung: 21/04/11**

24-1. Die $E\cap$Verschiebung g einer *Funktion* f ist eine Funktion und es gilt für alle $\alpha\in\mathsf{dom}\,g$ die Gleichung $g(\alpha)=f(E\cap\alpha)$:

24-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *g ist $E\cap$Verschiebung von f.*

Dann folgt:

a) *g Funktion.*

b) $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{dom}\,g)\Rightarrow(g(\alpha)=f(\alpha\cap E))$.

Beweis **24-1** a)

1.1: Aus $\rightarrow$) "g ist $E\cap$Verschiebung von f"
folgt via **16-5**: A1 | "g Relation"

Thema1.2 $((\beta,\gamma)\in g)\wedge((\beta,\delta)\in g)$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "g ist $E\cap$Verschiebung von f" und
aus Thema1.2 "$(\beta,\gamma)\in g\ldots$"
folgt via **16-4**: $(E\cap\beta,\gamma)\in f$.

2.2: Aus $\rightarrow$) "g ist $\gamma\cap$Verschiebung von f" und
aus Thema1.2 "$\ldots(\beta,\delta)\in g$"
folgt via **16-4**: $(E\cap\beta,\delta)\in f$.

3: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus 2.1 "$(E\cap\beta,\gamma)\in f$" und
aus 2.2 "$(E\cap\beta,\delta)\in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\gamma=\delta$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall\beta,\gamma,\delta:(((\beta,\gamma)\in g)\wedge((\beta,\delta)\in g))\Rightarrow(\gamma=\delta)$"

1.3: Aus A1 gleich "g Relation" und
aus A2 gleich "$\forall\beta,\gamma,\delta:(((\beta,\gamma)\in g)\wedge((\beta,\delta)\in g))\Rightarrow(\gamma=\delta)$"
folgt via **18-18(Def)**: g Funktion.

<u>Beweis **24-1**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$.

`2:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus →) “ g ist $E\cap$Verschiebung von f ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: g Funktion.

`3:` Aus `2` “ g Funktion ” und
aus `Thema1` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$ ”
folgt via **18-22**: $(\alpha, g(\alpha)) \in g$.

`4:` Aus →) “ g ist $E\cap$Verschiebung von f ” und
aus `3` “ $(\alpha, g(\alpha)) \in g$ ”
folgt via **16-4**: $(E \cap \alpha, g(\alpha)) \in f$.

`5:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus `4` “ $(E \cap \alpha, g(\alpha)) \in f$ ”
folgt via **18-20**: $g(\alpha) = f(E \cap \alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(E \cap \alpha))$.

□

Funktion: Urbild.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 21/04/11**

25-1. Falls $f : D \to B$, dann ist D das Urbild von B unter f:

25-1(Satz)

Aus "$f : D \to B$" *folgt* "$f^{-1}[B] = D$".

Beweis **25-1** VS gleich $f : D \to B$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

2: Aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **2-10**: $B \cap \mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, f$.

3: $\mathsf{dom}\, f \stackrel{\mathbf{11-19}}{=} f^{-1}[\mathsf{ran}\, f] \stackrel{2}{=} f^{-1}[B \cap \mathsf{ran}\, f] \stackrel{\mathbf{11-19}}{=} f^{-1}[B]$.

4: Aus 3 "$\mathsf{dom}\, f = \ldots = f^{-1}[B]$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
folgt: $f^{-1}[B] = D$.

□

25-2. Wenn f eine Funktion ist, so ist f^{-1} injektiv und konsequenter Weise vertauscht die Erstellung des Urbildes unter f mit den vier klassischen binären KlassenOperationen $\cup, \cap, \setminus, \Delta$:

25-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

Dann folgt:

a) $f^{-1}[E \cup e] = (f^{-1}[E]) \cup (f^{-1}[e])$.

b) $f^{-1}[E \cap e] = (f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e])$.

c) $f^{-1}[E \setminus e] = (f^{-1}[E]) \setminus (f^{-1}[e])$.

d) $f^{-1}[E \Delta e] = (f^{-1}[E]) \Delta (f^{-1}[e])$.

Beweis **25-2**

1: Aus $\rightarrow$)“ f Funktion ”
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

2.a): Via **9-8** gilt: $f^{-1}[E \cup e] = (f^{-1}[E]) \cup (f^{-1}[e])$.

2.b): Aus 1“ f^{-1} injektiv ”
folgt via **9-8**: $f^{-1}[E \cap e] = (f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e])$.

2.c): Aus 1“ f^{-1} injektiv ”
folgt via **9-11**: $f^{-1}[E \setminus e] = (f^{-1}[E]) \setminus (f^{-1}[e])$.

2.d): Aus 1“ f^{-1} injektiv ”
folgt via **9-11**: $f^{-1}[E \Delta e] = (f^{-1}[E]) \Delta (f^{-1}[e])$.

□

25-3. Wenn f eine Funktion ist und wenn für alle $\alpha \in \mathfrak{E}$, $0 \neq \mathfrak{E}$, das Urbild von α unter f eine Menge ist, dann ist das Urbild von $\bigcap \mathfrak{E}$ unter f gleich dem Durchschnitt der Klasse der Urbilder der Elemente von $\mathfrak{E}$ unter f:

25-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq \mathfrak{E}$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (f^{-1}[\alpha]$ *Menge*$)$.

Dann folgt "$f^{-1}[\bigcap \mathfrak{E}] = \bigcap\{f^{-1}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$".

8-22(Def) $\{f^{-1}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

Beweis **25-3**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

2: Aus 1 "f^{-1} injektiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq \mathfrak{E}$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (f^{-1}[\alpha]$ Menge$)$"
folgt via **8-28**: $f^{-1}[\bigcap \mathfrak{E}] = \bigcap\{f^{-1}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

□

FunktionsAxiom.

Ersterstellung: 21/02/07 **Letzte Änderung: 21/04/11**

FunktionsAxiom. Das Bild einer Menge unter einer Funktion ist eine Menge:

FunktionsAxiom

Aus "f Funktion" und "E Menge" folgt "$f[E]$ Menge".

26-1. Mit Hilfe des **FunktionsAxioms** werden zunächst einige kanonisch erscheinende Aussagen über injektive Klassen - deren inverse Relation via **19-1** eine Funktion ist - formuliert:

26-1(Satz)

Aus "x injektiv" und ...

a) *... und "$x[E]$ Menge" folgt "$E \cap \mathsf{dom}\, x$ Menge".*

b) *... und "$E \cap \mathsf{dom}\, x$ Unmenge" folgt "$x[E]$ Unmenge".*

c) *... und "$\mathsf{dom}\, x$ Unmenge" folgt "$\mathsf{ran}\, x$ Unmenge".*

d) *... und "$\mathsf{ran}\, x$ Menge" folgt "$\mathsf{dom}\, x$ Menge".*

Beweis **26-1** `a)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (x[E] \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "x injektiv..."
folgt via **19-1**: x^{-1} Funktion.

`2.1:` Aus `1`"x^{-1} Funktion" und
aus `VS` gleich "... $x[E]$ Menge"
folgt via **FunktionsAxiom**: $x^{-1}[x[E]]$ Menge.

`2.2:` Via **13-1** gilt: $E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]]$.

`3:` Aus `2.2`"$E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]]$" und
aus `2.1`"$x^{-1}[x[E]]$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $E \cap \mathsf{dom}\, x$ Menge.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$((x \text{ injektiv}) \wedge (x[E] \text{ Menge})) \Rightarrow (E \cap \mathsf{dom}\, x \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((x \text{ injektiv}) \wedge (E \cap \mathsf{dom}\, x \text{ Unmenge})) \Rightarrow (x[E] \text{ Unmenge})$.

`c)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (\mathsf{dom}\, x \text{ Unmenge})$.

`1:` Via **2-14** gilt: $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x) = \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "... $\mathsf{dom}\, x$ Unmenge" und
aus `1`"$(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x) = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$ Unmenge.

`3:` Aus `VS` gleich "x injektiv..." und
aus `2`"$(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x[\mathsf{dom}\, x]$ Unmenge.

`4:` Via **8-10** gilt: $x[\mathsf{dom}\, x] = \mathsf{ran}\, x$.

`5:` Aus `3`"$x[\mathsf{dom}\, x]$ Unmenge" und
aus `4`"$x[\mathsf{dom}\, x] = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $\mathsf{ran}\, x$ Unmenge.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$((x \text{ injektiv}) \wedge (\mathsf{dom}\, x \text{ Unmenge})) \Rightarrow (\mathsf{ran}\, x \text{ Unmenge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((x \text{ injektiv}) \wedge (\mathsf{ran}\, x \text{ Menge})) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, x \text{ Menge})$.

□

26-2. Es folgen einfache Folgerungen aus dem **FunktionsAxiom** für Funktionen:

26-2(Satz)

Aus “f Funktion” und ...

a) *... aus “$f^{-1}[E]$ Menge” folgt “$E \cap \mathsf{ran}\, f$ Menge”.*

b) *... aus “$E \cap \mathsf{ran}\, f$ Unmenge” folgt “$f^{-1}[E]$ Unmenge”.*

Beweis **26-2** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1}[E] \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich “f Funktion...” und
aus VS gleich “...$f^{-1}[E]$ Menge”
folgt via **FunktionsAxiom**: $f[f^{-1}[E]]$ Menge.

2: Via **13-1** gilt: $E \cap \mathsf{ran}\, f \subseteq f[f^{-1}[E]]$.

3: Aus 2“$E \cap \mathsf{ran}\, f \subseteq f[f^{-1}[E]]$” und
aus 1“$f[f^{-1}[E]]$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $E \cap \mathsf{ran}\, f$ Menge.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$((f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1}[E] \text{ Menge})) \Rightarrow (E \cap \mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $((f \text{ Funktion}) \wedge (E \cap \mathsf{ran}\, f \text{ Unmenge})) \Rightarrow (f^{-1}[E] \text{ Unmenge})$.

□

26-3. Für Funktionen ergibt sich via **FunktionsAxiom** das folgende Kriterium:

<u>**26-3(Satz)**</u>

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` f *Menge.*

`ii)` $\mathsf{dom}\, f$ *Menge.*

`iii)` *"f Menge" und "$\mathsf{ran}\, f$ Menge"*

`iv)` *"$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und "$\mathsf{ran}\, f$ Menge".*

<u>Beweis **26-3**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f Menge.

Aus `VS` gleich "f Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion..."
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion..." und
aus `VS` gleich "...$\mathsf{dom}\, f$ Menge"
folgt via **FunktionsAxiom**: $f[\mathsf{dom}\, f]$ Menge.

`2:` Via **8-10** gilt: $f[\mathsf{dom}\, f] = \mathsf{ran}\, f$.

`3:` Aus `1.2`"$f[\mathsf{dom}\, f]$ Menge" und
aus 2"$f[\mathsf{dom}\, f] = \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $\mathsf{ran}\, f$ Menge.

`4:` Aus `1.1`"f Relation",
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und
aus 3"$\mathsf{ran}\, f$ Menge"
folgt via **10-5**: f Menge.

`5:` Aus 4 und
aus 3
folgt: $(f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

<u>Beweis</u> **26-3** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "f Menge... "
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

2: Aus 1"$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und
aus VS gleich "... $\mathsf{ran}\, f$ Menge"
folgt: $(\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

1: Aus →) "f Funktion... "
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

2: Aus 1"f Relation",
aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, f$ Menge... " und
aus VS gleich "... $\mathsf{ran}\, f$ Menge"
folgt via **10-5**: f Menge.

□

26-4. Für Funktionen ergibt sich durch Negation via **26-3** das folgende Kriterium:

26-4(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *f Unmenge.*

`ii)` $\mathsf{dom}\, f$ *Unmenge.*

Beweis **26-4**

`1:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion"
folgt via **26-3**: $(f \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(f \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\mathsf{dom}\, f \text{ Unmenge})$.

$\square$

26-5. Nun wird das **FunktionsAxiom** via **26-3** auf $f : D \to B$ angewendet:

26-5(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` f *Menge.*

`ii)` D *Menge.*

`iii)` *"f Menge" und "$\mathsf{ran}\, f$ Menge".*

`iv)` *"D Menge" und "$\mathsf{ran}\, f$ Menge".*

Beweis **26-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: D Menge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich D Menge.

`1:` Aus $\rightarrow$)"$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`2:` Aus `VS` gleich "D Menge" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`3:` Aus `1`"f Funktion... " und
aus `2`"$\mathsf{dom}\, f$ Menge"
folgt via **26-3**: $(f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

Beweis **26-5** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ $\mathtt{VS}$ gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

$\mathtt{1:}$ Aus →) “ $f : D \to B$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

$\mathtt{2:}$ Aus $\mathtt{1}$ “ f Funktion… ” ,
aus $\mathtt{VS}$ gleich “ f Menge… ” und
aus $\mathtt{VS}$ gleich “ … $\mathsf{ran}\, f$ Menge ”
folgt via **26-3**: $(\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

$\mathtt{3:}$ Aus $\mathtt{2}$ “ $(\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$ ” und
aus $\mathtt{1}$ “ … $\mathsf{dom}\, f = D$ ”
folgt: $(D \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\mathtt{VS}$ gleich $(D \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \text{ Menge})$.

$\mathtt{1:}$ Aus →) “ $f : D \to B$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

$\mathtt{2:}$ Aus $\mathtt{1}$ “ … $\mathsf{dom}\, f = D$ ” und
aus $\mathtt{VS}$ gleich “ D Menge… ”
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

$\mathtt{3:}$ Aus $\mathtt{1}$ “ f Funktion… ” und
aus $\mathtt{2}$ “ $\mathsf{dom}\, f$ Menge ”
folgt via **26-3**: f Menge.

□

26-6. Für $f : D \to B$ ergibt sich durch Negation via **26-5** das folgende Kriterium:

26-6(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow)$ $f : D \to B$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *Unmenge.*

`ii)` D *Unmenge.*

Beweis **26-6**

`1:` Aus $\rightarrow)$ "$f : D \to B$"
folgt via **26-5**: $(f \text{ Menge}) \Leftrightarrow (D \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(f \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (D \text{ Unmenge})$.

$\square$

26-7. Falls $f : D \to B$ bijektiv ist, dann ist f genau dann eine Menge, wenn D eine Menge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn B eine Menge ist:

26-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\to$) $f : D \to B$ *bijektiv.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` f *Menge.*

`ii)` D *Menge.*

`iii)` B *Menge.*

Beweis **26-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f Menge.

`1`: Aus →) “ $f : D \to B$ bijektiv ”
folgt via **22-1(Def)**: $f : D \to B$.

`2`: Aus `1` “ $f : D \to B$ ” und
aus `VS` gleich “ f Menge ”
folgt via **26-5**: D Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich D Menge.

`1`: Aus →) “ $f : D \to B$ bijektiv ”
folgt via **22-1(Def)**: $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

`2`: Aus `1` “ $f : D \to B \ldots$ ” und
aus `VS` gleich “ D Menge ”
folgt via **26-5**: $\mathsf{ran}\, f$ Menge.

`3`: Aus `2` “ $\mathsf{ran}\, f$ Menge ” und
aus `1` “ $\ldots \mathsf{ran}\, f = B$ ”
folgt: B Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich B Menge.

`1`: Aus →) “ $f : D \to B$ bijektiv ”
folgt via **22-6**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (f^{-1} : B \to D \text{ bijektiv})$.

`2`: Aus `1` “ $\ldots f^{-1} : B \to D$ bijektiv ”
folgt via **22-1(Def)**: $(f^{-1} : B \to D) \wedge (\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D)$.

`3`: Aus `2` “ $f^{-1} : B \to D \ldots$ ” und
aus `VS` gleich “ B Menge ”
folgt via **26-5**: $\mathsf{ran}\,(f^{-1})$ Menge.

`4`: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\, f$.

`5`: Aus `3` “ $\mathsf{ran}\,(f^{-1})$ Menge ” und
aus `4` “ $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`6`: Aus `1` “ f Funktion... ” und
aus `5` “ $\mathsf{dom}\, f$ Menge ”
folgt via **26-3**: f Menge.

□

26-8. Falls $f : D \to B$ bijektiv ist, dann ist f genau dann eine Unmenge, wenn D eine Unmenge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn B eine Unmenge ist:

26-8(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *$f : D \to B$ bijektiv.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *f Unmenge.*

`ii)` *D Unmenge.*

`iii)` *B Unmenge.*

Beweis **26-8**

`1:` Aus $\rightarrow$) "$f : D \to B$ bijektiv"
folgt via **26-7**: $(f \text{ Menge}) \Leftrightarrow (D \text{ Menge}) \Leftrightarrow (B \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(f \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (D \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (B \text{ Unmenge})$.

□

SingeltonKlasse. E_{sngltn}.
SingeltonUniversum. $\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.
SingeltonFunktion. $\{.\}_E$.
Universelle SingeltonFunktion. $\{.\}$.
E ist genau dann eine (Un-)Menge, wenn $\mathcal{P}(E)$ eine (Un-)Menge ist.

Ersterstellung: 23/02/07 **Letzte Änderung: 21/04/11**

27-1. Die **SingeltonKlasse** E_{sngltn} besteht genau aus den Singeltons von Elementen von E. Das **SingeltonUniversum** besteht genau aus den Singeltons *aller* Mengen:

27-1(Definition)

1) E_{sngltn}

$$= 27.0(E) = \{\{\lambda\} : \lambda \in E\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **SingeltonKlasse** E" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = E_{\text{sngltn}}.$$

3) "$\mathfrak{C}$ **SingeltonUniversum**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

27-2. E_{sngltn} ist die SingeltonKlasse von E. $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ ist das SingeltonUniversum. $\mathfrak{C}$ ist genau dann das SingeltonUniversum, wenn $\mathfrak{C}$ die SingeltonKlasse des Universums ist:

27-2(Satz)

a) E_{sngltn} *SingeltonKlasse* E.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonKlasse* E" *und* "$\mathfrak{D}$ *SingeltonKlasse* E" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ *SingeltonUniversum.*

d) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonUniversum*" *und* "$\mathfrak{D}$ *SingeltonUniversum*" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

e) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonKlasse* $\mathcal{U}$" *folgt* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonUniversum*".

f) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonUniversum*" *folgt* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonKlasse* $\mathcal{U}$".

Beweis **27-2** a)

Aus "$E_{\text{sngltn}} = E_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-1(Def)**: E_{sngltn} SingeltonKlasse E.

b) VS gleich $(\mathfrak{C}$ SingeltonKlasse $E) \wedge (\mathfrak{D}$ SingeltonKlasse $E)$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ SingeltonKlasse $E \ldots$"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{C} = E_{\text{sngltn}}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ SingeltonKlasse E"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{D} = E_{\text{sngltn}}$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = E_{\text{sngltn}}$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = E_{\text{sngltn}}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

c)

Aus "$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ SingeltonUniversum.

<u>Beweis</u> **27-2** `d)` `VS` gleich $(\mathfrak{C}$ SingeltonUniversum $) \wedge (\mathfrak{D}$ SingeltonUniversum $)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ SingeltonUniversum... "
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... $\mathfrak{D}$ SingeltonUniversum"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`e)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ SingeltonKlasse $\mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ SingeltonKlasse $\mathcal{U}$"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1`"$\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{C}$ SingeltonUniversum.

`f)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ SingeltonUniversum.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ SingeltonUniversum"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1`"$\mathfrak{C} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-1(Def)**: $\mathfrak{C}$ SingeltonKlasse $\mathcal{U}$.

□

27-3. Nun wird das "Element-Sein" in der SingeltonKlasse E untersucht:

27-3(Satz)

a) *Aus* "$w \in E_{\text{sngltn}}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$".

b) *Aus* "$\{p\} \in E_{\text{sngltn}}$" *folgt* "$p \in E$".

c) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$\{p\} \in E_{\text{sngltn}}$".

Beweis **27-3** a) VS gleich $w \in E_{\text{sngltn}}$.

1: Aus VS gleich "$w \in E_{\text{sngltn}}$" und
aus "$E_{\text{sngltn}} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\}$.

2: Aus 1 "$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = \{\Omega\})$.

3: Aus 2
folgt: $\exists \Omega : (w = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$.

b) VS gleich $\{p\} \in E_{\text{sngltn}}$.

1: Aus VS gleich "$\{p\} \in E_{\text{sngltn}}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\exists \Omega : (\{p\} = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$.

2.1: Aus 1
folgt: $\{\Omega\} = \{p\}$.

2.2: Aus 1 "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

3: Aus 2.2 "Ω Menge" und
aus 2.1 "$\{\Omega\} = \{p\}$"
folgt via **SingeltonIdentitätsSatz**: $\Omega = p$.

4: Aus 3 "$\Omega = p$" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in E$"
folgt: $p \in E$.

Beweis **27-3** `c)` `VS` gleich $p \in E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

`2:` Aus `1`"$\exists p : p \in E$" und
aus "$\{p\} = \{p\}$" folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge (\{p\} = \{p\})$.

`3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`4:` Aus `2`"$\exists p : (p \in E) \wedge (\{p\} = \{p\})$" und
aus `3`"$\{p\}$ Menge"
folgt: $\{p\} \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\}$.

`5:` Aus `4`"$\{p\} \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \{\Omega\}))\} = E_{\text{sngltn}}$"
folgt: $\{p\} \in E_{\text{sngltn}}$.

$\square$

27-4. Die leere Menge ist *kein Element* von E_{sngltn} und E_{sngltn} ist eine TeilKlasse $\mathcal{P}(E)$. E ist *genau dann* eine TeilKlasse e, wenn $E_{\mathrm{sngltn}} \subseteq e_{\mathrm{sngltn}}$:

27-4(Satz)

a) $0 \notin E_{\mathrm{sngltn}}$.

b) $E_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(E)$.

c) *Aus "$E \subseteq e$" folgt "$E_{\mathrm{sngltn}} \subseteq e_{\mathrm{sngltn}}$".*

d) *Aus "$E_{\mathrm{sngltn}} \subseteq e_{\mathrm{sngltn}}$" folgt "$E \subseteq e$".*

Beweis **27-4** a)

1: Es gilt: $(0 \in E_{\mathrm{sngltn}}) \vee (0 \notin E_{\mathrm{sngltn}})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \in E_{\mathrm{sngltn}}$.

2: Aus 1.1.Fall "$0 \in E_{\mathrm{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (0 = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

4: Aus 3 "Ω Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{\Omega\}$.

5: Es gilt 4 "$0 \neq \{\Omega\}$".
Es gilt 2 "$\ldots 0 = \{\Omega\} \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \notin E_{\mathrm{sngltn}}$.

`1.2.Fall` $0 \notin E_{\mathrm{sngltn}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \notin E_{\mathrm{sngltn}}$.

<u>Beweis **27-4**</u> `b)`

`Thema1` $\alpha \in E_{\text{sngltn}}$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in E_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \in \mathcal{P}(E)$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$" und
aus 3"$\{\Omega\} \in \mathcal{P}(E)$"
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}(E)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(E)$.

`c)` `VS` gleich $E \subseteq e$.

`Thema1` $\alpha \in E_{\text{sngltn}}$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in E_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e$.

4: Aus 3"$\Omega \in e$"
folgt via **27-3**: $\{\Omega\} \in e_{\text{sngltn}}$.

5: Aus 2"$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$" und
aus 4"$\{\Omega\} \in e_{\text{sngltn}}$"
folgt: $\alpha \in e_{\text{sngltn}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in e_{\text{sngltn}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E_{\text{sngltn}} \subseteq e_{\text{sngltn}}$.

Beweis **27-4** `d)` `VS` gleich $E_{\text{sngltn}} \subseteq e_{\text{sngltn}}$.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in E$"
folgt via **27-3**: $\{\alpha\} \in E_{\text{sngltn}}$.

`3:` Aus `2` "$\{\alpha\} \in E_{\text{sngltn}}$" und
aus `VS` gleich "$E_{\text{sngltn}} \subseteq e_{\text{sngltn}}$"
folgt via **0-4**: $\{\alpha\} \in e_{\text{sngltn}}$.

`4:` Aus `3` "$\{\alpha\} \in e_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\alpha \in e$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in e)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq e$.

□

27-5. Da 0_{sngltn} genau aus den Singeltons der Elemente von 0 besteht, ist die Aussage "$0_{\text{sngltn}} = 0$" nicht völlig überraschend:

27-5(Satz)

$$0_{\text{sngltn}} = 0.$$

Beweis **27-5**

`Thema1` $\alpha \in 0_{\text{sngltn}}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in 0_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in 0)$.

3: Es gilt 2"$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0_{\text{sngltn}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \notin 0_{\text{sngltn}})$.

Konsequenz via **0-19**: $0_{\text{sngltn}} = 0$.

□

27-6. Nun wird das "Element-Sein" im SingeltonUniversum untersucht:

27-6(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \{\Omega\}) \wedge (\Omega$ *Menge*$)$".

b) *Aus* "$\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$" *folgt* "$p$ *Menge*".

c) *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$".

Beweis **27-6** a) VS gleich $w \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

1: Aus VS gleich "$w \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (w = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U})$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

3: Aus 1"$\exists \Omega : \ldots$",
aus 1"$\ldots w = \{\Omega\} \ldots$" und
aus 2"Ω Menge"
folgt: $\exists \Omega : (w = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

b) VS gleich $\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

1: Aus VS gleich "$\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $p \in \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

c) VS gleich p Menge.

1: Aus VS gleich "p Menge"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **27-3**: $\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

□

27-7. Der folgenden Satz ist bis auf `a)` in wesentlichen, wenn auch nicht allen, Zügen eine Spezialisierung von **27-4**. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c)`:

27-7(Satz)

`a)` $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \neq \mathcal{U}$.

`b)` $0 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`c)` $E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

Beweis **27-7** `b)`

Via **27-4** gilt: $0 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`a)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \in \mathcal{U}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1.1`“$0 \in \mathcal{U}$” und
aus `1.2`“$0 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$”
folgt via **0-10**: $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`3:` Aus 2
folgt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \neq \mathcal{U}$.

`c)`

`1:` Via **0-18** gilt: $E \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“$E \subseteq \mathcal{U}$”
folgt via **27-4**: $E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

□

27-8. Mit der **SingeltonFunktion** E wird die für den Beweis des wichtigsten Resultats dieses Essays - dass nämlich E genau dann eine (Un-)Menge ist, wenn $\mathcal{P}(E)$ eine (Un-)Menge ist - entscheidende Funktion - dass es sich in der Tat um eine Funktion handelt zeigt sich in **27-11** - in das LW eingeführt. Die **universelle SingeltonFunktion** ist - natürlich - die SingeltonFunktion $\mathcal{U}$:

27-8(Definition)

1) $\{.\}_E$

$$= \mathtt{27.1}(E) = \{(\lambda, \{\lambda\}) : \lambda \in E\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **SingeltonFunktion** E" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \{.\}_E.$$

3) $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

4) "$\mathfrak{C}$ **universelle SingeltonFunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \{.\}.$$

27-9. Klarer Weise ist $\{.\}_E$ die SingeltonFunktion E und $\{.\}$ ist die universelle SingeltonFunktion. Ebenso überrascht es nicht, dass die SingeltonFunktion $\mathcal{U}$ die universelle SingeltonFunktion ist:

27-9(Satz)

a) $\{.\}_E$ *SingeltonFunktion* E.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonFunktion* E" *und* "$\mathfrak{D}$ *SingeltonFunktion* E" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $\{.\}$ *universelle SingeltonFunktion.*

d) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *universelle SingeltonFunktion*" *und* "$\mathfrak{D}$ *universelle SingeltonFunktion*" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

e) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonFunktion* $\mathcal{U}$" *folgt* "$\mathfrak{C}$ *universelle SingeltonFunktion*".

f) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *universelle SingeltonFunktion*" *folgt* "$\mathfrak{C}$ *SingeltonFunktion von* $\mathcal{U}$".

Beweis **27-9** a)

Aus "$\{.\}_E = \{.\}_E$"
folgt via **27-8(Def)**: $\{.\}_E$ SingeltonFunktion E.

b) VS gleich $(\mathfrak{C}$ SingeltonFunktion $E) \wedge (\mathfrak{D}$ SingeltonFunktion $E)$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ SingeltonFunktion $E \ldots$"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{C} = \{.\}_E$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ SingeltonFunktion E"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{D} = \{.\}_E$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = \{.\}_E$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = \{.\}_E$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

c)

Aus "$\{.\} = \{.\}$"
folgt via **27-8(Def)**: $\{.\}$ universelle SingeltonFunktion.

<u>Beweis</u> **27-9** `d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ universelle SingeltonFunktion)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ universelle SingeltonFunktion).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ universelle SingeltonFunktion…"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{C} = \{.\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ universelle SingeltonFunktion"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{D} = \{.\}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \{.\}$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \{.\}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`e)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ SingeltonFunktion $\mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ SingeltonFunktion von $\mathcal{U}$"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{C} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`2:` Via **27-8(Def)** gilt: $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\mathfrak{C} = \{.\}$.

`4:` Aus `3`"$\mathfrak{C} = \{.\}$"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{C}$ universelle SingeltonFunktion.

`f)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ universelle SingeltonFunktion.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ universelle SingeltonFunktion"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{C} = \{.\}$.

`2:` Via **27-8** gilt: $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\mathfrak{C} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`4:` Aus `3`"$\mathfrak{C} = \{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt via **27-8(Def)**: $\mathfrak{C}$ SingeltonFunktion $\mathcal{U}$.

$\square$

27-10. Es folgt eine Liste, die sich mit dem "Element-Sein" in der Singelton-Funktion E befasst:

27-10(Satz)

a) *Aus* "$w \in \{.\}_E$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = (\Omega, \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E))$".

b) *Aus* "$(p, q) \in \{.\}_E$" *folgt* "$p \in E$" *und* "$q = \{p\}$".

c) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$(p, \{p\}) \in \{.\}_E$".

Beweis **27-10** a) VS gleich $w \in \{.\}_E$.

1: Aus VS gleich "$w \in \{.\}_E$" und
aus "$\{.\}_E = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\}$.

2: Aus 1"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (\Omega, \{\Omega\}))$.

b) VS gleich $(p, q) \in \{.\}_E$.

1: Aus VS gleich "$(p, q) \in \{.\}_E$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\exists \Omega : ((p, q) = (\Omega, \{\Omega\})) \wedge (\Omega \in E)$.

2.1: Aus 1"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

2.2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

3: Aus 1"$\ldots (p, q) = (\Omega, \{\Omega\}) \ldots$",
aus 2.1"Ω Menge" und
aus 2.2"$\{\Omega\}$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \{\Omega\})$.

4.1: Aus 3"$p = \Omega \ldots$" und
aus 1"$\Omega \in E$"
folgt: $p \in E$.

4.2: Aus 3"$\ldots q = \{\Omega\}$" und
aus 3"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $q = \{p\}$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $(p \in E) \wedge (q = \{p\})$.

<u>Beweis **27-10**</u> `c)` `VS` gleich $p \in E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots p \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`3:` Aus `2.1`"p Menge" und
aus `2.2`"$\{p\}$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \{p\})$ Menge.

`4:` Aus `1`"$\exists p : p \in E$" und
aus "$(p, \{p\}) = (p, \{p\})$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((p, \{p\}) = (p, \{p\}))$.

`5:` Aus `4`"$\exists p : (p \in E) \wedge ((p, \{p\}) = (p, \{p\}))$" und
aus `3`"$(p, \{p\})$ Menge"
folgt: $(p, \{p\}) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\}$.

`6:` Aus `5`"$(p, \{p\}) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \{\Omega\})))\} = \{.\}_E$"
folgt: $(p, \{p\}) \in \{.\}_E$.

$\square$

27-11. Die SingeltonFunktion E ist eine Bijektion, genauer, $\{.\}_E : E \to E_{\text{sngltn}}$ ist bijektiv und für alle $x \in E$ gilt - natürlich - $\{.\}_E(x) = \{x\}$. Interessanter Weise folgt umgekehrt aus "$\{.\}_E(x) = \{x\}$" die Aussage "$x \in E$" :

27-11(Satz)

a) $\{.\}_E$ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) = E$.

c) $\mathsf{ran}\,(\{.\}_E) = E_{\text{sngltn}}$.

d) $\{.\}_E : E \to E_{\text{sngltn}}$ *bijektiv.*

e) *Aus* "$x \in E$" *folgt* "$\{.\}_E(x) = \{x\}$".

f) *Aus* "$\{.\}_E(x) = \{x\}$" *folgt* "$x \in E$".

Beweis **27-11** a)

`Thema1.1` $\alpha \in \{.\}_E$.

1: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{.\}_E$"
folgt via **27-10**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \{\Omega\})) \wedge (\Omega \in E)$.

2: Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = \{\Omega\}$.

3: Aus 2 "$\ldots \Psi = \{\Omega\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, \{\Omega\})$.

4: Aus 1 "$\ldots \alpha = (\Omega, \{\Omega\}) \ldots$" und
aus 3 "$(\Omega, \Psi) = (\Omega, \{\Omega\})$"
folgt: $\alpha = (\Omega, \Psi)$.

5: Aus 1 "$\exists \Omega \ldots$",
aus 2 "$\exists \Psi \ldots$" und
aus 4 "$\alpha = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{.\}_E) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: `A1` | "$\{.\}_E$ Relation"

...

Beweis **27-11** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $((\alpha,\beta) \in \{.\}_E) \wedge ((\alpha,\gamma) \in \{.\}_E)$.

2.1: Aus Thema1.2"$(\alpha,\beta) \in \{.\}_E$"
folgt via **27-10**: $\beta = \{\alpha\}$.

2.2: Aus Thema1.2"$(\alpha,\gamma) \in \{.\}_E$"
folgt via **27-10**: $\gamma = \{\alpha\}$.

3: Aus 2.1"$\beta = \{\alpha\}$" und
aus 2.2"$\gamma = \{\alpha\}$"
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\forall\alpha,\beta,\gamma : (((\alpha,\beta) \in \{.\}_E) \wedge ((\alpha,\gamma) \in \{.\}_E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{”}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\{.\}_E$ Relation" und
aus A2 gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma : (((\alpha,\beta) \in \{.\}_E) \wedge ((\alpha,\gamma) \in \{.\}_E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\{.\}_E$ Funktion.

b)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}_E)$.

2: Aus Thema1.1"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}_E)$"
folgt via **7-2**: $\exists\Omega : (\alpha,\Omega) \in \{.\}_E$.

3: Aus 2"$\ldots (\alpha,\Omega) \in \{.\}_E$"
folgt via **27-10**: $\alpha \in E$.

Ergo Thema1.1: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}_E)) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) \subseteq E\text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **27-11** `b)` ...

> `Thema1.2` $\alpha \in E.$
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E$"
> folgt via **27-10**: $(\alpha, \{\alpha\}) \in \{.\}_E.$
>
> `3:` Aus `2`"$(\alpha, \{\alpha\}) \in \{.\}_E$"
> folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}_E).$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}_E)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(\{.\}_E)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) \subseteq E$" und
aus `A2` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(\{.\}_E)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) = E.$

`c)`

> `Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E).$
>
> `2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E)$"
> folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \{.\}_E.$
>
> `3:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in \{.\}_E$"
> folgt via **27-10**: $(\Omega \in E) \wedge (\alpha = \{\Omega\}).$
>
> `4:` Aus `3`"$\Omega \in E \ldots$"
> folgt via **27-3**: $\{\Omega\} \in E_{\mathrm{sngltn}}.$
>
> `5:` Aus `3`"$\ldots \alpha = \{\Omega\}$" und
> aus `4`"$\{\Omega\} \in E_{\mathrm{sngltn}}$"
> folgt: $\alpha \in E_{\mathrm{sngltn}}.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E)) \Rightarrow (\alpha \in E_{\mathrm{sngltn}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{ran}\,(\{.\}_E) \subseteq E_{\mathrm{sngltn}}$"

...

Beweis **27-11** `c)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in E_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in E_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in E)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **27-10**: $(\Omega, \{\Omega\}) \in \{.\}_E$.

`4:` Aus `3` "$(\Omega, \{\Omega\}) \in \{.\}_E$"
folgt via **7-5**: $\{\Omega\} \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E)$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$" und
aus `4` "$\{\Omega\} \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E)$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathsf{ran}\,(\{.\}_E) \text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\{.\}_E) \subseteq E_{\text{sngltn}}$" und
aus `A2` gleich "$E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathsf{ran}\,(\{.\}_E)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\{.\}_E) = E_{\text{sngltn}}$.

Beweis **27-11** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $((\alpha,\beta)\in\{.\}_E)\wedge((\gamma,\beta)\in\{.\}_E)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha,\beta)\in\{.\}_E\ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: (α,β) Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha,\beta)\in\{.\}_E\ldots$”
folgt via **27-10**: $\beta=\{\alpha\}$.

`2.3:` Aus `Thema1.1`“$\ldots(\gamma,\beta)\in\{.\}_E$”
folgt via **27-10**: $\beta=\{\gamma\}$.

`3.1:` Aus `2.1`“(α,β) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: α Menge.

`3.2:` Aus `2.2`“$\beta=\{\alpha\}$” und
aus `2.3`“$\beta=\{\gamma\}$”
folgt: $\{\alpha\}=\{\gamma\}$.

`4:` Aus `3.1`“α Menge” und
aus `3.2`“$\{\alpha\}=\{\gamma\}$”
folgt via **SingeltonIdentitätsSatz**: $\alpha=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\{.\}_E)\wedge((\gamma,\beta)\in\{.\}_E))\Rightarrow(\alpha=\beta)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: `A1` | “$\{.\}_E$ injektiv”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{.\}_E$ Funktion.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E)=E$.

`1.4:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\{.\}_E)=E_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1.2`“$\{.\}_E$ Funktion”,
aus `1.3`“$\mathsf{dom}\,(\{.\}_E)=E$” und
aus `1.4`“$\mathsf{ran}\,(\{.\}_E)=E_{\text{sngltn}}$”
folgt via **21-2**: $\{.\}_E:E\to E_{\text{sngltn}}$.

`3:` Aus `2`“$\{.\}_E:E\to E_{\text{sngltn}}$”,
aus `1.4`“$\mathsf{ran}\,(\{.\}_E)=E_{\text{sngltn}}$” und
aus `A1` gleich “$\{.\}_E$ injektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $\{.\}_E:E\to E_{\text{sngltn}}$ bijektiv.

Beweis **27-11** `e)` `VS` gleich $x \in E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in E$"
folgt via **27-10**: $(x, \{x\}) \in \{.\}_E$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{.\}_E$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\{.\}_E$ Funktion" und
aus `1`"$(x, \{x\}) \in \{.\}_E$"
folgt via **18-20**: $\{x\} = \{.\}_E(x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\{.\}_E(x) = \{x\}$.

`f)` `VS` gleich $\{.\}_E(x) = \{x\}$.

`1:` Es gilt: $(x \notin E) \vee (x \in E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin E$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}(\{.\}_E) = E$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$x \notin E$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}(\{.\}_E) = E$"
folgt: $x \notin \mathsf{dom}(\{.\}_E)$.

`4:` Aus `3`"$x \notin \mathsf{dom}(\{.\}_E)$"
folgt via **17-4**: $\{.\}_E(x) = \mathcal{U}$.

`5:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{x\}$ Menge.

`6:` Aus `5`"$\{x\}$ Menge"
folgt via **0-17**: $\{x\} \neq \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6`"$\{x\} \neq \mathcal{U}$" und
aus `4`"$\{.\}_E(x) = \mathcal{U}$"
folgt: $\{x\} \neq \{.\}_E(x)$.

`8:` Es gilt `7`"$\{.\}_E(x) \neq \{x\}$".
Es gilt `VS` gleich "$\{.\}_E(x) = \{x\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in E$.

`1.2.Fall` $x \in E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in E$.

□

27-12. Da $\{.\}_E : E \to E_{\text{sngltn}}$ via **27-11** bijektiv ist, ist es via **26-7** nicht verwunderlich, dass E genau dann eine Menge ist, wenn E_{sngltn} eine Menge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\{.\}_E$ eine Menge ist:

27-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` E *Menge.*

`ii)` E_{sngltn} *Menge.*

`iii)` $\{.\}_E$ *Menge.*

Beweis **27-12**

`1:` Via **27-11** gilt: $\{.\}_E : E \to E_{\text{sngltn}}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` "$\{.\}_E : E \to E_{\text{sngltn}}$ bijektiv"
folgt via **26-7**: $(\{.\}_E \text{ Menge}) \Leftrightarrow (E \text{ Menge}) \Leftrightarrow (E_{\text{sngltn}} \text{ Menge})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(E \text{ Menge}) \Leftrightarrow (E_{\text{sngltn}} \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\{.\}_E \text{ Menge})$.

$\square$

27-13. Da $\{.\}_E : E \to E_{\mathrm{sngltn}}$ via **27-11** bijektiv ist, ist es via **26-8** nicht verwunderlich, dass E genau dann eine Unmenge ist, wenn E_{sngltn} eine Unmenge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\{.\}_E$ eine Unmenge ist:

27-13(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` E *Unmenge.*

`ii)` E_{sngltn} *Unmenge.*

`iii)` $\{.\}_E$ *Unmenge.*

Beweis **27-13**

`1:` Via **27-11** gilt: $\{.\}_E : E \to E_{\mathrm{sngltn}}$ bijektiv.

`2:` Aus `1`“$\{.\}_E : E \to E_{\mathrm{sngltn}}$ bijektiv”
folgt via **26-8**: $(\{.\}_E \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (E \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (E_{\mathrm{sngltn}} \text{ Unmenge})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(E \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (E_{\mathrm{sngltn}} \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\{.\}_E \text{ Unmenge})$.

□

27-14. Der folgenden Satz ist die Spezialisierung von **27-11** auf $x = \mathcal{U}$ unter Berücksichtigung von $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$ und dass eine Klasse genau dann Element von $\mathcal{U}$ ist, wenn diese Klasse eine Menge ist. Gemäß `d)` gilt: $\{.\} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ bijektiv. Das heisst, dass es genau so viele Mengen wie einelementige Mengen gibt. Das ist bemerkenswert:

27-14(Satz)

`a)` $\{.\}$ *Funktion.*

`b)` $\mathsf{dom}\,(\{.\}) = \mathcal{U}$.

`c)` $\mathsf{ran}\,(\{.\}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`d)` $\{.\} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ *bijektiv.*

`e)` *Aus "x Menge" folgt "$\{.\}(x) = \{x\}$".*

`f)` *Aus "$\{.\}(x) = \{x\}$" folgt "x Menge".*

Beweis **27-14** `abcd)`

`1.1:` Via **27-8(Def)** gilt: $\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$.

`1.2:` Via **27-11** gilt: $\{.\}_{\mathcal{U}}$ Funktion.

`1.3:` Via **27-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$.

`1.4:` Via **27-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`1.5:` Via **27-11** gilt: $\{.\}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ bijektiv.

`2.a):` Aus `1.2`"$\{.\}_{\mathcal{U}}$ Funktion" und
aus `1.1`"$\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$"
folgt: $\{.\}$ Funktion.

`2.b):` Aus `1.3`"$\mathsf{dom}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$" und
aus `1.1`"$\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}) = \mathcal{U}$.

`2.c):` Aus `1.4`"$\mathsf{ran}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$" und
aus `1.1`"$\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\{.\}) = \mathcal{U}$.

`2.d):` Aus `1.5`"$\{.\}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ bijektiv" und
aus `1.1`"$\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$"
folgt: $\{.\} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ bijektiv.

<u>Beweis **27-14**</u> `e)` `VS` gleich x Menge.

`1.1:` Via **27-8(Def)** gilt: $\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **0-19**: $x \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \mathcal{U}$"
folgt via **27-11**: $\{.\}_{\mathcal{U}}(x) = \{x\}$.

`3:` Aus `2`"$\{.\}_{\mathcal{U}}(x) = \{x\}$" und
aus `1.1`"$\{.\}_{\mathcal{U}} = \{.\}$"
folgt: $\{.\}(x) = \{x\}$.

`f)` `VS` gleich $\{.\}(x) = \{x\}$.

`1:` $\{.\}_{\mathcal{U}}(x) \overset{\textbf{27-8(Def)}}{=} \{.\}(x) \overset{\texttt{VS}}{=} \{x\}$.

`2:` Aus `1`"$\{.\}_{\mathcal{U}}(x) = \ldots = \{x\}$"
folgt via **27-11**: $x \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

□

27-15. Da $\mathcal{U}$ eine Unmenge ist, folgt aus **27-13** via $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$, dass $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ und $\{.\}$ Unmengen sind:

27-15(Satz)

a) $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ *Unmenge.*

b) $\{.\}$ *Unmenge.*

Beweis **27-15**

1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2.a): Aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **27-13**: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge.

2.1: Aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **27-13**: $\{.\}_{\mathcal{U}}$ Unmenge.

3: Via **27-8(Def)** gilt: $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

4.b): Aus 3"$\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$" und
aus 2.1"$\{.\}_{\mathcal{U}}$ Unmenge"
folgt: $\{.\}$ Unmenge.

□

27-16. Aus "$E \subseteq e$" folgt via `a)` und unter Einsatz von **18-50**, dass $\{.\}_E$ die Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E ist. Aus "$E = z \cap e$" folgt via `b)` und unter Einsatz von `a)` und **15-3**, dass $\{.\}_E$ die Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z ist. Interessanter Weise gelten für `a)` und `b)` auch die Umkehrungen: Falls $\{.\}_E$ die Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z ist, dann gilt $E = z \cap e$, siehe `c)`. Die Umkehrung von `a)` ist ind `d)` formuliert: Falls $\{.\}_E$ die Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E ist, dann ist E eine TeilKlasse von e. Als Konsequenz von `a)` und der allgemein gültigen Inklusion $E \subseteq \mathcal{U}$ ergibt sich `e)`, wonach $\{.\}_E$ die Einschränkung von $\{.\}$ auf E ist:

27-16(Satz)

`a)` *Aus "$E \subseteq e$" folgt "$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E".*

`b)` *Aus "$E = z \cap e$" folgt "$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z"*

`c)` *Aus "$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z" folgt "$E = z \cap e$".*

`d)` *Aus "$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E" folgt "$E \subseteq e$".*

`e)` *$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}$ auf E.*

Beweis **27-16** `a)` `VS` gleich $E \subseteq e$.

`1.1:` Via **27-11** gilt: $\{.\}_e$ Funktion.

`1.2:` Via **27-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) = E$.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in \{.\}_E$.
`2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \{.\}_E$” folgt via **27-10**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \{\Omega\})) \wedge (\Omega \in E)$.
`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E$” und aus `VS` gleich “$E \subseteq e$” folgt via **0-4**: $\Omega \in e$.
`4:` Aus `3`“$\Omega \in e$” folgt via **27-10**: $(\Omega, \{\Omega\}) \in \{.\}_e$.
`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \{\Omega\}) \ldots$” und aus `4`“$(\Omega, \{\Omega\}) \in \{.\}_e$” folgt: $\alpha \in \{.\}_e$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{.\}_E) \Rightarrow (\alpha \in \{.\}_e)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\{.\}_E \subseteq \{.\}_e\text{”}}$

`2:` Aus `1.1`“$\{.\}_e$ Funktion” und
aus `A1` gleich “$\{.\}_E \subseteq \{.\}_e$”
folgt via **18-50**: $\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E)$.

`3:` Aus `2`“$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E)$” und
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) = E$”
folgt: $\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E.

<u>Beweis</u> **27-16** `b)` `VS` gleich $E = z \cap e$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega$: Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z"
folgt via **15-3**: Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf $z \cap \mathsf{dom}\,(\{.\}_e)$.

`3:` Via **27-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}_e) = e$.

`4:` Aus `2`"Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf $z \cap \mathsf{dom}\,(\{.\}_e)$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,(\{.\}) = e$"
folgt: Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf $z \cap e$.

`5:` Aus `4`"Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf $z \cap e$" und
aus `VS` gleich "$E = z \cap e$"
folgt: Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E.

`6:` $E \overset{\mathtt{VS}}{=} z \cap e \overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} e$.

`7:` Aus `6`"$E \ldots \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E.

`8:` Aus `5`"Ω Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E" und
aus `7`"$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E"
folgt via **15-2**: $\Omega = \{.\}_E$.

`9:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z" und
aus `8`"$\Omega = \{.\}_E$"
folgt: $\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z.

`c)` `VS` gleich $\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf z"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\,(\{.\}_E) = z \cap \mathsf{dom}\,(\{.\}_e)$.

`2:` $E \overset{\mathbf{27-11}}{=} \mathsf{dom}\,(\{.\}_E) \overset{1}{=} z \cap \mathsf{dom}\,(\{.\}_e) \overset{\mathbf{27-11}}{=} z \cap e$.

`3:` Aus `2`
folgt: $E = z \cap e$.

<u>Beweis</u> **27-16** `d)` `VS` gleich $\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_e$ auf E"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $E = E \cap e$.

`2:` Aus `1`
folgt: $E \cap e = E$.

`3:` Aus `2`"$E \cap e = E$"
folgt via **2-10**: $E \subseteq e$.

`e)`

`1:` Via **0-18** gilt: $E \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_{\mathcal{U}}$ auf E.

`3:` Via **27-8(Def)** gilt: $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`4:` Aus `2`"$\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}_{\mathcal{U}}$ auf E" und
aus `3`"$\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $\{.\}_E$ Einschränkung von $\{.\}$ auf E.

$\square$

27-17. E ist *genau dann* eine Menge, wenn $\mathcal{P}(E)$ eine Menge ist:

27-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *E Menge.*

`ii)` *$\mathcal{P}(E)$ Menge.*

Beweis **27-17** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich E Menge.

Aus `VS` gleich "E Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(E)$ Menge.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $\mathcal{P}(E)$ Menge.

`1:` Es gilt: $(E \text{ Unmenge}) \vee (E \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` E Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall`"E Unmenge"
folgt via **27-13**: E_{sngltn} Unmenge.

`3:` Via **27-4** gilt: $E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(E)$.

`4:` Aus `3`"$E_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(E)$" und
aus `2`"E_{sngltn} Unmenge"
folgt via **0-7**: $\mathcal{P}(E)$ Unmenge.

`5:` Es gilt `4`"$\mathcal{P}(E)$ Unmenge".
Es gilt `VS` gleich "$\mathcal{P}(E)$ Menge".
Ex falso quodlibet folgt: E Menge.

`1.2.Fall` E Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: E Menge.

□

27-18. E ist *genau dann* eine Unmenge, wenn $\mathcal{P}(E)$ eine Unmenge ist:

27-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *E Unmenge.*

`ii)` *$\mathcal{P}(E)$ Unmenge.*

Beweis **27-18**

`1:` Via **27-17** gilt: $(E \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(E) \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(E \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(E) \text{ Unmenge})$.

□

$\cup$induktiv.
nicht $\cup$induktiv.
EndlichkeitsAxiom.
Universum der endlichen Klassen. $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.
$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$**Induktion**.
Universum der nichtleeren, endlichen Klassen. $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.
$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$**Induktion**.

Ersterstellung: 23/02/07 **Letzte Änderung: 22/04/11**

28-1. Mit der Definition der $\cup$**induktiven Klasse** wird der Weg zu endlichen Klassen geebnet:

28-1(Definition)

1) "ι **ist** $\cup$**induktiv**" genau dann, wenn gilt:

$$0 \in \iota.$$

$$\wedge$$

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota).$$

2) "z **nicht** $\cup$**induktiv**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(z \text{ ist } \cup\text{induktiv}).$$

28-2. Fast trivialer Weise ist $\mathcal{U}$ eine $\cup$induktive Klasse:

28-2(Satz)

$\mathcal{U}$ ist $\cup$induktiv.

Beweis **28-2**

`1.1:` Via **0-18** gilt: | A1 | "$0 \in \mathcal{U}$"

`Thema1.2` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U})$.

`2.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\alpha\}$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`3:` Aus `2.1`"$\{\alpha\}$ Menge" und
aus `2.2`"β Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $\{\alpha\} \cup \beta$ Menge.

`4:` Aus `3`"$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge"
folgt via **0-19**: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.2`: | A2 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{U})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \in \mathcal{U}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{U})$"
folgt via **28-1(Def)**: $\mathcal{U}$ ist $\cup$induktiv.

□

28-3. Die Voraussetzung "$\alpha \in \mathcal{U}$" in der Definition $\cup$induktiver Klassen ist verzichtbar:

28-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) ι *ist* $\cup$*induktiv.*

$\rightarrow$) $x \in \iota$.

Dann folgt "$\{p\} \cup x \in \iota$".

Beweis **28-3**

1: Es gilt: $(p \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Unmenge.

2: Aus `1.1.Fall` "p Unmenge" folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

3: $\{p\} \cup x \overset{3}{=} 0 \cup x \overset{\mathbf{2-17}}{=} x$.

4: Aus 3 "$\{p\} \cup x = \ldots = x$" und aus $\rightarrow$) "$x \in \iota$" folgt: $\{p\} \cup x \in \iota$.

`1.2.Fall` p Menge.

2: Aus `1.2.Fall` "p Menge" folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

3: Aus $\rightarrow$) "ι ist $\cup$induktiv", aus 2 "$p \in \mathcal{U}$" und aus $\rightarrow$) "$x \in \iota$" folgt via **28-1(Def)**: $\{p\} \cup x \in \iota$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{p\} \cup x \in \iota$.

$\square$

EndlichkeitsAxiom. Im **EndlichkeitsAxiom** tritt erstmalig die Aussage "E endlich" auf. Bemerkenswerter Weise wird "E endlich" nicht definiert. Endlich zu sein ist ähnlich wie Menge oder Unmenge zu sein eine mögliche Eigenschaft von Klassen. 0 ist endlich und wenn eine endliche Klasse mit einem Singelton vereinigt wird, resultiert wieder eine endliche Klasse. Darüber hinaus gehend ist jede endliche Klasse Element jeder $\cup$induktiven Klasse:

EndlichkeitsAxiom

a) 0 *endlich.*

b) *Aus* "E *endlich*" *folgt* "$\{p\} \cup E$ *endlich*".

c) *Aus* "E *endlich*" *und* "ι *ist* $\cup$*induktiv*" *folgt* "$E \in \iota$".

28-4. Das **Universum der endlichen Klassen** wird hiermit in die Essays eingeführt und mit dem Parameter-Symbol "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" versehen:

28-4(Definition)

1) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$

$$= 28.0() = \{\omega : \omega \text{ endlich}\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Universum der endlichen Klassen**"
genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}.$$

28-5. $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ ist das Universum der endlichen Klassen:

<u>**28-5(Satz)**</u>

a) $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ *Universum der endlichen Klassen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Universum der endlichen Klassen"*
und "$\mathfrak{D}$ Universum der endlichen Klassen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

<u>Beweis **28-5**</u> a)

Aus "$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-4(Def)**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Universum der endlichen Klassen.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ Universum der endlichen Klassen)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ Universum der endlichen Klassen).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Universum der endlichen Klassen… "
folgt via **28-4(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

1.2: Aus VS gleich "… $\mathfrak{D}$ Universum der endlichen Klassen"
folgt via **28-4(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

2: Aus 1.1"$\mathfrak{C} = \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus 1.2"$\mathfrak{D} = \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

28-6. Da $\mathcal{U}$ $\cup$induktiv ist, ist jede endliche Klasse ein Element von $\mathcal{U}$. Konsequenter Weise ist jede endliche Klasse eine Menge:

28-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *E endlich.*

Dann folgt:

a) $E \in \mathcal{U}$.

b) *E Menge.*

Beweis **28-6**

1: Via **28-2** gilt: $\mathcal{U}$ ist $\cup$induktiv.

2.a): Aus $\rightarrow$)"E endlich" und
aus 1"$\mathcal{U}$ ist $\cup$induktiv"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $E \in \mathcal{U}$.

3.b): Aus 2.a)"$E \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: E Menge.

$\square$

28-7. Da jede endliche Klasse eine Menge ist, gilt $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$ genau dann, wenn E endlich ist:

28-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`ii)` *E endlich.*

Beweis **28-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus "$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \text{ endlich}\}$"
folgt: $E \in \{\omega : \omega \text{ endlich}\}$.

`2:` Aus `1`"$E \in \{\omega : \omega \text{ endlich}\}$"
folgt: E endlich.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich E endlich.

`1:` Aus `VS` gleich "E endlich"
folgt via **28-6**: E Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "E endlich" und
aus `1`"E Menge"
folgt: $E \in \{\omega : \omega \text{ endlich}\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \{\omega : \omega \text{ endlich}\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \text{ endlich}\} = \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

□

28-8. Singeltons und ungeordnete Paare sind endlich. Ob auch *geordnete* Paare endlich sind, bleibt bis auf Weiteres offen:

<u>**28-8(Satz)**</u>

a) $\{p\}$ *endlich.*

b) $\{p, q\}$ *endlich.*

<u>Beweis **28-8**</u> a)

1: Via **EndlichkeitsAxiom** gilt: 0 endlich.

2: Aus 1 "0 endlich"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\{p\} \cup 0$ endlich.

3: Via **2-17** gilt: $\{p\} = \{p\} \cup 0$.

4: Aus 3 "$\{p\} = \{p\} \cup 0$" und
aus 2 "$\{p\} \cup 0$ endlich"
folgt: $\{p\}$ endlich.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\{q\}$ endlich.

2: Aus 1 "$\{q\}$ endlich"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\{p\} \cup \{q\}$ endlich.

3: Via **4-11** gilt: $\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

4: Aus 3 "$\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$" und
aus 2 "$\{p\} \cup \{q\}$ endlich"
folgt: $\{p, q\}$ endlich.

□

28-9. Es werden vier der bislang verfügbaren "Endlichkeits-Aussagen" unter Einbeziehung von $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ reformuliert:

<u>28-9(Satz)</u>

a) $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b) $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

c) $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

d) *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$\{p\} \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$".

e) *Aus* "$E \setminus \{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$".

<u>Beweis **28-9**</u> a)

1: Via **EndlichkeitsAxiom** gilt: 0 endlich.

2: Aus 1 "0 endlich"
folgt via **28-7**: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b)

1: Via **28-8** gilt: $\{p\}$ endlich.

2: Aus 1 "$\{p\}$ endlich"
folgt via **28-7**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

c)

1: Via **28-8** gilt: $\{p, q\}$ endlich.

2: Aus 1 "$\{p, q\}$ endlich"
folgt via **28-7**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

d) VS gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

1: Aus VS gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: E endlich.

2: Aus 1 "E endlich"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\{p\} \cup E$ endlich.

3: Aus 2 "$\{p\} \cup E$ endlich"
folgt via **28-7**: $\{p\} \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

<u>Beweis **28-9**</u> `e)` `VS` gleich $E \setminus \{p\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`1:` Via **5-21** gilt: $E = E \setminus \{p\}$ $\vee$ $E = \{p\} \cup (E \setminus \{p\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = E \setminus \{p\}$.

Aus `1.1.Fall`“$E = E \setminus \{p\}$” und
aus `VS` gleich “$E \setminus \{p\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$”
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`1.2.Fall` $E = \{p\} \cup (E \setminus \{p\})$.

`2:` Aus `VS` gleich “$E \setminus \{p\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\{p\} \cup (E \setminus \{p\}) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`3:` Aus `1.1.Fall`“$E = \{p\} \cup (E \setminus \{p\})$” und
aus `2`“$\{p\} \cup (E \setminus \{p\}) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$”
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

□

28-10. Da jedes Singelton eine endliche Menge ist, ist die Aussage "$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$" nicht überraschend. Als Konsequenz hieraus folgt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ ist eine Unmenge. Schließlich wird bewiesen, dass $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ eine $\cup$induktive Klasse ist:

28-10(Satz)

a) $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b) $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ *Unmenge.*

c) $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ *ist* $\cup$*induktiv.*

Beweis **28-10** a)

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

3: Via **28-9** gilt: $\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$" und
aus 3"$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b)

1.1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

1.2: Via **27-15** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge.

2: Aus 1.1"$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus 1.2"$\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge"
folgt via **0-7**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Unmenge.

Beweis **28-10** `c)`

`1.1:` Via **28-9** gilt: | `A1` | "$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" |

`Thema1.2` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: β endlich.

`3:` Aus 2"β endlich"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\{\alpha\} \cup \beta$ endlich.

`4:` Aus 3"$\{\alpha\} \cup \beta$ endlich"
folgt via **28-7**: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz: | `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$" |

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : (((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$"
folgt via **28-1(Def)**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ ist $\cup$induktiv.

$\square$

28-11. Da $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ gemäß **28-10** eine $\cup$induktive Klasse ist, folgt aus `a)`, dass $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ die *kleinste* $\cup$induktive Klasse ist. Darüber hinausgehend ist gemäß **28-10** $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ eine Unmenge, so dass aus `a)` folgt, dass jede $\cup$induktive Klasse eine Unmenge ist:

28-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) ι *ist* $\cup$*induktiv.*

Dann folgt:

`a)` $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

`b)` ι *Unmenge.*

Beweis **28-11** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: α endlich.

`3:` Aus `2`"α endlich" und
aus `VS` gleich "ι ist $\cup$induktiv" und
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\alpha \in \iota$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \Rightarrow (\alpha \in \iota)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

`b)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"ι ist $\cup$induktiv"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

`1.2:` Via **28-10** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Unmenge.

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$" und
aus `1.2`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Unmenge"
folgt via **0-7**: ι Unmenge.

□

28-12. Mit der hiermit in die Essays eingeführten $\mathcal{P}_{\text{endl}}$**Induktion** wird ein Hilsmittel zur Verfügung gestellt, um Aussagen über *endliche Klassen* zu beweisen. Genau genommen geht es in der $\mathcal{P}_{\text{endl}}$Induktion "nur" um den Nachweis, dass ι eine $\cup$induktive Klasse ist. Indem die beiden eine $\cup$induktive Klasse definierenden Aussagen verifiziert werden, ergibt sich als Folgerung die Aussage $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$, das heisst via **28-12**, dass jede endliche Klasse ein Element von ι ist. Eine wichtige Anwendung der $\mathcal{P}_{\text{endl}}$Induktion liegt in Situationen vor, in denen ι durch einen KlassenTerm definiert ist. Erfüllt ι die Voraussetzungen der $\mathcal{P}_{\text{endl}}$Induktion, so folgt via **28-12**, dass die ι definierenden Eigenschaften auf alle endlichen Klassen zutreffen:

28-12(Satz) ($\mathcal{P}_{\text{endl}}$**Induktion)**

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $0 \in \iota$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt "$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$*".*

<u>Beweis **28-12**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$0 \in \iota$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt via **28-1(Def)**: ι ist $\cup$induktiv.

2: Aus 1 "ι ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-11**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

□

28-13. Falls $0 \in \iota \subseteq j$ und falls für alle $\alpha \in \mathcal{U}$ und $\beta \in j$ die Menge $\{\alpha\} \cup \beta$ ein Element von ι ist, dann sind sowohl ι als auch j $\cup$induktiv, siehe `ab)`. Via **28-11** folgt hieraus `cd)`, wonach $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ eine TeilKlasse von ι und von j ist. Von diesem Standpunkt aus ist der vorliegende Satz eine Variation der $\mathcal{P}_{\text{endl}}$Induktion. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - d)`:

28-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \in \iota$.

$\rightarrow$) $\iota \subseteq j$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in j)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt:

`a)` ι *ist* $\cup$*induktiv.*

`b)` j *ist* $\cup$*induktiv.*

`c)` $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

`d)` $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq j$.

<u>Beweis</u> **28-13** `ac)`

`Thema1.1` $(\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in \iota)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \delta \in \iota$" und
aus →) "$\iota \subseteq j$"
folgt via **0-4**: $\delta \in j$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in \mathcal{U} \ldots$",
aus 2"$\delta \in j$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in j)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt: $\{\gamma\} \cup \delta \in \iota$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in \iota)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \iota)$"

`1.a):` Aus →) "$0 \in \iota$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in \iota)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \iota)$"
folgt via **28-1(Def)**: ι ist $\cup$induktiv.

`2.c):` Aus `1.a)`"ι ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-11**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

Beweis **28-13** `bd)`

`1.1:` Aus →) "$0 \in \iota$" und
aus →) "$\iota \subseteq j$"
folgt via **0-4**: `A1` | "$0 \in j$"

`Thema1.2` $(\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in j)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in \mathcal{U} \ldots$",
aus `Thema1.2`"$\ldots \delta \in j$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in j)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt: $\{\gamma\} \cup \delta \in \iota$.

`3:` Aus 2"$\{\gamma\} \cup \delta \in \iota$" und
aus →) "$\iota \subseteq j$"
folgt via **0-4**: $\{\gamma\} \cup \delta \in j$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in j)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in j)$"

`1.b):` Aus `1.1`"$0 \in j$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in \iota)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \iota)$"
folgt via **28-1(Def)**: ι ist $\cup$induktiv.

`2.d):` Aus `1.b)`"j ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-11**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq j$.

□

28-14. Falls $0 \in \iota$ und falls für alle $\alpha \in \mathcal{U}$ und alle $\beta \in \iota \cup z$ die Aussage "$\{\alpha\} \cup \beta \in \iota$" gilt, dann sind ι und $\iota \cup z$ $\cup$induktiv - siehe `ab)` - und konsequenter Weise gilt $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota$ und $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota \cup z$, siehe `cd)`, so dass sich auch der vorliegende Satz als Variation der $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$Induktion entpuppt:

28-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $0 \in \iota$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota \cup z)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt:

`a)` ι *ist* $\cup$*induktiv.*

`b)` $\iota \cup z$ *ist* $\cup$*induktiv.*

`c)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota$.

`d)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota \cup z$.

Beweis **28-14**

`1:` Via **2-7** gilt: $\iota \subseteq \iota \cup z$.

`2.a):` Aus $\rightarrow)$ "$0 \in \iota$",
aus 2"$\iota \subseteq \iota \cup z$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota \cup z)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt via **28-13**: ι ist $\cup$induktiv.

`2.b):` Aus $\rightarrow)$ "$0 \in \iota$",
aus 2"$\iota \subseteq \iota \cup z$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota \cup z)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt via **28-13**: $\iota \cup z$ ist $\cup$induktiv.

`3.c):` Aus `2.a)` "ι ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-11**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota$.

`3.d):` Aus `2.b)` "$\iota \cup z$ ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-11**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota \cup z$.

□

28-15. Falls $0 \in y \cup z$ und falls für alle $\alpha \in \mathcal{U}$ und für alle $\beta \in y \cup z$ die Klasse $\{\alpha\} \cup \beta$ ein Element von y ist, dann ist $y \cup z$ $\cup$induktiv und - als Variation der $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$Induktion - gilt $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq y \cup z$:

28-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \in y \cup z$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in y \cup z)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in z)$.

Dann folgt:

`a)` $y \cup z$ *ist* $\cup$*induktiv*

`b)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq y \cup z$.

Beweis **28-15**

`Thema1.1` $(\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in y \cup z)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in \mathcal{U} \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \delta \in y \cup z$" und
aus $\rightarrow$)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in y \cup z)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in z)$"
folgt: $\{\gamma\} \cup \delta \in z$.

`3:` Aus 2"$\{\gamma\} \cup \delta \in z$"
folgt via **2-2**: $\{\gamma\} \cup \delta \in y \cup z$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in y \cup z)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in y \cup z)$"

`1.a):` Aus $\rightarrow$)"$0 \in y \cup z$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\delta \in y \cup z)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in y \cup z)$"
folgt via **28-1(Def)**: $y \cup z$ ist $\cup$induktiv.

`2.b):` Aus `1.a)`"$y \cup z$ ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-11**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq y \cup z$.

□

28-16. Es folgt eine aus **28-1(Def)** gewonnene Aussage über Klassen, die keine $\cup$induktiven Klassen sind:

<u>28-16(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *z nicht $\cup$induktiv.*

Dann folgt "$0 \notin z$" oder "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\Psi \in z) \wedge (\{\Omega\} \cup \Psi \notin z)$".

<u>Beweis **28-16**</u>

1: Aus $\rightarrow$) "z nicht $\cup$induktiv"
folgt via **28-1(Def)**: $\neg(z$ ist $\cup$induktiv$)$.

2: Aus 1
folgt via **28-1(Def)**:
$$\neg((0 \in z) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in z) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in z))).$$

3: Aus 2
folgt: $(0 \notin z) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\Psi \in z) \wedge (\{\Omega\} \cup \Psi \notin z))$.

$\square$

28-17. Da 0 Element jeder $\bigcup$induktiven Klasse ist, ist das folgende Resultat nicht überraschend:

28-17(Satz)

Aus "$0 \notin z$" folgt "z nicht $\bigcup$induktiv".

Beweis **28-17** `VS` gleich $0 \notin z$.

`1:` Es gilt: (z ist $\bigcup$induktiv) $\vee$ ($\neg$(z ist $\bigcup$induktiv)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` z ist $\bigcup$induktiv.

`2:` Aus `1.1.Fall`"z ist $\bigcup$induktiv" folgt via **28-1(Def)**: $0 \in z$.

`3:` Es gilt `2`"$0 \in z$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \notin z$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg$(z ist $\bigcup$induktiv).

`1.2.Fall` $\neg$(z ist $\bigcup$induktiv).

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg$(z ist $\bigcup$induktiv).

Konsequenz via **28-1(Def)**: z nicht $\bigcup$induktiv.

$\square$

28-18. Falls x Element der $\cup$induktiven Klasse ι ist, dann gilt via **28-3** die Aussage $\{p\} \cup x \in \iota$. Vor diesem Hintergrund ergibt sich fast von selbst der folgende Satz:

28-18(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $w \in z$.

$\rightarrow\!)$ $\{p\} \cup w \notin z$.

Dann folgt "z nicht $\cup$induktiv".

Beweis **28-18**

1: Es gilt: $(z \text{ ist } \cup\text{induktiv}) \vee (\neg(z \text{ ist } \cup\text{induktiv}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` z ist $\cup$induktiv.

2: Aus `1.1.Fall` "z ist $\cup$induktiv" und aus $\rightarrow\!)$ "$w \in z$" folgt via **28-3**: $\{p\} \cup w \in z$.

3: Es gilt 2"$\{p\} \cup w \in z$". Es gilt $\rightarrow\!)$ "$\{p\} \cup w \notin z$". Ex falso quodlibet folgt: $\neg(z \text{ ist } \cup\text{induktiv})$.

`1.2.Fall` $\neg(z \text{ ist } \cup\text{induktiv})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(z \text{ ist } \cup\text{induktiv})$.

Konsequenz via **28-1(Def)**: z nicht $\cup$induktiv.

$\square$

28-19. Nun wird das **Universum der nichtleeren, endlichen Klassen** in die Essays eingeführt:

28-19(Definition)

1) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$

$$= \mathtt{28.1}() = \{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Universum der nichtleeren, endlichen Klassen**"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}.$$

28-20. $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ ist das Universum der nichtleeren, endlichen Klassen:

28-20(Satz)

a) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ *Universum der nichtleeren, endlichen Klassen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen"*
und "$\mathfrak{D}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **28-20** a)

Aus "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt via **28-19(Def)**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen…"
folgt via **28-19(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

1.2: Aus VS gleich "…$\mathfrak{D}$ Universum der nichtleeren, endlichen Klassen"
folgt via **28-19(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

28-21. E ist genau dann in $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$, wenn $0 \neq E$ und E endlich und dies ist genau dann der Fall, wenn $0 \neq E$ und $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$:

28-21(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.

`ii)` *"$0 \neq E$" und "E endlich"*

`iii)` $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

<u>Beweis</u> **28-21** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} = \{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\}$"
folgt: $E \in \{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\}$.

`2:` Aus `1`"$E \in \{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\}$"
folgt: $(0 \neq E) \wedge (E \text{ endlich})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq E) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **28-7**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `1`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $(0 \neq E) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: E Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: E endlich.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$",
aus `1.2`"E endlich" und
aus `1.1`"E Menge"
folgt: $E \in \{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\}$" und
aus "$\{\omega : (0 \neq \omega) \wedge (\omega \text{ endlich})\} = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt: $E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

$\square$

28-22. Da $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ ist - siehe `a)` - ist $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ eine Unmenge, siehe `b)`. Da 0 kein Element von $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ ist - siehe `d)` - ist $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ nicht $\cup$induktiv, siehe `c)`. Dass $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ gilt - siehe `e)` - , ist via **28-21** klar und wegen $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ aber $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$ gilt $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \neq \mathcal{P}_{\text{endl}}$, siehe `f)`. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - e) - c) - d) - f)`:

28-22(Satz)

`a)` $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`b)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ *Unmenge.*

`c)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ *nicht* $\cup$*induktiv.*

`d)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} = \mathcal{P}_{\text{endl}} \setminus \{0\}$.

`e)` $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$

`f)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \neq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Beweis **28-22** `a)`

`Thema1` $\qquad \alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$”
folgt via **27-6**: $\qquad \exists\Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus 2“$\ldots \Omega$ Menge”
folgt via **1-3**: $\qquad 0 \neq \{\Omega\}$.

`3.2:` Via **28-9** gilt: $\qquad \{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`4:` Aus `3.1`“$0 \neq \{\Omega\}$” und
aus `3.2`“$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$”
folgt via **28-21**: $\qquad \{\Omega\} \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`5:` Aus 2“$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$” und
aus 4“$\{\Omega\} \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$”
folgt: $\qquad \alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

<u>Beweis</u> **28-22** `b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`1.2:` Via **27-15** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge.

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge"
folgt via **0-7**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ Unmenge.

`e)`

`1.1:` Es gilt: $(0 \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}) \vee (0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$0 \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt via **28-21**: $0 \neq 0$.

`3:` Es gilt 2"$0 \neq 0$".
Es gilt "$0 = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`1.1.2.Fall` $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt via **28-21**: α endlich.

`3:` Aus 2"α endlich"
folgt via **28-7**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

<u>Beweis **28-22**</u>

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `1`“$0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$”
folgt via **28-17**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ nicht $\cup$induktiv.

`d)`

`Thema1.1`	$(\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (\alpha \neq 0)$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \alpha \neq 0$”
folgt: $0 \neq \alpha$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq \alpha$” und
aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \ldots$”
folgt via **28-21**: $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (\alpha \neq 0)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3:` Aus `1.2`“$0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$”,
aus `2`“$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (\alpha \neq 0)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$”
folgt via **5-13**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} = \mathcal{P}_{\text{endl}} \setminus \{0\}$.

`f)`

`1.1:` Via **28-9** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `1.1`“$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$” und
aus `1.2`“$0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$”
folgt via **0-10**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \neq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \neq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

□

28-23. Vorbereitend zur $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$Induktion wird nun fest gestellt, dass aus "$\{0\} \cup \iota$ ist $\cup$induktiv" die Aussage "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \iota$" folgt:

28-23(Satz)

Aus "$\{0\} \cup \iota$ ist $\cup$induktiv" folgt "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \iota$".

Beweis **28-23**

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt via **28-21**: $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ endlich})$.

3: Aus 2"$\ldots \alpha$ endlich" und
aus →) "$\{0\} \cup \iota$ ist $\cup$induktiv"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\alpha \in \{0\} \cup \iota$.

4: Aus 3"$\alpha \in \{0\} \cup \iota$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{0\}) \vee (\alpha \in \iota)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\alpha \in \{0\}$.

5: Aus `4.1.Fall`"$\alpha \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = 0$.

6: Es gilt 5"$\alpha = 0$".
Es gilt 2"$0 \neq \alpha \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in \iota$.

`4.2.Fall` $\alpha \in \iota$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \iota$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}) \Rightarrow (\alpha \in \iota)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

□

28-24. Mit der $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$**Induktion** wird ein Verfahren zum Nachweis, dass eine Klasse jede nichtleere, endliche Menge enthält, zur Verfügung gestellt. Der Beweis beruht darauf, dass aus den spezifizierten Voraussetzungen die Aussage "$\{0\} \cup \iota$ ist $\cup$induktiv" folgt:

28-24(Satz) ($\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$**Induktion**)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \iota$".

Beweis **28-24**

`1.1:` Via **1-5** gilt: $0 \in \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` "$0 \in \{0\}$"

folgt via **2-2**: `A1` | "$0 \in \{0\} \cup \iota$"

...

Beweis **28-24** ...

`Thema1.2` $(\delta \in \mathcal{U}) \wedge (\epsilon \in \{0\} \cup \iota)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\epsilon \in \{0\} \cup \iota$"
folgt via **2-2**: $(\delta \in \{0\}) \vee (\delta \in \iota)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\epsilon \in \{0\}$.

`3.1:` Aus `Thema1.2`"$\delta \in \mathcal{U} \ldots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$"
folgt: $\{\delta\} \in \iota$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$\epsilon \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $\epsilon = 0$.

`4:` $\{\delta\} \cup \epsilon \overset{3.2}{=} \{\delta\} \cup 0 \overset{\mathbf{2-17}}{=} \{\delta\}$.

`5:` Aus 4"$\{\delta\} \cup \epsilon = \ldots = \{\delta\}$" und
aus `3.1`"$\{\delta\} \in \iota$"
folgt: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$.

`2.2.Fall` $\epsilon \in \iota$.

Aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$",
aus `Thema1.2`"$\delta \in \mathcal{U} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\epsilon \in \iota$"
folgt: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$.

`Ende Fallunterscheidung`
In beiden Fällen gilt: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \delta, \epsilon : ((\delta \in \mathcal{U}) \wedge (\epsilon \in \{0\} \cup \iota)) \Rightarrow (\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \in \{0\} \cup \iota$" und
aus `A2` gleich "$\forall \delta, \epsilon : ((\delta \in \mathcal{U}) \wedge (\epsilon \in \{0\} \cup \iota)) \Rightarrow (\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota)$"
folgt via **28-15**: `A3` | "$\{0\} \cup \iota$ ist $\cup$induktiv"

`2:` Aus `1.3`"$\{0\} \cup \iota$ ist $\cup$induktiv"
folgt via **28-23**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \iota$.

□

28-25. Als Variation der $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$Induktion wird bewiesen, dass aus "$\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \iota$" und aus "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$" die Aussage "$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota$" folgt:

28-25(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \iota$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt "$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota$".

Beweis **28-25**

`Thema1.1` $\qquad \alpha \in \mathcal{U}$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **27-3**: $\qquad \{\alpha\} \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

3: Aus 2 "$\{\alpha\} \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \iota$"
folgt via **0-4**: $\qquad \{\alpha\} \in \iota$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$"

1.2: Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt via $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$**Induktion**: $\qquad \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \iota$.

$\square$

unendlich.

Ersterstellung: 25/02/07 **Letzte Änderung: 22/04/11**

29-1. In **#28** werden erstmalig endliche Klassen erwähnt. Nun werden **unendliche Klassen** definiert. Nahe liegender Weise x genau dann unendlich, wenn $\neg(x$ endlich) gilt. Genau genommen ist trotz dieser Definition *nicht gesagt*, was eine unendliche Klasse ausmacht. In der Tat ist wie das Paar Menge-Unmenge das Paar endlich-unendlich eine der einander ausschließenden, doch ansonsten bis auf Axiome nicht weiter definierten Begriffe der Essays:

29-1(Definition)

"x **unendlich**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(x \text{ endlich}).$$

29-2. Jede Unmenge ist unendlich. Das Vorhandensein unendlicher *Mengen* beruht auf axiomatischer Basis, die später gelegt wird:

29-2(Satz)

Aus "x Unmenge" folgt "x unendlich".

Beweis **29-2** `VS` gleich x Unmenge.

`1:` Es gilt: (x endlich) $\vee$ (x unendlich).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x endlich.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x endlich" folgt via **28-6**: x Menge.

`3:` Es gilt `2` "x Menge".
Es gilt `VS` gleich "x Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: x unendlich.

`1.2.Fall` x unendlich.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x unendlich.

□

29-3. Da gemäß **29-2** jede Unmenge unendlich ist, sind $\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\text{sngltn}}, \mathcal{P}_{\text{endl}}, \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ unendlich:

29-3(Satz)

a) $\mathcal{U}$ *unendlich.*

b) $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ *unendlich.*

c) $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ *unendlich.*

d) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ *unendlich.*

Beweis **29-3** a)

1: Via 0,$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **29-2**: $\mathcal{U}$ unendlich.

b)

1: Via **27-15** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge"
folgt via **29-2**: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ unendlich.

c)

1: Via **28-10** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Unmenge"
folgt via **29-2**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ unendlich.

d)

1: Via **28-22** gilt: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ Unmenge"
folgt via **29-2**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$ unendlich.

□

RelationsNotation.
vermehrend. **verringernd**.
reflexiv in z. **reflexiv**.
irreflexiv in z. **irreflexiv**.
transitiv in z. **transitiv**.
antiSymmetrisch in z. **antiSymmetrisch**.
symmetrisch in z. **symmetrisch**.
konnex in z. **konnex**.
Kette.
Liste der KlassenVariablen, Teil 2.
`HO`**-Notation**.
Halbordnung.
antiSymmetrische Halbordnung.

Ersterstellung: 27/02/07 **Letzte Änderung: 12/05/11**

30-1. Mit der **RelationsNotation** wird an Stelle von "$(p, q) \in M$" die Zeichenfolge "p_M_q" geschrieben. Vom Schreibaufwand her ist also die RelationsNotation kaum zu rechtfertigen. Jedoch hat sich die RelationsNotation vor allem im Zusammenhang mit Halbordnungen derartig nachhaltig in die Mathematik eingeprägt, dass diese an den Essays nicht spurlos vorbei gehen kann. Interessanter Weise wird nicht "M Relation" verlangt. Statt dessen ist M eine ansonsten beliebige Klasse. Dass die Schreibweise dennoch *Relations*Notation genannt wird, liegt einerseits daran, dass sie hauptsächlich im Umgang mit Relationen eingesetzt wird. Andererseits betrifft die RelationsNotation nur geordnete Paare von M, also Elemente von $(M^{-1})^{-1}$ i.e. die grösste in M enthaltene Relation. Ansonsten wird die RelationsNotation im Folgenden ohne weitere explizite Erwähnung als logische Umformung - etwa "$(p\_M\_q) \Rightarrow ((p, q) \in M)$" - eingesetzt:

30-1(Definition) (RelationsNotation)

"p_M_q" genau dann, wenn gilt:

$$(p, q) \in M.$$

30-2. Bei der mit RelationsNotation geschriebenen ZeichenKette p_M_q handelt es sich um die Aussage "$(p,q) \in M$". Hieraus folgen einige Erkenntnisse. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - d) - a) - b)`:

30-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) p_M_q.

Dann folgt:

a) p *Menge.*

b) q *Menge.*

c) $p \in \mathsf{dom}\, M$.

d) $q \in \mathsf{ran}\, M$.

Beweis **30-2**

1: Aus $\rightarrow$) "p_M_q"
folgt: $(p,q) \in M$.

2.c): Aus 1 "$(p,q) \in M$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

2.d): Aus 1 "$(p,q) \in M$"
folgt via **7-5**: $q \in \mathsf{ran}\, M$.

3.a): Aus 2.c) "$p \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

3.b): Aus 2.d) "$q \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

□

30-3. Mitunter ist es von Bedeutung, $\neg(p\_M\_q)$ - also "p steht nicht in M-Relation zu q" - nachzuweisen. Um einfaches Zitieren zu ermöglichen wird das folgende, ansonsten wenig bemerkenswerte Resultat in die Essays aufgenommen:

30-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p\_M\_q)$.

`ii)` $(p,q) \notin M$.

Beweis **30-3**

`1:` Es gilt: $(p\_M\_q) \Leftrightarrow ((p,q) \in M)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(p\_M\_q)) \Leftrightarrow (\neg((p,q) \in M))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(\neg(p\_M\_q)) \Leftrightarrow ((p,q) \notin M)$.

$\square$

30-4. In **30-2** sind vier notwendige Bedingungen für “p_M_q” zu finden. Hieraus ergeben sich vier hinreichende Bedinungen für “$\neg(p\_M\_q)$” :

<u>**30-4(Satz)**</u>

a) *Aus “p Unmenge” folgt “$\neg(p\_M\_q)$”.*

b) *Aus “q Unmenge” folgt “$\neg(p\_M\_q)$”.*

c) *Aus “$p \notin \mathsf{dom}\, M$” folgt “$\neg(p\_M\_q)$”.*

d) *Aus “$q \notin \mathsf{ran}\, M$” folgt “$\neg(p\_M\_q)$”.*

<u>Beweis **30-4**</u> a) VS gleich p Unmenge.

1: Es gilt: $(p\_M\_q) \vee (\neg(p\_M\_q))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall p_M_q.

2: Aus 1.1.Fall “p_M_q” folgt via **30-2**: p Menge.

3: Es gilt 2 “p Menge”.
Es gilt VS gleich “p Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

1.2.Fall $\neg(p\_M\_q)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\neg(p\_M\_q)$.

<u>Beweis **30-4**</u> `b)` `VS` gleich q Unmenge.

`1:` Es gilt: $(p\_M\_q) \vee (\neg(p\_M\_q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p_M_q.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p_M_q" folgt via **30-2**: q Menge.

`3:` Es gilt `2` "q Menge". Es gilt `VS` gleich "q Unmenge". Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

`1.2.Fall` $\neg(p\_M\_q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(p\_M\_q)$.

`c)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, M$.

`1:` Es gilt: $(p\_M\_q) \vee (\neg(p\_M\_q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p_M_q.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p_M_q" folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Es gilt `2` "$p \in \mathsf{dom}\, M$". Es gilt `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, M$". Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

`1.2.Fall` $\neg(p\_M\_q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(p\_M\_q)$.

Beweis **30-4** `d)` `VS` gleich $q \notin \mathsf{ran}\, M$.

`1:` Es gilt: $(p\_M\_q) \vee (\neg(p\_M\_q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p_M_q.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p_M_q" folgt via **30-2**: $q \in \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Es gilt `2` "$q \in \mathsf{ran}\, M$".
Es gilt `VS` gleich "$q \notin \mathsf{ran}\, M$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

`1.2.Fall` $\neg(p\_M\_q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(p\_M\_q)$.

□

30-5. Gelegentlich treten Klassen M auf, die TeilKlasse von n sind. In diesem Fall - siehe `a)` - folgt aus "p_M_q" natürlich "p_n_q". Falls hingegen "$\neg(p\_M\_q)$" und "$m \subseteq M$" gilt, dann folgt "$\neg(p\_m\_q)$", siehe `b)`:

30-5(Satz)

`a)` *Aus "$M \subseteq n$" und "p_M_q" folgt "p_n_q".*

`b)` *Aus "$m \subseteq M$" und "$\neg(p\_M\_q)$" folgt "$\neg(p\_m\_q)$".*

Beweis **30-5** `a)` `VS` gleich $(M \subseteq n) \wedge (p\_M\_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q$"
folgt: $(p,q) \in M$.

`2:` Aus `1` "$(p,q) \in M$" und
aus `VS` gleich "$M \subseteq n \ldots$"
folgt via **0-4**: $(p,q) \in n$.

`3:` Aus `2` "$(p,q) \in n$"
folgt: p_n_q.

`b)` `VS` gleich $(m \subseteq M) \wedge (\neg(p\_M\_q))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(p\_M\_q)$"
folgt via **30-3**: $\neg((p,q) \in M)$.

`2:` Aus `1` "$\neg((p,q) \in M)$" und
aus `VS` gleich "$m \subseteq M \ldots$"
folgt via **0-4**: $\neg((p,q) \in m)$.

`3:` Aus `2` "$\neg((p,q) \in m)$"
folgt via **30-3**: $\neg(p\_m\_q)$.

□

30-6. Im Konzept von M_vermehrenden/M_verringernden *Funktionen* treten Aussagen der Form "p_M_$y(x)$" / "$y(x)$_M_p" auf. Hierauf bereitet der vorliegende Satz vor. Eine zusätzliche Klammerung ist weder in "p_M_$y(x)$" noch in "$y(x)$_M_p" erforderlich:

30-6(Satz)

a) *Aus "p_M_$y(x)$" folgt "$x \in \mathsf{dom}\, y$".*

b) *Aus "$y(x)$_M_p" folgt "$x \in \mathsf{dom}\, y$".*

Beweis **30-6** a) VS gleich p_M_$y(x)$.

1: Aus VS gleich "p_M_$y(x)$"
folgt via **30-2**: $y(x)$ Menge.

2: Aus 1 "$y(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, y$.

b) VS gleich $y(x)$_M_p.

1: Aus VS gleich "$y(x)$_M_p"
folgt via **30-2**: $y(x)$ Menge.

2: Aus 1 "$y(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, y$.

□

30-7. x ist genau dann M_**vermehrend auf** E, wenn es, erstens, zu jedem $\alpha \in E$ ein Ω gibt, so dass α_M_Ω und $(\alpha, \Omega) \in x$ gilt - dass also jedes Element von E durch ein Element "M_übertroffen" und das geordnete Paar dieser Elemente in x ist - *und* wenn $(\alpha, \beta) \in x$ mit $\alpha \in E$ gilt, dann α_M_β folgt - dass also für jedes geordnete Paar $(\alpha, \beta) \in x$ mit $\alpha \in E$ gilt, dass α durch β "M_übertroffen" wird. Ähnlich wird definiert, was es heißt, M_**verringernd auf** E zu sein. Obwohl zumeist auf Funktionen x angewendet, ist in der vorliegenden Begriffsbildung nichts weiter über x vorausgesetzt:

30-7(Definition)

1) "x **ist** M_**vermehrend auf** E" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega)).$$

$\wedge$

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta).$$

2) "x **ist** M_**verringernd auf** E" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha)).$$

$\wedge$

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha).$$

30-8. x ist M_vermehrend auf 0. x ist M_verringernd auf 0:

30-8(Satz)

a) *x ist M_vermehrend auf* 0.

b) *x ist M_verringernd auf* 0.

Beweis **30-8** a)

`Thema1.1` $\alpha \in 0$.

Es gilt `Thema1.1` "$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$"

`Thema1.2` $(\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

Es gilt `Thema1.2` "$\alpha \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: α_M_β.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta))$"

2: Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta))$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist M_vermehrend auf 0.

Beweis **30-8** `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in 0.$

Es gilt `Thema1.1` “ $\alpha \in 0$ ” .
Via **0-19** gilt “ $\alpha \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha).$

Ergo `Thema1.1`: `A1` “$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$”

`Thema1.2` $(\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x).$

Es gilt `Thema1.2` “ $\alpha \in 0 \ldots$ ” .
Via **0-19** gilt “ $\alpha \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\beta\_M\_\alpha.$

Ergo `Thema1.2`: `A2` “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha))$”

`2`: Aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha))$”
folgt via **30-7(Def)**: x ist M_verringernd auf 0.

□

30-9. Falls x M_vermehrend auf E ist, dann ist E eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, M$, siehe `a)`. Falls x M_verringernd auf E ist, dann ist E eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, M$.

30-9(Satz)

`a)` *Aus "x ist M_vermehrend auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{dom}\, M$".*

`b)` *Aus "x ist M_verringernd auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{ran}\, M$".*

Beweis **30-9** `a)` `VS` gleich $\qquad$ x ist M_vermehrend auf E.

`Thema1` $\qquad$ $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist M_vermehrend auf E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\qquad$ $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega)$.

`3:` Aus 2"$\ldots \alpha\_M\_\Omega$"
folgt via **30-2**: $\qquad$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\qquad$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`b)` `VS` gleich $\qquad$ x ist M_verringernd auf E.

`Thema1` $\qquad$ $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\qquad$ $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus 2"$\ldots \Omega\_M\_\alpha$"
folgt via **30-2**: $\qquad$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\qquad$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ $E \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

$\square$

30-10. Interessanter Weise gibt es eine Eu **30-9** ähnliche Aussage, die $x[E]$ betrifft, wenn x M_vermehrend oder M_verringernd auf E ist:.

30-10(Satz)

a) *Aus "x ist M_vermehrend auf E" folgt "$x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, M$".*

b) *Aus "x ist M_verringernd auf E" folgt "$x[E] \subseteq \mathsf{dom}\, M$".*

Beweis **30-10** `a)` `VS` gleich x ist M_vermehrend auf E.

`Thema1` $\beta \in x[E]$.

2: Aus `Thema1` "$\beta \in x[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

3: Aus `VS` gleich "x ist M_vermehrend auf E",
aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \beta) \in x$"
folgt via **30-7(Def)**: Ω_M_β.

4: Aus 3"Ω_M_β"
folgt via **30-2**: $\beta \in \mathsf{ran}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in x[E]) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{ran}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`b)` `VS` gleich x ist M_verringernd auf E.

`Thema1` $\alpha \in x[E]$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in x[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

3: Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf E",
aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **30-7(Def)**: α_M_Ω.

4: Aus 3"α_M_Ω"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

$\square$

30-11. Wenn x M_vermehrend oder M_verringernd auf E ist, ist E eine Teil-Klasse von $\mathsf{dom}\,x$:

30-11(Satz)

a) *Aus "x ist M_vermehrend auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$".*

b) *Aus "x ist M_verringernd auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$".*

Beweis **30-11** a) `VS` gleich x ist M_vermehrend auf E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

2: Aus `VS` gleich "x ist M_vermehrend auf E" und aus `Thema1` "$\alpha \in E$" folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x \ldots$" folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

b) `VS` gleich x ist M_verringernd auf E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

2: Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf E" und aus `Thema1` "$\alpha \in E$" folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x \ldots$" folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

$\square$

30-12. Die "TeilKlassen-Aussagen" von **30-9** und **30-11** ermöglichen es, einige "(Un-)Mengen-Aussagen" im Kontext von M_vermehrenden/M_verringernden Klassen zu treffen:

30-12(Satz)

Aus ...

→) $\boxed{\dfrac{x \text{ ist } M\text{\_vermehrend auf } E.}{x \text{ ist } M\text{\_verringernd auf } E.} \quad \textit{oder}}$

...

a) *... und "x Menge" folgt "E Menge".*

b) *... und "M Menge" folgt "E Menge".*

c) *... und "E Unmenge" folgt "x Unmenge".*

d) *... und "E Unmenge" folgt "M Unmenge".*

<u>Beweis **30-12**</u> `a)` `VS` gleich x Menge.

`1:` Nach $\rightarrow$) gilt: (x ist M_vermehrend auf E) $\vee$ (x ist M_verringernd auf E).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x ist M_vermehrend auf E.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x ist M_vermehrend auf E”
folgt via **30-11**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich “x Menge”
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\, x$ Menge.

`4:` Aus 2“$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus 3“$\mathsf{dom}\, x$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`1.2.Fall` x ist M_verringernd auf E.

`2:` Aus `1.2.Fall`“x ist M_verringernd auf E”
folgt via **30-11**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich “x Menge”
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\, x$ Menge.

`4:` Aus 2“$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus 3“$\mathsf{dom}\, x$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: E Menge.

Beweis **30-12** `b)` `VS` gleich M Menge.

`1:` Nach $\to$) gilt: (x ist M_vermehrend auf E) $\vee$ (x ist M_verringernd auf E).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x ist M_vermehrend auf E.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x ist M_vermehrend auf E”
folgt via **30-9**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `VS` gleich “M Menge”
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\, M$ Menge.

`4:` Aus 2“$E \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus 3“$\mathsf{dom}\, M$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`1.2.Fall` x ist M_verringernd auf E.

`2:` Aus `1.2.Fall`“x ist M_verringernd auf E”
folgt via **30-9**: $E \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `VS` gleich “M Menge”
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{ran}\, M$ Menge.

`4:` Aus 2“$E \subseteq \mathsf{ran}\, M$” und
aus 3“$\mathsf{ran}\, M$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: E Menge.

<u>Beweis **30-12**</u> `cd)` `VS` gleich E Unmenge.

`1:` Nach $\rightarrow$) gilt: (x ist M_vermehrend auf E) $\vee$ (x ist M_verringernd auf E).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x ist M_vermehrend auf E.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“x ist M_vermehrend auf E”
folgt via **30-9**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“x ist M_vermehrend auf E”
folgt via **30-11**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`3.1:` Aus `2.1`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus `VS` gleich “E Unmenge”
folgt via **0-7**: $\mathsf{dom}\, M$ Unmenge.

`3.2:` Aus `2.2`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus `VS` gleich “E Unmenge”
folgt via **0-7**: $\mathsf{dom}\, x$ Unmenge.

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{dom}\, M$ Unmenge”
folgt via **7-9**: M Unmenge.

`4.2:` Aus `3.2`“$\mathsf{dom}\, x$ Unmenge”
folgt via **7-9**: x Unmenge.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: (M Unmenge) $\wedge$ (x Unmenge).

...

<u>Beweis **30-12**</u> `cd)` `VS` gleich E Unmenge.

...

`1.2.Fall` x ist M_verringernd auf E.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"x ist M_verringernd auf E"
folgt via **30-9**: $E \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"x ist M_verringernd auf E"
folgt via **30-11**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`3.1:` Aus `2.1`"$E \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `VS` gleich "E Unmenge"
folgt via **0-7**: $\mathsf{ran}\, M$ Unmenge.

`3.2:` Aus `2.2`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "E Unmenge"
folgt via **0-7**: $\mathsf{dom}\, x$ Unmenge.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{ran}\, M$ Unmenge"
folgt via **7-9**: M Unmenge.

`4.2:` Aus `3.2`"$\mathsf{dom}\, x$ Unmenge"
folgt via **7-9**: x Unmenge.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(M \text{ Unmenge}) \wedge (x \text{ Unmenge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(M \text{ Unmenge}) \wedge (x \text{ Unmenge})$"

`2.c):` Aus `A1`
folgt: x Unmenge.

`2.d):` Aus `A2`
folgt: M Unmenge.

□

30-13. Falls x M_vermehrend auf E ist und falls $M \subseteq n$ und $e \subseteq E$, dann ist x n_vermehrend auf e. Die Spezialfälle "$M = n$" oder "$e = E$" werden zusätzlich angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-13(Satz)

Aus "x ist M_vermehrend auf E" und ...

`a)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "x ist n_vermehrend auf E".*

`b)` *... und "$e \subseteq E$" folgt "x ist M_vermehrend auf e".*

`c)` *... und "$M \subseteq n$" und "$e \subseteq E$" folgt "x ist n_vermehrend auf e".*

Beweis **30-13** `c)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\text{\_vermehrend auf } E) \wedge (M \subseteq n) \wedge (e \subseteq E)$.

`Thema1.1` $\alpha \in e$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in e$" und
aus `VS` gleich "$\dots e \subseteq E$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "x ist M_vermehrend auf $E \dots$" und
aus `2`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\dots M \subseteq n \dots$" und
aus `3`"$\dots \alpha\_M\_\Omega$"
folgt via **30-5**: α_n_Ω.

`5:` Aus `3`"$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x \dots$" und
aus `4`"α_n_Ω"
folgt: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_n\_\Omega)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in e) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_n\_\Omega))$"

...

<u>Beweis **30-13**</u> `c)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{vermehrend auf } E) \wedge (M \subseteq n) \wedge (e \subseteq E)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \dots$" und aus `VS` gleich "$\dots e \subseteq E$" folgt via **0-4**:	$\alpha \in E$.
`3:` Aus `VS` gleich "x ist $M_$vermehrend auf $E \dots$", aus `2`"$\alpha \in E$" und aus `Thema1.2`"$\dots (\alpha, \beta) \in x$" folgt via **30-7**:	α_M_β.
`4:` Aus `VS` gleich "$\dots M \subseteq n \dots$" und aus `3`"$\alpha\_M\_\beta$" foglt via **30-5**:	α_n_β.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha\_n\_\beta)$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in e) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_n\_\Omega))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha\_n\_\beta)$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist $n_$vermehrend auf E.

`a)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{vermehrend auf } E) \wedge (M \subseteq n)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $E \subseteq E$.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist $M_$vermehrend auf $E \dots$",
aus `VS` gleich "$\dots M \subseteq n$" und
aus `1`"$E \subseteq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: x ist $n_$vermehrend auf E.

`b)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{vermehrend auf } E) \wedge (e \subseteq E)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist $M_$vermehrend auf $E \dots$",
aus `1`"$\dots M \subseteq M$" und
aus `VS` gleich "$\dots e \subseteq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: x ist $M_$vermehrend auf e.

$\square$

30-14. Falls x M_verringernd auf E ist und falls $M \subseteq n$ und $e \subseteq E$, dann ist x n_verringernd auf e. Die Spezialfälle "$M = n$" oder "$e = E$" werden zusätzlich angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-14(Satz)

Aus "x ist M_verringernd auf E" und ...

`a)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "x ist n_verringernd auf E".*

`b)` *... und "$e \subseteq E$" folgt "x ist M_verringernd auf e".*

`c)` *... und "$M \subseteq n$" und "$e \subseteq E$" folgt "x ist n_verringernd auf e".*

Beweis **30-14** `c)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{verringernd auf } E) \wedge (M \subseteq n) \wedge (e \subseteq E)$.

`Thema1.1` $\alpha \in e$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in e$" und
aus `VS` gleich "$\ldots e \subseteq E$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf $E\ldots$" und
aus `2`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \Omega\_M\_\alpha$"
folgt via **30-5**: Ω_n_α.

`5:` Aus `3`"$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x \ldots$" und
aus `4`"Ω_n_α"
folgt: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_n\_\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in e) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_n\_\alpha))$"

...

<u>Beweis **30-14**</u> `c)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{verringernd auf } E) \wedge (M \subseteq n) \wedge (e \subseteq E)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots e \subseteq E$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf $E \ldots$",
aus `2`"$\alpha \in E$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **30-7**: β_M_α.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n \ldots$" und
aus `3`"β_M_α"
foglt via **30-5**: β_n_α.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\_n\_\alpha)\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in e) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_n\_\alpha))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\_n\_\alpha)$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist n_verringernd auf E.

`a)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{verringernd auf } E) \wedge (M \subseteq n)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $E \subseteq E$.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n$" und
aus `1`"$E \subseteq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: x ist n_verringernd auf E.

`b)` `VS` gleich $(x \text{ ist } M\_\text{verringernd auf } E) \wedge (e \subseteq E)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf $E \ldots$",
aus `1`"$\ldots M \subseteq M$" und
aus `VS` gleich "$\ldots e \subseteq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: x ist M_verringernd auf e.

□

30-15. Falls f eine Funktion ist stellt sich die Aussage "f ist M_vermehrend auf E" besonders einfach dar:

<u>**30-15(Satz)**</u>

Unter der Voraussetzung ...

→) *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *f ist M_vermehrend auf E.*

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$.

<u>Beweis **30-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f ist M_vermehrend auf E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "f ist M_vermehrend auf E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in f) \wedge (\alpha\_M\_\Omega)$.

`3:` Aus →)"f Funktion" und
aus `2`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Omega = f(\alpha)$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha\_M\_\Omega$" und
aus `3`"$\Omega = f(\alpha)$"
folgt: $\alpha\_M\_f(\alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$.

Beweis **30-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in E$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in E$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$”
folgt: $\gamma\_M\_f(\gamma)$.

`3.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = f(\gamma)$.

`3.2:` Aus `2`“$\gamma\_M\_f(\gamma)$”
folgt via **30-6**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.1:` Aus `2`“$\gamma\_M\_f(\gamma)$” und
aus `3.1`“$\ldots \Omega = f(\gamma)$”
folgt: γ_M_Ω.

`4.2:` Aus →)“f Funktion” und
aus `3.2`“$\gamma \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-22**: $(\gamma, f(\gamma)) \in f$.

`4.3:` Aus `3.1`“$\ldots \Omega = f(\gamma)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\gamma, \Omega) = (\gamma, f(\gamma))$.

`5:` Aus `4.2`“$(\gamma, f(\gamma)) \in f$” und
aus `4.3`“$(\gamma, \Omega) = (\gamma, f(\gamma))$”
folgt: $(\gamma, \Omega) \in f$.

`6:` Aus `3.1`“$\exists\Omega \ldots$”,
aus `5` und
aus `4.1`
folgt: $\exists\Omega : ((\gamma, \Omega) \in f) \wedge (\gamma\_M\_\Omega)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\gamma, \Omega) \in f) \wedge (\gamma\_M\_\Omega))$”

...

<u>Beweis **30-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$"
folgt: $\gamma\_M\_f(\gamma)$.

`3:` Aus $\rightarrow$)"f Funktion" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\gamma, \beta) \in f$"
folgt via **18-20**: $\beta = f(\gamma)$.

`4:` Aus `2`"$\gamma\_M\_f(\gamma)$" und
aus `3`"$\beta = f(\gamma)$"
folgt: γ_M_β.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall\gamma, \beta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\beta)$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\gamma, \Omega) \in f) \wedge (\gamma\_M\_\Omega))$" und
aus `A2` gleich "$\forall\gamma, \beta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\beta)$"
folgt via **30-7(Def)**: f ist M_vermehrend auf E.

$\square$

30-16. Falls f eine Funktion ist stellt sich die Aussage "f ist M_verringernd auf E" besonders einfach dar:

30-16(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *f ist M_verringernd auf E.*

`ii)` $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$.

Beweis **30-16** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f ist M_verringernd auf E.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "f ist M_verringernd auf E" und
aus `Thema1` "$\alpha \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in f) \wedge (\Omega\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `2` "$\ldots(\alpha, \Omega) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Omega = f(\alpha)$.

`4:` Aus `2` "$\ldots\Omega\_M\_\alpha$" und
aus `3` "$\Omega = f(\alpha)$"
folgt: $f(\alpha)\_M\_\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$.

Beweis **30-16** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in E$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$"
folgt: $f(\gamma)\_M\_\gamma$.

`3.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = f(\gamma)$.

`3.2:` Aus `2`"$f(\gamma)\_M\_\gamma$"
folgt via **30-6**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.1:` Aus `2`"$f(\gamma)\_M\_\gamma$" und
aus `3.1`"$\ldots\Omega = f(\gamma)$"
folgt: Ω_M_γ.

`4.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `3.2`"$\gamma \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\gamma, f(\gamma)) \in f$.

`4.3:` Aus `3.1`"$\ldots\Omega = f(\gamma)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\gamma, \Omega) = (\gamma, f(\gamma))$.

`5:` Aus `4.2`"$(\gamma, f(\gamma)) \in f$" und
aus `4.3`"$(\gamma, \Omega) = (\gamma, f(\gamma))$"
folgt: $(\gamma, \Omega) \in f$.

`6:` Aus `3.1`"$\exists\Omega\ldots$",
aus `5` und
aus `4.1`
folgt: $\exists\Omega : ((\gamma, \Omega) \in f) \wedge (\Omega\_M\_\gamma)$.

Ergo `Thema1.1`: | `A1` | "$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\gamma, \Omega) \in f) \wedge (\Omega\_M\_\gamma))$" |

...

Beweis **30-16** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$"
folgt: $f(\gamma)\_M\_\gamma$.

`3:` Aus →)"f Funktion" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\gamma, \beta) \in f$"
folgt via **18-20**: $\beta = f(\gamma)$.

`4:` Aus `2`"$f(\gamma)\_M\_\gamma$" und
aus `3`"$\beta = f(\gamma)$"
folgt: β_M_γ.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall\gamma, \beta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\gamma, \Omega) \in f) \wedge (\Omega\_M\_\gamma))$" und
aus `A2` gleich "$\forall\gamma, \beta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)$"
folgt via **30-7(Def)**: f ist M_verringernd auf E.

□

30-17. Eine *beliebige* Klasse M ist genau dann **reflexiv in** z, wenn für alle $\alpha \in z$ gilt: "α_M_α" . M ist genau dann **reflexiv**, wenn M reflexiv in $\mathcal{U}$ ist:

30-17(Definition)

1) "M **reflexiv in** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha).$$

2) "M **reflexiv**" genau dann, wenn gilt:

$$M \text{ reflexiv in } \mathcal{U}.$$

30-18. M kann nur auf Klassen z reflexiv sein, die sowohl TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, M$ als auch TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, M$ sind:

30-18(Satz)

a) *Aus "M reflexiv in z" folgt "$z \subseteq \mathsf{dom}\, M$".*

b) *Aus "M reflexiv in z" folgt "$z \subseteq \mathsf{ran}\, M$".*

c) *Aus "M reflexiv in z" folgt "$\mathsf{id}_z \subseteq M$".*

Beweis **30-18** `a)` `VS` gleich M reflexiv in z.

`Thema1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z" und aus `Thema1` "$\alpha \in z$" folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus 2 "α_M_α" folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`b)` `VS` gleich M reflexiv in z.

`Thema1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z" und aus `Thema1` "$\alpha \in z$" folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus 2 "α_M_α" folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $z \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

<u>Beweis **30-18**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{id}_z$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{id}_z$"
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in z)$.

`3:` Aus →) "M reflexiv in z" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: Ω_M_Ω.

`4:` Aus `3` "Ω_M_Ω"
folgt: $(\Omega, \Omega) \in M$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$" und
aus `4` "$(\Omega, \Omega) \in M$"
folgt: $\alpha \in M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_z) \Rightarrow (\alpha \in M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{id}_z \subseteq M$.

□

30-19. Wenn M reflexiv in z ist, dann sind gemäß folgenden Satzes die Elemente von z via M teilweise unterscheidbar:

30-19(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

Dann folgt:

a) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta))$.

b) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

c) $\forall\alpha,\beta : ((\beta \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

Beweis **30-19** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)$.

2: Aus $\rightarrow$)"M reflexiv in z" und
aus Thema1"$\alpha \in z \ldots$"
folgt via **30-17**: α_M_α.

3.1: Aus 2"α_M_α" und
aus Thema1"$\ldots \alpha = \beta$"
folgt: α_M_β.

3.2: Aus 2"α_M_α" und
aus Thema1"$\ldots \alpha = \beta$"
folgt: β_M_α.

4: Aus 3.2"β_M_α" und
aus Thema1"$\ldots \alpha = \beta$"
folgt: β_M_β.

5: Aus 3.1,
aus 3.2 und
aus 4
folgt: $(\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta)$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta))$.

Beweis **30-19** `b)`

`Thema1` $(\alpha \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))$.

`2:` Es gilt: $(\alpha = \beta) \vee (\alpha \neq \beta)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha = \beta$.

`3:` Aus →) "M reflexiv in z",
aus `Thema1` "$\alpha \in z \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$\alpha = \beta$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: α_M_β.

`4:` Es gilt `3` "α_M_β".
Es gilt `Thema1` "$\ldots \neg(\alpha\_M\_\beta)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \neq \beta$.

`2.2.Fall` $\alpha \neq \beta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \neq \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

Beweis **30-19** `c)`

`Thema1` $(\beta \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))$.

`2:` Es gilt: $(\beta = \alpha) \vee (\beta \neq \alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta = \alpha$.

`3:` Aus →) “M reflexiv in z”,
aus `Thema1`“$\beta \in z \ldots$” und
aus `2.1.Fall`“$\beta = \alpha$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: α_M_β.

`4:` Es gilt `3`“α_M_β”.
Es gilt `Thema1`“$\ldots \neg(\alpha\_M\_\beta)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \neq \beta$.

`2.2.Fall` $\beta \neq \alpha$.

Aus `2.2.Fall`
folgt: $\alpha \neq \beta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \neq \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\beta \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

□

30-20. Die Eigenschaft von M, reflexiv in z zu sein, vererbt sich auf TeilKlassen von z und auf Klassen, die M umfassen. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-20(Satz)

Aus "M reflexiv in z" und ...

a) *... und "$v \subseteq z$" folgt "M reflexiv in v".*

b) *... und "$M \subseteq n$" folgt "n reflexiv in z".*

c) *... und "$M \subseteq n$" und "$v \subseteq z$" folgt "n reflexiv in v".*

Beweis **30-20** `c)` `VS` gleich $(M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z)$.

`Thema1` $\alpha \in v$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in v$” und
aus `VS` gleich “$\ldots v \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`3:` Aus →)“M reflexiv in z” und
aus `2`“$\alpha \in z$”
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`4:` Aus `VS` gleich “$M \subseteq n \ldots$” und
aus `3`“α_M_α”
folgt via **30-5**: α_n_α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in v) \Rightarrow (\alpha\_n\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: n reflexiv in v.

`a)` `VS` gleich $v \subseteq z$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus →)“M reflexiv in z”,
aus `1`“$M \subseteq M$” und
aus `VS` gleich “$v \subseteq z$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: M reflexiv in v.

`b)` `VS` gleich $M \subseteq n$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus →)“M reflexiv in z”,
aus `VS` gleich “$M \subseteq n$” und
aus `1`“$z \subseteq z$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: n reflexiv in z.

□

30-21. Einige der bisherigen Resultate für "M reflexiv in z" werden auf die Situation "M reflexiv" übertragen. Als Nova ergeben sich, dass aus "M reflexiv" und "α Menge" die Aussage "α_M_α" folgt und dass aus "M reflexiv" die Aussage "M Unmenge" folgt. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - h) - c) - i) - d) - e) - f) - g)`:

30-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *reflexiv.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\, M = \mathcal{U}$.

b) $\mathsf{ran}\, M = \mathcal{U}$.

c) $\mathsf{id} \subseteq M$.

d) $\forall \alpha : (\alpha \text{ Menge}) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha)$.

e) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta))$.

f) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ Menge}) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

g) $\forall \alpha, \beta : ((\beta \text{ Menge}) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

h) M *reflexiv in* z.

i) M *Unmenge.*

<u>Beweis</u> **30-21** `abchi)`

`1:` Aus →) “M reflexiv”
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1` “M reflexiv in $\mathcal{U}$”
folgt via **30-18**: $\mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2.2:` Aus `1` “M reflexiv in $\mathcal{U}$”
folgt via **30-18**: $\mathcal{U} \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2.3:` Aus `1` “M reflexiv in $\mathcal{U}$”
folgt via **30-18**: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} \subseteq M$.

`2.4:` Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

`3.a):` Aus `2.1` “$\mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **0-18**: $\mathsf{dom}\, M = \mathcal{U}$.

`3.b):` Aus `2.2` “$\mathcal{U} \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\, M = \mathcal{U}$.

`3.1:` Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`3.h):` Aus `1` “M reflexiv in $\mathcal{U}$” und
aus `2.4` “$z \subseteq \mathcal{U}$”
folgt via **30-20**: M reflexiv in z.

`4.c):` Aus `3.1` “$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$” und
aus `2.3` “$\mathsf{id}_{\mathcal{U}} \subseteq M$”
folgt: $\mathsf{id} \subseteq M$.

`4.1:` Via **20-13** gilt: id Unmenge.

`5.i):` Aus `4.c)` “$\mathsf{id} \subseteq M$” und
aus `4.1` “id Unmenge”
folgt via **0-7**: M Unmenge.

<u>Beweis **30-21**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ α Menge.

`2:` Aus `Thema1` "α Menge"
folgt via **0-19**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "M reflexiv"
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "M reflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus `2` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \text{ Menge}) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha)$.

`e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \beta)$.

`2:` Aus `Thema1` "α Menge..."
folgt via **0-19**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "M reflexiv"
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "M reflexiv in $\mathcal{U}$",
aus `2` "$\alpha \in \mathcal{U}$" und
aus `Thema1` "$\ldots \alpha = \beta$"
folgt via **30-19**: α_M_β.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta)).$$

<u>Beweis</u> **30-21** `f)`

`Thema1` $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\neg(\alpha \_M\_ \beta))$.

`2:` Aus `Thema1`"α Menge…"
folgt via **0-19**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "M reflexiv"
folgt via **30-17**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"M reflexiv in $\mathcal{U}$",
aus `2`"$\alpha \in \mathcal{U}$" und
aus `Thema1`"…$\neg(\alpha \_M\_ \beta)$"
folgt via **30-19**: $\alpha \neq \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ Menge}) \wedge (\neg(\alpha \_M\_ \beta)) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

`g)`

`Thema1` $(\beta \text{ Menge}) \wedge (\neg(\alpha \_M\_ \beta))$.

`2:` Aus `Thema1`"β Menge…"
folgt via **0-19**: $\beta \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "M reflexiv"
folgt via **30-17**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"M reflexiv in $\mathcal{U}$",
aus `2`"$\beta \in \mathcal{U}$" und
aus `Thema1`"…$\neg(\alpha \_M\_ \beta)$"
folgt via **30-19**: $\alpha \neq \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\beta \text{ Menge}) \wedge (\neg(\alpha \_M\_ \beta)) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

$\square$

30-22. Es wird **30-20** `bc)` auf "M reflexiv" übertragen. **30-20** `a)` ist wegen "$z \subseteq \mathcal{U}$" in **30-21** `h)` enthalten:

30-22(Satz)

Aus "M reflexiv" und ...

`a)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "n reflexiv".*

`b)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "n reflexiv in z".*

Beweis **30-22** `VS` gleich $M \subseteq n$.

`1:` Aus →) "M reflexiv"
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "M reflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$M \subseteq n$"
folgt via **30-20**: n reflexiv in $\mathcal{U}$.

`3.a):` Aus `2` "n reflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-17(Def)**: n reflexiv.

`3.b):` Aus `3.a)` "n reflexiv"
folgt via **30-21**: n reflexiv in z.

□

30-23. M ist genau dann **irreflexiv in** z, wenn für kein $\alpha \in z$ die Aussage "α_M_α" zutrifft:

30-23(Definition)

1) "M **irreflexiv in** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\neg(\alpha\_M\_\alpha)).$$

2) "M **irreflexiv**" genau dann, wenn gilt:

$$M \text{ irreflexiv in } \mathcal{U}.$$

30-24. Ähnlich wie bei der Reflexivität spielt auch bei der Irreflexivität die Identität eine gewisse Rolle:

30-24(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M irreflexiv in z.*

`ii)` $M \cap \mathsf{id}_z = 0$.

Beweis **30-24** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich M irreflexiv in z.

`Thema1` $\alpha \in M \cap \mathsf{id}_z$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in M \cap \mathsf{id}_z$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in M) \wedge (\alpha \in \mathsf{id}_z)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in \mathsf{id}_z$"
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in z)$.

`4.1:` Aus `3` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$" und
aus `2` "$\alpha \in M \ldots$"
folgt: $(\Omega, \Omega) \in M$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "M irreflexiv in z" und
aus `3` "$\ldots \Omega \in z$"
folgt via **30-23(Def)**: $\neg(\Omega\_M\_\Omega)$.

`5:` Aus `4.1` "$(\Omega, \Omega) \in M$"
folgt: Ω_M_Ω.

`6:` Es gilt `5` "Ω_M_Ω".
Es gilt `4.2` "$\neg(\Omega\_M\_\Omega)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin M \cap \mathsf{id}_z$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in M \cap \mathsf{id}_z) \Rightarrow (\alpha \notin M \cap \mathsf{id}_z)$.

Konsequenz via **0-19**: $M \cap \mathsf{id}_z = 0$.

<u>Beweis **30-24**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $M \cap \mathsf{id}_z = 0.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in z.$

2: Es gilt: $(\alpha\_M\_\alpha) \vee (\neg(\alpha\_M\_\alpha)).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\alpha\_M\_\alpha.$

3: Aus `2.1.Fall` "α_M_α"
folgt: $(\alpha, \alpha) \in M.$

4: Aus `Thema1` "$\alpha \in z$"
folgt via **20-9**: $(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z.$

5: Aus 3 "$(\alpha, \alpha) \in M$" und
aus 4 "$(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z$"
folgt via **2-2**: $(\alpha, \alpha) \in M \cap \mathsf{id}_z.$

6: Aus 5 "$(\alpha, \alpha) \in M \cap \mathsf{id}_z$" und
aus `VS` gleich "$M \cap \mathsf{id}_z = 0$"
folgt: $(\alpha, \alpha) \in 0.$

7: Es gilt 6 "$(\alpha, \alpha) \in 0$".
Via **0-19** gilt "$(\alpha, \alpha) \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(\alpha\_M\_\alpha).$

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\neg(\alpha\_M\_\alpha).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\neg(\alpha\_M\_\alpha).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\neg(\alpha\_M\_\alpha)).$

Konsequenz via **30-23(Def)**: M irreflexiv in z.

□

30-25. Nun wird die "$\mathcal{U}$-Version" von **30-24** bewiesen:

30-25(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) M *irreflexiv.*

ii) $M \cap \mathsf{id} = 0$.

Beweis **30-25**

1: Via **30-23(Def)** gilt: $(M \text{ irreflexiv}) \Leftrightarrow (M \text{ irreflexiv in } \mathcal{U})$.

2: Via **30-24** gilt: $(M \text{ irreflexiv in } \mathcal{U}) \Leftrightarrow (M \cap \mathsf{id}_\mathcal{U} = 0)$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $(M \text{ irreflexiv}) \Leftrightarrow (M \cap \mathsf{id}_\mathcal{U} = 0)$.

4: Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_\mathcal{U}$.

5: Aus 3 "$(M \text{ irreflexiv}) \Leftrightarrow (M \cap \mathsf{id}_\mathcal{U} = 0)$" und
aus 4 "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_\mathcal{U}$"
folgt: $(M \text{ irreflexiv}) \Leftrightarrow (M \cap \mathsf{id} = 0)$.

$\square$

30-26. Wenn M irreflexiv in z ist, dann können die Elemente von z teilweise mit Hilfe von M voneinander unterschieden werden:

30-26(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M irreflexiv in z.*

Dann folgt:

a) $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\neg(\alpha\_M\_\beta)) \wedge (\neg(\beta\_M\_\alpha)))$.

b) $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

Beweis **30-26** a)

`Thema1` $(\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)$

1: Aus $\rightarrow$)"M irreflexiv in z" und
aus `Thema1`"$\alpha \in z \ldots$"
folgt via **30-23(Def)**: $\neg(\alpha\_M\_\alpha)$.

2.1: Aus 1"$\neg(\alpha\_M\_\alpha)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha = \beta$"
folgt: $\neg(\alpha\_M\_\beta)$.

2.2: Aus 1"$\neg(\alpha\_M\_\alpha)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha = \beta$"
folgt: $\neg(\beta\_M\_\alpha)$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(\neg(\alpha\_M\_\beta)) \wedge (\neg(\beta\_M\_\alpha))$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\neg(\alpha\_M\_\beta)) \wedge (\neg(\beta\_M\_\alpha)))$.

Beweis **30-26** b)

Thema1 $(\alpha \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$.

1: Es gilt: $(\alpha = \beta) \vee (\alpha \neq \beta)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\alpha = \beta$.

2: Aus →) "M irreflexiv in z" und
aus Thema1 "$\alpha \in z \ldots$" und
aus 1.1.Fall "$\alpha = \beta$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\neg(\alpha\_M\_\beta)$.

3: Es gilt 2 "$\neg(\alpha\_M\_\beta)$".
Es gilt Thema1 "$\ldots \alpha\_M\_\beta$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \neq \beta$.

1.2.Fall $\alpha \neq \beta$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\alpha \neq \beta$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

□

30-27. Falls M irreflexiv in z ist und falls $m \subseteq M$ und $v \subseteq z$ gilt, dann ist m irreflexiv in v. Die Spezialfälle $m = M$ und $v = z$ werden gesondert angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-27(Satz)

Aus "M irreflexiv in z" und ...

`a)` *... und "$v \subseteq z$" folgt "M irreflexiv in v".*

`b)` *... und "$m \subseteq M$" folgt "m irreflexiv in z".*

`c)` *... und "$m \subseteq M$" und "$v \subseteq z$" folgt "m irreflexiv in v".*

Beweis **30-27** `c)` `VS` gleich $(m \subseteq M) \wedge (v \subseteq z)$.

`Thema1` $\alpha \in v$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in v$" und
aus `VS` gleich "$\dots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`3:` Aus `VS` gleich "M irreflexiv in z" und
aus `2`"$\alpha \in z$"
folgt via **30-23(Def)**: $\neg(\alpha\_M\_\alpha)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$m \subseteq M \dots$" und
aus `3`"$\neg(\alpha\_M\_\alpha)$"
folgt via **30-5**: $\neg(\alpha\_m\_\alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in v) \Rightarrow (\neg(\alpha\_m\_\alpha))$.

Konsequenz via **30-23(Def)**: m irreflexiv in v.

<u>Beweis</u> **30-27** `a)` `VS` gleich $v \subseteq z$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus →) “M irreflexiv in z”,
aus `1` “$M \subseteq M$” und
aus `VS` gleich “$v \subseteq z$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: M irreflexiv in v.

`b)` `VS` gleich $m \subseteq M$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus →) “M irreflexiv in z”,
aus `VS` gleich “$m \subseteq M$” und
aus `1` “$z \subseteq z$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: m irreflexiv in z.

□

30-28. Nun werden zwei Resultate für "M irreflexiv in z" auf den Fall "M irreflexiv" übertragen. Als Novum ist festzustellen, dass keine der auftretenden Klassen eine Menge sein muss:

30-28(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M irreflexiv.*

Dann folgt:

a) $\neg(p\_M\_p)$.

b) *M irreflexiv in z.*

Beweis **30-28** a)

1: Es gilt: $(p\_M\_p) \vee (\neg(p\_M\_p))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall p_M_p.

2: Aus 1.1.Fall "p_M_p"
folgt via **30-2**: p Menge.

3: Aus 2 "p Menge"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

4: Aus →) "M irreflexiv"
folgt via **30-23(Def)**: M irreflexiv in $\mathcal{U}$.

5: Aus 4 "M irreflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus 3 "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **30-23(Def)**: $\neg(p\_M\_p)$.

1.2.Fall $\neg(p\_M\_p)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\neg(p\_M\_p)$.

b)

1: Aus →) "M irreflexiv"
folgt via **30-23(Def)**: M irreflexiv in $\mathcal{U}$.

2: Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

3: Aus 1 "M irreflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus 2 "$z \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **30-27**: M irreflexiv in z.

□

30-29. Es werden **30-26** `ab)` und **30-27** `bc)` auf "M reflexiv" übertragen. **30-27** `a)` ist wegen "$z \subseteq \mathcal{U}$" in **30-28** enthalten:

30-29(Satz)

Aus "M irreflexiv" und ...

`a)` *... und "$p = q$" folgt "$\neg(p\_M\_q)$" und "$\neg(q\_M\_p)$".*

`b)` *... und "p_M_q" folgt "$p \neq q$".*

`c)` *... und "$m \subseteq M$" folgt "m irreflexiv".*

`d)` *... und "$m \subseteq M$" folgt "m irreflexiv in z".*

Beweis **30-29** `a)` `VS` gleich $p = q$.

`1:` Aus →) "M irreflexiv"
folgt via **30-28**: $\neg(p\_M\_p)$.

`2.1:` Aus `1` "$\neg(p\_M\_p)$" und
aus `VS` gleich "$p = q$"
folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

`2.2:` Aus `1` "$\neg(p\_M\_p)$" und
aus `VS` gleich "$p = q$"
folgt: $\neg(q\_M\_p)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\neg(p\_M\_q)) \wedge (\neg(q\_M\_p))$.

Beweis **30-29** `b)` `VS` gleich p_M_q.

`1:` Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = q$.

`2:` Aus `VS` gleich "p_M_q" und
aus `1.1.Fall` "$p = q$"
folgt: p_M_p.

`3:` Aus →) "M irreflexiv"
folgt via **30-28**: $\neq (p\_M\_p)$.

`4:` Es gilt `3` "$\neg(p\_M\_p)$".
Es gilt `2` "p_M_p".
Ex falso quodlibet folgt: $p \neq q$.

`1.2.Fall` $p \neq q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \neq q$.

`cd)` `VS` gleich $m \subseteq M$.

`1:` Aus →) "M irreflexiv"
folgt via **30-23(Def)**: M irreflexiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "M irreflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$m \subseteq M$"
folgt via **30-27**: m irreflexiv in $\mathcal{U}$.

`3.c):` Aus `2` "m irreflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-23(Def)**: m irreflexiv.

`4.d):` Aus `3.c)` "m irreflexiv"
folgt via **30-28**: m irreflexiv in z.

□

30-30. Die Klasse M ist genau dann **transitiv in** z, wenn für alle α, β, γ aus z mit α_M_β und β_M_γ die Aussage "α_M_γ" gilt:

30-30(Definition)

1) "M **transitiv in** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$$

2) "M **transitiv**" genau dann, wenn gilt:

$$M \text{ transitiv in } \mathcal{U}.$$

30-31. Falls M transitiv in z ist, so ist M auch in TeilKlassen von z transitiv:

30-31(Satz)

Aus "M transitiv in z" und "$v \subseteq z$" folgt "M transitiv in "v".

Beweis **30-31** `VS` gleich $(M \text{ transitiv in } z) \wedge (v \subseteq z)$.

`Thema1` $(\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \wedge (\gamma \in v) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)$.

`2.1`: Aus `Thema1` "$\alpha \in v \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2`: Aus `Thema1` "$\ldots \beta \in v \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`2.3`: Aus `Thema1` "$\ldots \gamma \in v \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in z$.

`3`: Aus `VS` gleich "M transitiv in $z \ldots$",
aus `2.1` "$\alpha \in z$",
aus `2.2` "$\beta \in z$",
aus `2.3` "$\gamma \in z$",
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta\_M\_\gamma$"
folgt via **30-30(Def)**: α_M_γ.

Ergo `Thema1`:
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \wedge (\gamma \in v) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$$

Konsequenz via **30-30(Def)**: M transitiv in v.

□

30-32. Auf Grund nachfolgender Beispiele wird fest gehalten:

30-32.Bemerkung

- Die Aussage
“$((M \text{ transitiv in } z) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m \text{ transitiv in } z)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“$((M \text{ transitiv in } z) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n \text{ transitiv in } z)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“$((M \text{ transitiv in } z) \wedge (m \subseteq M) \wedge (v \subseteq z)) \Rightarrow (m \text{ transitiv in } v)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“$((M \text{ transitiv in } z) \wedge (M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z)) \Rightarrow (n \text{ transitiv in } v)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

30-33. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, ist die Aussage "$((M$ transitiv in $z) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ transitiv in $z)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

30-33.BEISPIEL

Es gelte:

→) p Menge.

→) q Menge.

→) $p \neq q$.

→) $M = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$.

→) $m = \{(p,q),(q,p)\}$.

→) $z = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) $m \subseteq M$.

c) $\neg(m$ transitiv in $z)$.

Ad c): Es gilt $p \in z, q \in z, p \in z$ und p_m_q und q_m_p, aber es gilt *nicht* p_m_p.

30-34. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, ist die Aussage "$((M$ transitiv in $z) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ transitiv in $z)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

30-34.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $n = \{(p, p), (p, q), (q, p)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) $M \subseteq n$.

c) $\neg(n$ transitiv in $z)$.

Ad c): Es gilt $q \in z, p \in z, q \in z$ und q_n_p und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_q.

30-35. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, ist die Aussage "$((M$ transitiv in $z) \wedge (m \subseteq M) \wedge (v \subseteq z)) \Rightarrow (m$ transitiv in $v)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>30-35.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\longrightarrow$) p Menge.

$\longrightarrow$) q Menge.

$\longrightarrow$) $p \neq q$.

$\longrightarrow$) $M = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$.

$\longrightarrow$) $m = \{(p,q),(q,p)\}$.

$\longrightarrow$) $z = \{p,q\}$.

$\longrightarrow$) $v = \{p,q\}$.

Dann folgt:

`a)` M transitiv in z.

`b)` $m \subseteq M$.

`c)` $v \subseteq z$.

`d)` $\neg(m$ transitiv in $v)$.

Ad `d)`: Es gilt $p \in v, q \in v, p \in v$ und p_m_q und q_m_p, aber es gilt *nicht* p_m_p.

30-36. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, ist die Aussage “$((M$ transitiv in $z) \wedge (M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z)) \Rightarrow (n$ transitiv in $v)$” nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>30-36.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ p Menge.

$\rightarrow)$ q Menge.

$\rightarrow)$ $p \neq q$.

$\rightarrow)$ $M = \{(p,p)\}$.

$\rightarrow)$ $n = \{(p,p),(p,q),(q,p)\}$.

$\rightarrow)$ $z = \{p,q\}$.

$\rightarrow)$ $v = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) $M \subseteq n$.

c) $v \subseteq z$.

d) $\neg(n$ transitiv in $v)$.

Ad d): Es gilt $q \in v, p \in v, q \in v$ und q_n_p und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_q.

30-37. Wie in **30-32(Bem)** angedeutet, folgt aus "M transitiv in z" und "$m \subseteq M$" nicht notwendiger Weise "m transitiv in z". Statt dessen sind schwächere Schlussfolgerungen verfügbar:

30-37(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv in z.*

$\rightarrow$) *$m \subseteq M$.*

Dann folgt:

a) $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$

b) $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$

c) $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$

Beweis **30-37** `a)`

`Thema1` $(\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\ldots \alpha\_m\_\beta \ldots$" und
aus →) "$m \subseteq M$"
folgt via **30-5**: α_M_β.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\ldots \beta\_m\_\gamma$" und
aus →) "$m \subseteq M$"
folgt via **30-5**: β_M_β.

`3:` Aus →) "M transitiv in z",
aus `Thema1`"$\alpha \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \gamma \in z \ldots$",
aus `2.1`"α_M_β" und
aus `2.2`"β_M_γ"
folgt via **30-30(Def)**: α_M_γ.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$$

`b)`

`Thema1` $(\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)$.

`2:` Aus `Thema1`"$\ldots \alpha\_m\_\beta \ldots$" und
aus →) "$m \subseteq M$"
folgt via **30-5**: α_M_β.

`3:` Aus →) "M transitiv in z",
aus `Thema1`"$\alpha \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \gamma \in z \ldots$",
aus `2`"α_M_β" und
aus `Thema1`"$\ldots \beta\_M\_\gamma$"
folgt via **30-30(Def)**: α_M_γ.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$$

Beweis **30-37** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\gamma)$.

`2:` Aus `Thema1`"$\ldots \beta\_m\_\gamma$" und
aus →) "$m \subseteq M$"
folgt via **30-5**: β_M_γ.

`3:` Aus →) "M transitiv in z",
aus `Thema1`"$\alpha \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \gamma \in z \ldots$",
aus `Thema1`"$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$" und
aus `2`"β_M_γ"
folgt via **30-30(Def)**: α_M_γ.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$$

□

30-38. Es werden drei Aussagen über M, wenn M transitiv ist, angegeben. Während `b)` im Hinblick arf **30-31** wenig überrascht, ist Aussage `a)` bemerkenswert, da *nicht* vorausgesetzt wird, dass p, q, w Mengen sind:

30-38(Satz)

`a)` *Aus "M transitiv" und "p_M_q" und "q_M_w" folgt "p_M_w".*

`b)` *Aus "M transitiv" folgt "M transitiv in z".*

Beweis **30-38** `a)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_M\_w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv…"
folgt via **30-30(Def)**: M transitiv in $\mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "…p_M_q…"
folgt via **30-2**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "…q_M_w"
folgt via **30-2**: w Menge.

`3.1:` Aus `2.1`"p Menge…"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.1`"…q Menge"
folgt via **0-19**: $q \in \mathcal{U}$.

`3.3:` Aus `2.2`"w Menge"
folgt via **0-19**: $w \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `1`"M transitiv in $\mathcal{U}$",
aus `3.1`"$p \in \mathcal{U}$",
aus `3.2`"$q \in \mathcal{U}$",
aus `3.3`"$w \in \mathcal{U}$",
aus `VS` gleich "…p_M_q…" und
aus `VS` gleich "…q_M_w"
folgt via **30-30(Def)**: p_M_w.

`b)` `VS` gleich M transitiv.

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv…"
folgt via **30-30(Def)**: M transitiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`"M transitiv in $\mathcal{U}$" und
aus `2`"$z \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **30-31**: M transitiv in z.

□

30-39. Auf Grund folgender Beispiele wird hier fest gehalten:

30-39.Bemerkung

- Die Aussage
  "$((M$ transitiv$) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ transitiv$)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M$ transitiv$) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ transitiv$)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M$ transitiv$) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ transitiv in $z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M$ transitiv$) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ transitiv in $z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

30-40. Gemäß folgenden Beispiels ist die Aussage "$((M \text{ transitiv}) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m \text{ transitiv})$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

30-40.BEISPIEL

Es gelte:

→) p Menge.

→) q Menge.

→) $p \neq q$.

→) $M = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$.

→) $m = \{(p,q),(q,p)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $m \subseteq M$.

c) $\neg(m \text{ transitiv})$.

Ad c): Es gilt p_m_q und q_m_p, aber es gilt *nicht* p_m_p.

30-41. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, ist die Aussage “ $((M$ transitiv in $) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ transitiv $)$” nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>30-41.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\longrightarrow)$ p Menge.

$\longrightarrow)$ q Menge.

$\longrightarrow)$ $p \neq q$.

$\longrightarrow)$ $M = \{(p,p)\}$.

$\longrightarrow)$ $n = \{(p,p),(p,q),(q,p)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $M \subseteq n$.

c) $\neg(n$ transitiv$)$.

Ad c): Es gilt q_n_p und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_q.

30-42. Gemäß folgenden Beispiels ist die Aussage "$((M \text{ transitiv}) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m \text{ transitiv in } z)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>30-42.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$.

$\rightarrow$) $m = \{(p,q),(q,p)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $m \subseteq M$.

c) $\neg(m \text{ transitiv in } z)$.

Ad c): Es gilt $p \in z, q \in z, p \in z$ und p_m_q und q_m_p, aber es gilt *nicht* p_m_p.

30-43. Gemäß folgenden Beispiels ist die Aussage "$((M \text{ transitiv}) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n \text{ transitiv in } z)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>30-43.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $n = \{(p, p), (p, q), (q, p)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p, q\}$.

Dann folgt:

`a)` M transitiv.

`b)` $M \subseteq n$.

`c)` $\neg(n \text{ transitiv in } z)$.

Ad `c)`: Es gilt $q \in z, p \in z, q \in z$ und q_n_p und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_q.

30-44. Wie in **30-39(Bem)** angedeutet, folgt aus "M transitiv" und "$m \subseteq M$" nicht notwendiger Weise "m transitiv" . Statt dessen sind schwächere Schlussfolgerungen verfügbar:

30-44(Satz)

Aus "M transitiv" und "$m \subseteq M$" und ...

a) *... und "p_m_q" und "q_m_w" folgt "p_M_w".*

b) *... und "p_m_q" und "q_M_w" folgt "p_M_w".*

c) *... und "p_M_q" und "q_m_w" folgt "p_M_w".*

Beweis **30-44** a) VS gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (m \subseteq M) \wedge (p\_m\_q) \wedge (q\_m\_w)$.

1.1: Aus VS gleich “$\ldots p\_m\_q \ldots$” und
aus VS gleich “$\ldots m \subseteq M \ldots$”
folgt via **30-5**: p_M_q.

1.2: Aus VS gleich “$\ldots q\_m\_w$” und
aus VS gleich “$\ldots m \subseteq M \ldots$”
folgt via **30-5**: q_M_w.

2: Aus VS gleich “M transitiv…”,
aus 1.1“p_M_q” und
aus 1.2“q_M_w”
folgt via **30-38**: p_M_w.

b) VS gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (m \subseteq M) \wedge (p\_m\_q) \wedge (q\_M\_w)$.

1: Aus VS gleich “$\ldots p\_m\_q \ldots$” und
aus VS gleich “$\ldots m \subseteq M \ldots$”
folgt via **30-5**: p_M_q.

2: Aus VS gleich “M transitiv…”,
aus 1“p_M_q” und
aus VS gleich “$\ldots q\_M\_w$”
folgt via **30-38**: p_M_w.

c) VS gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (m \subseteq M) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_m\_w)$.

1: Aus VS gleich “$\ldots q\_m\_w$” und
aus VS gleich “$\ldots m \subseteq M \ldots$”
folgt via **30-5**: q_M_w.

2: Aus VS gleich “M transitiv…”,
aus VS gleich “$\ldots p\_M\_q \ldots$” und
aus 1“q_M_w”
folgt via **30-38**: p_M_w.

$\square$

30-45. M ist genau dann **antiSymmetrisch in** z, wenn für alle Elemente α, β aus z, für die *sowohl* α_M_β *als auch* β_M_α gilt, die Gleichung $\alpha = \beta$ folgt:

30-45(Definition)

1) "M **antiSymmetrisch in** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta).$$

2) "M **antiSymmetrisch**" genau dann, wenn gilt:

$$M \text{ antiSymmetrisch in } \mathcal{U}.$$

30-46. Falls M antiSymmetrisch in z ist und falls $m \subseteq M$ und $v \subseteq z$ gilt, dann ist m antiSymmetrisch in v. Die Spezialfälle "$m = M$" und "$v = z$" werden gesondert angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-46(Satz)

Aus "M antiSymmetrisch in z" und ...

`a)` *... und "$v \subseteq z$" folgt "M antiSymmetrisch in v".*

`b)` *... und "$m \subseteq M$" folgt "m antiSymmetrisch in z".*

`c)` *... und "$m \subseteq M$" und "$v \subseteq z$" folgt "m antiSymmetrisch in v".*

<u>Beweis **30-46**</u> `c)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch in } z) \wedge (m \subseteq M) \wedge (v \subseteq z)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\alpha)$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\ldots \alpha\_m\_\beta \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots m \subseteq M \ldots$”
folgt via **30-5**: α_M_β.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta\_m\_\alpha$” und
aus `VS` gleich “$\ldots m \subseteq M \ldots$”
folgt via **30-5**: β_M_α.

`2.3:` Aus `Thema1`“$\alpha \in v \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots v \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.4:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta \in v \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots v \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`3:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch in z”,
aus `2.3`“$\alpha \in z$”,
aus `2.4`“$\beta \in z$”,
aus `2.1`“α_M_β” und
aus `2.2`“β_M_α”
folgt via **30-45(Def)**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \wedge (\alpha\_m\_\beta) \wedge (\beta\_m\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Konsequenz via **30-45(Def)**: m antiSymmetrisch in v.

Beweis **30-46** `a)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch in } z) \wedge (v \subseteq z)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch in $z \ldots$",
aus `1` "$M \subseteq M$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: M antiSymmetrisch in v.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch in } z) \wedge (m \subseteq M)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch in $z \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \subseteq M$" und
aus `1` "$z \subseteq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: m antiSymmetrisch in z.

□

30-47. Es werden zwei Aussagen über M, wenn M antiSymmetrisch ist, angebeben. Während `b)` im Hinblick auf **30-31** wenig überrascht, ist Aussage `a)` bemerkenswert, da *nicht* vorausgesetzt wird, dass p, q Mengen sind:

30-47(Satz)

`a)` *Aus "M antiSymmetrisch" und "p_M_q" und "q_M_p" folgt "$p = q$".*

`b)` *Aus "M antiSymmetrisch" folgt "M antiSymmetrisch in z".*

Beweis **30-47** `a)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" folgt via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "…p_M_q…" folgt via **30-2**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus 2"p Menge…" folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus 2"…q Menge" folgt via **0-19**: $q \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `1`"M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$",
aus `3.1`"$p \in \mathcal{U}$",
aus `3.2`"$q \in \mathcal{U}$",
aus `VS` gleich "…p_M_q…" und
aus `VS` gleich "…q_M_p"
folgt via **30-45(Def)**: $p = q$.

`b)` `VS` gleich M antiSymmetrisch.

`1:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" folgt via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`"M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$" und
aus `2`"$z \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **30-46**: M antiSymmetrisch in z.

$\square$

30-48. Es wird **30-46** `bc)` auf “M antiSymmetrisch” übertragen. **30-46** `a)` ist wegen “$z \subseteq \mathcal{U}$” in **30-47** enthalten:

> **<u>30-48(Satz)</u>**
>
> *Aus “M antiSymmetrisch” und ...*
>
> `a)` *... und “$m \subseteq M$” folgt “m antiSymmetrisch”.*
>
> `b)` *... und “$m \subseteq M$” folgt “m antiSymmetrisch in z”.*

<u>Beweis **30-48**</u> `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (m \subseteq M)$.

`1:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch...”
folgt via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots m \subseteq M$”
folgt via **30-38**: m antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

`3.a):` Aus `2`“m antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$”
folgt via **30-45(Def)**: m antiSymmetrisch.

`4.b):` Aus `3.a)`“m antiSymmetrisch”
folgt via **30-47**: m antiSymmetrisch in z.

□

30-49. M ist genau dann **symmetrisch in** z, wenn für alle Elemente α, β von z aus "$\alpha \_ M \_ \beta$" die Aussage "$\beta \_ M \_ \alpha$" folgt:

30-49(Definition)

1) "M **symmetrisch in** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha \_ M \_ \beta)) \Rightarrow (\beta \_ M \_ \alpha).$$

2) "M **symmetrisch**" genau dann, wenn gilt:

$$M \text{ symmetrisch in } \mathcal{U}.$$

30-50 Falls M symmetrisch in z ist, dann ist M auch in jeder TeilKlasse von z symmetrisch:

30-50(Satz)

Aus "M symmetrisch in z" und "$v \subseteq z$" folgt "M symmetrisch in v".

Beweis **30-50** `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (v \subseteq z)$.

`Thema1` $(\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$.

`1.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in v \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`1.2:` Aus `Thema1`"$\ldots \beta \in v \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch in $z \ldots$",
aus `1.1`"$\alpha \in z$",
aus `1.2`"$\beta \in z$" und
aus `Thema1`"$\ldots \alpha\_M\_\beta$"
folgt via **30-49(Def)**: β_M_α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-49(Def)**: M symmetrisch in v.

□

30-51. In Bezug auf nachfolgende Beispiele wird fest gehalten:

30-51.Bemerkung

- Die Aussage
  "$((M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m \text{ symmetrisch in } z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n \text{ symmetrisch in } z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (m \subseteq M) \wedge (v \subseteq z))$
  $\Rightarrow (m \text{ symmetrisch in } v)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z))$
  $\Rightarrow (n \text{ symmetrisch in } v)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

30-52. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass die Aussage "$((M$ symmetrisch in $z) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ symmetrisch in $z)$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

30-52.BEISPIEL

Es gelte:

→) p Menge.

→) q Menge.

→) $p \neq q$.

→) $M = \{(p,q),(q,p)\}$.

→) $m = \{(p,q)\}$.

→) $z = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch in z.

b) $m \subseteq M$.

c) $\neg(m$ symmetrisch in $z)$.

Ad c): Es gilt $p \in z, q \in z$ und p_m_q, aber es gilt *nicht* q_m_p.

30-53. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass die Aussage "$((M$ symmetrisch in $z) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ symmetrisch in $z)$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

30-53.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $n = \{(p, p), (p, q)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch in z.

b) $M \subseteq n$.

c) $\neg(n$ symmetrisch in $z)$.

Ad c): Es gilt $p \in z, q \in z$ und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_p.

30-54. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass die Aussage "$((M$ symmetrisch in $z) \wedge (m \subseteq M) \wedge (v \subseteq z)) \Rightarrow (m$ symmetrisch in $v)$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

30-54.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, q), (q, p)\}$.

$\rightarrow$) $m = \{(p, q)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p, q\}$.

$\rightarrow$) $v = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch in z.

b) $m \subseteq M$.

c) $v \subseteq z$.

d) $\neg(m$ symmetrisch in $v)$.

Ad d): Es gilt $p \in v, q \in v$ und p_m_q, aber es gilt *nicht* q_m_p.

30-55. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass die Aussage "$((M$ symmetrisch in $z) \wedge (M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z)) \Rightarrow (n$ symmetrisch in $v)$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

30-55.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $n = \{(p, p), (p, q)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p, q\}$.

$\rightarrow$) $v = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch in z.

b) $M \subseteq n$.

c) $v \subseteq z$.

d) $\neg(n$ symmetrisch in $v)$.

Ad d): Es gilt $p \in v, q \in v$ und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_p.

30-56. Wie in **30-51(Bem)** angedeutet, folgt aus “M symmetrisch in z” und “$m \subseteq M$” nicht notwendiger Weise “m symmetrisch in z”. Statt dessen sind schwächere Schlussfolgerungen verfügbar:

30-56(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M symmetrisch in z.*

$\rightarrow$) $m \subseteq M$.

$\rightarrow$) $p \in z$.

$\rightarrow$) $q \in z$.

$\rightarrow$) p_m_q.

Dann folgt “q_M_p”.

Beweis **30-56**

1: Aus $\rightarrow$) “$m \subseteq M$” und
aus $\rightarrow$) “p_m_q”
folgt via **30-5**: p_M_q.

2: Aus $\rightarrow$) “M symmetrisch in z”,
aus $\rightarrow$) “$p \in z$”,
aus $\rightarrow$) “$q \in z$” und
aus 1 “p_M_q”
folgt via **30-49(Def)**: q_M_p.

$\square$

30-57. Es werden zwei Aussagen über M, wenn M symmetrisch ist, angebeben. Während `b)` im Hinblick auf **30-50** wenig überrascht, ist Aussage `a)` bemerkenswert, da *nicht* vorausgesetzt wird, dass p, q Mengen sind:

30-57(Satz)

`a)` *Aus "M symmetrisch" und "p_M_q" folgt "q_M_p".*

`b)` *Aus "M symmetrisch" folgt "M symmetrisch in z".*

Beweis **30-57** `a)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (p\_M\_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch..."
folgt via **30-49(Def)**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q$"
folgt via **30-2**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus `2`"p Menge..."
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots q$ Menge"
folgt via **0-19**: $q \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `1`"M symmetrisch in $\mathcal{U}$",
aus `3.1`"$p \in \mathcal{U}$",
aus `3.2`"$q \in \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q$"
folgt via **30-49(Def)**: q_M_p.

`b)` `VS` gleich M symmetrisch.

`1:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch..."
folgt via **30-49(Def)**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`"M symmetrisch in $\mathcal{U}$" und
aus `2`"$z \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **30-50**: M symmetrisch in z.

□

30-58. In Bezug auf nachfolgende Beispiele werden einige Ergänzungen zur Symmetrie fest gehalten:

30-58.Bemerkung

- Die Aussage
“$((M$ symmetrisch$) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ symmetrisch$)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“$((M$ symmetrisch$) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ symmetrisch$)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“$((M$ symmetrisch$) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ symmetrisch in $z)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“$((M$ symmetrisch in $x) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ symmetrisch in $z)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

30-59. Laut folgendem Beispiel ist die Aussage "$((M$ symmetrisch$) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ symmetrisch$)$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

30-59.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, q), (q, p)\}$.

$\rightarrow$) $m = \{(p, q)\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch.

b) $m \subseteq M$.

c) $\neg(m$ symmetrisch$)$.

Ad c): Es gilt p_m_q, aber es gilt *nicht* q_m_p.

30-60. Laut folgendem Beispiel ist die Aussage "$((M$ symmetrisch$) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ symmetrisch$)$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

<u>30-60.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ p Menge.

$\rightarrow\!)$ q Menge.

$\rightarrow\!)$ $p \neq q$.

$\rightarrow\!)$ $M = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow\!)$ $n = \{(p, p), (p, q)\}$.

Dann folgt:

`a)` M symmetrisch.

`b)` $M \subseteq n$.

`c)` $\neg(n$ symmetrisch$)$.

Ad `c)`: Es gilt p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_p.

30-61. Laut folgendem Beispiel ist die Aussage "$((M$ symmetrisch$) \wedge (m \subseteq M)) \Rightarrow (m$ symmetrisch in $z)$" nich ohne Weiteres verfügbar ist:

<u>30-61.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ p Menge.

$\rightarrow)$ q Menge.

$\rightarrow)$ $p \neq q$.

$\rightarrow)$ $M = \{(p,q),(q,p)\}$.

$\rightarrow)$ $m = \{(p,q)\}$.

$\rightarrow)$ $z = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch.

b) $m \subseteq M$.

c) $\neg(m$ symmetrisch in $z)$.

Ad c): Es gilt $p \in z, q \in z$ und p_m_q, aber es gilt *nicht* q_m_p.

30-62. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass die Aussage “$((M$ symmetrisch in $z) \wedge (M \subseteq n)) \Rightarrow (n$ symmetrisch in $z)$” nich ohne Weiteres verfügbar ist:

30-62.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p,p)\}$.

$\rightarrow$) $n = \{(p,p),(p,q)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) M symmetrisch.

b) $M \subseteq n$.

c) $\neg(n$ symmetrisch in $z)$.

Ad c): Es gilt $p \in z, q \in z$ und p_n_q, aber es gilt *nicht* q_n_p.

30-63. Wie in **30-58(Bem)** angedeutet, folgt aus "M symmetrisch" und "$m \subseteq M$" nicht notwendiger Weise "m symmetrisch". Statt dessen sind schwächere Schlussfolgerungen verfügbar:

30-63(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M symmetrisch.*

$\rightarrow$) $m \subseteq M$.

$\rightarrow$) p_m_q.

Dann folgt "q_M_p".

Beweis **30-63**

1: Aus $\rightarrow$) "$m \subseteq M$" und
aus $\rightarrow$) "p_m_q"
folgt via **30-5**: p_M_q.

2: Aus $\rightarrow$) "M symmetrisch" und
aus 1 "p_M_q"
folgt via **30-57**: q_M_p.

□

30-64. M ist genau dann **konnex in** z, wenn für alle Elemente α, β von z *mindestens eine* der Aussagen "$\alpha \_ M \_ \beta$" oder "$\beta \_ M \_ \alpha$" oder "$\alpha = \beta$" zutrifft:

30-64(Definition)

1) "M **konnex in** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)) \Rightarrow ((\alpha \_ M \_ \beta) \vee (\beta \_ M \_ \alpha) \vee (\alpha = \beta)).$$

2) "M **konnex**" genau dann, wenn gilt:

$$M \text{ konnex in } \mathcal{U}.$$

30-65. Falls M konnex in z ist und falls $M \subseteq n$ und falls $v \subseteq z$ gilt, dann ist n konnex in v. Die Spezialfälle "$M = n$" und "$v = z$" werden gesondert dargestellt. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-65(Satz)

Aus "M konnex in z" und ...

`a)` *... und "$v \subseteq z$" folgt "M konnex in v".*

`b)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "n konnex in z".*

`c)` *... und "$M \subseteq n$" und "$v \subseteq z$" folgt "n konnex in v".*

Beweis **30-65** `c)VS` gleich $(M \text{ konnex in } z) \wedge (M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z)$.

`Thema1` $(\alpha \in v) \wedge (\beta \in v)$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in v \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \beta \in v$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`3:` Aus →) "M konnex in z",
aus `2.1` "$\alpha \in z$" und
aus `2.2` "$\beta \in z$"
folgt via **30-64(Def)**: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **30-65** `c)VS` gleich $(M \text{ konnex in } z) \wedge (M \subseteq n) \wedge (v \subseteq z)$.

...

`Thema1` $(\alpha \in v) \wedge (\beta \in v)$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` α_M_β.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n \ldots$" und
aus `3.1.Fall`"α_M_β"
folgt via **30-5**: α_n_β.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`3.2.Fall` β_M_α.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n \ldots$" und
aus `3.2.Fall`"β_M_α"
folgt via **30-5**: β_n_α.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`3.3.Fall` $\alpha = \beta$.

Aus `3.3.Fall`"$\alpha = \beta$"
folgt: $(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in v) \wedge (\beta \in v) \Rightarrow ((\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha) \vee (\alpha = \beta))$.

Konsequenz via **30-64(Def)**: n konnex in v.

Beweis **30-65** `a)` `VS` gleich $(M \text{ konnex in } z) \wedge (v \subseteq z)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "M konnex in $z \ldots$",
aus `1` "$M \subseteq M$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: M konnex in v.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ konnex in } z) \wedge (M \subseteq n)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "M konnex in $z \ldots$",
aus `VS` gleich "$M \subseteq n$" und
aus `1` "$z \subseteq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: n konnex in z.

$\square$

30-66. Es werden zwei Aussagen über M, wenn M konnex ist, angebeben:

30-66(Satz)

a) *Aus "M konnex" und "p Menge" und "q Menge" folgt "$(p\_M\_q) \vee (q\_M\_p) \vee (p = q)$".*

b) *Aus "M konnex" folgt "M konnex in z".*

Beweis **30-66** a) VS gleich $(M \text{ konnex}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "M konnex..." folgt via **30-64(Def)**: M konnex in $\mathcal{U}$.

2.1: Aus VS gleich "... p Menge ..." folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

2.2: Aus VS gleich "... q Menge" folgt via **0-19**: $q \in \mathcal{U}$.

3: Aus 1"M konnex in $\mathcal{U}$", aus 2.1"$p \in \mathcal{U}$" und aus 2.2"$q \in \mathcal{U}$" folgt via **30-64(Def)**: $(p\_M\_q) \vee (q\_M\_p) \vee (p = q)$.

b) VS gleich M konnex.

1: Aus →) "M konnex" folgt via **30-64(Def)**: M konnex in $\mathcal{U}$.

2: Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

3: Aus 1"M konnex in $\mathcal{U}$" und aus 2"$z \subseteq \mathcal{U}$" folgt via **30-65**: M konnex in z.

□

30-67. Es wird **30-65** `bc)` auf "M konnex" übertragen. **30-65** `a)` ist wegen "$z \subseteq \mathcal{U}$" in **30-6** enthalten:

30-67(Satz)

Aus "M konnex" und ...

`a)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "n konnex".*

`b)` *... und "$M \subseteq n$" folgt "n konnex in z".*

Beweis **30-67** `VS` gleich $M \subseteq n$.

`1:` Aus →) "M konnex"
folgt via **30-64(Def)**: M konnex in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "M konnex in $\mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$M \subseteq n$"
folgt via **30-65**: n konnex in $\mathcal{U}$.

`3.a):` Aus `2` "n konnex in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-64(Def)**: n konnex.

`4.b):` Aus `3.a)` "n konnex"
folgt via **30-66**: n konnex in z.

□

30-68. K ist genau dann eine M**_Kette**, wenn für alle $\alpha, \beta \in K$ die Aussage "α_M_β" oder die Aussage "β_M_α" zutrifft:

30-68(Definition)

"K **ist** M**_Kette**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)).$$

30-69. Falls K eine M_Kette ist, dann ist M reflexiv und konnex in K. Jede M_Kette ist TeilKlasse von $\mathsf{dom}\,M$ und von $\mathsf{ran}\,M$. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b) - d)`:

30-69(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

Dann folgt:

`a)` $K \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

`b)` $K \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`c)` *M reflexiv in K.*

`d)` *M konnex in K.*

Beweis **30-69** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in K$.

`2:` Aus $\rightarrow$)"K ist M_Kette",
aus `Thema1`"$\alpha \in K$" und
aus `Thema1`"$\alpha \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus 2
folgt: α_M_α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: M reflexiv in K.

Beweis **30-69** `ab)`

`1:` Aus →) “ K ist M_Kette”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: M reflexiv in K.

`2.a):` Aus `1` “ M reflexiv in K”
folgt via **30-18**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2.b):` Aus `1` “ M reflexiv in K”
folgt via **30-18**: $K \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`d)`

`Thema1` $(\alpha \in K) \wedge (\beta \in K)$.

`2:` Aus →) “ K ist M_Kette”,
aus `Thema1` “ $\alpha \in K \ldots$ ” und
aus `Thema1` “ $\ldots \beta \in K$ ”
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus 2
folgt: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha) \vee (\alpha = \beta))$.

Konsequenz via **30-64(Def)**: M konnex in K.

□

30-70. Falls K eine M_Kette ist und falls $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ - oder M - eine Menge ist, dann ist K eine Menge. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`.

30-70(Satz)

`a)` *Aus "K ist M_Kette" und "M Menge" folgt "K Menge".*

`b)` *Aus "K ist M_Kette" und "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge" folgt "K Menge".*

Beweis **30-70** `b)` `VS` gleich $(K$ ist M_Kette$) \wedge ((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette…"
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette…"
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus `1.1` "$K \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `1.2` "$K \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-12**: $K \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus `2` "$K \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `VS` gleich "… $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: K Menge.

`a)` `VS` gleich $(K$ ist M_Kette$) \wedge (M$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "… M Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, M$ Menge.

`2:` Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `2` "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, M$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette…" und
aus `3` "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: K Menge.

□

30-71. Falls K eine M_Kette ist dann gilt für alle $\alpha \in K$ die Aussage "α_M_α", woraus auch folgt, dass für alle $\alpha \in K$ und für alle β mit $\alpha = \beta$ die Aussage "α_M_β" gilt. Falls K eine M_Kette ist und falls α, β Elemente von K mit $\neg(\alpha\_M\_\beta)$ sind, dann folgt die Aussage "β_M_α":

30-71(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

Dann folgt:

a) $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha)$.

b) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta))$.

c) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

d) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$.

<u>Beweis **30-71**</u> `abc)`

`1:` Aus →) “ K ist M_Kette”
folgt via **30-69**: M reflexiv in K.

`2.a):` Aus `1`“ M reflexiv in K”
folgt via **30-17(Def)**: $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha)$.

`2.b):` Aus `1`“ K reflexiv in M”
folgt via **30-19**:
$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in K) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta))$.

`2.c):` Aus `1`“ K reflexiv in M”
folgt via **30-19**: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in K) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

`d)`

`Thema1` $(\alpha \in K) \wedge (\beta \in K) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))$.

`2:` Aus →) “ K ist M_Kette”,
aus `Thema1`“ $\alpha \in K \ldots$” und
aus `Thema1`“ $\ldots \beta \in K \ldots$”
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus `2`“ $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$” und
aus `Thema1`“ $\ldots \neg(\alpha\_M\_\beta)$”
folgt: β_M_α.

Ergo `Thema1`:
$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$.
□

30-72. 0 ist eine M_Kette und falls p_M_p, dann ist $\{p\}$ eine M_Kette:

30-72(Satz)

a) 0 *ist* M*_Kette.*

b) *Aus "*p_M_p*" folgt "*$\{p\}$ *ist* M*_Kette".*

Beweis **30-72** a)

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)$.
>
> Es gilt Thema1"$\alpha \in 0 \ldots$".
> Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
> Ex falso quodlibet folgt: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: 0 ist M_Kette.

b) VS gleich p_M_p.

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in \{p\}) \wedge (\beta \in \{p\})$.
>
> 2.1: Aus Thema1"$\alpha \in \{p\} \ldots$"
> folgt via **1-6**: $\alpha = p$.
>
> 2.2: Aus Thema1"$\ldots \beta \in \{p\}$"
> folgt via **1-6**: $\beta = p$.
>
> 3: Aus 2.1"$\alpha = p$" und
> aus VS gleich "p_M_p"
> folgt: α_M_p.
>
> 4: Aus 3"α_M_p" und
> aus 2.2"$\beta = p$"
> folgt: α_M_β.
>
> 5: Aus 4
> folgt: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \{p\}) \wedge (\beta \in \{p\})) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: $\{p\}$ ist M_Kette.

$\square$

30-73. Falls K eine M_Kette ist und falls $L \subseteq K$ und falls $M \subseteq n$, dann ist L eine n_Kette. Die Spezialfälle “$M = n$” und “$L = K$” werden gesondert angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

30-73(Satz)

Aus “K ist M_Kette” und ...

`a)` *... und “$L \subseteq K$” folgt “L ist M_Kette”.*

`b)` *... und “$M \subseteq n$” folgt “K ist n_Kette”.*

`c)` *... und “$M \subseteq n$” und “$L \subseteq K$” folgt “L ist n_Kette”.*

Beweis **30-73** `c)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (M \subseteq n) \wedge (L \subseteq K)$.

`Thema1` $(\alpha \in L) \wedge (\beta \in L)$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in L \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots L \subseteq K$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in K$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \beta \in L$" und
aus `VS` gleich "$\ldots L \subseteq K$"
folgt via **0-4**: $\beta \in K$.

`3:` Aus `VS` gleich "K ist $M_$Kette…",
aus `2.1` "$\alpha \in K$" und
aus `2.2` "$\beta \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` α_M_β.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n \ldots$" und
aus `3.1.Fall` "α_M_β"
folgt via **30-5**: α_n_β.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha)$.

`3.2.Fall` β_M_α.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots M \subseteq n \ldots$" und
aus `3.2.Fall` "β_M_α"
folgt via **30-5**: β_n_α.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in L) \wedge (\beta \in L)) \Rightarrow ((\alpha\_n\_\beta) \vee (\beta\_n\_\alpha))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: L ist $n_$Kette.

Beweis **30-73** `a)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (L \subseteq K)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $M \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette…",
aus `1` "$M \subseteq M$" und
aus `VS` gleich "… $L \subseteq K$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: L ist M_Kette.

`b)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \subseteq n)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $K \subseteq K$.

`2:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette…",
aus `VS` gleich "… $M \subseteq n$" und
aus `1` "$K \subseteq K$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: K ist n_Kette.

□

30-74. Falls K eine M_Kette ist, dann sind $K \setminus L$ und $K \cap L$ und $L \cap K$ ebenfalls M_Ketten:

30-74(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

Dann folgt:

a) *“$K \cap L$ ist M_Kette” und “$L \cap K$ ist M_Kette”.*

b) *$K \setminus L$ ist M_Kette.*

Beweis **30-74** a)

1: Via **2-7** gilt: $(K \cap L \subseteq K) \wedge (L \cap K \subseteq K)$.

2.1: Aus $\rightarrow$)“K ist M_Kette” und
aus 1“$K \cap L \subseteq K \ldots$”
folgt via **30-73**: $K \cap L$ ist M_Kette.

2.2: Aus $\rightarrow$)“K ist M_Kette” und
aus 1“$\ldots L \cap K \subseteq K$”
folgt via **30-73**: $L \cap K$ ist M_Kette.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(K \cap L$ ist M_Kette$) \wedge (L \cap K$ ist M_Kette$)$.

b)

1: Via **5-5** gilt: $K \setminus L \subseteq K$.

2: Aus $\rightarrow$)“K ist M_Kette” und
aus 1“$K \setminus L \subseteq K$”
folgt via **30-73**: $K \setminus L$ ist M_Kette.

□

30-75. Falls X eine M_Kette als Element hat, dann ist $\bigcap X$ eine M_Kette:

30-75(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $K \in X$.

$\rightarrow$) K *ist* M*_Kette.*

Dann folgt "$\bigcap X$ *ist* M*_Kette".*

Beweis **30-75**

1: Aus $\rightarrow$) "$K \in X$"
folgt via **1-15**: $\bigcap X \subseteq K$.

2: Aus $\rightarrow$) "K ist M_Kette" und
aus 1 "$\bigcap X \subseteq K$"
folgt via **30-73**: $\bigcap X$ ist M_Kette.

$\square$

30-76. Sind alle Elemente einer Klasse X einerseits M_Ketten und andererseits wechselseitig TeilKlassen, dann ist $\bigcup X$ eine M_Kette:

30-76(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in X) \Rightarrow (\alpha \textit{ ist } M\_\textit{Kette})$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in X) \wedge (\beta \in X)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Dann folgt "$\bigcup X$ ist M_Kette".

Beweis **30-76**

`Thema1` $(\gamma \in \bigcup X) \wedge (\delta \in \bigcup X).$

`2.1:` Aus `Thema1` "$\gamma \in \bigcup X \ldots$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\gamma \in \Omega) \wedge (\Omega \in X).$

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \delta \in \bigcup X$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : (\delta \in \Psi) \wedge (\Psi \in X).$

`3:` Aus `2.1` "$\ldots \Omega \in X$",
aus `2.2` "$\ldots \Psi \in X$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in X) \wedge (\beta \in X))$
$\Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt: $(\Omega \subseteq \Psi) \vee (\Psi \subseteq \Omega).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega \subseteq \Psi.$

`4.1:` Aus `2.1` "$\ldots \gamma \in \Omega \ldots$" und
aus `3.1.Fall` "$\Omega \subseteq \Psi$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \Psi.$

`4.2:` Aus `2.2` "$\ldots \Psi \in X$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in X) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette})$"
folgt: Ψ ist M_Kette.

`5:` Aus `4.2` "Ψ ist M_Kette",
aus `4.1` "$\gamma \in \Psi$" und
aus `2.2` "$\ldots \delta \in \Psi \ldots$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma).$

...

...

Beweis **30-76**

...

`Thema1` $(\gamma \in \bigcup X) \wedge (\delta \in \bigcup X)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $\Psi \subseteq \Omega$.

`4.1:` Aus `2.2`"$\ldots \delta \in \Psi \ldots$" und
aus `3.2.Fall`"$\Psi \subseteq \Omega$"
folgt via **0-4**: $\delta \in \Omega$.

`4.2:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega \in X$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in X) \Rightarrow (\alpha$ ist M_Kette)"
folgt: Ω ist M_Kette.

`5:` Aus `4.2`"Ω ist M_Kette",
aus `2.1`"$\ldots \gamma \in \Omega \ldots$" und
aus `4.1`"$\delta \in \Omega$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \bigcup X) \wedge (\delta \in \bigcup X)) \Rightarrow ((\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: $\bigcup X$ ist M_Kette.

$\square$

30-77. Wenn K, L jeweils eine M_Kette ist und wenn für alle $\alpha \in K$ und alle $\beta \in L$ die "Ketten-Eigenschaft" $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$ gilt, dann ist $K \cup L$ eine M_Kette. Interessanter Weise - und im Gegensatz zu **30-76**, wo wegen des **ElementAxioms** ausschließlich *Mengen* als M_Ketten auftreten - muss hier weder K noch L eine Menge sein:

30-77(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *K ist M_Kette.*

$\rightarrow)$ *L ist M_Kette.*

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in L)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha))$.

Dann folgt "$K \cup L$ ist M_Kette".

Beweis **30-77**

`Thema1` $(\gamma \in K \cup L) \wedge (\delta \in K \cup L)$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\gamma \ldots \in K \cup L$"
folgt via **2-2**: $(\gamma \in K) \vee (\gamma \in L)$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \delta \in K \cup L$"
folgt via **2-2**: $(\delta \in K) \vee (\delta \in L)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $((\gamma \in K) \vee (\gamma \in L)) \wedge ((\delta \in K) \vee (\delta \in L))$.

`4:` Aus `3`
folgt:
$$(\gamma \in K) \wedge (\delta \in K)$$
$$\vee$$
$$(\gamma \in K) \wedge (\delta \in L)$$
$$\vee$$
$$(\gamma \in L) \wedge (\delta \in K)$$
$$\vee$$
$$(\gamma \in L) \wedge (\delta \in L).$$

...

Beweis **30-77**

...

`Thema1` $(\gamma \in K \cup L) \wedge (\delta \in K \cup L)$

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $(\gamma \in K) \wedge (\delta \in K)$.

Aus →) "K ist M_Kette",
aus `4.1.Fall` "$\gamma \in K \ldots$" und
aus `4.1.Fall` "$\ldots \delta \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

`4.2.Fall` $(\gamma \in K) \wedge (\delta \in L)$

Aus `4.2.Fall` "$\gamma \in K \ldots$",
aus `4.2.Fall` "$\ldots \delta \in L$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in L))$
$\Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha))$"
folgt: $(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

`4.3.Fall` $(\gamma \in L) \wedge (\delta \in K)$.

`5:` Aus `4.3.Fall` "$\ldots \delta \in K$",
aus `4.3.Fall` "$\gamma \in L \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in L))$
$\Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha))$"
folgt: $(\delta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\delta)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

...

...

<u>Beweis **30-77**</u>

...

`Thema1` $(\gamma \in K \cup L) \wedge (\delta \in K \cup L)$

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.4.Fall` $(\gamma \in L) \wedge (\delta \in L)$.

Aus →) "L ist M_Kette",
aus `4.4.Fall` "$\gamma \in L \ldots$" und
aus `4.4.Fall` "$\ldots \delta \in L$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in K \cup L) \wedge (\delta \in K \cup L)) \Rightarrow ((\gamma\_M\_\delta) \vee (\delta\_M\_\gamma))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: $K \cup L$ ist M_Kette.

□

30-78. Als Spezialfall von **30-77** wird nun fest gestellt, dass für jede M_Kette K und für jede Klasse p mit p_M_p die Klasse $\{p\} \cup K$ eine M_Kette ist, falls für jedes $\alpha \in K$ die Aussage "p_M_α" oder "α_M_p" zutrifft:

30-78(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) p_M_p.

$\rightarrow$) K *ist* M_*Kette.*

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$.

Dann folgt "$\{p\} \cup K$ *ist* M_*Kette*".

Beweis **30-78**

1.1: Aus $\rightarrow$) "p_M_p"
folgt via **30-72**: $\{p\}$ ist M_Kette.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in \{p\}) \wedge (\gamma \in K)$.

2: Aus Thema1.2 "$\beta \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\beta = p$.

3: Aus Thema1.2 "$\ldots \gamma \in K$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$"
folgt: $(p\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_p)$.

4: Aus 3 "$(p\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_p)$" und
aus 2 "$\beta = p$"
folgt: $(\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta)$.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall\beta, \gamma : ((\beta \in \{p\}) \wedge (\gamma \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta))$"

2: Aus 1.1 "$\{p\}$ ist M_Kette",
aus $\rightarrow$) "K ist M_Kette" und
aus A1 gleich "$\forall\beta, \gamma : ((\beta \in \{p\}) \wedge (\gamma \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta))$"
folgt via **30-77**: $\{p\} \cup K$ ist M_Kette.

□

Liste der KlassenVariablen, Teil 2. Im Folgenden sind spezielle Relationen, nämlich (antiSymmetrische) Halbordnungen, von besonderem Interesse. Es hat sich eingebürgert, Halbordnungen mit speziellen, sich von den anderen Klassen-Variablen abhebenden Symbolen, die an das klassische "Kleiner-Gleich-Symbol $\leq$" erinnern, zu bezeichnen. Derlei Symbole werden nun in die Essays eingeführt. Diese Symbole weisen keine Rekursiv-Eigenschaft auf:

Liste der KlassenVariablen, Teil 2

Jedes der folgenden Symbole ist KlassenVariable:

$$\preceq \quad \prec \quad \trianglelefteq \quad \triangleleft \quad \sqsubseteq \quad \sqsubset$$

HO-Notation. Anstelle von “$x\_ \preceq \_y$” - wobei “$\preceq$” auch durch ein anderes in der **Liste der KlassenVariablen, Teil 2**, erscheinendes Symbol ersetzt werden kann - wird “$x \preceq y$” geschrieben. Eine Verwechslung mit einer KlassenVariablen ist nicht möglich, da für “$\preceq$” - und für alle anderen in der **Liste der Klassen-Variablen, Teil 2**, erscheinenden Symbole - *keine* Rekursiv-Eigenschaft vorliegt:

...

...

HO-Notation

1) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \preceq \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&\_\preceq\_\overline{\&}$ ” .

2) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \prec \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&\_\prec\_\overline{\&}$ ” .

3) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \trianglelefteq \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&\_\trianglelefteq\_\overline{\&}$ ” .

4) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \triangleleft \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&\_\triangleleft\_\overline{\&}$ ” .

5) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \sqsubseteq \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&\_\sqsubseteq\_\overline{\&}$ ” .

6) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \sqsubset \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&\_\sqsubset\_\overline{\&}$ ” .

30-79. Mit **(antiSymmetrischen) Halbordnungen** betreten zwei klassische, mathematische Konzepte die Essays:

30-79(Definition)

1) "$\preceq$ **Halbordnung in** z" genau dann, wenn gilt:

$\preceq$ Relation in z.

$\wedge$

$\preceq$ reflexiv in z.

$\wedge$

$\preceq$ transitiv in z.

2) "$\preceq$ **antiSymmetrische Halbordnung in** z"

genau dann, wenn gilt:

$\preceq$ Relation in z.

$\wedge$

$\preceq$ reflexiv in z.

$\wedge$

$\preceq$ transitiv in z.

$\wedge$

$\preceq$ antiSymmetrisch in z.

30-80. Wenn M eine reflexive und transitive Relation ist, dann ist M eine Halbordnung in $\mathcal{U}$:

<u>30-80(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) M *Relation.*

$\rightarrow$) M *reflexiv.*

$\rightarrow$) M *transitiv.*

Dann folgt "M *Halbordnung in* $\mathcal{U}$*".*

<u>Beweis **30-80**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"M Relation"
folgt via **10-4**: M Relation in $\mathcal{U}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"M reflexiv"
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow$)"M transitiv"
folgt via **30-30(Def)**: M transitiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"M Relation in $\mathcal{U}$",
aus `1.2`"M reflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus `1.3`"M transitiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-79(Def)**: M Halbordnung in $\mathcal{U}$.

$\square$

30-81. Mit dem folgenden Satz wird ein später noch sehr hilfreicher Zusammenhang zwischen "p_M_q" und "$q\_M^{-1}\_p$" und "$p\_(M^{-1})^{-1}\_q$" hergestellt:

30-81(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` p_M_q.

`ii)` $q\_M^{-1}\_p$.

`iii)` $p\_(M^{-1})^{-1}\_q$.

Beweis **30-81** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p_M_q.

`1:` Aus `VS` gleich "p_M_q" folgt: $(p, q) \in M$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in M$" folgt via **11-4**: $(q, p) \in M^{-1}$.

`3:` Aus `2`"$(q, p) \in M^{-1}$" folgt: $q\_M^{-1}\_p$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $q\_M^{-1}\_p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q\_M^{-1}\_p$" folgt: $(q, p) \in M^{-1}$.

`2:` Aus `1`"$(q, p) \in M^{-1}$" folgt via **11-4**: $(p, q) \in (M^{-1})^{-1}$.

`3:` Aus `2`"$(p, q) \in (M^{-1})^{-1}$" folgt: $p\_(M^{-1})^{-1}\_q$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p\_(M^{-1})^{-1}\_q$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p\_(M^{-1})^{-1}\_q$" folgt: $(p, q) \in (M^{-1})^{-1}$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in (M^{-1})^{-1}$" folgt via **11-4**: $(p, q) \in M$.

`3:` Aus `2`"$(p, q) \in M$" folgt: p_M_q.

□

30-82. Im folgenden Satz wird ein später hilfreicher Zusammenhang zwischen "$\neg(p\_M\_q)$" und "$\neg(q\_M^{-1}\_p)$" und "$\neg(p\_(M^{-1})^{-1}\_q)$" hergestellt:

30-82(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p\_M\_q)$.

`ii)` $\neg(q\_M^{-1}\_p)$.

`iii)` $\neg(p\_(M^{-1})^{-1}\_q)$.

Beweis **30-82**

`1:` Via **30-81** gilt: $(p\_M\_q) \Leftrightarrow (q\_M^{-1}\_p) \Leftrightarrow (p\_(M^{-1})^{-1}\_q)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(p\_M\_q)) \Leftrightarrow (\neg(q\_M^{-1}\_p)) \Leftrightarrow (\neg(p\_(M^{-1})^{-1}\_q))$.

□

30-83. Nun werden die später hilfreiche Resultate, wonach die in diesem Essaz vorgestellten Konzepte beim Übergang von M zu M^{-1} erhalten bleiben, bewiesen:

30-83(Satz)

a) *“x ist M_vermehrend auf z” genau dann, wenn “x ist M^{-1}_verringernd auf z”.*

b) *“x ist M_verringernd auf z” genau dann, wenn “x ist M^{-1}_vermehrend auf z”.*

c) *“M reflexiv in z” genau dann, wenn “M^{-1} reflexiv in z”.*

d) *“M reflexiv” genau dann, wenn “M^{-1} reflexiv”.*

e) *“M irreflexiv in z” genau dann, wenn “M^{-1} irreflexiv in z”.*

f) *“M irreflexiv” genau dann, wenn “M^{-1} irreflexiv”.*

g) *“M transitiv in z” genau dann, wenn “M^{-1} transitiv in z”.*

h) *“M transitiv” genau dann, wenn “M^{-1} transitiv”.*

i) *“M antiSymmetrisch in z” genau dann, wenn “M^{-1} antiSymmetrisch in z”.*

j) *“M antiSymmetrisch” genau dann, wenn “M^{-1} antiSymmetrisch”.*

k) *“M symmetrisch in z” genau dann, wenn “M^{-1} symmetrisch in z”.*

l) *“M symmetrisch” genau dann, wenn “M^{-1} symmetrisch”.*

m) *“M konnex in z” genau dann, wenn “M^{-1} konnex in z”.*

n) *“M konnex” genau dann, wenn “M^{-1} konnex”.*

o) *“K ist M_Kette” genau dann, wenn “K ist M^{-1}_Kette”.*

p) *“$\preceq$ Halbordnung in z” genau dann, wenn “$\preceq^{-1}$ Halbordnung in z”.*

q) *“$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z” genau dann, wenn “$\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z”.*

Beweis **30-83** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich x ist M_vermehrend auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x ist M_vermehrend auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x ist M_vermehrend auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M^{-1}\_\alpha))$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta)$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M^{-1}\_\alpha)$.

`3:` Aus `2.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M^{-1}\_\alpha))$" und
aus `2.2`"$\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M^{-1}\_\alpha)$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist M^{-1}_verringernd auf z.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x ist M^{-1}_verringernd auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x ist M^{-1}_verringernd auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M^{-1}\_\alpha))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x ist M^{-1}_verringernd auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M^{-1}\_\alpha)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M^{-1}\_\alpha))$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M^{-1}\_\alpha)$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta)$.

`3:` Aus `2.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$" und
aus `2.2`"$\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\beta)$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist M_vermehrend auf z.

Beweis **30-83** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich x ist M_verringernd auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x ist M_verringernd auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\Omega))$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\beta)$.

`3:` Aus `2.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\Omega))$" und
aus `2.2`"$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\beta)$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist M^{-1}_vermehrend auf z.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x ist M^{-1}_vermehrend auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x ist M^{-1}_vermehrend auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\Omega))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x ist M^{-1}_vermehrend auf z"
folgt via **30-7(Def)**: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\beta)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\Omega))$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\beta)$"
folgt via **30-81**: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus `2.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : ((\alpha,\Omega) \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$" und
aus `2.2`"$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha,\beta) \in x) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$"
folgt via **30-7(Def)**: x ist M_verringernd auf z.

<u>Beweis **30-83**</u> `c)`

`1:` M reflexiv in z

$\overset{\textbf{30-17(Def)}}{\Leftrightarrow} \forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha\_M\_\alpha)$

$\overset{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\alpha)$

$\overset{\textbf{30-17(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1}$ reflexiv in z.

`2:` Aus `1` folgt: $(M \text{ reflexiv in } z) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ reflexiv in } z)$.

`d)`

`1:` M reflexiv

$\overset{\textbf{30-17(Def)}}{\Leftrightarrow} M$ reflexiv in $\mathcal{U}$

$\overset{\text{c)}}{\Leftrightarrow} M^{-1}$ reflexiv in $\mathcal{U}$

$\overset{\textbf{30-17(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1}$ reflexiv.

`2:` Aus `1` folgt: $(M \text{ reflexiv}) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ reflexiv})$.

`e)`

`1:` M irreflexiv in z

$\overset{\textbf{30-23(Def)}}{\Leftrightarrow} \forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\neg(\alpha\_M\_\alpha))$

$\overset{\textbf{30-82}}{\Leftrightarrow} \forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\neg(\alpha\_M^{-1}\_\alpha))$

$\overset{\textbf{30-23(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1}$ irreflexiv in z.

`2:` Aus `1` folgt: $(M \text{ irreflexiv in } z) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ irreflexiv in } z)$.

`f)`

`1:` M irreflexiv

$\overset{\textbf{30-23(Def)}}{\Leftrightarrow} M$ irreflexiv in $\mathcal{U}$

$\overset{\text{e)}}{\Leftrightarrow} M^{-1}$ irreflexiv in $\mathcal{U}$

$\overset{\textbf{30-23(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1}$ irreflexiv.

`2:` Aus `1` folgt: $(M \text{ irreflexiv}) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ irreflexiv})$.

<u>Beweis</u> **30-83** g)

1: M transitiv in z

$$\overset{\mathbf{30-30(Def)}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma)$$

$$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma)$$

$$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha) \wedge (\gamma\_M^{-1}\_\beta)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma)$$

$$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha) \wedge (\gamma\_M^{-1}\_\beta)) \Rightarrow (\gamma\_M^{-1}\_\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\gamma \in z) \wedge (\gamma\_M^{-1}\_\beta) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\gamma\_M^{-1}\_\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \forall \gamma, \beta, \alpha : ((\gamma \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha \in z) \wedge (\gamma\_M^{-1}\_\beta) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\gamma\_M^{-1}\_\alpha)$$

$$\overset{\mathbf{30-30(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ transitiv in } z.$$

2: Aus 1 folgt: $(M$ transitiv in $z) \Leftrightarrow (M^{-1}$ transitiv in $z)$.

h)

1: M transitiv

$$\overset{\mathbf{30-30(Def)}}{\Leftrightarrow} M \text{ transitiv in } \mathcal{U}$$

$$\overset{\mathbf{g)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ transitiv in } \mathcal{U}$$

$$\overset{\mathbf{30-30(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ transitiv.}$$

2: Aus 1 folgt: $(M$ transitiv$) \Leftrightarrow (M^{-1}$ transitiv$)$.

<u>Beweis</u> **30-83** `i)`

`1:` M antiSymmetrisch in z

$$\overset{\textbf{30-45(Def)}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$$

$$\overset{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$$

$$\overset{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta)) \Rightarrow (\beta = \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \forall \beta, \alpha : ((\beta \in z) \wedge (\alpha \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta)) \Rightarrow (\beta = \alpha)$$

$$\overset{\textbf{30-45(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ antiSymmetrisch in } z.$$

`2:` Aus `1`
folgt: (M antiSymmetrisch in z) $\Leftrightarrow$ (M^{-1} antiSymmetrisch in z).

`j)`

`1:` M antiSymmetrisch

$$\overset{\textbf{30-45(Def)}}{\Leftrightarrow} M \text{ antiSymmetrisch in } \mathcal{U}$$

$$\overset{\texttt{i)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ antiSymmetrisch in } \mathcal{U}$$

$$\overset{\textbf{30-45(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ antiSymmetrisch.}$$

`2:` Aus `1`
folgt: (M antiSymmetrisch) $\Leftrightarrow$ (M^{-1} antiSymmetrisch).

`k)`

`1:` M symmetrisch in z

$$\overset{\textbf{30-49(Def)}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$$

$$\overset{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$$

$$\overset{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\beta)$$

$$\Leftrightarrow \forall \beta, \alpha : ((\beta \in z) \wedge (\alpha \in z) \wedge (\beta\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\beta)$$

$$\overset{\textbf{30-49(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ symmetrisch in } z.$$

`2:` Aus `1`
folgt: (M symmetrisch in z) $\Leftrightarrow$ (M^{-1} symmetrisch in z).

<u>Beweis **30-83**</u> `l)`

`1:` $$M \text{ symmetrisch} \overset{\mathbf{30-49(Def)}}{\Leftrightarrow} M \text{ symmetrisch in } \mathcal{U} \overset{\texttt{k)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ symmetrisch in } \mathcal{U} \overset{\mathbf{30-49(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ symmetrisch.}$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(M \text{ symmetrisch}) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ symmetrisch}).$$

`m)`

`1:` $$M \text{ konnex in } z$$
$$\overset{\mathbf{30-64(Def)}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha) \vee (\alpha = \beta))$$
$$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\beta\_M\_\alpha) \vee (\alpha = \beta))$$
$$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \vee (\alpha = \beta))$$
$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \vee (\beta = \alpha))$$
$$\Leftrightarrow \forall \beta, \alpha : ((\beta \in z) \wedge (\alpha \in z)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \vee (\beta = \alpha))$$
$$\overset{\mathbf{30-64(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ konnex in } z.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(M \text{ konnex in } z) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ konnex in } z).$$

`n)`

`1:` $$M \text{ konnex} \overset{\mathbf{30-64(Def)}}{\Leftrightarrow} M \text{ konnex in } \mathcal{U} \overset{\texttt{m)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ konnex in } \mathcal{U} \overset{\mathbf{30-64(Def)}}{\Leftrightarrow} M^{-1} \text{ konnex.}$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(M \text{ konnex}) \Leftrightarrow (M^{-1} \text{ konnex}).$$

Beweis **30-83** `o)`

`1:` $$K \text{ ist } M\_\text{Kette}$$

$$\overset{30-68(\mathbf{Def})}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha))$$

$$\overset{30-81}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\beta\_M\_\alpha))$$

$$\overset{30-81}{\Leftrightarrow} \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in K) \wedge (\beta \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\alpha\_M^{-1}\_\beta))$$

$$\Leftrightarrow \forall \beta, \alpha : ((\beta \in K) \wedge (\alpha \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M^{-1}\_\alpha) \vee (\alpha\_M^{-1}\_\beta))$$

$$\overset{30-68(\mathbf{Def})}{\Leftrightarrow} K \text{ ist } M^{-1}\_\text{Kette}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \Leftrightarrow (K \text{ ist } M^{-1}\_\text{Kette}).$$

`p)`

`1:` $$\preceq \text{ Halbordnung in } z$$

$$\overset{30-79(\mathbf{Def})}{\Leftrightarrow} (\preceq \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } z)$$

$$\overset{11-7}{\Leftrightarrow} (\preceq^{-1} \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } z)$$

$$\overset{\text{c)}}{\Leftrightarrow} (\preceq^{-1} \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq^{-1} \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } z)$$

$$\overset{\text{g)}}{\Leftrightarrow} (\preceq^{-1} \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq^{-1} \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq^{-1} \text{ transitiv in } z)$$

$$\overset{30-79(\mathbf{Def})}{\Leftrightarrow} \preceq^{-1} \text{ Halbordnung in } z.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\preceq \text{ Halbordnung in } z) \Leftrightarrow (\preceq^{-1} \text{ Halbordnung in } z).$$

Beweis **30-83** q)

1: $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z

$\overset{\textbf{30-79(Def)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\overset{\textbf{11-7}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\overset{\texttt{c)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\overset{\texttt{g)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\overset{\texttt{i)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq^{-1}$ antiSymmetrisch in z)

$\overset{\textbf{30-79(Def)}}{\Leftrightarrow}$ $\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z.

2: Aus 1
folgt: ($\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z) $\Leftrightarrow$ ($\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z).

□

endlich: TeilKlasse, $\cup, \cap, \setminus, \Delta$.

Die Frage, ob jede Unmenge eine unendliche TeilMenge hat, bleibt bis auf Weiteres unbeantwortet.

Ersterstellung: 25/02/07 **Letzte Änderung: 23/04/11**

31-1. Mit $\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$ betritt eine Klasse die Essays, die zum Beweis, dass jede TeilKlasse einer endlichen Klasse endlich ist, verwendet wird:

31-1(Definition)

$$\mathsf{31.0}() = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}.$$

31-2. Falls $E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$, dann sind E und jede TeilKlasse von E endlich. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

31-2(Satz)

`a)` *Aus* “$E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$” *folgt* “$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$”.

`b)` *Aus* “$e \subseteq E$” *und* “$E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$” *folgt* “$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$”.

31-1(Def) $\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Beweis **31-2** `b)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”
folgt via **ElementAxiom**: E Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”
folgt: $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$e \subseteq E$” und
aus `1`“E Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: e Menge.

`3:` Aus `VS` gleich “$e \subseteq E \ldots$” und
aus `2`“e Menge”
folgt via **0-26**: $e \in \mathcal{P}(E)$.

`4:` Aus `3`“$e \in \mathcal{P}(E)$” und
aus `1.2`“$\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$”
folgt via **0-4**: $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`a)` `VS` gleich $E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`1:` Via **0-6** gilt: $E \subseteq E$.

`2:` Aus `1`“$E \subseteq E$” und
aus `VS` gleich “$E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

□

31-3. Nun wird $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$ in drei Schritten bewiesen:

31-3(Satz)

a) $0 \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

b) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$.

c) $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

31-1(Def) $\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Beweis **31-3** a)

1.1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{P}(0)$.
>
> 2: Aus Thema1.2“$\alpha \in \mathcal{P}(0)$”
> folgt via **0-26**: $\alpha \subseteq 0$.
>
> 3: Aus 2“$\alpha \subseteq 0$”
> folgt via **0-18**: $\alpha = 0$.
>
> 4: Via **28-9** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.
>
> 5: Aus 3“$\alpha = 0$” und
> aus 4“$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$”
> folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(0)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathcal{P}(0) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\text{”}}$

2: Aus A1 gleich “$\mathcal{P}(0) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$” und
aus 1.1“0 Menge”
folgt: $0 \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Beweis **31-3** `b)`

`Thema1` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$.

`2:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`3:` Aus `2`“β Menge”
folgt via **2-28**: $\{\alpha\} \cup \beta$ Menge.

`Thema4.1` $\gamma \in \mathcal{P}(\{\alpha\} \cup \beta)$.

`5:` Aus `Thema4.1`“$\gamma \in \mathcal{P}(\{\alpha\} \cup \beta)$”
folgt via **0-26**: $\gamma \subseteq \{\alpha\} \cup \beta$.

`6:` Aus `5`“$\gamma \subseteq \{\alpha\} \cup \beta$”
folgt via **5-10**: $\gamma \setminus \{\alpha\} \subseteq \beta \setminus \{\alpha\}$.

`7:` $\gamma \setminus \{\alpha\} \overset{6}{\subseteq} \beta \setminus \{\alpha\} \overset{5-5}{\subseteq} \beta$.

`8:` Aus `7`“$\gamma \setminus \{\alpha\} \ldots \subseteq \ldots \beta$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”
folgt via **31-2**: $\gamma \setminus \{\alpha\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`9:` Aus `7`“$\gamma \setminus \{\alpha\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$”
folgt via **28-9**: $\gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema4.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathcal{P}(\{\alpha\} \cup \beta)) \Rightarrow (\gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathcal{P}(\{\alpha\} \cup \beta) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$”

`4.2:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}(\{\alpha\} \cup \beta) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$” und
aus `3`“$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge”
folgt: $\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$.

Beweis **31-3** `c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $0 \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}).$$

`3:` Aus `1.1`“$0 \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$” und
aus `2`“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$”
folgt via $\mathcal{P}_{\text{endl}}$**Induktion**: `A1` | “$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”

> `Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.
>
> Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$”
> folgt via **31-2**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

□

31-4. Mit **31-3** ist der Grundstein für die erste Hautpaussage dieses Essays, wonach jede TeilKlasse einer endlichen Klasse endlich ist, gelegt. Damit sind auch der binäre Durchschnitt und die KlassenDifferenz einer endlichen Klasse und einer beliebigen Klasse endlich. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

31-4(Satz)

`a)` *Aus* "$e \subseteq E$" *und* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$".

`b)` *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$E \cap e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *und* "$e \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$".

`c)` *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$E \setminus e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$".

Beweis **31-4**

31-1(Def) $\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`a)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`1:` Via **31-3** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `2`"$E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt via **31-2**: $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`bc)` `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $(E \cap e \subseteq E) \wedge (e \cap E \subseteq E)$.

`1.2:` Via **5-4** gilt: $E \setminus e \subseteq E$.

`2.1:` Aus `1.1`"$E \cap e \subseteq E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \cap e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots e \cap E \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $e \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2.c):` Aus `1.2`"$E \setminus e \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \setminus e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3.b):` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(E \cap e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (e \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

□

31-5. Nun wird gezeigt, dass E genau dann endlich ist, wenn E eine Menge ist *und* E nur endliche TeilKlassen hat. Dass aus "$\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" auch ohne die Voraussetzung "E Menge" folgt, dass E endlich ist, ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht beweisbar - es müsste nämlich nachgewiesen werden, dass jede Unmenge eine unendliche TeilMenge hat. Jedoch ist im Moment noch nicht einmal die Existenz unendlicher *Mengen* gesichert:

31-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`ii)` *"E Menge" und "$\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$".*

Beweis **31-5**

31-1(Def) $\{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: E Menge.

`1.2:` Via **31-3** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} = \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$"
folgt: $E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \{\omega : \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$"
folgt: $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`4:` Aus `1.1` und
aus `3`
folgt: $(E \text{ Menge}) \wedge (\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "E Menge…"
folgt via **0-27**: $E \in \mathcal{P}(E)$.

`2:` Aus `1`"$E \in \mathcal{P}(E)$" und
aus `VS` gleich "…$\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt via **0-4**: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

□

31-6. Mit der folgenden Definition wird die zweite Hauptaussage dieses Essays, wonach die binäre Vereinigung endlicher Klassen endlich ist, ins Visier genommen:

31-6(Definition)

$$\mathtt{31.1}(E) = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}.$$

31-7. Es folgt ein Kriterium für "$e \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$" :

31-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $e \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`ii)` $e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

31-5(Def) $\{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Beweis **31-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $e \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Aus `VS` gleich "$e \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $e \cup E$ Menge.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $e \subseteq e \cup E$.

`2:` Aus `1.2`"$e \subseteq e \cup E$" und
aus `1.1`"$e \cup E$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: e Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `2`"e Menge"
folgt: $e \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

□

31-8. Im folgenden Satz wird $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$ *für endliche Klassen* E etabliert. Im Beweis wird $\mathcal{P}_{\text{endl}}$Induktion verwendet. Aussage `c)` wird in **31-9** verschärft:

31-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`b)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$.

`c)` $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

31-5(Def) $\{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

<u>Beweis **31-8**</u> `a)`

`1:` Via **2-17** gilt: $0 \cup E = E.$

`2:` Aus `1.1`"$0 \cup E = E$" und
aus $\rightarrow$)"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $0 \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

`3:` Aus `2`"$0 \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-7**: $0 \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}.$

`b)`

`Thema1` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}).$

`2:` Aus `Thema1`"$\ldots \beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $\beta \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

`3:` Aus `2`"$\beta \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-9**: $\{\alpha\} \cup (\beta \cup E) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

`4:` Via **AG**$\cup$ gilt: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cup E = \{\alpha\} \cup (\beta \cup E).$

`5:` Aus `4`"$(\{\alpha\} \cup \beta) \cup E = \{\alpha\} \cup (\beta \cup E)$" und
aus `3`"$\{\alpha\} \cup (\beta \cup E) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

`6:` Aus `5`"$(\{\alpha\} \cup \beta) \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-7**: $\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}).$

<u>Beweis</u> **31-8** `c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $0 \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}).$$

`3:` Aus `1.1`"$0 \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$" und
aus `2`"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : \omega \cup \alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\})) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : \omega \cup \alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$"
folgt via $\mathcal{P}_{\text{endl}}$**Induktion**:

A1	"$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $\alpha \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2.2:` Via **2-7** gilt: $\alpha \subseteq \alpha \cup E$.

`3:` Aus `2.2`"$\alpha \subseteq \alpha \cup E$" und
aus `2.1`"$\alpha \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-4**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2	"$\{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

□

31-9. Die Aussage **31-8** `c)` kann zu einem Kriterium ausgebaut werden:

31-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`ii)` $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

31-5(Def) $\{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Beweis **31-9** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-8**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`1:` Via **28-9** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `1`"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `VS` gleich "$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $0 \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`3:` Aus `2`"$0 \in \{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $0 \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`4:` Via **2-17** gilt: $0 \cup E = E$.

`5:` Aus `3`"$0 \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `4`"$0 \cup E = E$"
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

□

31-10. Es folgt das zweite Hauptresultat dieses Essays, wonach die binäre Vereinigung von endlichen Klassen endlich ist. In weiterer Konsequenz ist die semmetrische KlassenDifferenz endlicher Klassen endlich:

31-10(Satz)

Es gelte:

→) $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

→) $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Dann folgt:

a) $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b) $E \Delta e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Beweis **31-10**

31-5(Def) $\{\omega : \omega \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

---

a)

1: Aus →) "$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-9**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

2: Aus →) "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus 1 "$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \{\omega : \omega \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $E \in \{\omega : \omega \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

3: Aus 2 "$E \in \{\omega : \omega \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b)

1: Aus →) "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus →) "$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

2: Via **5-28** gilt: $E \Delta e \subseteq E \cup e$.

3: Aus 2 "$E \Delta e \subseteq E \cup e$" und
aus 1 "$E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-4**: $E \Delta e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

□

endliche TeilKlasse.
$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.
$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$**Induktion**

Ersterstellung: 02/03/07 **Letzte Änderung: 23/04/11**

32-1. Es wird definiert, was eine endliche TeilKlasse von x ist.

32-1(Definition)

"E **endliche TeilKlasse von** x" genau dann, wenn gilt:

$E \subseteq x$.

$\wedge$

E endlich.

32-2. Die endlichen Klassen sind genau die endlichen TeilKlassen von $\mathcal{U}$:

32-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *E endliche TeilKlasse von $\mathcal{U}$.*

`ii)` *E endlich.*

Beweis **32-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich E endliche TeilKlasse von $\mathcal{U}$.

Aus `VS` gleich "E endliche TeilKlasse von $\mathcal{U}$"
folgt via **32-1(Def)**: E endlich.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich E endlich.

`1:` Via **0-18** gilt: $E \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "E endlich"
folgt via **32-1(Def)**: E endliche TeilKlasse von $\mathcal{U}$.

□

32-3. Im jetzigen Essay werden vornehmlich endliche TeilKlassen von x betrachtet. Dabei stellt es sich als vorteilhaft voraus, die Klasse aller endlichen TeilKlassen x mit einem eigenen Namen - nämlich $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$ - zu versehen. In **32-4** wird gezeigt, dass es es sich bei der nun etwas anders definierten Klasse in der Tat um die Klasse aller endlichen TeilKlassen von x handelt:

32-3(Definition)

$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x).$$

32-4. Wie vorab zu **32-3** bemerkt, ist $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$ die Klasse aller endlichen Teil-Klassen von x.

32-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`ii)` *E endliche TeilKlasse von x.*

`iii)` *"$E \subseteq x$" und "E endlich".*

`iv)` *"$E \subseteq x$" und "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$".*

Beweis **32-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus "$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$"
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $(E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (E \in \mathcal{P}(x))$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots E \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $E \subseteq x$.

`3.2:` Aus `2`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \ldots$"
folgt via **28-7**: E endlich.

`4:` Aus `3.1`"$E \subseteq x$" und
aus `3.2`"E endlich"
folgt via **32-1(Def)**: E endliche TeilKlasse von x.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich E endliche TeilKlasse von x.

Aus `VS` gleich "E endliche TeilKlasse von x"
folgt via **32-1(Def)**: $(E \subseteq x) \wedge (E \text{ endlich})$.

<u>Beweis</u> **32-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq x) \wedge (E \text{ endlich}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **28-7**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt: $(E \subseteq x) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq x) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: E Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"E Menge"
folgt via **0-26**: $E \in \mathcal{P}(x).$

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `2`"$E \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x).$

`4:` Aus `3`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus "$\mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x).$

$\square$

32-5. 0 ist eine endliche TeilKlasse von x. Falls $p \in x$, dann ist $\{p\}$ eine endliche TeilKlasse von x. Falls $p \in x$ und falls E eine endliche TeilKlasse von x ist, dann ist $\{p\} \cup E$ eine endliche TeilKlasse von x. Falls E eine endliche TeilKlasse von x ist und falls $e \subseteq E$, dann ist e eine endliche TeilKlasse von x. Falls E eine endliche TeilKlasse von x ist, dann sind $E \cap e$, $e \cap E$ und $E \setminus e$ endliche TeilKlassen von x. Falls E, e endliche TeilKlassen von x sind, dann sind $E \cup e$, $E \Delta e$ endliche TeilKlassen von x. Jede endliche TeilKlasse von x ist eine Menge. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - i) - b) - d) - f) - e) - g) - c) - h)`:

32-5(Satz)

`a)` $0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`b)` *Aus* “$p \in x$” *folgt* “$\{p\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`c)` *Aus* “$p \in x$” *und* “$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *folgt* “$\{p\} \cup E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`d)` *Aus* “$e \subseteq E$” *und* “$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *folgt* “$e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`e)` *Aus* “$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *folgt* “$E \cap e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *und* “$e \cap E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`f)` *Aus* “$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *folgt* “$E \setminus e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`g)` *Aus* “$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *und* “$e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *folgt* “$E \cup e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`h)` *Aus* “$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *und* “$e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” *folgt* “$E \Delta e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”.

`i)` *Aus* “E *endliche TeilKlasse von* x” *folgt* “E *Menge*”.

Beweis **32-5** `a)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

`1.2:` Via **EndlichkeitsAxiom** gilt: 0 endlich.

`2:` Aus `1.1`“$0 \subseteq x$” und
aus `1.2`“0 endlich”
folgt via **32-4**: $0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`i)` `VS` gleich E endliche TeilKlasse von x.

`1:` Aus `VS` gleich “E endliche TeilKlasse von x”
folgt via **32-1(Def)**: E endlich.

`2:` Aus `1`“E endlich”
folgt via **28-6**: E Menge.

Beweis **32-5** `b)` `VS` gleich $p \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

`2:` Via **28-8** gilt: $\{p\}$ endlich.

`3:` Aus `1`"$\{p\} \subseteq x$" und
aus `2`"$\{p\}$ endlich"
folgt via **32-4**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`d)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: $(E \subseteq x) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1`"$E \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-6**: $e \subseteq x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1`"$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-4**: $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3:` Aus `2.1`"$e \subseteq x$" und
aus `2.2`"$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **32-4**: $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`ef)` `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $(E \cap e \subseteq E) \wedge (e \cap E \subseteq E)$.

`1.2:` Via **5-4** gilt: $E \setminus e \subseteq E$.

`2.1:` Aus `1.1`"$E \cap e \subseteq E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \cap e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots e \cap E \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \cap e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2.f):` Aus `1.2`"$E \setminus e \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \setminus e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`3.e):` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(E \cap e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (e \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

<u>Beweis **32-5**</u> `g)` `VS` gleich $(E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **32-4**: $(E \subseteq x) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: $(e \subseteq x) \wedge (e \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$E \subseteq x \ldots$" und
aus `1.2`"$e \subseteq x \ldots$"
folgt via **2-12**: $E \cup e \subseteq x$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `1.2`"$\ldots e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-10**: $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3:` Aus `2.1`"$E \cup e \subseteq x$" und
aus `2.2`"$E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **32-4**: $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`c)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1`"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\{p\} \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`h)` `VS` gleich $(E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $E \setminus e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $e \setminus E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1.1`"$E \setminus e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `1.2`"$e \setminus E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(E \setminus e) \cup (e \setminus E) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`3:` Via **5-27** gilt: $E \Delta e = (E \setminus e) \cup (e \setminus E)$.

`4:` Aus `3`"$E \Delta e = (E \setminus e) \cup (e \setminus E)$" und
aus `2`"$(E \setminus e) \cup (e \setminus E) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt: $E \Delta e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

□

32-6. E ist genau dann endlich, wenn E eine endliche TeilKlasse von E ist:

<u>32-6(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`ii)` $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(E)$.

<u>Beweis **32-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich E endlich.

`1:` Via **0-6** gilt: $E \subseteq E$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt via **32-4**: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(E)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(E)$.

Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(E)$"
folgt via **32-4**: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

$\square$

32-7. Es folgen drei Aussagen über TeilKlassen und $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$ oder $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$:

32-7(Satz)

a) *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$".*

b) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

c) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

Beweis **32-7** a) VS gleich $x \subseteq y$.

Thema1 $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: $(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

3: Aus 2"$\alpha \subseteq x \ldots$" und
aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq y$.

4: Aus 3"$\alpha \subseteq y$" und
aus 2"$\ldots \alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt via **32-4**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$.

b)

Thema1 $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

Aus Thema1"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

<u>Beweis **32-7**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.
`2:` Via **0-18** gilt:	$\alpha \subseteq \mathcal{U}$.
`3:` Aus `2`"$\alpha \subseteq \mathcal{U}$" und aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" folgt via **32-4**:	$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" und
aus `A1` gleich "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

□

32-8. Im folgenden Satz wird ein weiterer Aspekt endlicher TeilKlassen von x herausgearbeitet. Demnach ist eine Klasse E genau dann eine endliche TeilKlasse von x, wenn es eine endliche Klasse Ω gibt, so dass $E = x \cap \Omega$:

32-8(Satz)

a) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

b) *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" *folgt* "$\exists \Omega : (E = x \cap \Omega) \wedge (\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$".

c) *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$x \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$".

4-5(Def) $\{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Beweis **32-8** `a)`

`Thema1.1` $\qquad \alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: $\qquad (\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`3.1:` Aus 2"$\alpha \subseteq x \ldots$"
folgt via **2-10**: $\qquad x \cap \alpha = \alpha$.

`3.2:` Aus 2"$\ldots \alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **4-6**: $\qquad x \cap \alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cap \alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$" und
aus `3.1`"$x \cap \alpha = \alpha$"
folgt: $\qquad \alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` "$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"

...

Beweis **32-8** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$”
folgt via **4-6**: $\exists \Omega : (\alpha = x \cap \Omega) \wedge (\Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

`3.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap \Omega \subseteq x$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$”
folgt via **31-4**: $x \cap \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`4:` Aus `3.1`“$x \cap \Omega \subseteq x$” und
aus `3.2`“$x \cap \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$”
folgt via **32-4**: $x \cap \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`5:` Aus 2“$\ldots \alpha = x \cap \Omega \ldots$” und
aus 4“$x \cap \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$” und
aus `A2` gleich “$\{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}\}$.

<u>Beweis</u> **<u>32-8</u>** `b)` `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $E \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt via **4-6**: $\exists \Omega : (E = x \cap \Omega) \wedge (\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`c)` `VS` gleich $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **4-6**: $x \cap E \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$.

`3:` Aus `1`"$x \cap E \in \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$" und
aus `2`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{endl}}\}$"
folgt: $x \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

$\square$

32-9. Mit dem folgenden Satz wird die $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$**Induktion** vorbereitet:

32-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \in \iota$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt:

a) $x \cap 0 \in \iota$.

b) $\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (x \cap \delta \in \iota)) \Rightarrow (x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \in \iota)$.

c) $\{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$ *ist* $\cup$*induktiv.*

d) $\forall \varepsilon : (\varepsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}) \Rightarrow (x \cap \varepsilon \in \iota)$.

e) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota$.

16-1(Def) $\{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$.

Beweis **32-9** a)

1: Via **2-17** gilt: $x \cap 0 = 0$.

2: Aus 1"$x \cap 0 = 0$" und
aus VS gleich "$0 \in \iota$"
folgt: $x \cap 0 \in \iota$.

Beweis **32-9** `b)`

`Thema1` $(\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (x \cap \delta \in \iota).$

`2:` Es gilt: $(\gamma \in x) \vee (\gamma \notin x).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\gamma \in x.$

`3:` Aus `2.1.Fall`"$\gamma \in x$"
folgt via **1-8**: $\{\gamma\} \subseteq x.$

`4.1:` Aus `3`"$\{\gamma\} \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $x \cap \{\gamma\} = \{\gamma\}.$

`4.2:` Aus `2.1.Fall`"$\gamma \in x$",
aus `Thema1`"$\ldots x \cap \delta \in \iota$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt: $\{\gamma\} \cup (x \cap \delta) \in \iota.$

`5:` $x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap \{\gamma\}) \cup (x \cap \delta) \stackrel{4.1}{=} \{\gamma\} \cup (x \cap \delta).$

`6:` Aus `5`"$x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) = \ldots = \{\gamma\} \cup (x \cap \delta)$" und
aus `4.2`"$\{\gamma\} \cup (x \cap \delta) \in \iota$"
folgt: $x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \in \iota.$

`2.2.Fall` $\gamma \notin x.$

`3:` Aus `2.2.Fall`"$\gamma \notin x$"
folgt via **2-30**: $\{\gamma\} \cap x = 0.$

`4:` $x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap \{\gamma\}) \cup (x \cap \delta)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\{\gamma\} \cap x) \cup (x \cap \delta) \stackrel{3}{=} 0 \cup (x \cap \delta) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \cap \delta.$

`5:` Aus `4`"$x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) = \ldots = x \cap \delta$" und
aus `Thema1`"$\ldots x \cap \delta \in \iota$"
folgt: $x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \in \iota.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \in \iota.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (x \cap \delta \in \iota)) \Rightarrow (x \cap (\{\gamma\} \cup \delta) \in \iota).$

<u>Beweis</u> **32-9** `c)`

`1.1:` Aus →) "$0 \in \iota$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cap 0 \in \iota$.

`2:` Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`3:` Aus `1.1`"$x \cap 0 \in \iota$" und
aus `2`"0 Menge"
folgt: `A1` | "$0 \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$"

`Thema1.2` $(\epsilon \in \mathcal{U}) \wedge (\phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\})$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$"
folgt via **ElementAxiom**: ϕ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$"
folgt: $x \cap \phi \in \iota$.

`3:` Aus →) "$0 \in \iota$",
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$",
aus `Thema1.2`"$\epsilon \in \mathcal{U} \ldots$" und
aus `2.2`"$x \cap \phi \in \iota$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cap (\{\epsilon\} \cup \phi) \in \iota$.

`4:` Aus `2.1`"ϕ Menge"
folgt via **2-28**: $\{\epsilon\} \cup \phi$ Menge.

`5:` Aus `3`"$x \cap (\{\epsilon\} \cup \phi) \in \iota$" und
aus `4`"$\{\epsilon\} \cup \phi$ Menge"
folgt: $\{\epsilon\} \cup \phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \epsilon, \phi : ((\epsilon \in \mathcal{U}) \wedge (\phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\})) \Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \epsilon, \phi : ((\epsilon \in \mathcal{U}) \wedge (\phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\})) \Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \phi \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\})$"
folgt via **28-1(Def)**:
$\{\omega : x \cap \omega \in\}$ ist $\cup$induktiv.

<u>Beweis</u> **32-9** `d)`

`Thema1` $\varepsilon \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\varepsilon \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: ε endlich.

`2.2:` Aus →) "$0 \in \iota$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$ ist ∪induktiv.

`3:` Aus `2.1`"ε endlich" und
aus `2.2`"$\{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$ ist ∪induktiv"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\varepsilon \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$.

`4:` Aus `3`"$\varepsilon \in \{\omega : x \cap \omega \in \iota\}$"
folgt: $x \cap \varepsilon \in \iota$.

Ergo `Thema1`: $\forall \varepsilon : (\varepsilon \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \Rightarrow (x \cap \varepsilon \in \iota)$.

<u>Beweis **32-9**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$” und
aus “$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$”
folgt: $\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `2`“$\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$”
folgt via **2-2**: $(\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (\psi \in \mathcal{P}(x))$.

`4.1:` Aus $\rightarrow$)“$0 \in \iota$” und
aus $\rightarrow$)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$” und
aus `3`“$\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \cap \psi \in \iota$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \psi \in \mathcal{P}(x)$”
folgt via **0-26**: $\psi \subseteq x$.

`5:` Aus `4.2`“$\psi \subseteq x$”
folgt via **2-10**: $x \cap \psi = \psi$.

`6:` Aus `4.1`“$x \cap \psi \in \iota$” und
aus `5`“$x \cap \psi = \psi$”
folgt: $\psi \in \iota$.

Ergo `Thema1`: $\forall \psi : (\psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\psi \in \iota)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota$.

$\square$

32-10. Mit der $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$Induktion steht ein Verfahren zur Verfügung, mit dem nachgewiesen werden kann, dass eine Klasse ι alle endlichen TeilKlassen von x umfasst. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

32-10(Satz) **($\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$Induktion)**

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \in \iota$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota) \wedge (\beta \subseteq x)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt:

`a)` $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota$.

`b)` $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

Beweis **32-10**

`1.1:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "$0 \in \iota$" und aus `1.1` "$0 \in \mathcal{P}(x)$" folgt via **2-2**: `A1` | "$0 \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$"

<u>Beweis **32-10**</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\gamma \in x) \wedge (\delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in x \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{\gamma\} \in \mathcal{P}(x)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $(\delta \in \iota) \wedge (\delta \in \mathcal{P}(x))$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\{\gamma\} \in \mathcal{P}(x)$" und
aus `2.2`"$\ldots \delta \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-27**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}(x)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \delta \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $\delta \subseteq x$.

`4:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in x \ldots$",
aus `2.2`"$\delta \in \iota \ldots$",
aus `3.2`"$\delta \subseteq x$" und
aus $\rightarrow$)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota) \wedge (\beta \subseteq x))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt: $\{\gamma\} \cup \delta \in \iota$.

`5:` Aus `4`"$\{\gamma\} \cup \delta \in \iota$" und
aus `3.1`"$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in x) \wedge (\delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x))) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$"

`1.b):` Aus `A1` gleich "$0 \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus `A2` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in x) \wedge (\delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x))) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$"
folgt via **32-9**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

`2:` Via **2-7** gilt: $\iota \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \iota$.

`3.a):` Aus `1.b)`"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus `2`"$\iota \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \iota$"
folgt via **0-6**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota$.

$\square$

Endliche TeilKlassen$\neq 0$ von x. $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$. $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$**Induktion**

Ersterstellung: 06/03/07 **Letzte Änderung: 23/04/11**

33-1. Mit $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$ wird die Klasse der endlichen TeilKlassen$\neq 0$ von x in die Essays eingeführt. Dass es sich bei $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$ tatsächlich um die so beschriebene Klasse handelt, wird in **33-2** gezeigt:

33-1(Definition)

$$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x).$$

33-2. Nun wird unter anderem gezeigt, dass $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$ die Klasse der endlichen TeilKlassen$\neq 0$ von x ist:

33-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`ii)` $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`iii)` *"$0 \neq E$" und "E endliche TeilKlasse von x".*

`iv)` *"$0 \neq E \subseteq x$" und "E endlich".*

`v)` *"$E \subseteq x$" und "$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$".*

Beweis **33-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$" und
aus "$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$"
folgt: $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1`"$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $(E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}) \wedge (E \in \mathcal{P}(x))$.

`3:` Aus `2`"$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \ldots$"
folgt via **28-21**: $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

`4:` Aus `3`"$\ldots E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" und
aus `2`"$\ldots E \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$.

`5:` Aus `4`"$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \cap \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt: $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`6:` Aus `3`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `5`"$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt: $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

Beweis **33-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: E endliche TeilKlasse von x.

`2`: Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `1`"E endliche TeilKlasse von x"
folgt: $(0 \neq E) \wedge (E$ endliche TeilKlasse von $x)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $(0 \neq E) \wedge (E$ endliche TeilKlasse von $x)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots E$ endliche TeilKlasse von x"
folgt via **32-1(Def)**: $(E \subseteq x) \wedge (E$ endlich$)$.

`2`: Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `1`"$E \subseteq x \ldots$"
folgt: $0 \neq E \subseteq x$.

`3`: Aus `2`"$0 \neq E \subseteq x$" und
aus `1`"$\ldots E$ endlich"
folgt: $(0 \neq E \subseteq x) \wedge (E$ endlich$)$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}$ `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq x) \wedge (E$ endlich$)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **28-21**: $E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"$E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt: $(E \subseteq x) \wedge (E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$.

<u>Beweis **33-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq x) \wedge (E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: E Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"E Menge"
folgt via **0-26**: $E \in \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus `2`"$E \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$.

`4:` Aus `3`"$E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$"
folgt: $E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

$\square$

33-3. Im folgenden Satz werden grendlegenden Eigenschaften von $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$ benannt. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - g) - c) - d) - e) - f) -h)`:

33-3(Satz)

`a)` $0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`b)` *Aus* "$p \in x$" *folgt* "$\{p\} \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$".

`c)` *Aus* "$p \in x$" *und* "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *folgt* "$\{p\} \cup E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$".

`d)` *Aus* "$0 \neq e \subseteq E$" *und* "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *folgt* "$e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$".

`e)` *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$0 \neq E \cap e$" *folgt* "$E \cap e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$".

`f)` *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$E \not\subseteq e$" *folgt* "$E \setminus e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$".

`g)` *Aus* "$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt "$E \cup e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$e \cup E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$".

`h)` *Aus* "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$E \neq e$"
folgt "$E \Delta e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$".

Beweis **33-3** `a)`

`1:` Es gilt: $(0 \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)) \vee (0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $0 \neq 0$.

`3:` Es gilt 2"$0 \neq 0$".
Es gilt "$0 = 0$".
Ex falso qeodlibet folgt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1.2.Fall` $0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

<u>Beweis **33-3**</u> `b)` `VS` gleich $p \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **32-5**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1.1`"p Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `1.2`"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $\{p\} \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

`g)` `VS` gleich $(E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)) \wedge (e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **33-2**: $0 \neq E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-5**: $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`3:` Via **2-7** gilt: $E \subseteq E \cup e$.

`4:` Aus `1`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `3`"$E \subseteq E \cup e$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E \cup e$.

`5:` Aus `4`"$0 \neq E \cup e$" und
aus `2`"$E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $E \cup e \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

`6:` Via **KG**$\cup$ gilt: $e \cup E = E \cup e$.

`7:` Aus `6`"$e \cup E = E \cup e$" und
aus `5`"$E \cup e \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$"
folgt: $e \cup E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

`8:` Aus `5` und
aus `7`
folgt: $(E \cup e \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)) \wedge (e \cup E \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x))$.

<u>Beweis **33-3**</u> `c)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{p\} \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1` "$\{p\} \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\{p\} \cup E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`d)` `VS` gleich $(0 \neq e \subseteq E) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots e \subseteq E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **32-5**: $e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq e \ldots$" und
aus `1` "$e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`e)` `VS` gleich $(E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \wedge (0 \neq E \cap e)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **32-5**: $E \cap e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \cap e$" und
aus `1` "$E \cap e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $E \cap e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`f)` `VS` gleich $(E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \wedge (E \not\subseteq e)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **32-5**: $E \setminus e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \not\subseteq e$"
folgt via **5-7**: $0 \neq E \setminus e$.

`2:` Aus `1.2` "$0 \neq E \setminus e$" und
aus `1.1` "$E \setminus e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $E \setminus e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

<u>Beweis</u> **33-3** `h)` `VS` gleich $(E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \wedge (e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \wedge (E \neq e)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **32-5**: $E\Delta e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \neq e$"
folgt via **5-34**: $0 \neq E\Delta e$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \neq E\Delta e$" und
aus `1.1`"$E\Delta e \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $E\Delta e \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

□

33-4. x ist genau dann gleich der leeren Menge, wenn $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0$.

33-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = 0$.

`ii)` $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0$.

Beweis **33-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 0.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x).$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$”
folgt via **33-2**: $0 \neq \alpha \subseteq 0.$

`3:` Aus `2`“$0 \neq \alpha \subseteq 0$”
folgt via **0-20**: $0 \neq 0.$

`4:` Es gilt `3`“$0 \neq 0$”.
Es gilt “$0 = 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x$”
folgt via **33-3**: $\{\alpha\} \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x).$

`3:` Aus `2`“$\{\alpha\} \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$” und
aus `VS` gleich “$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0$”
folgt: $\{\alpha\} \in 0.$

`4:` Es gilt `3`“$\{\alpha\} \in 0$”.
Via **0-19** gilt “$\{\alpha\} \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin x).$

Konsequenz via **0-19**: $x = 0.$

$\square$

33-5. Via Negation folgt aus **33-4**, dass $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$ genau dann nichtleer ist, wenn $0 \neq x$:

33-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$.

`ii)` $0 \neq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

Beweis **33-5**

`1:` Via **33-4** gilt: $(x = 0) \Leftrightarrow (\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(x = 0)) \Leftrightarrow (\neg(\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) = 0))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(0 \neq x) \Leftrightarrow (0 \neq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x))$.

$\square$

33-6. E ist genau dann eine nichtleere, endliche Klasse, wenn E eine nichtleere, endliche TeilKlasse von E ist:

33-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.

`ii)` $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(E)$.

Beweis **33-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.

`1:` Via **0-6** gilt: $E \subseteq E$.

`2:` Aus `1`“$E \subseteq E$” und aus `VS` gleich “$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$” folgt via **33-2**: $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(E)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(E)$.

Aus `VS` gleich “$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(E)$” folgt via **33-2**: $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.

□

33-7. Laut folgendem Satz gilt unter anderem, dass aus $x \subseteq y$ folgt, dass $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(y)$ ist:

33-7(Satz)

a) *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(y)$".*

b) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

c) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

Beweis **33-7** a) VS gleich $x \subseteq y$.

Thema1 $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$.

3: Aus 2"$\alpha \subseteq x \ldots$" und
aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq y$.

4: Aus 3"$\alpha \subseteq y$" und
aus 2"$\ldots \alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$"
folgt via **33-2**: $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(y)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(y)$.

b)

Thema1 $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

Aus Thema1"$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}})$.

Konsequenz iva **0-2(Def)**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

Beweis **33-7** `c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.

> `Thema1.2` $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.
>
> `2:` Via **0-18** gilt: $\alpha \subseteq \mathcal{U}$.
>
> `3:` Aus 2"$\alpha \subseteq \mathcal{U}$" und
> aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$"
> folgt via **33-2**: $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$" und
aus `A1` gleich "$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$.

$\square$

33-8. Es werden nun $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \setminus \{0\}$ und zwei damit verbundene Aussagen bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c)`:

33-8(Satz)

`a)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \setminus \{0\}$.

`b)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`c)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \neq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

Beweis **33-8** `b)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **33-2**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`a)`

`Thema1.1` $(\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (\alpha \neq 0)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \alpha \neq 0$"
folgt: $0 \neq \alpha$.

`3:` Aus 2"$0 \neq \alpha$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **33-2**: $\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (\alpha \neq 0)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x))$"

`1.2:` Via **33-3** gilt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`3:` Aus `1.2`"$0 \notin \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$",
aus 2"$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (\alpha \neq 0)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x))$"
folgt via **5-13**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \setminus \{0\}$.

Beweis **33-8** `c)`

`1.1:` Via **33-3** gilt: $0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1.2:` Via **32-5** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" und
aus `1.1`"$0 \notin \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$"
folgt via **0-10**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \neq \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \neq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

$\square$

33-9. Mit dem folgenden Satz wird die $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$**Induktion** vorbereitet:

33-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt:

a) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \{0\} \cup \iota$.

b) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota \setminus \{0\}$.

c) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota$.

Beweis **33-9**

1.1: Via **1-5** gilt: $0 \in \{0\}$.

2: Aus 1.1 “$0 \in \{0\}$”
folgt via **2-2**: A1 | “$0 \in \{0\} \cup \iota$”

...

Beweis **33-9** ...

`Thema1.2` $(\delta \in x) \wedge (\epsilon \in \{0\} \cup \iota)$.

2: Aus Thema1.2"$\dots \epsilon \in \{0\} \cup \iota$"
folgt via **2-3**: $(\epsilon \in \{0\}) \vee (\epsilon \in \iota)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\epsilon \in \{0\}$.

3.1: Aus 2.1.Fall"$\epsilon \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $\epsilon = 0$.

3.2: Aus Thema1.2"$\delta \in x \dots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$"
folgt: $\{\delta\} \in \iota$.

4: $\{\delta\} \cup \epsilon \stackrel{3.1}{=} \{\delta\} \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \{\delta\}$.

5: Aus 4"$\{\delta\} \cup \epsilon = \dots = \{\delta\}$" und
aus 3.2"$\{\delta\} \in \iota$"
folgt: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$.

6: Aus 5"$\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$"
folgt via **2-2**: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \{0\} \cup \iota$.

`2.2.Fall` $\epsilon \in \iota$.

3: Aus Thema1.2"$\delta \in x \dots$",
aus 2.2.Fall"$\epsilon \in \iota$" und
aus VS gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$.

4: Aus 3"$\{\delta\} \cup \epsilon \in \iota$"
folgt via **2-2**: $\{\delta\} \cup \epsilon \in \{0\} \cup \iota$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\{\delta\} \cup \epsilon \in \{0\} \cup \iota$.

Ergo Thema1.2:

A2	"$\forall \delta, \epsilon : ((\delta \in x) \wedge (\epsilon \in \{0\} \cup \iota)) \Rightarrow (\{\delta\} \cup \epsilon \in \{0\} \cup \iota)$"

...

<u>Beweis **33-9**</u>

...

`1.a):` Aus `A1` gleich "$0 \in \{0\} \cup \iota$" und
aus `A2` gleich "$\forall \delta, \epsilon : ((\delta \in x) \wedge (\epsilon \in \{0\} \cup \iota)) \Rightarrow (\{\delta\} \cup \epsilon \in \{0\} \cup \iota)$"
folgt via **32-9**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \{0\} \cup \iota.$

`1.3:` Aus `1.a)` "$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \{0\} \cup \iota$"
folgt via **5-5**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \setminus \{0\} \subseteq (\{0\} \cup \iota) \setminus \{0\}.$

`2:` Via **5-10** gilt: $(\iota \cup \{0\}) \setminus \{0\} = \iota \setminus \{0\}.$

`3:` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \stackrel{\mathbf{33-8}}{=} \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \setminus \{0\} \stackrel{1.3}{\subseteq} (\{0\} \cup \iota) \setminus \{0\} \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (\iota \cup \{0\}) \setminus \{0\} \stackrel{2}{=} \iota \setminus \{0\}.$

`4.b):` Aus `3`
folgt: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota \setminus \{0\}.$

`5:` Via **5-5** gilt: $\iota \setminus \{0\} \subseteq \iota.$

`6.c):` Aus `4.b)` "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota \setminus \{0\}$" und
aus `5` "$\iota \setminus \{0\} \subseteq \iota$"
folgt via **0-6**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota.$

□

33-10. Mit der $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$**Induktion** wird eine Beweistechnik zur Verfügung gestellt, mit deren Hilfe nachgewiesen werden kann, dass eine Klasse y die Klasse $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$ umfasst. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - c)`:

<u>33-10(Satz)</u> ($\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$Induktion)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota) \wedge (\beta \subseteq x)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$.

Dann folgt:

`a)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq (\iota \cap \mathcal{P}(x)) \setminus \{0\}$.

`b)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

`c)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota \setminus \{0\}$.

`d)` $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \iota$.

<u>Beweis **33-10**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\delta \in x$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\delta \in x$”
folgt via **1-8**: $\{\delta\} \in \mathcal{P}(x)$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\delta \in x$” und
aus $\rightarrow\!)$“$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \iota)$”
folgt: $\{\delta\} \in \iota$.

`3:` Aus `2.2`“$\{\delta\} \in \iota$” und
aus `2.1`“$\{\delta\} \in \mathcal{P}(x)$”
folgt via **2-2**: $\{\delta\} \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall\delta : (\delta \in x) \Rightarrow (\{\delta\} \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$”

...

<u>Beweis **33-10**</u>

...

`Thema1.2` $(\epsilon \in x) \wedge (\phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\epsilon \in x \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{\epsilon\} \in \mathcal{P}(x)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $(\phi \in \iota) \wedge (\phi \in \mathcal{P}(x))$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\{\epsilon\} \in \mathcal{P}(x)$" und
aus `2.2`"$\ldots \phi \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-27**: $\{\epsilon\} \cup \phi \in \mathcal{P}(x)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \phi \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $\phi \subseteq x$.

`4:` Aus `Thema1.2`"$\epsilon \in x \ldots$",
aus `2.2`"$\phi \in \iota \ldots$" und
aus `3.2`"$\phi \subseteq x$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in \iota) \wedge (\beta \subseteq x))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \iota)$"
folgt: $\{\epsilon\} \cup \phi \in \iota$.

`5:` Aus `4`"$\{\epsilon\} \cup \phi \in \iota$" und
aus `3.1`"$\{\epsilon\} \cup \phi \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-2**: $\{\epsilon\} \cup \phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \epsilon, \phi : ((\epsilon \in x) \wedge (\phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))) \Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$"

...

<u>Beweis **33-10**</u>

...

`1.a)`: Aus `A1` gleich "$\forall\delta : (\delta \in x) \Rightarrow (\{\delta\} \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$" und
aus `A2` gleich "$\forall\epsilon, \phi : ((\epsilon \in x) \wedge (\phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))) \Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$"
folgt via **33-9**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq (\iota \cap \mathcal{P}(x)) \setminus \{0\}$.

`1.b)`: Aus `A1` gleich "$\forall\delta : (\delta \in x) \Rightarrow (\{\delta\} \in \iota \cup \{x\})$" und
aus `A2` gleich "$\forall\epsilon, \phi : ((\epsilon \in x) \wedge (\phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))) \Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \phi \in \iota \cap \mathcal{P}(x))$"
folgt via **33-9**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota \cap \mathcal{P}(x)$.

`2`: Via **2-7** gilt: $\iota \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \iota$.

`3.d)`: Aus `1.b)`"$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus `2`"$\iota \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \iota$"
folgt via **0-6**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota$.

`3.1`: Aus `2`"$\iota \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \iota$"
folgt via **5-5**: $(\iota \cap \mathcal{P}(x)) \setminus \{0\} \subseteq \iota \setminus \{0\}$.

`4.c)`: Aus `1.a)`"$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq (\iota \cap \mathcal{P}(x)) \setminus \{0\}$" und
aus `3.1`"$(\iota \cap \mathcal{P}(x)) \setminus \{0\} \subseteq \iota \setminus \{0\}$"
folgt via **0-6**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \iota \setminus \{0\}$.

□

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.