Suite I - Die StrukturGebende

Teil 5: Essays 34-40

(Keine) Untere M_Schranke von x. (Keine) Obere M_Schranke von x. Unten M_unbeschränkt. Oben M_unbeschränkt. (Kein) M_Infimum von x. (Kein) M_Supremum von x. x hat kein M_Infimum. x hat kein M_Supremum. InfSupSatz(auch:reflexiv). SupInfSatz(auch:reflexiv). (Kein) M_Minimum. (Kein) M_Maximum. x hat kein M_Minimum. x hat kein M_Maximum. (Kein) M_minimales Element. (Kein) M_maximales Element. x hat kein M_minimales Element. x hat kein M_maximales Element. Satz vom minimalen Element. Satz vom maximalen Element.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

Relation in x: vermehrend, verringernd, irreflexiv, transitiv, antiSymmetrisch, symmetrisch, Kette.
M reflexiv in x: dom, ran.
r Relation in x *und* r reflexiv in x. Menge, Unmenge, dom, ran.
$\preceq$ Halbordnung in x. dom, ran, transitiv.
$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x. dom, ran, transitiv, antiSymmetrisch.

Ersterstellung: 28/02/07 **Letzte Änderung: 14/05/11**

34-1. Im folgenden Satz sind vier Aussagen angegeben, die “p_r_q” betreffen, wenn r eine Relation in x ist:

34-1(Satz)

Aus “r Relation in x” und ...

a) *... und “p_r_q” folgt “$p \in x$”.*

b) *... und “p_r_q” folgt “$q \in x$”.*

c) *... und “$p \notin x$” folgt “$\neg(p\_r\_q)$”.*

d) *... und “$q \notin x$” folgt “$\neg(p\_r\_q)$”.*

<u>Beweis **34-1**</u> `ab)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (p\_r\_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_r\_q$"
folgt: $(p,q) \in r$.

`2.a):` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `1.1` "$(p,q) \in r$"
folgt via **10-27**: $p \in x$.

`2.b):` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `1.1` "$(p,q) \in r$"
folgt via **10-27**: $q \in x$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$((r \text{ Relation in } x) \wedge (p\_r\_q)) \Rightarrow (p \in x)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((r \text{ Relation in } x) \wedge (\neg(p \in x))) \Rightarrow (\neg(p\_r\_q))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((r \text{ Relation in } x) \wedge (p \notin x)) \Rightarrow (\neg(p\_r\_q))$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$((r \text{ Relation in } x) \wedge (p\_r\_q)) \Rightarrow (q \in x)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((r \text{ Relation in } x) \wedge (\neg(q \in x))) \Rightarrow (\neg(p\_r\_q))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((r \text{ Relation in } x) \wedge (q \notin x)) \Rightarrow (\neg(p\_r\_q))$.

$\square$

34-2. Falls r eine Relation in x ist und falls y r_vermehrend oder r_verringernd auf E ist, dann folgt $E \subseteq x$ und $y[E] \subseteq x$:

34-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *y ist r_vermehrend auf E.* *oder* *y ist r_verringernd auf E.*

Dann folgt:

a) $E \subseteq x$.

b) $y[E] \subseteq x$.

<u>Beweis **34-2**</u> `a)`

`1:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

`2:` Nach “→) *oder*” gilt:
$(y$ ist r_vermehrend auf $E) \vee (y$ ist r_verringernd auf $E)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` y ist r_vermehrend auf E.

`2:` Aus `2.1.Fall` “y ist r_vermehrend auf E”
folgt via **30-9**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

`3:` Aus 2 “$E \subseteq \mathsf{dom}\, r$” und
aus 1 “$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$”
folgt via **0-6**: $E \subseteq x$.

`2.2.Fall` y ist r_verringernd auf E.

`2:` Aus `2.2.Fall` “y ist r_verringernd auf E”
folgt via **30-9**: $E \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

`3:` Aus 2 “$E \subseteq \mathsf{ran}\, r$” und
aus 1 “$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$”
folgt via **0-6**: $E \subseteq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E \subseteq x$.

Beweis **34-2** `b)`

1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

2: Nach "→) *oder*" gilt:
$(y$ ist r_vermehrend auf $E) \vee (y$ ist r_verringernd auf $E)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` y ist r_vermehrend auf E.

3: Aus `2.1.Fall` "y ist r_vermehrend auf E"
folgt via **30-10**: $y[E] \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

4: Aus 3 "$y[E] \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $y[E] \subseteq x$.

`2.2.Fall` y ist r_verringernd auf E.

3: Aus `2.2.Fall` "y ist r_verringernd auf E"
folgt via **30-10**: $y[E] \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

4: Aus 3 "$y[E] \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-6**: $y[E] \subseteq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y[E] \subseteq x$.

□

34-3. Falls r Relation in x ist, dann folgt aus der Tatsache, dass r irreflexiv (transitiv, antiSymmetrisch, symmetrisch) in x ist, dass r irreflexiv (transitiv,antiSymmetrisch, symmetrisch) ist:

34-3(Satz)

Aus "r Relation in x" und ...

a) *... und "r irreflexiv in x" folgt "r irreflexiv".*

b) *... und "r transitiv in x" folgt "r transitiv".*

c) *... und"r antiSymmetrisch in x" folgt "r antiSymmetrisch".*

d) *... und "r symmetrisch in x" folgt "r symmetrisch".*

Beweis **34-3** `a)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ irreflexiv in } x)$.

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Es gilt: $(\alpha\_r\_\alpha) \vee (\neg(\alpha\_r\_\alpha))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` α_r_α.

`3:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "α_r_α"
folgt via **34-1**: $\alpha \in x$.

`4:` Aus `VS` gleich "r irreflexiv in x" und
aus `3` "$\alpha \in x$"
folgt via **30-23(Def)**: $\neg(\alpha\_r\_\alpha)$.

`2.2.Fall` $\neg(\alpha\_r\_\alpha)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\neg(\alpha\_r\_\alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\neg(\alpha\_r\_\alpha))$.

Konsequenz via **30-23(Def)**: r irreflexiv in $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **30-23(Def)**: r irreflexiv.

<u>Beweis</u> **34-3** `b)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_r\_\beta) \wedge (\beta\_r\_\gamma)$.

`2.1:` Aus →) "r Relation in x" und
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_r\_\beta \ldots$"
folgt via **34-1**: $(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)$.

`2.2:` Aus →) "r Relation in x" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta\_r\_\gamma$"
folgt via **34-1**: $\gamma \in x$.

`3:` Aus `2.1` "$\alpha \in x \ldots$",
aus `2.1` "$\ldots \beta \in x$" und
aus `2.2` "$\gamma \in x$",
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_r\_\beta \ldots$",
aus `Thema1` "$\ldots \beta\_r\_\gamma$" und
aus →) "$\ldots r$ transitiv in x"
folgt via **30-30(Def)**: α_r_γ.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_r\_\beta) \wedge (\beta\_r\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_r\_\gamma)$

Konsequenz via **30-30(Def)**: r transitiv in $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **30-30(Def)**: r transitiv.

Beweis **34-3** `c)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ antiSymmetrisch in } x)$.

`Thema1` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_r\_\beta) \wedge (\beta\_r\_\alpha)$.

`2:` Aus →) “r Relation in x” und
aus `Thema1` “$\ldots \alpha\_r\_\beta \ldots$”
folgt via **34-1**: $(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)$.

`3:` Aus 2 “$\alpha \in x \ldots$”,
aus 2 “$\ldots \beta \in x$”,
aus `Thema1` “$\ldots \alpha\_r\_\beta \ldots$”,
aus `Thema1` “$\ldots \beta\_r\_\alpha$” und
aus `VS` gleich “r antiSymmetrisch in x”,
folgt via **30-45(Def)**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_r\_\beta) \wedge (\beta\_r\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Konsequenz via **30-45(Def)**: r antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **30-45(Def)**: r antiSymmetrisch.

`d)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ symmetrisch in } x)$.

`Thema1` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_r\_\beta)$.

`2:` Aus →) “r Relation in x” und
aus `Thema1` “$\ldots \alpha\_r\_\beta$”
folgt via **34-1**: $(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)$.

`3:` Aus 2 “$\alpha \in x \ldots$”,
aus 2 “$\ldots \beta \in x$”,
aus `Thema1` “$\ldots \alpha\_r\_\beta$” und
aus `VS` gleich “r symmetrisch in x”,
folgt via **30-49(Def)**: β_r_α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_r\_\beta)) \Rightarrow (\beta\_r\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-49(Def)**: r symmetrisch in $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **30-49(Def)**: r symmetrisch.

□

34-4. Falls r eine Relation in x ist, dann ist jede r_Kette eine TeilKlasse von x:

34-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *K ist r_Kette.*

Dann folgt "$K \subseteq x$".

Beweis **34-4**

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"K ist r_Kette"
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

`2:` Aus `1.2`"$K \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $K \subseteq x$.

$\square$

34-5. Falls M reflexiv in z mit nicht leerem z ist, dann sind auch $\mathsf{dom}\, M$, $\mathsf{ran}\, M$, M nicht leer:

34-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *reflexiv in* z.

$\rightarrow$) $0 \neq z$.

Dann folgt:

a) $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

b) $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

c) $0 \neq M$.

<u>Beweis **34-5**</u> `a)`

`1:` Aus →) “M reflexiv in z”
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus →) “$0 \neq z \ldots$” und
aus `1` “$z \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt: $0 \neq z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `2` “$0 \neq z \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`b)`

`1:` Aus →) “M reflexiv in z”
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus →) “$0 \neq z \ldots$” und
aus `1` “$z \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt: $0 \neq z \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `2` “$0 \neq z \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

`c)`

`1:` Aus →) “M reflexiv in z” und
aus →) “$0 \neq z$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus `1` “$0 \neq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **7-11**: $0 \neq M$.

□

34-6. Falls r Relation in x ist und falls r reflexiv in x ist, dann gilt $\mathsf{dom}\, r = x$ und $\mathsf{ran}\, r = x$:

34-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\, r = x$.

b) $\mathsf{ran}\, r = x$.

Beweis **34-6**

1.1: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$.

1.3: Aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **30-18**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

1.4: Aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **30-18**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

2.a): Aus 1.1"$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$" und
aus 1.3"$x \subseteq \mathsf{dom}\, r$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

2.b): Aus 1.1"$\mathsf{ran}\, r \subseteq x$" und
aus 1.3"$x \subseteq \mathsf{ran}\, r$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

□

34-7. Falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt nach **34-6** die Aussage "$\mathsf{dom}\, r = \mathsf{ran}\, r = x$". Vor diesem Hintergrund ist das folgende Resultat nicht allzu überraschend:

34-7(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

→) *r Relation in x.*

→) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *r Menge.*

`ii)` *x Menge.*

Beweis **34-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich r Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "r Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, r$ Menge.

`2:` Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "r reflexiv in x"
folgt via **34-7**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

`3:` Aus `2` "$\mathsf{dom}\, r = x$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, r$ Menge"
folgt: x Menge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich x Menge.

Aus →) "r Relation in x" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **10-19**: r Menge.

□

34-8. Falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt nach **34-6** die Aussage "$\mathsf{dom}\, r = \mathsf{ran}\, r = x$". Vor diesem Hintergrund ist das folgende Resultat nicht allzu überraschend:

34-8(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *r Unmenge.*

`ii)` *x Unmenge.*

Beweis **34-8**

`1:` Aus $\rightarrow$) "r Relaion in x" und
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $(r \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(r \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(x \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(r \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge})$.

$\square$

34-9. Falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt folgendes Kriterium dafür, dass $r, x, \mathsf{dom}\, r, \mathsf{ran}\, r$ nicht leer sind:

34-9(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

`ii)` $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.

`iii)` $0 \neq r$.

`iv)` $0 \neq x$.

Beweis **34-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{dom}\, r$"
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{ran}\, r$"
folgt via **7-11**: $0 \neq r$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $0 \neq r$.

Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus `VS` gleich "$0 \neq r$"
folgt via **10-19**: $0 \neq x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x$.

Aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x$"
folgt via **34-5**: $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

□

34-10. Falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt folgendes Kriterium dafür, dass $r, x, \mathsf{dom}\, r, \mathsf{ran}\, r$ leer sind:

34-10(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $\mathsf{dom}\, r = 0$.

`ii)` $\mathsf{ran}\, r = 0$.

`iii)` $r = 0$.

`iv)` $x = 0$.

Beweis **34-10**

`1:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x"
folgt via **34-9**: $(0 \neq \mathsf{dom}\, r) \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{ran}\, r) \Leftrightarrow (0 \neq r) \Leftrightarrow (0 \neq x)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\mathsf{dom}\, r = 0) \Leftrightarrow (\mathsf{ran}\, r = 0) \Leftrightarrow (r = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

□

34-11. Ein an späterer Stelle vor allem im Zusammenhang mit Halbordnungen immer wieder gerne verwendetes Argument ist im folgenden Satz zu finden:

34-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) *p_r_q.*

Dann folgt:

a) *p_r_p.*

b) *q_r_q.*

Beweis **34-11**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "p_r_q"
folgt via **34-1**: $(p \in x) \wedge (q \in x)$.

2.a): Aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
1 "$p \in x \ldots$"
folgt via **30-17(Def)**: p_r_p.

2.b): Aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
1 "$\ldots q \in x$"
folgt via **30-17(Def)**: q_r_q.

$\square$

34-12. Vor dem Hintergrund, dass eine Halbordnung in x stets eine Relation in x ist, kann auf der Basis von **30-79(Def)** mit Hilfe von **34-3** folgendes Kriterium gefunden werden:

34-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\preceq$ *Halbordnung in* x.

`ii)` "$\preceq$ *Relation in* x" *und* "$\preceq$ *reflexiv in* x" *und* "$\preceq$ *transitiv in* x".

`iii)` "$\preceq$ *Relation in* x" *und* "$\preceq$ *reflexiv in* x" *und* "$\preceq$ *transitiv*".

Beweis **34-12** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $\preceq$ Halbordnung in x.

Aus `VS` gleich "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **30-79(Def)**:
$$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x).$$

`ii)` $\Rightarrow$ `iii)`
`VS` gleich $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Relation in $x\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ transitiv in x"
folgt via **34-3**: $\preceq$ transitiv.

`2:` Aus `VS` gleich "$(\preceq$ Relation in $x) \wedge (\preceq$ reflexiv in $x)\ldots$" und
aus `1`"$\preceq$ transitiv"
folgt: $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv})$.

`iii)` $\Rightarrow$ `i)` `VS` gleich $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ transitiv"
folgt via **30-38**: $\preceq$ transitiv in x.

`2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Relation in $x\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ reflexiv in $x\ldots$" und
aus `1`"$\preceq$ transitiv in x"
folgt via **30-79(Def)**: $\preceq$ Halbordnung in x.

□

34-13. Vor dem Hintergrund, dass eine antiSymmetrische Halbordnung in x stets eine Relation in x ist, kann auf der Basis von **30-79(Def)** mit Hilfe von **34-3** folgendes Kriterium gefunden werden. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - iv) - v) - iii) - ii) - i)`:

34-13(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

`ii)` *"*$\preceq$ *Halbordnung in* x*" und "*$\preceq$ *antiSymmetrisch in* x*".*

`iii)` *"*$\preceq$ *Halbordnung in* x*" und "*$\preceq$ *antiSymmetrisch".*

`iv)` *"*$\preceq$ *Relation in* x*" und "*$\preceq$ *reflexiv in* x*" und "*$\preceq$ *transitiv in* x*" und "*$\preceq$ *antiSymmetrisch in* x*".*

`v)` *"*$\preceq$ *Relation in* x*" und "*$\preceq$ *reflexiv in* x*" und "*$\preceq$ *transitiv" und "*$\preceq$ *antiSymmetrisch".*

Beweis **34-13** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x.

Aus `VS` gleich "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **30-79(Def)**:

$$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch in } x).$$

<u>Beweis **34-13**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$

`VS` gleich $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x)$
$\wedge(\preceq \text{ antiSymmetrisch in } x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ transitiv in $x \ldots$"
folgt via **34-3**: $\preceq$ transitiv.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ antiSymmetrisch in x"
folgt via **34-3**: $\preceq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `VS` gleich "$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \ldots$",
aus `1.1` "$\preceq$ transitiv" und
aus `1.2` "$\preceq$ antiSymmetrisch"
folgt: $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv})$
$\wedge(\preceq \text{ antiSymmetrisch})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv})$
$\wedge(\preceq \text{ antiSymmetrisch})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv}) \ldots$"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Halbordnung in x.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ antiSymmetrisch"
folgt: $(\preceq \text{ Halbordnung in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(\preceq \text{ Halbordnung in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ antiSymmetrisch"
folgt via **30-47**: $\preceq$ antiSymmetrisch in x.

`2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Halbordnung in $x \ldots$" und
aus `1`
folgt: $(\preceq \text{ Halbordnung in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch in } x)$.

Beweis **34-13** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(\preceq \text{ Halbordnung in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch in } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Halbordnung in $x \ldots$"
folgt via **30-79(Def)**:
$$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x).$$

`2:` Aus `1`
und aus `VS` gleich "$\ldots \preceq$ antiSymmetrisch in x"
folgt: $$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch in } x).$$

`3:` Aus `2`"$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } x) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch in } x)$"
folgt via **30-79(Def)**: $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x.

□

34-14. Definitions- und Bildbereiche (antiSymmetrischer) Halbordnungen in z sind gleich z:

<u>34-14(Satz)</u>

a) *Aus* "$\preceq$ *Halbordnung in* x" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\preceq) = x$" *und* "$\mathsf{ran}\,(\preceq) = x$".

b) *Aus* "$\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\preceq) = x$" *und* "$\mathsf{ran}\,(\preceq) = x$".

<u>Beweis</u> **<u>34-14</u>** `a)` `VS` gleich "$\preceq$ Halbordnung in x"

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ reflexiv in x.

`2.1:` Aus `1.1`"$\preceq$ Relation in x" und
aus `1.2`"$\preceq$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\,(\preceq) = x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\preceq$ Relation in x" und
aus `1.2`"$\preceq$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\,(\preceq) = x$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{dom}\,(\preceq) = x) \wedge (\mathsf{ran}\,(\preceq) = x)$.

`b)` `VS` gleich "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: $\preceq$ reflexiv in x.

`2.1:` Aus `1.1`"$\preceq$ Relation in x" und
aus `1.2`"$\preceq$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\,(\preceq) = x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\preceq$ Relation in x" und
aus `1.2`"$\preceq$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\,(\preceq) = x$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{dom}\,(\preceq) = x) \wedge (\mathsf{ran}\,(\preceq) = x)$.

$\square$

u **untere** M**_Schranke von** x.
o **obere** M**_Schranke von** x.
p **keine untere** M**_Schranke von** x.
p **keine obere** M**_Schranke von** x.
x **unten** M**_unbeschränkt**.
x **oben** M**_unbeschränkt**.

Ersterstellung: 27/02/07 **Letzte Änderung: 21/05/11**

35-1. Mit den "**(keinen) unteren M_Schranken**", den "**(keinen) oberen M_Schranken**", den "**unten M_unbeschränkten Klassen**" und den "**oben M_unbeschränkten Klassen**" betreten weitere klassische Konzepte die Essays. Auf die Einführung von "(nach unten/nach oben) M_beschränkten Klassen" wird verzichtet. In **35-2** stellt sich heraus, dass die Voraussetzungen "$u \in \mathsf{dom}\, M$" von 1) und "$o \in \mathsf{ran}\, M$" von 2) für *nicht leere* Klassen x verzichtbar sind. Anders formuliert: "$u \in \mathsf{dom}\, M$" (und "$o \in \mathsf{ran}\, M$") wird nur gebraucht, um im Fall $x = 0$ Widersinniges zu vermeiden. In der Tat würde ansonsten *jede Klassse* sowohl untere als auch obere M_Schranke von 0 sein. Gemäß 5)6) wird eine Klasse unten/oben M_unbeschränkt genannt, wenn sie keine untere/obere M_Schranke hat:

...

...

35-1(Definition)

1) "u **untere** M**_Schranke von** x" genau dann, wenn gilt:

$$u \in \mathsf{dom}\, M.$$

$$\wedge$$

$$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u\_M\_\alpha).$$

2) "o **obere** M**_Schranke von** x" genau dann, wenn gilt:

$$o \in \mathsf{ran}\, M.$$

$$\wedge$$

$$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_o).$$

3) "p **keine untere** M**_Schranke von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(p \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x).$$

4) "p **keine obere** M**_Schranke von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(p \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x).$$

5) "x **unten** M**_unbeschränkt**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x).$$

6) "x **oben** M**_unbeschränkt**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x).$$

35-2. Im folgenden Satz werden - unter anderem - untere(obere) M_Schranken mit oberen(unteren) M^{-1}_Schranken identifiziert. Dies hat auch Auswirkungen auf die weiteren, in **35-1(Def)** vorgestellten Konzepte. In der Hauptsache können damit im Folgenden etliche Sätze, die ansonsten für untere M_Schranken *und* für obere M_Schranken mit sehr ähnlichen Beweisen versehen werden müssten, deutlich kürzer bewiesen werden:

35-2(Satz)

a) *"u untere M_Schranke von x"*
genau dann, wenn "u obere M^{-1}_Schranke von x".

b) *"o obere M_Schranke von x"*
genau dann, wenn "o untere M^{-1}_Schranke von x".

c) *"p keine untere M_Schranke von x"*
genau dann, wenn "p keine obere M^{-1}_Schranke von x".

d) *"p keine obere M_Schranke von x"*
genau dann, wenn "p keine untere M^{-1}_Schranke von x".

e) *"x unten M_unbeschränkt"*
genau dann, wenn "x oben M^{-1}_unbeschränkt".

f) *"x oben M_unbeschränkt"*
genau dann, wenn "x unten M^{-1}_unbeschränkt".

Beweis **35-2** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich u untere M_Schranke von x.

1.1: Aus VS gleich "u untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus 1.1"$u \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\, M$"
folgt: A1 | "$u \in \mathsf{ran}\,(M^{-1})$"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

2: Aus VS gleich "u untere M_Schranke von x" und
aus Thema1.2"$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_α.

3: Aus 2"u_M_α"
folgt via **30-81**: $\alpha\_M^{-1}\_u$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_u)$"

1.3: Aus A1 gleich "$u \in \mathsf{ran}\,(M^{-1})$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_u)$"
folgt via **35-1(Def)**: u obere M^{-1}_Schranke von x.

Beweis **35-2** a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich u obere M^{-1}-Schranke von x.

1.1: Aus VS gleich "u obere M^{-1}-Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{ran}\,(M^{-1})$.

2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\,M$.

3: Aus 1.1"$u \in \mathsf{ran}\,(M^{-1})$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\,M$"
folgt: A1 | "$u \in \mathsf{dom}\,M$"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

2: Aus VS gleich "u obere M^{-1}-Schranke von x" und
aus Thema1.2"$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: α M^{-1} u.

3: Aus 2"α M^{-1} u"
folgt via **30-81**: u M α.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u$ M $\alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "$u \in \mathsf{dom}\,M$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u$ M $\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: u untere M-Schranke von x.

Beweis **35-2** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich o obere M_Schranke von x.

1.1: Aus VS gleich "o obere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus 1.1"$o \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\, M$"
folgt: A1 | "$o \in \mathsf{dom}\,(M^{-1})$"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

2: Aus VS gleich "o obere M_Schranke von x" und
aus Thema1.2"$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: α_M_o.

3: Aus 2"α_M_o"
folgt via **30-81**: o_M^{-1}_α.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (o\_M^{-1}\_\alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "$o \in \mathsf{dom}\,(M^{-1})$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (o\_M^{-1}\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: o untere M^{-1}_Schranke von x.

<u>Beweis **35-2**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich o untere M^{-1}_Schranke von x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "o untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{dom}\,(M^{-1})$.

`2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$.

`3:` Aus `1.1`"$o \in \mathsf{dom}\,(M^{-1})$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$"
folgt: `A1` | "$o \in \mathsf{ran}\,M$"

`Thema1.2` $\alpha \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich "o untere M^{-1}_Schranke von x" und
aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $o\_M^{-1}\_\alpha$.

`3:` Aus `2`"$o\_M^{-1}\_\alpha$"
folgt via **30-81**: α_M_o.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$o \in \mathsf{ran}\,M$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt via **35-1(Def)**: o obere M_Schranke von x.

Beweis **35-2** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich p keine untere M_Schranke von x.

1: Es gilt:
$$(p \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \vee (\neg(p \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x)).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall p obere M^{-1}_Schranke von x.

2: Aus 1.1.Fall "p obere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen a): p untere M_Schranke von x.

3: Aus VS gleich "p keine untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

4: Es gilt 2 "p untere M_Schranke von x".
Es gilt 3 "$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ obere M^{-1}_Schranke von $x)$.

1.2.Fall $\neg(p$ obere M^{-1}_Schranke von $x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$$\neg(p \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x).$$

Konsequenz via **35-1(Def)**: p keine obere M^{-1}_Schranke von x.

Beweis **35-2** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich p keine obere M^{-1}_Schranke von x.

1: Es gilt:

$$(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (\neg(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall p untere M_Schranke von x.

2: Aus 1.1.Fall "p untere M_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen a): p obere M^{-1}_Schranke von x.

3: Aus VS gleich "p keine obere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ obere M^{-1}_Schranke von $x)$.

4: Es gilt 2"p obere M^{-1}_Schranke von x" .
Es gilt 3"$\neg(p$ obere M^{-1}_Schranke von $x)$" .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

1.2.Fall $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

Konsequenz via **35-1(Def)**: p keine untere M_Schranke von x.

<u>Beweis</u> **35-2** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich p keine obere M_Schranke von x.

`1:` Es gilt:
$(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \vee (\neg(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p untere M^{-1}_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: p obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p keine obere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

`4:` Es gilt `2`"p obere M_Schranke von x".
Es gilt `3`"$\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$.

`1.2.Fall` $\neg(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\neg(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$.

Konsequenz via **35-1(Def)**: p keine untere M^{-1}_Schranke von x.

Beweis **35-2** d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich p keine untere M^{-1}_Schranke von x.

1: Es gilt:
$(p$ obere M_Schranke von $x) \vee (\neg(p$ obere M_Schranke von $x))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall p obere M_Schranke von x.

2: Aus 1.1.Fall"p obere M_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen b): p untere M^{-1}_Schranke von x.

3: Aus VS gleich "p keine untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$.

4: Es gilt 2"p untere M^{-1}_Schranke von x" .
Es gilt 3"$\neg(p$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$" .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

1.2.Fall $\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

Konsequenz via **35-1(Def)**: p keine obere M_Schranke von x.

<u>Beweis</u> **35-2** `e)`

`1:` $$x \text{ unten } M\text{\_unbeschränkt}$$
$$\overset{\mathbf{35-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x)$$
$$\overset{\texttt{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x)$$
$$\overset{\mathbf{35-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ oben } M^{-1}\text{\_unbeschränkt.}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(x \text{ unten } M\text{\_unbeschränkt}) \Leftrightarrow (x \text{ oben } M^{-1}\text{\_unbeschränkt}).$$

`f)`

`1:` $$x \text{ oben } M\text{\_unbeschränkt}$$
$$\overset{\mathbf{35-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x)$$
$$\overset{\texttt{b)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x)$$
$$\overset{\mathbf{35-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ unten } M^{-1}\text{\_unbeschränkt.}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(x \text{ oben } M\text{\_unbeschränkt}) \Leftrightarrow (x \text{ unten } M^{-1}\text{\_unbeschränkt}).$$

$\square$

35-3. Für nicht leere Klassen ist der Nachweis, dass eine Klasse eine untere/obere M_Schranke von x ist, etwas einfacher als im allgemeinen Fall:

35-3(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x$" *und* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"

folgt "*u untere M_Schranke von x*".

b) *Aus* "$0 \neq x$" *und* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"

folgt "*o obere M_Schranke von x*".

Beweis **35-3** a) VS gleich $(0 \neq x) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u\_M\_\alpha))$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in x$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in x$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
folgt: u_M_Ω.

3: Aus 2"u_M_Ω"
folgt via **30-2**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3"$u \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: u untere M_Schranke von x.

b) VS gleich $(0 \neq x) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_o))$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in x$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in x$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (o\_M\_\alpha)$"
folgt: Ω_M_o.

3: Aus 2"Ω_M_o"
folgt via **30-2**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

4: Aus 3"$o \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt via **35-1(Def)**: o obere M_Schranke von x.

□

35-4. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass jede untere M_Schranke eine Menge ist und dass, wenn x eine untere M_Schranke hat, x eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, M$ sein muss und dass $\mathsf{dom}\, M, \mathsf{ran}\, M, M$ nicht leer sind:

35-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *u untere M_Schranke von x.*

Dann folgt:

a) *u Menge.*

b) $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

c) $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

d) $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

e) $0 \neq M$.

<u>Beweis **35-4**</u> `a)`

`1:` Aus →) "u untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus `1` "$u \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **ElementAxiom**: u Menge.

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x$.

`2:` Aus →) "u untere M_Schranke von x" und
aus `Thema1` "$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_α.

`3:` Aus `2` "u_M_α"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`cde)`

`1:` Aus →) "u untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

`2.c):` Aus `1` "$u \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`3.d):` Aus `2.c)` "$0 \neq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

`3.e):` Aus `2.c)` "$0 \neq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **7-11**: $0 \neq M$.

□

35-5. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass jede obere M_Schranke eine Menge ist und dass, wenn x eine obere M_Schranke hat, x eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, M$ sein muss und dass $\mathsf{dom}\, M, \mathsf{ran}\, M, M$ nicht leer sind. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - c) - e)`:

35-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *o obere M_Schranke von x.*

Dann folgt:

`a)` *o Menge.*

`b)` $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`c)` $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`d)` $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

`e)` $0 \neq M$.

Beweis **35-5** `a)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "o obere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus `1` "$o \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **ElementAxiom**: o Menge.

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "o obere M_Schranke von x" und
aus `Thema1` "$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: α_M_o.

`3:` Aus `2` "α_M_o"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`cde)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "o obere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

`2.d):` Aus `1` "$o \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

`3.c):` Aus `2.d)` "$0 \neq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`3.e):` Aus `2.d)` "$0 \neq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **7-11**: $0 \neq M$.

□

35-6. Im folgenden Satz wird gesagt, dass jede untere M_Schranke einer Klasse x auch eine untere M_Schranke jeder TeilKlasse von x ist und dass Analoges für obere M_Schranken gilt. Beim Beweis von `b)` wird erstmalig **35-2** - und natürlich `a)` - eingesetzt:

35-6(Satz)

`a)` *Aus "$y \subseteq x$" und "u untere M_Schranke von x"
folgt "u untere M_Schranke von y".*

`b)` *Aus "$y \subseteq x$" und "o obere M_Schranke von x"
folgt "o obere M_Schranke von y".*

Beweis **35-6** a) VS gleich $(y \subseteq x) \wedge (u \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots u$ untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: | A1 | "$u \in \mathsf{dom}\, M$" |

| Thema1.2 | $\alpha \in y$. |

2: Aus Thema1.2"$\alpha \in y$" und
aus VS gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in x$.

3: Aus VS gleich "u untere M_Schranke von x" und
aus 2"$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_α.

Ergo Thema1.2: | A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$" |

1.3: Aus A1 gleich "$u \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: u untere M_Schranke von y.

b) VS gleich $(y \subseteq x) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots o$ obere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: o untere M^{-1}_Schranke von x.

2: Aus VS gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus 1"o untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen a): o untere M^{-1}_Schranke von y.

3: Aus 2"o untere M^{-1}_Schranke von y"
folgt via **35-2**: o obere M_Schranke von y.

□

35-7. Jedes Element aus $\mathsf{dom}\, M$ ist eine untere M_Schranke der leeren Menge. Jedes Element aus $\mathsf{ran}\, M$ ist eine obere M_Schranke der leeren Menge. Zur Erinnerung an **35-1(Def)**: jede untere M_Schranke von 0 ist Element von $\mathsf{dom}\, M$ und jede obere M_Schranke von 0 ist Element von $\mathsf{ran}\, M$:

35-7(Satz)

a) *Aus "$p \in \mathsf{dom}\, M$" folgt "p untere M_Schranke von 0".*

b) *Aus "$p \in \mathsf{ran}\, M$" folgt "p obere M_Schranke von 0".*

Beweis **35-7** `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, M$.

`Thema1.1` $\alpha \in 0$.

Es gilt `Thema1.1` "$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: p_M_α.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: p untere M_Schranke von 0.

`b)` `VS` gleich $p \in \mathsf{ran}\, M$.

`Thema1.1` $\alpha \in 0$.

Es gilt `Thema1.1` "$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: α_M_p.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
folgt via **35-1(Def)**: p obere M_Schranke von 0.

□

35-8. Falls es $p \in \mathsf{dom}\, M$ und $q \in \mathsf{ran}\, M$ mit $\neg(p\_M\_q)$ gibt, dann ist p zwar eine untere M_Schranke von 0 und q ist eine obere M_Schranke von 0, doch es gilt entsprechend folgenden Satzes dennoch nicht "p_M_q" - also muss eine untere M_Schranke einer Klasse nicht notwendiger Weise "M_kleinergleich" einer oberen M_Schranke dieser Klasse sein:

35-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $p \in \mathsf{dom}\, M$.

$\rightarrow$) $q \in \mathsf{ran}\, M$.

$\rightarrow$) $\neg(p\_M\_q)$.

Dann folgt:

a) p *untere* M*_Schranke von* 0.

b) q *obere* M*_Schranke von* 0.

c) $\neg(p\_M\_q)$.

Beweis **35-8**

1.a): Aus $\rightarrow$) "$p \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **35-7**: p untere M_Schranke von 0.

1.b): Aus $\rightarrow$) "$q \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-7**: q obere M_Schranke von 0.

1.c): Aus $\rightarrow$) "$\neg(p\_M\_q)$"
folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

$\square$

35-9. Mit dem folgenden Satz wird eine recht umfassende Klärung des Begriffs "p keine untere M_Schranke von x" gegeben:

35-9(Satz)

a) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, M$" *folgt* "*$p$ keine untere M_Schranke von x*".

b) *Aus* "$q \in x$" *und* "$\neg(p\_M\_q)$"
folgt "*p keine untere M_Schranke von x*".

c) *Aus* "*p keine untere M_Schranke von x*"
folgt "$p \notin \mathsf{dom}\, M$" *oder* "$\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".

d) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\, M$" *und* "*p keine untere M_Schranke von x*"
folgt "$0 \neq x$" *und* "$\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".

e) *Aus* "*p keine untere M_Schranke von x*"
und "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt "$x = 0$" *und* "$p \notin \mathsf{dom}\, M$".

Beweis **35-9** `a)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, M$.

`1:` Es gilt: (p untere M_Schranke von x) $\vee$ ($\neg$(p untere M_Schranke von x)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Es gilt `2`"$p \in \mathsf{dom}\, M$".
Es gilt `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, M$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg$(p untere M_Schranke von x).

`1.2.Fall` $\neg$(p untere M_Schranke von x).

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\neg$(p untere M_Schranke von x).

Konsequenz via **35-1**: p keine untere M_Schranke von x.

Beweis **35-9** `b)` `VS` gleich $(q \in x) \wedge (\neg(p\_M\_q))$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x) \vee (\neg(p \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`“p untere M_Schranke von x” und
aus `VS` gleich “$q \in x \ldots$”
folgt via **35-1(Def)**: p_M_q.

`3:` Es gilt `2`“p_M_q” .
Es gilt `VS` gleich “$\ldots \neg(p\_M\_q)$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`1.2.Fall` $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

Konsequenz via **35-1**: p keine untere M_Schranke von x.

`c)`

`1:` Via **35-1(Def)** gilt:
$$(p \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x) \Leftrightarrow ((p \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$\neg(p \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x) \Leftrightarrow (\neg((p \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)))).$$

`3:` Aus `2`
folgt via **35-1(Def)**:
$$p \text{ keine untere } M\text{\_Schranke von } x \Leftrightarrow (\neg((p \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)))).$$

`4:` Aus `3`
folgt:
$$p \text{ keine untere } M\text{\_Schranke von } x \Leftrightarrow (\neg(p \in \mathsf{dom}\, M)) \vee (\neg(\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))).$$

`5:` Aus `4`
folgt:
$$p \text{ keine untere } M\text{\_Schranke von } x \Leftrightarrow (p \notin \mathsf{dom}\, M) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))).$$

`6:` Aus `5`
folgt:
$$p \text{ keine untere } M\text{\_Schranke von } x \Rightarrow (p \notin \mathsf{dom}\, M) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))).$$

<u>Beweis</u> **35-9** `d)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (p$ keine untere M_Schranke von $x)$.

`1:` Es gilt: $(\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega)))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, M \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: p untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ keine untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`4:` Es gilt `2`"p untere M_Schranke von x".
Es gilt `3`"$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`4:` Aus `3`
und aus `A1`
folgt: $(0 \neq x) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega)))$.

Beweis **35-9** `e)`

`VS` gleich $(p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$.

`1.1:` Es gilt: $(0 \neq x) \vee (x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq x$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall` "$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-3**: p untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p keine untere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`4:` Es gilt `2` "p untere M_Schranke von x".
Es gilt `3` "$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $x = 0$.

`1.1.2.Fall` $x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x = 0$"

`1.2:` Es gilt: $(p \in \text{dom}\, M) \vee (p \notin \text{dom}\, M)$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $p \in \text{dom}\, M$.

`2:` Aus `1.2.1.Fall` "$p \in \text{dom}\, M$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: p untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p keine untere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`4:` Es gilt `2` "p untere M_Schranke von x".
Es gilt `3` "$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin \text{dom}\, M$.

`1.2.2.Fall` $p \notin \text{dom}\, M$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A2` | "$p \notin \text{dom}\, M$"

...

<u>Beweis **35-9**</u> `e)`

...

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: $(x = 0) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, M)$.

$\square$

35-10. Mit dem folgenden Satz wird eine recht umfassende Klärung des Begriffs "q keine obere M_Schranke von x" gegeben:

35-10(Satz)

a) *Aus* "$q \notin \mathsf{ran}\, M$" *folgt* "*$q$ keine obere M_Schranke von x*".

b) *Aus* "$p \in x$" *und* "$\neg(p\_M\_q)$"
folgt "*q keine obere M_Schranke von x*".

c) *Aus* "*q keine obere M_Schranke von x*"
folgt "$q \notin \mathsf{ran}\, M$" *oder* "$\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_q))$".

d) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\, M$" *und* "*q keine obere M_Schranke von x*"
folgt "$0 \neq x$" *und* "$\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_q))$".

e) *Aus* "*q keine obere M_Schranke von x*"
und "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_q)$"
folgt "$x = 0$" *und* "$q \notin \mathsf{ran}\, M$".

Beweis **35-10** a) VS gleich $q \notin \mathsf{ran}\, M$.

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus VS gleich "$q \notin \mathsf{ran}\, M$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\, M$"
folgt: $q \notin \mathsf{dom}\,(M^{-1})$.

3: Aus 2"$q \notin \mathsf{dom}\,(M^{-1})$"
folgt via **35-9**: q keine untere M^{-1}_Schranke von x.

4: Aus 3"q keine untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: q keine obere M_Schranke von x.

b) VS gleich $(p \in x) \wedge (\neg(p\_M\_q))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots \neg(p\_M\_q)$"
folgt via **30-82**: $\neg(q\_M^{-1}\_p)$.

2: Aus VS gleich "$p \in x \ldots$" und
aus 1"$\neg(q\_M^{-1}\_p)$"
folgt via **35-9**: q keine untere M^{-1}_Schranke von x.

3: Aus 2"q keine untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: q keine obere M_Schranke von x.

<u>Beweis</u> **35-10** `c)` `VS` gleich q keine obere M_Schranke von x.

`1:` Aus `VS` gleich "q keine obere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: q keine untere M^{-1}_Schranke von x.

`2:` Aus `1`"q keine untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-9**: $(q \notin \mathsf{dom}\,(M^{-1})) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)))$.

`3:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$.

`4:` Aus `2`"$(q \notin \mathsf{dom}\,(M^{-1})) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)))$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$"
folgt: $(q \notin \mathsf{ran}\,M) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)))$

`5:` Via **30-82** gilt: $(\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)) \Leftrightarrow (\neg(\Omega\_M\_q))$.

`6:` Aus `4`"$(q \notin \mathsf{ran}\,M) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)))$" und
aus `5`"$(\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)) \Leftrightarrow (\neg(\Omega\_M\_q))$"
folgt: $(q \notin \mathsf{ran}\,M) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_q)))$.

`d)` `VS` gleich $(q \in \mathsf{ran}\,M) \wedge (q$ keine obere M_Schranke von $x)$..

`1.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ keine obere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: q keine untere M^{-1}_Schranke von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\,M \ldots$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$"
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(M^{-1})$.

`3:` Aus `2`"$q \in \mathsf{dom}\,(M^{-1})$" und
aus `1.2`"q keine untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-9**: $(0 \neq x) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(q\_M^{-1}\_\Omega)))$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \neg(q\_M^{-1}\_\Omega)$"
folgt via **30-82**: $\neg(\Omega\_M\_q)$.

`5:` Aus `3`"$0 \neq x \ldots$",
aus `3`"$\ldots \exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus `4`"$\neg(\Omega\_M\_q)$"
folgt: $(0 \neq x) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_q)))$.

Beweis **35-10** `e)`
`VS` gleich $(q \text{ keine obere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "q keine obere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **35-2**: q keine untere M^{-1}_Schranke von x.

`1.2:` Via **30-81** gilt: $(\alpha\_M\_q) \Leftrightarrow (q\_M^{-1}\_\alpha)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_q)$" und
aus `1.2`"$(\alpha\_M\_q) \Leftrightarrow (q\_M^{-1}\_\alpha)$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (q\_M^{-1}\_\alpha)$.

`3:` Aus `1.1`"q keine untere M^{-1}_Schranke von x" und
aus `2`"$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (q\_M^{-1}\_\alpha)$"
folgt via **35-9**: $(x = 0) \wedge (q \notin \mathsf{dom}\,(M^{-1}))$.

`4:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$.

`5:` Aus `3`"$\ldots q \notin \mathsf{dom}\,(M^{-1})$" und
aus `4`"$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M$"
folgt: $q \notin \mathsf{ran}\,M$.

`6:` Aus `3`"$x = 0 \ldots$" und
aus `5`"$q \notin \mathsf{ran}\,M$"
folgt: $(x = 0) \wedge (q \notin \mathsf{ran}\,M)$.

□

35-11. Wenn x unten M_unbeschränkt ist, dann ist gemäß folgenden Satzes keine Klasse eine untere M_Schranke von x. Analoges gilt für oben M_unbeschränkte Klassen, siehe `b)`:

35-11(Satz)

`a)` *Aus "x unten M_unbeschränkt"*
folgt "p keine untere M_Schranke von x".

`b)` *Aus "x oben M_unbeschränkt"*
folgt "q keine obere M_Schranke von x".

<u>Beweis **35-11**</u> `a)` `VS` gleich x unten M_unbeschränkt.

`1:` Es gilt: (p untere M_Schranke von x) $\vee$ ($\neg$(p untere M_Schranke von x)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`“p untere M_Schranke von x”
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich “x unten M_unbeschränkt”
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $x)$.

`4:` Es gilt `2`“$\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x” .
Es gilt `3`“$\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $x)$” .
Ex falso quodlibet folgt: p keine untere M_Schranke von x.

`1.2.Fall` $\neg$(p untere M_Schranke von x).

Aus `1.2.Fall`“$\neg$(p untere M_Schranke von x)”
folgt via **35-1(Def)**: p keine untere M_Schranke von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p keine untere M_Schranke von x.

`b)` `VS` gleich x oben M_unbeschränkt.

`1:` Aus `VS` gleich “x oben M_unbeschränkt”
folgt via **35-2**: x unten M^{-1}_unbeschränkt.

`2:` Aus `2`“x unten M^{-1}_unbeschränkt”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: q keine untere M^{-1}_Schranke von x.

`3:` Aus `2`“q keine untere M^{-1}_Schranke von x”
folgt via **35-2**: q keine obere M_Schranke von x.

□

35-12 Laut folgendem Satz ist jede Klasse, die eine unten M_unbeschränkte Klasse umfasst, unten M_unbeschränkt. Analoges gilt für oben M_unbeschränkte Klassen, siehe `b)`:

35-12(Satz)

`a)` *Aus "$x \subseteq y$" und "x unten M_unbeschränkt"*
folgt "y unten M_unbeschränkt".

`b)` *Aus "$x \subseteq y$" und "x oben M_unbeschränkt"*
folgt "y oben M_unbeschränkt".

<u>Beweis **35-12**</u> `a)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (x \text{ unten } M\text{\_unbeschränkt})$.

`1:` Es gilt: $(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y)$

$\vee$

$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von y.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots \Omega$ untere M_Schranke von y"
folgt via **35-6**: Ω untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 2"Ω untere M_Schranke von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ unten M_unbeschränkt"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x)$.

`5:` Es gilt `2`"$\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x".
Es gilt `3`"$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x)$".
Ex falso quodlibet folgt: y unten M_unbeschränkt.

`1.2.Fall` $\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y)$"
folgt via **35-1(Def)**: y unten M_unbeschränkt.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
y unten M_unbeschränkt.

`b)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (x \text{ oben } M\text{\_unbeschränkt})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ oben M_unbeschränkt"
folgt via **35-2**: x unten M^{-1}_unbeschränkt.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$" und
aus `1`"x unten M^{-1}_unbeschränkt"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: y unten M^{-1}_unbeschränkt.

`3:` Aus `2`"y unten M^{-1}_unbeschränkt"
folgt via **35-2**: y oben M_unbeschränkt.

$\square$

35-13. Wenn K eine M_Kette ist und wenn p eine untere *oder* obere M_Schranke von K mit p_M_p ist, dann ist entsprechend folgenden Satzes $\{p\} \cup K$ eine M_Kette:

35-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) p_M_p.

$\rightarrow$) K *ist* M_*Kette*.

$\rightarrow$) *p untere M_Schranke von K.* *oder* *p obere M_Schranke von K.*

Dann folgt "$\{p\} \cup K$ ist M_Kette".

Beweis **35-13**

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(p$ untere M_Schranke von $K)$
$\vee(p$ obere M_Schranke von $K)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` p untere M_Schranke von K.

`Thema2` $\alpha \in K$.

`3:` Aus `1.1.1.Fall`"p untere M_Schranke von K" und
aus `Thema2`"$\alpha \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: p_M_α.

`4:` Aus `3`
folgt: $(p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p)$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$.

`1.1.2.Fall` p obere M_Schranke von K.

`Thema2` $\alpha \in K$.

`3:` Aus `1.1.2.Fall`"p obere M_Schranke von K" und
aus `Thema2`"$\alpha \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: α_M_p.

`4:` Aus `3`
folgt: $(p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p)$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$"

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"p_M_p",
aus $\rightarrow$)"K ist M_Kette" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$"
folgt via **30-78**: $\{p\} \cup K$ ist M_Kette.

$\square$

inf **ist** M_**Infimum von** x.
sup **ist** M_**Supremum von** x.
p **kein** M_**Infimum von** x.
p **kein** M_**Supremum von** x.
x **hat kein** M_**Infimum**.
x **hat kein** M_**Supremum**.
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.
InfSupSatz.
SupInfSatz.

Ersterstellung: 26/04/06 **Letzte Änderung: 21/05/11**

36-1. In der folgenden Definition werden Klassen, die **(kein)** M**_Infimum** oder **(kein)** M**_Supremum** einer anderen Klasse sind, in die Essays eingeführt. Auch wird gesagt, was es heißt, **kein** M**_Infimum** oder **kein** M**_Supremum** zu haben. Die in `1)2)` auftretenden Allquantoren erstrecken sich über M_untere und M_obere Schranken von x - also via **35-4** und **35-5** über *Mengen*:

36-1(Definition)

1) "inf **ist** M**_Infimum von** x" genau dann, wenn gilt:

inf untere M_Schranke von x.

$\wedge$

$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha\_M\_inf)$.

2) "sup **ist** M**_Supremum von** x" genau dann, wenn gilt:

sup obere M_Schranke von x.

$\wedge$

$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (sup\_M\_\alpha)$.

3) "p **kein** M**_Infimum von** x" genau dann, wenn gilt:

$\neg(p$ ist M_Infimum von $x)$.

4) "p **kein** M**_Supremum von** x" genau dann, wenn gilt:

$\neg(p$ ist M_Supremum von $x)$.

5) "x **hat kein** M**_Infimum**" genau dann, wenn gilt:

$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $x)$.

6) "x **hat kein** M**_Supremum**" genau dann, wenn gilt:

$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $x)$.

36-2. Im folgenden Satz werden - unter anderem - M_Infima (M_Suprema) mit M^{-1}_Suprema (M^{-1}_Infima) identifiziert. Dies hat auch Auswirkungen auf die weiteren, in **36-1(Def)** vorgestellten Konzepte. In der Hauptsache können damit im Folgenden etliche Sätze, die ansonsten für M_Infima *und* für M_Suprema mit sehr ähnlichen Beweisen versehen werden müssten, deutlich kürzer bewiesen werden:

36-2(Satz)

a) *"inf ist M_Infimum von x"*
genau dann, wenn "inf ist M^{-1}_Supremum von x".

b) *"sup ist M_Supremum von x"*
genau dann, wenn "sup ist M^{-1}_Infimum von x".

c) *"p kein M_Infimum von x"*
genau dann, wenn "p kein M^{-1}_Supremum von x".

d) *"p kein M_Supremum von x"*
genau dann, wenn "p kein M^{-1}_Infimum von x".

e) *"x hat kein M_Infimum"*
genau dann, wenn "x hat kein M^{-1}_Supremum".

f) *"x hat kein M_Supremum"*
genau dann, wenn "x hat kein M^{-1}_Infimum".

Beweis **36-2** a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich inf ist M_Infimum von x.

1.1: Aus VS gleich "inf ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von x.

2: Aus 1.1"inf untere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: A1 | "inf obere M^{-1}_Schranke von x"

Thema1.2 α obere M^{-1}_Schranke von x.

2: Aus Thema1.2"α obere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: α untere M_Schranke von x.

3: Aus VS gleich "inf ist M_Infimum von x" und
aus 2"α untere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: α_M_inf.

4: Aus 3"α_M_inf"
folgt via **30-81**: inf_M^{-1}_α.

Ergo Thema1.2:
A2 | "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M^{-1}_Schranke von $x) \Rightarrow (inf$_M^{-1}_$\alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "inf obere M^{-1}_Schranke von x" und
aus A2 gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M^{-1}_Schranke von $x) \Rightarrow (inf$_M^{-1}_$\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: inf ist M^{-1}_Supremum von x.

Beweis **36-2** `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich inf ist M^{-1}_Supremum von x.

`1.1`: Aus `VS` gleich "inf ist M^{-1}_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf obere M^{-1}_Schranke von x.

`2`: Aus `1.1` "inf obere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: `A1` | "inf untere M_Schranke von x"

`Thema1.2` α untere M_Schranke von x.

`2`: Aus `Thema1.2` "α untere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: α obere M^{-1}_Schranke von x.

`3`: Aus `VS` gleich "inf ist M^{-1}_Supremum von x" und
aus `2` "α obere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf_M^{-1}_α.

`4`: Aus `3` "inf_M^{-1}_α"
folgt via **30-81**: α_M_inf.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall\alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$_M_$inf)$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "inf untere M_Schranke von x" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$_M_$inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: inf ist M_Infimum von x.

Beweis **36-2** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich sup ist M_Supremum von x.

1.1: Aus VS gleich "sup ist M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere M_Schranke von x.

2: Aus 1.1"sup obere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: A1 | "sup untere M^{-1}_Schranke von x"

Thema1.2 α untere M^{-1}_Schranke von x.

2: Aus Thema1.2"α untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: α obere M_Schranke von x.

3: Aus VS gleich "sup ist M_Supremum von x" und
aus 2"α obere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_α.

4: Aus 3"sup_M_α"
folgt via **30-81**: $\alpha\_M^{-1}\_sup$.

Ergo Thema1.2:
A2 | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_sup)$"

1.3: Aus A1 gleich "sup untere M^{-1}_Schranke von x" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_sup)$"
folgt via **36-1(Def)**: sup ist M^{-1}_Infimum von x.

<u>Beweis **36-2**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich sup ist M^{-1}_Infimum von x.

`1.1`: Aus `VS` gleich "sup ist M^{-1}_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup untere M^{-1}_Schranke von x.

`2`: Aus `1.1` "sup untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: `A1` | "sup obere M_Schranke von x"

> `Thema1.2` α obere M_Schranke von x.
>
> `2`: Aus `Thema1.2` "α obere M_Schranke von x"
> folgt via **35-2**: α untere M^{-1}_Schranke von x.
>
> `3`: Aus `VS` gleich "sup ist M^{-1}_Infimum von x" und
> aus `2` "α untere M^{-1}_Schranke von x"
> folgt via **36-1(Def)**: α_M^{-1}_sup.
>
> `4`: Aus `3` "α_M^{-1}_sup"
> folgt via **30-81**: sup_M_α.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (sup$_M_$\alpha)$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "sup obere M_Schranke von x" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (sup$_M_$\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: sup ist M_Supremum von x.

Beweis **36-2** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich p kein M_Infimum von x.

1: Es gilt: (p ist M^{-1}_Supremum von x) $\vee$ ($\neg$(p ist M^{-1}_Supremum von x)).

Fallunterscheidung

1.1.Fall p ist M^{-1}_Supremum von x.

2: Aus 1.1.Fall "p ist M^{-1}Supremum von x"
folgt via des bereits bewiesenen a): p ist M_Infimum von x.

3: Aus VS gleich "p kein M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg$(p ist M_Infimum von x).

4: Es gilt 3 "$\neg$(p ist M_Infimum von x)" .
Es gilt 2 "p ist M_Infimum von x" .
Ex falso quodlibet folgt: p kein M^{-1}_Supremum von x.

1.2.Fall $\neg$(p ist M^{-1}_Supremum von x).

Aus 1.2.Fall "$\neg$(p ist M^{-1}_Supremum von x)"
folgt via **36-1(Def)**: p kein M^{-1}_Supremum von x.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
p kein M^{-1}_Supremum von x.

Beweis **36-2** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich p kein M^{-1}_Supremum von x.

`1:` Es gilt: (p ist M_Infimum von x) $\vee$ ($\neg$(p ist M_Infimum von x)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Infimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p ist M_Infimum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: p ist M^{-1}_Supremum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p kein M^{-1}_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg$(p ist M^{-1}_Supremum von x).

`4:` Es gilt `3` "$\neg$(p ist M^{-1}_Supremum von x)".
Es gilt `2` "p ist M^{-1}_Supremum von x".
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Infimum von x.

`1.2.Fall` $\neg$(p ist M_Infimum von x).

Aus `1.2.Fall` "$\neg$(p ist M_Infimum von x)"
folgt via **36-1(Def)**: p kein M_Infimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_Infimum von x.

Beweis **36-2** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich p kein M_Supremum von x.

`1:` Es gilt: (p ist M^{-1}_Infimum von x) $\vee$ ($\neg$(p ist M^{-1}_Infimum von x)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M^{-1}_Infimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p ist M^{-1}Infimum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: p ist M_Supremum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p kein M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg$(p ist M_Supremum von x).

`4:` Es gilt `3` "$\neg$(p ist M_Supremum von x)" .
Es gilt `2` "p ist M_Supremum von x" .
Ex falso quodlibet folgt: p kein M^{-1}_Infimum von x.

`1.2.Fall` $\neg$(p ist M^{-1}_Infimum von x).

Aus `1.2.Fall` "$\neg$(p ist M^{-1}_Infimum von x)"
folgt via **36-1(Def)**: p kein M^{-1}_Infimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M^{-1}_Infimum von x.

Beweis **36-2** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich p kein M^{-1}_Infimum von x.

`1:` Es gilt: (p ist M_Supremum von x) $\vee$ ($\neg$(p ist M_Supremum von x)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Supremum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p ist M_Supremum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: p ist M^{-1}_Infimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p kein M^{-1}_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg$(p ist M^{-1}_Infimum von x).

`4:` Es gilt `3`"$\neg$(p ist M^{-1}_Infimum von x)" .
Es gilt `2`"p ist M^{-1}_Infimum von x" .
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Supremum von x.

`1.2.Fall` $\neg$(p ist M_Supremum von x).

Aus `1.2.Fall`"$\neg$(p ist M_Supremum von x)"
folgt via **36-1(Def)**: p kein M_Supremum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_Supremum von x.

Beweis **36-2** `e)`

`1:`

$$x \text{ hat kein } M\_\text{Infimum}$$
$$\stackrel{\textbf{36-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$$
$$\stackrel{\texttt{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{Supremum von } x)$$
$$\stackrel{\textbf{36-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Supremum}.$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(x \text{ hat kein } M\_\text{Infimum}) \Leftrightarrow (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Supremum}).$$

`f)`

`1:`

$$x \text{ hat kein } M\_\text{Supremum}$$
$$\stackrel{\textbf{36-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x)$$
$$\stackrel{\texttt{b)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{Infimum von } x)$$
$$\stackrel{\textbf{36-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Infimum}.$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(x \text{ hat kein } M\_\text{Supremum}) \Leftrightarrow (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Infimum}).$$

□

36-3. Im folgenden Satz sind grundlegende Eigenschaften von M_Infima aufgelistet. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - e) - d)`:

36-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) inf *ist* M*_Infimum von* x.

Dann folgt:

a) inf *Menge.*

b) $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

c) inf_M_inf.

d) $inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

e) $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (inf\_M\_\alpha)$.

<u>Beweis **36-3**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "inf ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von x.

`2.a):` Aus `1`"inf untere M_Schranke von x"
folgt via **35-4**: inf Menge.

`2.b):` Aus `1`"inf untere M_Schranke von x"
folgt via **35-4**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2.c):` Aus $\rightarrow$) "inf ist M_Infimum von x" und
aus `1`"inf untere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf_M_inf.

`2.e):` Aus `1`"inf untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (inf\_M\_\alpha)$.

`3.1:` Aus `2.c)`"inf_M_inf"
folgt via **30-2**: $inf \in \mathsf{dom}\, M$.

`3.2:` Aus `2.c)`"inf_M_inf"
folgt via **30-2**: $inf \in \mathsf{ran}\, M$.

`4.d):` Aus `3.1`"$inf \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `3.2`"$inf \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

36-4. Im folgenden Satz sind grundlegende Eigenschaften von M_Suprema aufgelistet. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - e) - d)`:

36-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sup ist M_Supremum von x.*

Dann folgt:

a) *sup Menge.*

b) $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

c) sup_M_sup.

d) $sup \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$.

e) $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_sup)$.

<u>Beweis **36-4**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "sup ist M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere M_Schranke von x.

`2.a):` Aus `1` "sup obere M_Schranke von x"
folgt via **35-5**: sup Menge.

`2.b):` Aus `1` "sup obere M_Schranke von x"
folgt via **35-5**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2.c):` Aus $\rightarrow$) "sup ist M_Supremum von x" und
aus `1` "sup obere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_sup.

`2.e):` Aus `1` "sup obere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mathrm{sup})$.

`3.1:` Aus `2.c)` "sup_M_sup"
folgt via **30-2**: $sup \in \mathsf{dom}\, M$.

`3.2:` Aus `2.c)` "sup_M_sup"
folgt via **30-2**: $sup \in \mathsf{ran}\, M$.

`4.d):` Aus `3.1` "$sup \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `3.2` "$sup \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $sup \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

36-5. Falls $y \subseteq x$, dann ist laut folgendem Satz einerseits jedes M_Infimum von x eine untere M_Schranke von y und wenn j ein M_Infimum von y ist und wenn u eine untere M_Schranke von x ist, dann folgt u_M_j. Analoges gilt via `cd)` für M_Suprema und obere M_Schranken:

36-5(Satz)

a) *Aus "$y \subseteq x$" und "inf ist M_Infimum von x"*
folgt "inf untere M_Schranke von y".

b) *Aus*
"$y \subseteq x$" und
"u untere M_Schranke von x" und
"j ist M_Infimum von y"
folgt "u_M_j".

c) *Aus "$y \subseteq x$" und "sup ist M_Supremum von x"*
folgt "sup obere M_Schranke von y".

b) *Aus*
"$y \subseteq x$" und
"o obere M_Schranke von x" und
"s ist M_Supremum von y"
folgt "s_M_o".

<u>Beweis **36-5**</u> `a)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (inf$ ist M_Infimum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1` "inf untere M_Schranke von x"
folgt via **35-6**: inf untere M_Schranke von y.

`b)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (u$ untere M_Schranke von $x)$
$\wedge(j$ ist M_Infimum von $y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **35-6**: u untere M_Schranke von y.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots j$ ist M_Infimum von y" und
aus `1` "u untere M_Schranke von y"
folgt via **36-1(Def)**: u_M_j.

`c)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (sup$ ist M_Supremum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere M_Schranke von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1` "sup obere M_Schranke von x"
folgt via **35-6**: sup obere M_Schranke von y.

`b)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (o$ obere M_Schranke von $x)$
$\wedge(s$ ist M_Supremum von $y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **35-6**: o obere M_Schranke von y.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots s$ ist M_Supremum von y" und
aus `1` "o obere M_Schranke von y"
folgt via **36-1(Def)**: s_M_o.

□

36-6. M_Infima sind gemäß folgenden Satzes miteinander "M_vergleichbar", so dass jede Klasse, die nur aus M_Infima von x besteht, eine M_Kette ist, siehe `b)`. Via `cd)` gelten analoge Aussagen für M_Suprema. Hingegen ist - siehe **36-7(Bem)** und das nachfolgende Beispiel - eine Klasse, die aus M_Infima *oder* aus M_Suprema einer Klasse x besteht nicht notwendiger Weise eine M_Kette:

36-6(Satz)

`a)` *Aus "inf ist M_Infimum von x" und "j ist M_Infimum von x" folgt "inf_M_j" und "j_M_inf".*

`b)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha$ *ist M_Infimum von* $x)$" *folgt "K ist M_Kette".*

`c)` *Aus "sup ist M_Supremum von x" und "s ist M_Supremum von x" folgt "sup_M_s" und "s_M_sup".*

`d)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha$ *ist M_Supremum von* $x)$" *folgt "K ist M_Kette".*

Beweis **36-6** `a)` `VS` gleich (inf ist M_Infimum von x) $\wedge$ (j ist M_Infimum von x).

`1.1:` Aus `VS` gleich "inf ist M_Infimum von $x \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von x.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots j$ ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: j untere M_Schranke von x.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots j$ ist M_Infimum von x" und
aus `1.1` "inf untere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: inf_M_j.

`2.2:` Aus `VS` gleich "inf ist M_Infimum von $x \ldots$" und
aus `1.2` "j untere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: j_M_inf.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(inf\_M\_j) \wedge (j\_M\_inf)$.

<u>Beweis **36-6**</u> `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\beta \in K) \wedge (\gamma \in K)$.

`2.1:` Aus `Thema1` “$\beta \in K \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$”
folgt: β ist M_Infimum von x.

`2.2:` Aus `Thema1` “$\ldots \gamma \in K$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$”
folgt: γ ist M_Infimum von x.

`3:` Aus `2.1` “β ist M_Infimum von x” und
aus `2.2` “γ ist M_Infimum von x”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: β_M_γ.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta, \gamma : ((\beta \in K) \wedge (\gamma \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: K ist M_Kette.

`c)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } x) \wedge (s \text{ ist } M\text{\_Supremum von } x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “sup ist M_Supremum von $x \ldots$”
folgt via **36-1(Def)**: sup obere M_Schranke von x.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots s$ ist M_Supremum von x”
folgt via **36-1(Def)**: s obere M_Schranke von x.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots s$ ist M_Supremum von x” und
aus `1.1` “sup obere M_Schranke von x”
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_s.

`2.2:` Aus `VS` gleich “sup ist M_Supremum von $x \ldots$” und
aus `1.2` “s obere M_Schranke von x”
folgt via **36-1(Def)**: s_M_sup.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(sup\_M\_s) \wedge (s\_M\_sup)$.

Beweis **36-6** `d)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x)$.

`Thema1` $(\beta \in K) \wedge (\gamma \in K)$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\beta \in K \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x)$"
folgt: β ist $M_$Supremum von x.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\ldots \gamma \in K$" und
aus `VS` gleich"$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x)$"
folgt: γ ist $M_$Supremum von x.

`3:` Aus `2.1`"β ist $M_$Supremum von x" und
aus `2.2`"γ ist $M_$Supremum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: β_M_γ.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta, \gamma : ((\beta \in K) \wedge (\gamma \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: K ist $M_$Kette.

□

36-7. Die Erkenntnis von nachfolgendem Beispiel vorwegnehmend wird nun fest gestellt, dass wenn eine Klasse y aus M_Infima *oder* M_Suprema einer Klasse x besteht, diese Klasse y nicht notwendiger Weise eine M_Kette ist:

36-7.Bemerkung

Die Aussage

"$\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow ((\alpha \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x) \vee (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x))$
$\Rightarrow (y \text{ ist } M\_\text{Kette})$"

steht nicht ohne Weiteres zur Verfügung.

36-8. Im nachfolgenden Beispiel wird dokumentiert, dass es Klassen y gibt, die zwar aus M_Infima *oder* M_Suprema einer Klasse x bestehen, aber dennoch keine M_Ketten sind:

<u>36-8.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) w Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $p \neq w$.

$\rightarrow$) $q \neq w$.

$\rightarrow$) $M = \{(p,p),(p,w),(w,q),(q,q)\}$.

$\rightarrow$) $x = \{w\}$.

$\rightarrow$) $y = \{p,q\}$.

Dann folgt:

a) p ist M_Infimum von x.

b) q ist M_Supremum von x.

c) $\forall\alpha : (\alpha \in y)$
$\Rightarrow ((\alpha$ ist M_Infimum von $x) \vee (\alpha$ ist M_Supremum von $x))$.

d) $\neg(y$ ist M_Kette$)$.

Ad d): Es gilt $p, q \in y$ und es gilt weder p_M_q noch q_M_p noch $p = q$.

36-9. Wie im folgenden Satz gesagt ist jede untere M_Schranke von x, die Element von x ist, ein M_Infimum von x.
Analoges gilt laut `b)` für obere M_Schranken und M_Suprema:

36-9(Satz)

`a)` *Aus "$u \in x$" und "u untere M_Schranke von x" folgt "u ist M_Infimum von x".*

`b)` *Aus "$o \in x$" und "o obere M_Schranke von x" folgt "o ist M_Supremum von x".*

Beweis **36-9** `a)` `VS` gleich $(u \in x) \wedge (u \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)$.

> `Thema1.1` α untere M_Schranke von x.
>
> Aus `Thema1` "α untere M_Schranke von x" und
> aus `VS` gleich "$u \in x \ldots$"
> folgt via **35-1(Def)**: α_M_u.

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_u)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "u untere M_Schranke von x" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_u)$"
folgt via **36-1(Def)**: u ist M_Infimum von x.

`b)` `VS` gleich $(o \in x) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x)$.

> `Thema1.1` α obere M_Schranke von x.
>
> Aus `Thema1` "α obere M_Schranke von x" und
> aus `VS` gleich "$o \in x \ldots$"
> folgt via **35-1(Def)**: o_M_α.

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (o\_M\_\alpha)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "o obere M_Schranke von x" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (o\_M\_\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: o ist M_Supremum von x.

□

36-10. Wenn $\mathsf{dom}\, M \subseteq x$ gilt und wenn u eine untere M_Schranke von x ist, dann ist via folgenden Satzes u ein M_Infimum von x. Gemäss b) gilt Analoges für obere M_Schranken und M_Suprema. In cd) werden Aussagen ab) auf die Spezialfälle "$\mathsf{dom}\, M = x$" und "$\mathsf{ran}\, M = x$" angewendet:

36-10(Satz)

a) *Aus* "$\mathsf{dom}\, M \subseteq x$" *und* "$u$ *untere* M_*Schranke von* x" *folgt* "u *ist* M_*Infimum von* x".

b) *Aus* "$\mathsf{ran}\, M \subseteq x$" *und* "$o$ *obere* M_*Schranke von* x" *folgt* "o *ist* M_*Supremum von* x".

c) *Aus* "u *untere* M_*Schranke von* $\mathsf{dom}\, M$" *folgt* "u *ist* M_*Infimum von* $\mathsf{dom}\, M$".

d) *Aus* "o *obere* M_*Schranke von* $\mathsf{ran}\, M$" *folgt* "o *ist* M_*Supremum von* $\mathsf{ran}\, M$".

<u>Beweis</u> **36-10** a) VS gleich $(\mathsf{dom}\, M \subseteq x) \wedge (u$ untere M_Schranke von $x)$.

1: Aus →) “u untere M_Schranke von x”
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus 1 “$u \in \mathsf{dom}\, M$” und
aus VS gleich “$\mathsf{dom}\, M \subseteq x \ldots$”
folgt via **0-4**: $u \in x$.

3: Aus 2 “$u \in x$” und
aus VS gleich “$\ldots u$ untere M_Schranke von x”
folgt via **36-9**: u ist M_Infimum von x.

b) VS gleich $(\mathsf{ran}\, M \subseteq x) \wedge (o$ obere M_Schranke von $x)$.

1: Aus →) “o obere M_Schranke von x”
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus 1 “$o \in \mathsf{ran}\, M$” und
aus VS gleich “$\mathsf{ran}\, M \subseteq x \ldots$”
folgt via **0-4**: $o \in x$.

3: Aus 2 “$o \in x$” und
aus VS gleich “$\ldots o$ obere M_Schranke von x”
folgt via **36-9**: o ist M_Supremum von x.

c) VS gleich u untere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$.

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus 1 “$\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus VS gleich “u untere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$”
folgt via des bereits bewiesenen a): u ist M_Infimum von $\mathsf{dom}\, M$.

d) VS gleich o obere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus 1 “$\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$” und
aus VS gleich “o obere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$”
folgt via des bereits bewiesenen a): o ist M_Supremum von $\mathsf{ran}\, M$.

□

36-11. Wie im folgenden Satz dargelegt, sind M_Infima und M_Suprema der leeren Mengen sehr spezielle Klassen:

36-11(Satz)

a) *Aus "$u \in \mathsf{ran}\, M$" und "u untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$" folgt "u ist M_Supremum von 0".*

b) *Aus "$o \in \mathsf{dom}\, M$" und "o obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$" folgt "o ist M_Infimum von 0".*

Beweis **36-11** `a)` `VS` gleich $(u \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (u$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$u \in \mathsf{ran}\, M \ldots$"
folgt via **35-7**: `A1` | "u obere M_Schranke von 0"

`Thema1.2` α obere M_Schranke von 0.

`2:` Aus `Thema1.2` "α obere M_Schranke von 0"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$" und
aus `2` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $0) \Rightarrow (u$_M_$\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "u obere M_Schranke von 0" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $0) \Rightarrow (u$_M_$\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: u ist M_Supremum von 0.

Beweis **36-11** `b)` `VS` gleich $(o \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (o$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$o \in \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **35-7**: | `A1` | "o untere M_Schranke von 0" |

`Thema1.2` α untere M_Schranke von 0.

`2:` Aus `Thema1.2`"α untere M_Schranke von 0"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$" und
aus 2"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **35-1(Def)**: α_M_o.

Ergo `Thema1.2`: | `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $0) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$" |

`1.3:` Aus `A1` gleich "o untere M_Schranke von 0" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $0) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt via **36-1(Def)**: o ist M_Infimum von 0.

$\square$

36-12. Wie im folgenden Satz gesagt, ist jedes M_Infimum der größtmöglichen Klasse - nämlich $\mathsf{ran}\, M$ - ein M_Supremum der kleinstmöglichen Klasse 0. Analoges gilt für M_Suprema und M_Infima der größt- und kleinstmöglichen Klasse:

36-12(Satz)

a) *"inf ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"*
genau dann, wenn "inf ist M_Supremum von 0".

b) *"sup ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$"*
genau dann, wenn "sup ist M_Infimum von 0".

Beweis **36-12** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich inf ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

1.1: Aus VS gleich "inf ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.

1.2: Aus VS gleich "inf ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-3**: $inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1.2 "$inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $inf \in \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus 2 "$inf \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus 1.1 "inf untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-11**: inf ist M_Supremum von 0.

Beweis **36-12** a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $\quad inf$ ist M_Supremum von 0.

1.1: Aus VS gleich "inf ist M_Supremum von 0"
folgt via **36-4**: $\quad inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1"$inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $\quad$ A1 | "$inf \in \mathsf{dom}\, M$"

$\boxed{\text{Thema1.2}}$ $\quad \alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus Thema1.2"$\alpha \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-7**: $\quad \alpha$ obere M_Schranke von 0.

3: Aus VS gleich "inf ist M_Supremum von 0" und
aus 2"α obere M_Schranke von 0"
folgt via **36-1(Def)**: $\quad inf\_M\_\alpha$.

Ergo Thema1.2: $\quad$ A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (inf\_M\_\alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "$inf \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (inf\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: $\quad$ A2 | "inf untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"

...

Beweis **36-12** `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\qquad$ inf ist M_Supremum von 0.

...

`Thema1.4` $\qquad$ α untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$

`2:` Aus `VS` gleich "inf ist M_Supremum von 0"
folgt via **36-4**: $\qquad$ $inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus 2"$inf \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $\qquad$ $inf \in \mathsf{ran}\, M$.

`4:` Aus `Thema1.4`"α untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$" und
aus 3"$inf \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-1(Def)**: $\qquad$ α_M_inf.

Ergo `Thema1.4`:

`A3` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_inf)$"

`1.5:` Aus `A2` gleich "inf untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad$ inf ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

Beweis **36-12** b)

1: Via **36-2** gilt: $(sup$ ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M)$
$\Leftrightarrow (sup$ ist M^{-1}_Infimum von $\mathsf{dom}\, M)$.

2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus 1 "$(sup$ ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M)$
$\Leftrightarrow (sup$ ist M^{-1}_Infimum von $\mathsf{dom}\, M)$" und
aus 2 "$\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $(sup$ ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M)$
$\Leftrightarrow (sup$ ist M^{-1}_Infimum von $\mathsf{ran}\,(M^{-1}))$.

4: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$(sup$ ist M^{-1}_Infimum von $\mathsf{ran}\,(M^{-1}))$
$\Leftrightarrow (sup$ ist M^{-1}_Supremum von $0)$.

5: Via **36-2** gilt: $(sup$ ist M^{-1}_Supremum von $0)$
$\Leftrightarrow (sup$ ist M_Infimum von $0)$.

6: Aus 3,
aus 4 und
aus 5
folgt: $(sup$ ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M)$
$\Leftrightarrow (sup$ ist M_Infimum von $0)$.

□

36-13. Mit der folgenden Definition werden die Klassen der unteren und der oberen M_Schranken von x in die Essays eingeführt:

36-13(Definition)

1) $\mathtt{36.0}(M,x) = \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

2) $\mathtt{36.1}(M,x) = \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

36-14. Dass die unteren/oberen M_Schranken von x genau die oberen/unteren M^{-1}_Schranken von x sind, führt auf folgenden Satz:

36-14(Satz)

a) $\{\omega : \omega$ *untere* M*_Schranke von* $x\}$
$= \{\omega : \omega$ *obere* M^{-1}*_Schranke von* $x\}$.

b) $\{\omega : \omega$ *obere* M*_Schranke von* $x\}$
$= \{\omega : \omega$ *untere* M^{-1}*_Schranke von* $x\}$.

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *untere* M*_Schranke von* $x\}$.
36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *obere* M*_Schranke von* $x\}$.

Beweis **36-14** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt: α untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `2.2` "α untere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: α obere M^{-1}_Schranke von x.

`4:` Aus `3` "α obere M^{-1}_Schranke von x" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M^{-1}_Schranke von $x\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$
$\Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M^{-1}_Schranke von $x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega$ obere M^{-1}_Schranke von $x\}$"

...

<u>Beweis **36-14**</u> `a)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$.
`2.1:`	Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.
`2.2:`	Aus `Thema1.1`"$\{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$" folgt: α obere M^{-1}_Schranke von x.
`3:`	Aus `2.2`"α obere M^{-1}_Schranke von x" folgt via **35-2**: α untere M_Schranke von x.
`4:`	Aus `3`"α untere M_Schranke von x" und aus `2.1`"α Menge" folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2`	"$\{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\} \subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\} \subseteq \{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\} \subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\} = \{\omega : \omega \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$.

Beweis **36-14** `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt: α obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `2.2` "α obere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: α untere M^{-1}_Schranke von x.

`4:` Aus `3` "α untere M^{-1}_Schranke von x" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\})$
$\Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$"

...

<u>Beweis **36-14**</u> `b)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$"
folgt: α untere M^{-1}_Schranke von x.

`3:` Aus `2.2` "α untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via **35-2**: α obere M_Schranke von x.

`4:` Aus `3` "α obere M_Schranke von x" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\})$
$\Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2` "$\{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\} = \{\omega : \omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x\}$.

□

36-15. Im folgenden Satz werden grundlegende Eigenschaften von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$ aufgelistet:

36-15(Satz)

a) *Aus "u untere M_Schranke von x"*
folgt "$u \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
und "$0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$".

b) *Aus "$0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"*
folgt "$x \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und "$\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x".

c) *"$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} = 0$"*
$\Leftrightarrow$ "x unten M_unbeschränkt".

d) *$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.*

e) *Aus "$y \subseteq x$"*

folgt "$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $y\}$".

f) *$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $0\} = \mathsf{dom}\, M$.*

g) *Aus "inf ist M_Infimum von x"*
folgt "$inf \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
und "$0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$".

36-13(Def) *$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.*

<u>Beweis **36-15**</u> `a)` `VS` gleich u untere M_Schranke von x.

`1:` Aus `VS` gleich "u untere M_Schranke von x"
folgt via **35-4**: u Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "u untere M_Schranke von x" und
aus `1`"u Menge"
folgt: $u \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`3:` Aus `2`"$u \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(u \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$
$\wedge(0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt: Ω untere M_Schranke von x.

`3.1:` Aus `2`"Ω untere M_Schranke von x"
folgt via **35-4**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3.2:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω untere M_Schranke von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(x \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $x)$.

<u>Beweis **36-15**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\} = 0.$

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x$
$\vee$
$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x.$

`2:` Aus `1.1.Fall` "… Ω untere M_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$0 \neq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}.$

`3:` Es gilt "$0 \neq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$".
Es gilt `VS` gleich "$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\} = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: x unten M_unbeschränkt.

`1.2.Fall` $\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x).$

Aus `1.2.Fall` "$\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x)$"
folgt via **35-1(Def)**: x unten M_unbeschränkt.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
x unten M_unbeschränkt.

Beweis **36-15** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x unten M_unbeschränkt.

1.1: Aus VS gleich "x unten M_unbeschränkt"
folgt via **35-1(Def)**: A1 | "$\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x)"

1.2: Es gilt: $0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$
$\vee$
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} = 0$.

Fallunterscheidung

1.2.1.Fall $0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

2: Aus 1.2.1..Fall"$0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen b):
$\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

3: Es gilt 2"$\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x".
Es gilt A1 gleich "$\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x)".
Ex falso quodlibet folgt: $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} = 0$.

1.2.2.Fall $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} = 0$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} = 0$.

d)

Thema1 $\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt: α untere M_Schranke von x.

3: Aus 2"α untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

<u>Beweis</u> **36-15** `e)` `VS` gleich $y \subseteq x$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x\}$"
folgt: α untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x$" und
aus `2` "α untere M_Schranke von x"
folgt via **35-6**: α untere M_Schranke von y.

`4:` Aus `3` "α untere M_Schranke von y"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } y\}$.

Ergo `Thema1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } y\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:
$$\{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x\} \subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } y\}.$$

<u>Beweis **36-15**</u> `f)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:

`A1`	“$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$”

`Thema1.2` $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **35-7**: α untere M_Schranke von 0.

`3:` Aus `2`“α untere M_Schranke von 0”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\}$.

Ergo `Thema1.2`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2`	“$\mathsf{dom}\, M \subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\}$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus `A2` gleich “$\mathsf{dom}\, M \subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } 0\} = \mathsf{dom}\, M.$$

`g) VS` gleich inf ist M_Infimum von x.

`1:` Aus `VS` gleich “inf ist M_Infimum von x”
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1`“inf untere M_Schranke von x”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(inf \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\})$$
$$\wedge(0 \neq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}).$$

$\square$

36-16. Im folgenden Satz werden grundlegende Eigenschaften von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ aufgelistet:

36-16(Satz)

a) *Aus "o obere M_Schranke von x"*
folgt "$o \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
und "$0 \neq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$".

b) *Aus "$0 \neq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"*
folgt "$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und "$\exists \omega : \omega$ obere M_Schranke von x".

c) *"$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\} = 0$"*
$\Leftrightarrow$ *"x oben M_unbeschränkt".*

d) $\{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $x\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

e) *Aus "$y \subseteq x$"*

folgt "$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $y\}$".

f) $\{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $0\} = \mathsf{ran}\, M$.

g) *Aus "sup ist M_Supremum von x"*
folgt "sup $\in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
und "$0 \neq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$".

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $x\}$.

Beweis **36-16**

36-13(Def) $\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

---

a) VS gleich o obere M_Schranke von x.

1: Aus VS gleich "o obere M_Schranke von x"
folgt via **35-5**: o Menge.

2: Aus VS gleich "o obere M_Schranke von x" und
aus 1"o Menge"
folgt: $o \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

3: Aus 2"$o \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $(o \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\})$
$\wedge(0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\})$.

b) VS gleich $0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt: Ω obere M_Schranke von x.

3.1: Aus 2"ω obere M_Schranke von x"
folgt via **35-5**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

3.2: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 2"Ω obere M_Schranke von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von x.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $(x \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x)$.

<u>Beweis **36-16**</u> `c)`

`1:` $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\} = 0$

$\stackrel{\mathbf{36-14}}{\Leftrightarrow} \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}=0$

$\stackrel{\mathbf{36-15}}{\Leftrightarrow} x \text{ unten } M^{-1}\text{\_unbeschränkt}$

$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} x \text{ oben } M\text{\_unbeschränkt}.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\} = 0$

$\Leftrightarrow x \text{ oben } M\text{\_unbeschränkt}.$

`d)`

`1:` $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$

$\stackrel{\mathbf{36-14}}{=} \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$

$\stackrel{\mathbf{36-15}}{\subseteq} \mathsf{dom}\,(M^{-1})$

$\stackrel{\mathbf{11-7}}{=} \mathsf{ran}\,M.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\} \subseteq \mathsf{ran}\,M.$

`e)` `VS` gleich $y \subseteq x.$

`1:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x$”
folgt via **36-15**: $\{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y\}.$

`2:` $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$

$\stackrel{\mathbf{36-14}}{=} \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x\}$

$\stackrel{\mathbf{1}}{\subseteq} \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y\}$

$\stackrel{\mathbf{36-14}}{=} \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y\}.$

`3:` Aus `2`
folgt: $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$
$\subseteq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y\}.$

Beweis **36-16** `f)`

`1:`

$$\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } 0\}$$
$$\overset{\mathbf{36-14}}{=} \{\omega : \omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } 0\}$$
$$\overset{\mathbf{36-15}}{=} \mathsf{dom}\,(M^{-1})$$
$$\overset{\mathbf{11-7}}{=} \mathsf{ran}\, M.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } 0\} = \mathsf{ran}\, M.$

`g)` `VS` gleich sup ist M_Supremum von x.

`1:` Aus `VS` gleich "sup ist M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1`"sup obere M_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(sup \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\})$$
$$\wedge (0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}).$$

□

36-17. Wie nun gezeigt gilt u_M_p für alle $u \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$ und alle $p \in x$, so dass jedes $p \in x \cap \mathsf{ran}\, M$ eine *obere* M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$ ist. Ausserdem wird gesagt, dass aus $p \in x$ und $o \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ die Aussage p_M_o folgt, so dass jedes $p \in x \cap \mathsf{dom}\, M$ eine *untere* M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ ist:

36-17(Satz)

a) *Aus "$p \in x$" und "$u \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt "$x \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und "$u\_M\_p$".*

b) *Aus "$p \in x \cap \mathsf{ran}\, M$"*

folgt "p obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$".

c) *Aus "$p \in x$" und "$o \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt "$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und "$p\_M\_o$".*

d) *Aus "$p \in x \cap \mathsf{dom}\, M$"*

folgt "p untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$".

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *untere* M_*Schranke von* $x\}$.
36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *obere* M_*Schranke von* $x\}$.

Beweis **36-17** `a)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (u \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots u \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt: u untere M_Schranke von x.

`2.1:` Aus `1`"u untere M_Schranke von x"
folgt via **35-4**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2.2:` Aus `1`"u untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_p.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (u\_M\_p)$.

`b)` `VS` gleich $p \in x \cap \mathsf{ran}\, M$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cap \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $(p \in x) \wedge (p \in \mathsf{ran}\, M)$.

> `Thema2.1` $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$.
>
> `3:` Aus `1`"$p \in x \ldots$" und
> aus `Thema2.1`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
> folgt via des bereits bewiesenen `a)`: α_M_p.

Ergo `Thema2.1`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"

`2.2:` Aus `1`"$\ldots p \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
folgt via **35-1(Def)**:
p obere M_Schranke von $\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

<u>Beweis **36-17**</u> `c)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (o \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots o \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$"
folgt: o obere M_Schranke von x.

`2.1:` Aus `1`"o obere M_Schranke von x"
folgt via **35-5**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2.2:` Aus `1`"o obere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **35-1(Def)**: p_M_o.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (p\_M\_o)$.

`d)` `VS` gleich $p \in x \cap \mathsf{dom}\, M$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cap \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **2-2**: $(p \in x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, M)$.

`Thema2.1` $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.
`3:` Aus `1`"$p \in x \ldots$" und aus `Thema2.1`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$" folgt via des bereits bewiesenen `c)`: p_M_α.

Ergo `Thema2.1`:
`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

`2.2:` Aus `1`"$\ldots p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**:
p untere M_Schranke von $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x\}$.

□

36-18. Mit dem folgenden **InfSupSatz** ist garantiert, dass jedes M_Infimum von x ein M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$ ist und dass - fast: umgekehrt - *falls x eine TeilKlasse von* $\mathsf{ran}\,M$ *ist*, jedes M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$ ein M_Infimum von x ist. Hier wird die Voraussetzung "$x \subseteq \mathsf{ran}\,M$" benötigt, um via **36-17** zu garantieren, dass jedes Element aus x eine obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

36-18(Satz) (InfSupSatz)

`a)` *Aus "p ist M_Infimum von x"*
folgt "p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$".

`b)` *Aus "u untere M_Schranke von x"*
und "p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt "p ist M_Infimum von x".

`c)` *Aus "$x \subseteq \mathsf{ran}\,M$"*
und "p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt "p ist M_Infimum von x".

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *untere* M*_Schranke von* $x\}$.

Beweis **36-18** `a)` `VS` gleich p ist M_Infimum von x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: $p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1.1`"$p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$p \in \mathsf{ran}\,M$"

...

<u>Beweis **36-18**</u> `a)` `VS` gleich p ist M_Infimum von x.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.
`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$" folgt: α untere M_Schranke von x.
`3:` Aus `VS` gleich "p ist M_Infimum von x" und aus `2`"α untere M_Schranke von x" folgt via **36-1(Def)**: α_M_p.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}) \Rightarrow (\alpha$_M_$p)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}) \Rightarrow (\alpha$_M_$p)$"
folgt via **35-1(Def)**:

`A3`	"p obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"

`Thema1.4` β obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.
`1:` Aus `VS` gleich "p ist M_Infimum von x" folgt via **36-15**: $p \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.
`2:` Aus `Thema1.4`"β obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$" und aus `1`"$p \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$" folgt via **35-1(Def)**: p_M_β.

Ergo `Thema1.4`:

`A4`	"$\forall \beta : (\beta$ obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$ $\Rightarrow (p$_M_$\beta)$"

...

<u>Beweis **36-18**</u> `a)` `VS` gleich p ist M_Infimum von x.

...

`1.5:` Aus `A3` gleich "p obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$" und aus `A4` gleich
"$\forall \beta : (\beta$ obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$ $\Rightarrow (p$_M_$\beta)$"
folgt via **36-1(Def)**:
p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

<u>Beweis</u> **36-18** `c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathsf{ran}\, M)$
$\wedge(p$ ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **36-4**: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1.1`"$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$p \in \mathsf{dom}\, M$"

`Thema1.2` $\alpha \in x$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathsf{ran}\, M \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$" und
aus `2`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap \mathsf{ran}\, M$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in x \cap \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-17**: α obere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$" und
aus `4`"α obere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **36-1(Def)**: p_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: `A3` | "p untere M_Schranke von x"

<u>Beweis **36-18**</u> `c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathsf{ran}\, M)$
$\wedge(p$ ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$.

...

`Thema1.4`	α untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `Thema1.4` "α untere M_Schranke von x"
folgt via **36-15**: $\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "... p ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$" und
aus `2` "$\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **36-4**: α_M_p.

Ergo `Thema1.4`: `A4` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$_M_$p)$"

`1.5:` Aus `A3` gleich "p untere M_Schranke von x" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$_M_$p)$"
folgt via **36-1(Def)**: p ist M_Infimum von x.

`b)` `VS` gleich (u untere M_Schranke von x)
$\wedge(p$ ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "u untere M_Schranke von x ..."
folgt via **35-4**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus `1` "$x \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `VS` gleich "... p ist M_Supremum
von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: p ist M_Infimum von x.

□

36-19. Mit dem folgenden **SupInfSatz** ist garantiert, dass jedes M_Supremum von x ein M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ ist und dass - fast: umgekehrt - *falls x eine TeilKlasse von* $\mathsf{dom}\, M$ *ist*, jedes M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ ein M_Supremum von x ist. Hier wird die Voraussetzung “$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$” benötigt, um via **36-14** zu garantieren, dass jedes Element aus x eine untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

36-19(Satz) (SupInfSatz)

`a)` *Aus “p ist M_Supremum von x”*
folgt “p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$”.

`b)` *Aus “o obere M_Schranke von x”*
und “p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$”
folgt “p ist M_Supremum von x”.

`c)` *Aus “$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$”*
und “p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$”
folgt “p ist M_Supremum von x”.

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von x*$\}$.

<u>Beweis **36-19**</u> `a)` `VS` gleich p ist M_Supremum von x.

`1.1:` Aus `VS` gleich “p ist M_Supremum von x”
folgt via **36-4**: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$.

`2:` Aus `1.1`“$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$”
folgt via **2-2**: | `A1` | “$p \in \mathsf{dom}\, M$” |

...

<u>Beweis **36-19**</u> `a)` `VS` gleich p ist M_Supremum von x.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$”
folgt: α obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich “p ist M_Supremum von x” und
aus `2`“α obere M_Schranke von x”
folgt via **36-1(Def)**: p_M_α.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}) \Rightarrow (p$_M_$\alpha)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$p \in \mathsf{dom}\, M$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}) \Rightarrow (p$_M_$\alpha)$”
folgt via **35-1(Def)**:

`A3` | “p untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$”

`Thema1.4`
β untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich “p ist M_Supremum von x”
folgt via **36-16**: $p \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `Thema1.4`“β untere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$” und
aus `1`“$p \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$”
folgt via **35-1(Def)**: β_M_p.

Ergo `Thema1.4`:

`A4` | “$\forall \beta : (\beta$ untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$
$\Rightarrow (\beta$_M_$p)$”

...

<u>Beweis **36-19**</u> `a)` `VS` gleich p ist M_Supremum von x.

...

`1.5:` Aus `A3` gleich "p untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$" und aus `A4` gleich
"$\forall\beta : (\beta$ untere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$ $\Rightarrow (\beta$_M_$p)$"
folgt via **36-1(Def)**:
p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

Beweis **36-19** `c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathsf{dom}\, M)$
$\wedge(p$ ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **36-3**: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1.1`"$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$p \in \mathsf{ran}\, M$"

`Thema1.2` $\alpha \in x$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$" und
aus `2`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **36-17**: α untere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$" und
aus `4`"α untere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **36-1(Def)**: α_M_p.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$_$M$_$p)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$_$M$_$p)$"
folgt via **35-1(Def)**: `A3` | "p obere M_Schranke von x"

<u>Beweis **36-19**</u> `c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathsf{dom}\, M)$
$\wedge(p$ ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$	α obere M_Schranke von x.

`2:` Aus `Thema1.4`"α obere M_Schranke von x"
folgt via **36-16**: $\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`3:` Aus `VS` gleich ... p ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$ und
aus `2`"$\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **36-3**: p_M_α.

Ergo `Thema1.4`: `A4` | "$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

`1.5:` Aus `A3` gleich "p obere M_Schranke von x" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: p ist M_Supremum von x.

`b)` `VS` gleich $(o$ obere M_Schranke von $x)$
$\wedge(p$ ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "o obere M_Schranke von x ..."
folgt via **35-5**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `VS` gleich "... p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: p ist M_Supremum von x.

□

36-20. Mit dem folgenden Satz wird ein definitions-orientierter Überblick gegeben, was es heißt, *kein* M_Infimum von x zu sein:

36-20(Satz)

a) *Aus "p keine untere M_Schranke von x"*
folgt "p kein M_Infimum von x".

b) *Aus "u untere M_Schranke von x" und "$\neg(U\_M\_p)$"*
folgt "p kein M_Infimum von x".

c) *Aus "p kein M_Infimum von x"*
folgt "p keine untere M_Schranke von x"
oder "$\exists\Omega : (\Omega$ untere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$".

d) *Aus "p untere M_Schranke von x"*
und "p kein M_Infimum von x"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega$ untere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$".

e) *Aus "$\forall\alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"*
und "p kein M_Infimum von x"
folgt "p keine untere M_Schranke von x".

<u>Beweis **36-20**</u> `a)` `VS` gleich p keine untere M_Schranke von x.

`1:` Es gilt: (p ist M_Infimum von x) $\vee$ ($\neg$(p ist M_Infimum von x)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Infimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`“p ist M_Infimum von x”
folgt via **36-1(Def)**: p untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich “p keine untere M_Schranke von x”
folgt via **35-1(Def)**: $\neg$(p untere M_Schranke von x).

`4:` Es gilt `3`“$\neg$(p untere M_Schranke von x)”.
Es gilt `2`“p untere M_Schranke von x”.
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Infimum von x.

`1.2.Fall` $\neg$(p ist M_Infimum von x).

Aus `1.2.Fall`“$\neg$(p ist M_Infimum von x)”
folgt via **36-1(Def)**: p kein M_Infimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_Infimum von x.

Beweis **36-20** `b)` `VS` gleich $(u \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\neg(u\_M\_p))$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x) \vee (\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Infimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p ist M_Infimum von x" und
aus `VS` gleich "u untere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: u_M_p.

`3:` Es gilt `2`"u_M_p" .
Es gilt `VS` gleich "$\ldots \neg(u\_M\_p)$" .
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Infimum von x.

`1.2.Fall` $\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$"
folgt via **36-1(Def)**: p kein M_Infimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_Infimum von x.

`c)`

`1:`

$$p \text{ kein } M\_\text{Infimum von } x$$

$$\overset{\mathbf{36-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$$

$$\overset{\mathbf{36-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg((p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)) \vee (\neg(\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$$

$$\overset{\mathbf{35-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (\neg(\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$$

$$\Leftrightarrow (p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(p \text{ kein } M\_\text{Infimum von } x) \Rightarrow ((p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))))$.

Beweis **36-20** `d)`

`VS` gleich $(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (p \text{ kein } M\_\text{Infimum von } x)$.

`1:` Es gilt: $(\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_p))$
$\vee(\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p)))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$.

`2:` Aus `VS` gleich "p untere M_Schranke von $x \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
folgt via **36-1(Def)**: p ist M_Infimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ kein M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$.

`4:` Es gilt `3` "$\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$".
Es gilt `2` "p ist M_Infimum von x".
Ex falso quodlibet folgt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$.

`1.1.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$.

Beweis **36-20** `e)` `VS` gleich $(\forall \alpha : (\alpha \text{ ist untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_p))$
$\wedge(p \text{ kein } M\_\text{Infimum von } x)$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (\neg(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_p) \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: p ist M_Infimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ kein M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$.

`4:` Es gilt `3`"$\neg(p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$" .
Es gilt `2`"p ist M_Infimum von x" .
Ex falso quodlibet folgt: p keine untere M_Schranke von x.

`1.2.Fall` $\neg(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)$"
folgt via **35-1(Def)**: p keine untere M_Schranke von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p keine untere M_Schranke von x.

□

36-21. Mit dem folgenden Satz wird ein definitions-orientierter Öberblick gegeben, was es heißt, *kein* M_Supremum von x zu sein:

36-21(Satz)

a) *Aus "p keine obere M_Schranke von x"*
folgt "p kein M_Supremum von x".

b) *Aus "o obere M_Schranke von x" und "$\neg(p\_M\_o)$"*
folgt "p kein M_Supremum von x".

c) *Aus "p kein M_Supremum von x"*
folgt "p keine obere M_Schranke von x"
oder "$\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".

d) *Aus "p obere M_Schranke von x"*
und "p kein M_Supremum von x"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".

e) *Aus "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"*
und "p kein M_Supremum von x"
folgt "p keine obere M_Schranke von x".

Beweis **36-21** a)

1: p keine obere M_Schranke von x
$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Rightarrow}$ p keine untere M^{-1}_Schranke von x
$\stackrel{\mathbf{36-20}}{\Rightarrow}$ p kein M^{-1}_Infimum von x
$\stackrel{\mathbf{36-2}}{\Rightarrow}$ p kein M_Supremum von x.

2: Aus 1
folgt: (p keine obere M_Schranke von x)
$\Rightarrow$ (p kein M_Supremum von x).

Beweis **36-21** b)

1: $(o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_o))$

$\stackrel{35-2}{\Rightarrow} (o \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_o))$

$\stackrel{30-82}{\Rightarrow} (o \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(o\_M^{-1}\_p))$

$\stackrel{36-20}{\Rightarrow} p \text{ kein } M^{-1}\text{\_Infimum von } x$

$\stackrel{36-2}{\Rightarrow} p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x.$

2: Aus 1 folgt: $(o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_o))$
$\Rightarrow (p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x).$

c)

1: $p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x$

$\stackrel{36-2}{\Rightarrow} p \text{ kein } M^{-1}\text{\_Infimum von } x$

$\stackrel{36-20}{\Rightarrow} (p \text{ keine untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x)$
$\vee(\exists\Omega : (\Omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_p)))$

$\stackrel{35-2}{\Rightarrow} (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } x)$
$\vee(\exists\Omega : (\Omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_p)))$

$\stackrel{35-2}{\Rightarrow} (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } x)$
$\vee(\exists\Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_p)))$

$\stackrel{30-82}{\Rightarrow} (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } x)$
$\vee(\exists\Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))).$

2: Aus 1 folgt: $(p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x) \Rightarrow (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } x)$
$\vee(\exists\Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))).$

d)

1: $(p \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x)$

$\stackrel{35-2}{\Rightarrow} (p \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x)$

$\stackrel{36-2}{\Rightarrow} (p \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (p \text{ kein } M^{-1}\text{\_Infimum von } x)$

$\stackrel{36-20}{\Rightarrow} \exists\Omega : (\Omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_p))$

$\stackrel{35-2}{\Rightarrow} \exists\Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_p))$

$\stackrel{30-82}{\Rightarrow} \exists\Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$

2: Aus 1 folgt: $(p \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (p \text{ kein } M\text{\_Supremum von } x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))).$

<u>Beweis</u> **36-21** `e)`

`1:`

$$(\forall\alpha : (\alpha \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))$$
$$\wedge(p \text{ kein } M\_\text{Supremum von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Rightarrow} (\forall\alpha : (\alpha \text{ untere } M^{-1}\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))$$
$$\wedge(p \text{ kein } M\_\text{Supremum von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{30-81}}{\Rightarrow} (\forall\alpha : (\alpha \text{ untere } M^{-1}\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_p))$$
$$\wedge(p \text{ kein } M\_\text{Supremum von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{36-2}}{\Rightarrow} (\forall\alpha : (\alpha \text{ untere } M^{-1}\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_p))$$
$$\wedge(p \text{ kein } M^{-1}\_\text{Infimum von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{36-20}}{\Rightarrow} p \text{ keine untere } M^{-1}\_\text{Schranke von } x$$

$$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Rightarrow} p \text{ keine obere } M\_\text{Schranke von } x.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\forall\alpha : (\alpha \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))$$
$$\wedge(p \text{ kein } M\_\text{Supremum von } x)$$

$$\Rightarrow (p \text{ keine obere } M\_\text{Schranke von } x).$$

□

36-22. Falls x kein M_Infimum hat, dann ist p kein M_Infimum von x. Ähnlich gilt: Falls x kein M_Supremum hat, dann ist p kein M_Supremum von x:

36-22(Satz)

a) *Aus “x hat kein M_Infimum” folgt “p kein M_Infimum von x”.*

b) *Aus “x hat kein M_Supremum” folgt “p kein M_Supremum von x”.*

Beweis **36-22** a) VS gleich x hat kein M_Infimum.

1: Es gilt: (p ist M_Infimum von x) $\vee$ ($\neg$(p ist M_Infimum von x)).

Fallunterscheidung

1.1.Fall p ist M_Infimum von x.

2: Aus 1.1.Fall “p ist M_Infimum von x” folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x.

3: Aus VS gleich “x hat kein M_Infimum” folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x).

4: Es gilt 2“$\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x”.
Es gilt 3“$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x)”.
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Infimum von x.

1.2.Fall $\neg$(p ist M_Infimum von x).

Aus 1.2.Fall “$\neg$(p ist M_Infimum von x)” folgt via **36-1(Def)**: p kein M_Infimum von x.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: p kein M_Infimum von x.

b) VS gleich x hat kein M_Supremum.

1: Aus VS gleich “x hat kein M_Supremum” folgt via **36-2**: x hat kein M^{-1}_Infimum.

2: Aus 2“x hat kein M^{-1}_Infimum” folgt via des bereits bewiesenen a): p kein M^{-1}_Infimum von x.

3: Aus 2“p kein M^{-1}_Infimum von x” folgt via **36-2**: p kein M_Supremum von x.

□

36-23. Im folgenden Satz wird gesagt, dass jede unten/oben M_unbeschränkte Klasse kein M_Infimum/M_Supremum hat:

36-23(Satz)

a) *Aus "x unten M_unbeschränkt" folgt "x hat kein M_Infimum".*

b) *Aus "x oben M_unbeschränkt" folgt "x hat kein M_Supremum".*

<u>Beweis **36-23**</u> `a)` `VS` gleich x unten M_unbeschränkt.

`1:` Es gilt:
$$(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x) \vee (\neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: Ω untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$\exists\Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω untere M_Schranke von x"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

`4:` Aus `VS` gleich "x unten M_unbeschränkt"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $x)$.

`5:` Es gilt `3`"$\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x" .
Es gilt `4`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $x)$" .
Ex falso quodlibet folgt: x hat kein M_Infimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $x)$"
folgt via **36-1(Def)**: x hat kein M_Infimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x hat kein M_Inifmum.

`b)` `VS` gleich x oben M_unbeschränkt.

`1:` Aus `VS` gleich "x oben M_unbeschränkt"
folgt via **35-2**: x unten M^{-1}_unbeschränkt.

`2:` Aus `1`"x unten M^{-1}_unbeschränkt"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x hat kein M^{-1}_Infimum.

`3:` Aus `2`"x hat kein M^{-1}_Infimum"
folgt via **36-2**: x hat kein M_Supremum.

□

36-24. Falls x kein M_Infimum hat und falls u eine untere M_Schranke von x ist, dann gibt es laut folgendem Satz eine untere M_Schranke Ω von x, die von u *nicht* " M_übertroffen" wird. Analoges gilt laut `b)` für M_Supremum und M_obere Schranken:

36-24(Satz)

`a)` *Aus "x hat kein M_Infimum"*
und "u untere M_Schranke von x"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega$ untere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_u))$".

`b)` *Aus "x hat kein M_Supremum"*
und "o obere M_Schranke von x"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(o\_M\_\Omega))$".

Beweis **36-24** `a)`

`VS` gleich $(x \text{ hat kein } M\_\text{Infimum}) \wedge (u \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)$.

`1:` Es gilt: $\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_u)$
$\vee$
$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_u))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_u)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere $M_$Schranke von x" und aus `1.1.Fall` "$\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (\alpha\_M\_u)$" folgt via **36-1(Def)**: u ist $M_$Infimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "x hat kein $M_$Infimum" folgt via **36-22**: u kein $M_$Infimum von x.

`4:` Aus `3` "u kein $M_$Infimum von x" folgt via **36-1(Def)**: $\neg(u \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$.

`5:` Es gilt `4` "$\neg(u \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$".
Es gilt `2` "u ist $M_$Infimum von x".
Ex falso quodlibet folgt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_u))$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_u))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_u))$.

Beweis **36-24** `b)`
`VS` gleich $(x \text{ hat kein } M\text{\_Supremum}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x hat kein M_Supremum… "
folgt via **36-2**: x hat kein M^{-1}_Infimum.

`1.2:` Aus `VS` gleich "… o obere M_Schranke von x"
folgt via **35-2**: o untere M^{-1}_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1`"x hat kein M^{-1}_Infimum" und
aus `1.2`"o untere M^{-1}_Schranke von x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_o)).$$

`3.1:` Aus `2`"… Ω untere M^{-1}_Schranke von x… "
folgt via **35-2**: Ω obere M_Schranke von x.

`3.2:` Aus `2`"… $\neg(\Omega\_M^{-1}\_o)$"
folgt via **30-82**: $\neg(o\_M\_\Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega$… ",
aus `3.1`"Ω obere M_Schranke von x" und
aus `3.2`"$\neg(o\_M\_\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (\neg(o\_M\_\Omega))$.

□

36-25. Falls es zu jeder unteren M_Schranke α von x eine untere M_Schranke Ω von x gibt, so dass Ω von α *nicht* "M_übertroffen" wird, dann hat - laut folgendem Satz - x kein M_Infimum. Analoges gilt laut `b)` für obere M_Schranken und M_Suprema:

36-25(Satz)

a) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha$ *untere* M_*Schranke von* $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ *untere* M_*Schranke von* $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$"
folgt "*x hat kein M_Infimum*".

b) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha$ *obere* M_*Schranke von* $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ *obere* M_*Schranke von* $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$"
folgt "*x hat kein M_Supremum*".

<u>Beweis</u> **36-25** `a)` `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ untere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$"

`1:` Es gilt: $\exists\Psi : \Psi$ ist M_Infimum von x
$\vee$
$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist M_Infimum von $x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Psi : \Psi$ ist M_Infimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots\Psi$ ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: Ψ untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `2`"Ψ untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ untere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega$ untere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_\Psi))$.

`4:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots\Psi$ ist M_Infimum von x" und
aus `3`"$\ldots\Omega$ untere M_Schranke von $x\ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: Ω_M_Ψ.

`5:` Es gilt `4`"Ω_M_Ψ" .
Es gilt `3`"$\ldots\neg(\Omega\_M\_\Psi)$" .
Ex falso quodlibet folgt: x hat kein M_Infimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist M_Infimum von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist M_Infimum von $x)$"
folgt via **36-1(Def)**: x hat kein M_Infimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x hat kein M_Infimum.

<u>Beweis **36-25**</u> `b)` `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$"

`1:` Aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$"
folgt via **35-2**: $\forall\alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$".

`2:` Aus `1`"$\forall\alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ obere M_Schranke von $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$"
folgt via **35-2**: $\forall\alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$".

`3:` Aus `2`"$\forall\alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$"
folgt via **30-82**: $\forall\alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_\alpha)))$".

`4:` Aus `3`"$\forall\alpha : (\alpha$ untere M^{-1}_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \wedge (\neg(\Omega\_M^{-1}\_\alpha)))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x hat kein M^{-1}_Infimum.

`5:` Aus `4`"x hat kein M^{-1}_Infimum"
folgt via **36-2**: x hat kein M_Supremum.

□

36-26. Da via **36-12** Die M_Infima von $\mathsf{ran}\,M$ genau die M_Suprema der leeren Menge sind, ist der folgende Satz, wonach $\mathsf{ran}\,M$ genau dann kein M_Infimum hat, wenn 0 kein M_Supremum hat, recht plausibel. Analoges gilt für M_Suprema von $\mathsf{dom}\,M$ und M_Infima von 0:

36-26(Satz)

a) *"$\mathsf{ran}\,M$ hat kein M_Infimum"*
genau dann, wenn "0 hat kein M_Supremum".

b) *"$\mathsf{dom}\,M$ hat kein M_Supremum"*
genau dann, wenn "0 hat kein M_Infimum".

Beweis **36-26** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{ran}\, M$ hat kein M_Infimum.

1: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von 0 $\vee$ $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $0)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von 0.

2: Aus 1.1.Fall"$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von 0"
folgt via **36-12**: Ω ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

3: Aus VS gleich "$\mathsf{ran}\, M$ hat kein M_Infimum"
folgt via **36-22**: Ω kein M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

4: Aus 3"Ω kein M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M)$.

5: Es gilt 4"$\neg(\Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M)$".
Es gilt 2"Ω ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$".
Ex falso quodlibet folgt: 0 hat kein M_Supremum.

1.2.Fall $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $0)$.

Aus 1.2.Fall"$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $0)$"
folgt via **36-1(Def)**: 0 hat kein M_Supremum.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
0 hat kein M_Supremum.

Beweis **36-26** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich 0 hat kein M_Supremum.

1: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$ $\vee$ $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

2: Aus 1.1.Fall"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-12**: Ω ist M_Supremum von 0.

3: Aus VS gleich "0 hat kein M_Supremum"
folgt via **36-22**: Ω kein M_Supremum von 0.

4: Aus 3"Ω kein M_Supremum von 0"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist M_Supremum von $0)$.

5: Es gilt 4"$\neg(\Omega$ ist M_Supremum von $0)$".
Es gilt 2"Ω ist M_Supremum von 0".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{ran}\, M$ hat kein M_Infimum.

1.2.Fall $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M)$.

Aus 1.2.Fall"$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, M$ hat kein M_Infimum.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{ran}\, M$ hat kein M_Infimum.

b)

1: $\mathsf{dom}\, M$ hat kein M_Supremum

$\overset{36-2}{\Leftrightarrow}$ $\mathsf{dom}\, M$ hat kein M^{-1}_Infimum

$\overset{11-7}{\Leftrightarrow}$ $\mathsf{ran}\,(M^{-1})$ hat kein M^{-1}_Infimum

$\overset{a)}{\Leftrightarrow}$ 0 hat kein M^{-1}_Supremum

$\overset{36-2}{\Leftrightarrow}$ 0 hat kein M_Infimum.

2: Aus 1
folgt: $(\mathsf{dom}\, M$ hat kein M_Supremum$) \Leftrightarrow (0$ hat kein M_Infimum$)$.

□

36-27. Wie im folgenden Satz gesagt, bleibt eine M_Kette K eine M_Kette, wenn sie mit einer Klasse von M_Infima von K *oder* mit einer Klasse von M_Supremum von K vereinigt wird. Wenn hingegen K mit einer Klasse, die aus M_Infima *oder* M_Suprema von K besteht, vereinigt wird, muss keine M_Kette resultieren. Dies wird in **36-28(Bem)** nochmals ausdrücklich fest gehalten und mit einem nachfolgenden Beispiel belegt. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - d) - a) - b)`:

36-27(Satz)

`a)` *Aus "K ist M_Kette" und "inf ist M_Infimum von K"*
folgt "$\{inf\} \cup K$ ist M_Kette".

`b)` *Aus "K ist M_Kette" und "sup ist M_Supremum von K"*
folgt "$\{sup\} \cup K$ ist M_Kette".

`c)` *Aus "K ist M_Kette"*
und "$\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha$ ist M_Infimum von $K)$"
folgt "$L \cup K$ ist M_Kette".

`d)` *Aus "K ist M_Kette"*
und "$\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha$ ist M_Supremum von $K)$"
folgt "$L \cup K$ ist M_Kette".

Beweis **36-27** `c)`
`VS` gleich $(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Infimum von } K))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Infimum von } K)$"
folgt via **36-6**: `A1` | "L ist M_Kette"

`Thema1.2` $(\beta \in L) \wedge (\gamma \in K)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in L \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in L)$
$\Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Infimum von } K)$"
folgt: β ist M_Infimum von K.

`3:` Aus `2`"β ist M_Infimum von K" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \gamma \in K$"
folgt via **36-3**: β_M_γ.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in L) \wedge (\gamma \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta))$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "L ist M_Kette",
aus `VS` gleich "K ist M_Kette…" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in L) \wedge (\gamma \in K)) \Rightarrow ((\beta\_M\_\gamma) \vee (\gamma\_M\_\beta))$"
folgt via **30-77**: $L \cup K$ ist M_Kette.

`d)`
`VS` gleich $(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } K))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } K)$"
folgt via **36-2**: $\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M^{-1}\_\text{Infimum von } K)$.

`2:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette…"
folgt via **30-83**: K ist M^{-1}_Kette.

`3:` Aus `2`"K ist M^{-1}_Kette" und
aus `1`"$\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M^{-1}\_\text{Infimum von } K)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $L \cup K$ ist M^{-1}_Kette.

`4:` Aus `3`"$L \cup K$ ist M^{-1}_Kette"
folgt via **30-83**: $L \cup K$ ist M_Kette.

<u>Beweis **36-27**</u> `a)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (inf \text{ ist } M\_\text{Infimum von } K)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von K"
folgt via **36-1(Def)**: inf ist untere M_Schranke von K.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von K"
folgt via **36-3**: inf_M_inf.

`2:` Aus `1.2`"inf_M_inf",
aus `VS` gleich "K ist M_Kette…" und
aus `1`"inf ist untere M_Schranke von K"
folgt via **35-13**: $\{inf\} \cup K$ ist M_Kette.

`b)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (sup \text{ ist } M\_\text{Supremum von } K)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von K"
folgt via **36-1(Def)**: sup ist obere M_Schranke von K.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von K"
folgt via **36-4**: sup_M_sup.

`2:` Aus `1.2`"sup_M_sup",
aus `VS` gleich "K ist M_Kette…" und
aus `1`"sup ist obere M_Schranke von K"
folgt via **35-13**: $\{sup\} \cup K$ ist M_Kette.

□

36-28. Mit der folgenden Bemerkung wird fest gestellt, dass nicht immer eine M_Kette resultiert, wenn eine M_Kette mit einer Klasse, die aus M_Infima *oder* M_Suprema dieser M_Kette besteht, binär vereinigt wird. Ein begleitendes Beispiel folgt:

36-28.Bemerkung

Die Aussage
„$(K \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in L) \Rightarrow ((\alpha \text{ ist } M\_\text{Infimum von } K)$
$\vee(\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } K)))$

$\Rightarrow (L \cup K \text{ ist } M\_\text{Kette})$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

36-29. Im folgenden Beispiel werden eine M_Kette K und eine Klasse L angeben, so dass $L \cup K$ *keine* M_Kette ist, obwohl L aus M_Infima *oder* M_Suprema von K besteht:

36-29.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) i Menge.

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) s Menge.

$\rightarrow$) $i \neq p$ und $i \neq q$ und $i \neq s$ und $p \neq q$ und $p \neq s$ und $q \neq s$.

$\rightarrow$) $M = \{(i,p),(i,q),(i,i),(p,i),(p,p),(p,q),(q,q),$
$(p,s),(q,s),(s,s),(s,q)\}$.

$\rightarrow$) $K = \{p,q\}$.

$\rightarrow$) $L = \{i,s\}$.

Dann folgt:

a) K ist M_Kette.

b) Die unteren M_Schranken von K sind p und i.

c) Die oberen M_Schranken von K sind q und s.

d) Die M_Infima von K sind p und i.

e) Die M_Suprema von K sind q und s.

f) $\forall \alpha : (\alpha \in L)$
$\Rightarrow ((\alpha \text{ ist } M\_\text{Infimum von } K) \vee (\alpha \text{ ist } M\_\text{Supremum von } K))$.

g) $\neg(L \cup K \text{ ist } M\_\text{Kette})$.

Ad g): Es gilt unter den getroffenen Voraussetzungen weder i_M_s noch s_M_i.
Ad $p \neq q$: Falls $p = q$, dann wären i, s sowohl untere als auch obere M_Schranken von $K = \{p\}$ - und da weder i_M_s noch s_M_i gilt wäre in diesem Fall weder i ein M_Infimum von K noch wäre s ein M_Supremum von K.

r Relation in x: untere Schranke. obere Schranke.
M reflexiv in z: untere Schranke von 0 und z.
obere Schranke von 0 und z.
Infimum von 0.
Supremum von 0.
keine untere Schranke von y.
keine obere Schranke von y.

InfSupSatz(reflexiv).
SupInfSatz(reflexiv).

r Relation in x *und* r reflexiv in x: untere Schranke. obere Schranke.
Kette.
M transitiv: untere Schranke. obere Schranke.
vermehrend. verringernd.
r Relation in x *und* r transitiv in x: untere Schranke. obere Schranke.
vermehrend. verringernd.
f Funktion *und* M transitiv: vermehrend. verringernd.
untere Schranke. obere Schranke.
f Funktion *und* r Relation in x *und* r transitiv in x: vermehrend. verringernd.
untere Schranke. obere Schranke.

Ersterstellung: 20/02/06 **Letzte Änderung: 28/04/11**

37-1. Falls r eine Relation in x ist und falls p eine untere oder obere M_Schranke von y ist, dann folgt gemäß folgenden Satzes sowohl $p \in x$ als auch $y \subseteq x$:

37-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) p *untere* r_*Schranke von* y.

oder

p *obere* r_*Schranke von* y.

Dann folgt:

a) $p \in x$.

b) $y \subseteq x$.

<u>Beweis **37-1**</u>

1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

2.1: Nach "→) *oder*" gilt:
$(p$ untere r_Schranke von $y) \vee (p$ obere r_Schranke von $y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` p untere r_Schranke von y.

3.1: Aus `2.1.1.Fall` "p untere r_Schranke von y"
folgt via **35-1(Def)**: $p \in \mathsf{dom}\, r$.

3.2: Aus `2.1.1.Fall` "p untere r_Schranke von y"
folgt via **35-4**: $y \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

4.1: Aus 3.1 "$p \in \mathsf{dom}\, r$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-4**: $p \in x$.

4.2: Aus 3.2 "$y \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq x$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $(p \in x) \wedge (y \subseteq x)$.

`2.1.2.Fall` p obere r_Schranke von y.

3.1: Aus `2.1.2.Fall` "p obere r_Schranke von y"
folgt via **35-1(Def)**: $p \in \mathsf{ran}\, r$.

3.2: Aus `2.1.2.Fall` "p obere r_Schranke von y"
folgt via **35-5**: $y \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

4.1: Aus 3.1 "$p \in \mathsf{ran}\, r$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $p \in x$.

4.2: Aus 3.2 "$y \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq x$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $(p \in x) \wedge (y \subseteq x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$(p \in x) \wedge (y \subseteq x)$"

...

<u>Beweis **37-1**</u>

...

`2.a):` Aus `A1`
folgt: $p \in x.$

`2.b):` Aus `A1`
folgt: $y \subseteq x.$

$\square$

37-2. Falls r eine Relation in x ist, dann ist gemäß folgenden Satzes jede untere r_Schranke von x ein r_Infimum von x. Analoges gilt via `b)` für obere r_Schranken und r_Suprema:

<u>37-2(Satz)</u>

`a)` *Aus "r Relation in x" und "u untere r_Schranke von x"*

folgt "u ist r_Infimum von x".

`b)` *Aus "r Relation in x" und "o obere r_Schranke von x"*

folgt "o ist r_Supremum von x".

<u>Beweis **37-2**</u> `a)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (u \text{ untere } r\text{\_Schranke von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $u \in x$.

`2:` Aus `1`"$u \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere r_Schranke von x"
folgt via **36-9**: u ist r_Infimum von x.

`b)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (o \text{ obere } r\text{\_Schranke von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $o \in x$.

`2:` Aus `1`"$o \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere r_Schranke von x"
folgt via **36-9**: o ist r_Supremum von x.

□

37-3. Falls M reflexiv in z ist, dann ist gemäß folgenden Satzes jedes Element von z sowohl untere als auch obere M_Schranke der leeren Menge:

37-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) $p \in z$.

Dann folgt:

a) *p untere M_Schranke von* 0.

b) *p obere M_Schranke von* 0.

Beweis **37-3**

1: Aus $\rightarrow$)"M reflexiv in z"
folgt via **30-18**: $(z \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (z \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

2.1: Aus $\rightarrow$)"$p \in z$" und
aus 1"$z \subseteq \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

2.2: Aus $\rightarrow$)"$p \in z$" und
aus 1"$\ldots z \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{ran}\, M$.

3.a): Aus 2.1"$p \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **35-7**: p untere M_Schranke von 0.

3.b): Aus 2.2"$p \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-7**: p obere M_Schranke von 0.

□

37-4. Das Auffinden von p, q, so dass p eine untere M_Schranke von 0 ist und q eine obere M_Schranke von 0 ist, aber $\neg(p\_M\_q)$ gilt, gestaltet sich via folgenden Satzes für Klassen M, die reflexiv in z sind, relativ einfach:

37-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) *"$p \in z$" und "$q \in z$".*

$\rightarrow$) $\neg(p\_M\_q)$.

Dann folgt:

a) *p untere M_Schranke von 0.*

b) *q obere M_Schranke von 0.*

c) $\neg(p\_M\_q)$.

Beweis **37-4**

1.a): Aus 1"M reflexiv in z" und
aus $\rightarrow$)"$p \in z \ldots$"
folgt via **37-3**: p untere M_Schranke von 0.

1.b): Aus $\rightarrow$)"M reflexiv in z" und
aus $\rightarrow$)"$\ldots q \in z$"
folgt via **37-3**: q obere M_Schranke von 0.

1.c): Aus $\rightarrow$)"$\neg(p\_M\_q)$"
folgt: $\neg(p\_M\_q)$.

□

37-5. Falls M reflexiv in z ist und falls p ein M_Infimum von 0 ist, dann ist gemäß folgenden Satzes p eine obere M_Schranke von z. Analoges gilt laut `b)` für M_Suprema von 0 und untere M_Schranken von z:

37-5(Satz)

Aus "M reflexiv in z" und ...

`a)` *... und "p ist M_Infimum von 0"*
folgt "p obere M_Schranke von z".

`b)` *... und "p ist M_Supremum von 0"*
folgt "p untere M_Schranke von z".

Beweis **37-5** `a)` `VS` gleich $(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \text{ ist } M\_\text{Infimum von } 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z..."
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... p ist M_Infimum von 0"
folgt via **36-12**: p ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus `1.1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `1.2`"p ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **36-5**: p obere M_Schranke von z.

`a)` `VS` gleich $(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \text{ ist } M\_\text{Supremum von } 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z..."
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... p ist M_Supremum von 0"
folgt via **36-12**: p ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus `1.1`"$z \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `1.2`"p ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-5**: p untere M_Schranke von z.

$\square$

37-6. Falls M reflexiv in z ist und falls $p \in z$ *keine* untere M_Schranke von y ist, dann gibt es gemäß folgenden Satzes ein $\Omega \in y$, so dass Ω ungleich p ist und p die Klasse Ω *nicht* "M_unterschreitet". Gemäß `b)` gilt Analoges für keine oberen M_Schranken von y:

37-6(Satz)

Aus "M reflexiv in z" und "$p \in z$" und ...

`a)` *... und "p keine untere M_Schranke von y"*

folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \neq p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".

`b)` *... und "p keine obere M_Schranke von y"*

folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \neq p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$".

Beweis **37-6** `a)`

`VS` gleich $(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (p \text{ keine untere } M\text{\_Schranke von } y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z ..."
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `VS` gleich "... $p \in z$ ..." und
aus `2`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus `2`"$p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `VS` gleich "... p keine untere M_Schranke von y"
folgt via **35-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

`5:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z ...",
aus `VS` gleich "... $p \in z$ ..." und
aus `4`"... $\neg(p\_M\_\Omega)$"
folgt via **30-19**: $p \neq \Omega$.

`6:` Aus `4`"$\exists \Omega$ ...",
aus `4`"... $\Omega \in y$ ...",
aus `5`"$p \neq \Omega$" und
aus `4`"... $\neg(p\_M\_\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \neq p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

<u>Beweis</u> **37-6** b)

1: $$(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } y)$$

$$\stackrel{\mathbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } y)$$

$$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (p \text{ keine untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y)$$

$$\stackrel{\text{a)}}{\Rightarrow} \exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \neq p) \wedge (\neg(p\_M^{-1}\_\Omega))$$

$$\stackrel{\mathbf{30-82}}{\Leftrightarrow} \exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \neq p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p)).$$

2: Aus 1 folgt:
$$(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (p \text{ keine obere } M\text{\_Schranke von } y)$$
$$\Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \neq p) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))).$$

□

37-7. Falls M reflexiv in z ist und falls y eine TeilKlasse von z ist, dann ist gemäß folgendem **InfSupSatz(reflexiv)** eine Klasse *genau dann* M_Infimum von y, wenn diese Klasse M_Supremum von $\{\omega : \omega$ ist untere M_Schranke von $y\}$ ist:

37-7(Satz) (InfSupSatz(reflexiv))

Unter den Voraussetzungen ...

→) *M reflexiv in z.*

→) *$y \subseteq z$.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *p ist M_Infimum von y.*

`ii)` *p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ ist untere M_Schranke von $y\}$.*

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *ist untere M_Schranke von* $y\}$

Beweis **37-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p ist M_Infimum von y.

Aus `VS` gleich "p ist M_Infimum von y"
folgt via **InfSupSatz**:
p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ ist untere M_Schranke von $y\}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich p ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ ist untere M_Schranke von $y\}$.

`1:` Aus →) "M reflexiv in z"
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus →) "$y \subseteq z$" und
aus `1` "$z \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `2` "$y \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `VS` gleich "p ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega$ ist untere M_Schranke von $y\}$"
folgt via **InfSupSatz**: p ist M_Infimum von y.

□

37-8. Falls M reflexiv in z ist und falls y eine TeilKlasse von z ist, dann ist gemäß folgendem **SupInfSatz(reflexiv)** eine Klasse *genau dann* M_Supremum von y, wenn diese Klasse M_Infimum von $\{\omega : \omega$ ist obere M_Schranke von $y\}$ ist:

37-8(Satz) **(SupInfSatz(reflexiv))**

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) $y \subseteq z$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *p ist M_Supremum von y.*

`ii)` *p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ ist obere M_Schranke von $y\}$.*

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *ist obere M_Schranke von* $y\}$

Beweis **37-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p ist M_Supremum von y.

Aus `VS` gleich "p ist M_Supremum von y"
folgt via **SupInfSatz**:
p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ ist obere M_Schranke von $y\}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$
`VS` gleich p ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ ist obere M_Schranke von $y\}$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "M reflexiv in z"
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "$y \subseteq z$" und
aus `1` "$z \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `2` "$y \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `VS` gleich "p ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ ist obere M_Schranke von $y\}$"
folgt via **SupInfSatz**: p ist M_Supremum von y.

$\square$

37-9. Falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt laut folgendem Satz für jede untere/obere r_Schranke p von y die Aussage p_r_p:

37-9(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r reflexiv in x.*

→) *p untere r_Schranke von y.* *oder* *p obere r_Schranke von y.*

Dann folgt "p_r_p".

Beweis **37-9**

1: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "(p untere r_Schranke von y) oder (p obere r_Schranke von y)"
folgt via **37-1**: $p \in x$.

2: Aus →) "r reflexiv in x" und
aus 1 "$p \in x$"
folgt via **30-17(Def)**: p_r_p.

□

37-10. Das folgende Resultat spezialisiert **35-13** und - in gewisser Weise - **36-27** - für reflexive Relationen:

37-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

$\rightarrow$) K *ist* r*_Kette.*

$\rightarrow$) p *untere* r*_Schranke von* K. *oder* p *obere* r*_Schranke von* K.

Dann folgt "$\{p\} \cup K$ *ist* r*_Kette*".

Beweis **37-10**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
aus $\rightarrow$) "(p untere r_Schranke von K) oder (p obere r_Schranke von K)"
folgt via **37-9**: p_r_p.

2: Aus 1 "p_r_p",
aus $\rightarrow$) "K ist r_Kette" und
aus $\rightarrow$) "(p untere r_Schranke von K) oder (p obere r_Schranke von K)"
folgt via **35-13**: $\{p\} \cup K$ ist r_Kette.

□

37-11. Nun wird gezeigt, dass wenn M transitiv ist und wenn u eine untere M_Schranke von y ist und wenn U_M_u gilt, auch U eine untere M_Schranke von y ist. Analoges gilt laut `b)` für obere M_Schranken von y. Die Voraussetzung "M transitiv" kann nicht ohne Weiteres auf *"M transitiv in z"* abgeschwächt werden, da - etwa im Beweis von `a)` - aus "U_M_u" und "u_M_α" nicht auf "$U, u, \alpha \in z$" - wo ist M transitiv in z - geschlossen werden kann. Die präzise Formulierung erfolgt in **37-12(Bem)**:

37-11(Satz)

Aus "M transitiv" und ...

`a)` *... und "u untere M_Schranke von y" und "U_M_u"*

folgt "U untere M_Schranke von y".

`b)` *... und "o obere M_Schranke von y" und "o_M_O"*

folgt "O obere M_Schranke von y".

Beweis **37-11** `a)`

`VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y) \wedge (U\_M\_u)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots U\_M\_u$"
folgt via **30-2**: `A1` | "$U \in \mathsf{dom}\, M$"

`Thema1.2` $\alpha \in y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere M_Schranke von $y \ldots$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha \in y$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_α.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots U\_M\_u$" und
aus 2 "u_M_α"
folgt via **30-38**: U_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (U\_M\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$U \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (U\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: U untere M_Schranke von y.

`b)`

`1:` $(M \text{ transitiv}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_M\_O)$

$\overset{\mathbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_M\_O)$

$\overset{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \wedge (o \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_M\_O)$

$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \wedge (o \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y) \wedge (O\_M^{-1}\_o)$

$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} O \text{ untere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y$

$\overset{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} O \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y$.

`2:` Aus 1
folgt: $(M \text{ transitiv}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_M\_O)$

$\Rightarrow (O \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y)$.

□

37-12. Falls M transitiv in z ist und falls u eine untere M_Schranke von y ist und falls zusätzlich U_M_u gilt, dann ist a priori nicht zu erwarten, dass auch U eine untere M_Schranke von y ist, da die hierfür hinreichende Transitivität von M zwar in z, aber nicht notwendiger Weise für U, u und die Elemente von y zur Verfügung steht. Analoges gilt für obere M_Schranken von y. Ein jeweiliges Beispiel ist nachfolgend angegeben. Interessanter Weise ändert sich die Situation, wenn M zusätzlich eine Relation in z ist. Genaueres wird hierzu später gesagt:

37-12.Bemerkung

- Die Aussage
  "(M transitiv in z) $\wedge$ (u untere M_Schranke von y) $\wedge$ (U_M_u)
  $\Rightarrow$ (U untere M_Schranke von y)"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "(M transitiv in z) $\wedge$ (o obere M_Schranke von y) $\wedge$ (o_M_O)
  $\Rightarrow$ (O obere M_Schranke von y)"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

37-13. Wie aus dem folgenden Beispiel ablesbar kann es durchaus vorkommen, dass M transitiv in z ist, dass u eine untere M_Schranke von y ist und dass U_M_u gilt, ohne dass U eine untere M_Schranke von y wäre:

37-13.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) u Menge.

$\rightarrow$) U Menge.

$\rightarrow$) $u \neq U$.

$\rightarrow$) $M = \{(u,u),(u,U),(U,u)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{u\}$.

$\rightarrow$) $y = \{U\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) u untere M_Schranke von y.

c) U_M_u.

d) U keine untere M_Schranke von y.

Ad d): Wenn U untere M_Schranke von y wäre, dann müsste U_M_U gelten, was gemäß der Definition von M und wegen $u \neq U$ nicht der Fall ist.

37-14. Wie aus dem folgenden Beispiel ablesbar kann es durchaus vorkommen, dass M transitiv in z ist, dass o eine obere M_Schranke von y ist und dass o_M_O gilt, ohne dass O eine obere M_Schranke von y wäre:

<u>37-14.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) o Menge.

→) O Menge.

→) $o \neq O$.

→) $M = \{(o,o),(o,O),(O,o)\}$.

→) $z = \{o\}$.

→) $y = \{O\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) o obere M_Schranke von y.

c) o_M_O.

d) O keine obere M_Schranke von y.

Ad d): Wenn O obere M_Schranke von y wäre, dann müsste O_M_O gelten, was gemäß der Definition von M und wegen $o \neq O$ nicht der Fall ist.

37-15. Im folgenden Satz wird Hinreichendes dafür angegeben, dass für jede untere M_Schranke u von y und jede obere M_Schranke o von y die Aussage u_M_o gilt. Ähnlich wie vorab zu **37-11** fest gestellt, kann die Voraussetzung "M transitiv" nicht ohne Weiteres zu "M transitiv in z" abgeschwächt werden. Genaueres hierzu in der nachfolgenden Bemerkung und dem daran anschließenden Beispiel:

37-15(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv.*

→) $0 \neq y$.

→) *u untere M_Schranke von y.*

→) *o obere M_Schranke von y.*

Dann folgt "u_M_o".

Beweis **37-15**

1: Aus →) "$0 \neq y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in y$.

2.1: Aus →) "u untere M_Schranke von y" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in y$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_Ω.

2.2: Aus →) "o obere M_Schranke von y" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in y$"
folgt via **35-1(Def)**: Ω_M_o.

3: Aus →) "M transitiv",
aus 2.1 "u_M_Ω" und
aus 2.2 "Ω_M_o"
folgt via **30-38**: u_M_o.

□

37-16. Falls M transitiv in z ist, falls $0 \neq y$, falls u eine untere M_Schranke von y ist und falls o eine obere M_Schranke von y ist, dann ist a priori nicht zu erwarten, dass u_M_o gilt, da die hierfür hinreichende Transitivität von M zwar in z, aber nicht notwendiger Weise für u, o und zumindest ein Element von y zur Verfügung steht. Ein passend konstruiertes Beispiel folgt. Interessanter Weise ändert sich die Situation, wenn M zusätzlich eine Relation in z ist. Genaueres wird hierzu später gesagt:

37-16.Bemerkung

Die Aussage
"$(M$ transitiv in $z) \wedge (0 \neq y)$
$\wedge(u$ untere M_Schranke von $y) \wedge (o$ obere M_Schranke von $y)$
$\Rightarrow (u\_M\_o)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

37-17. Mit dem folgenden Beispiel wird klar gestellt, dass es M, z, y, o, u so geben kann, dass M transitiv in z ist, dass u eine untere M_Schranke von $y \neq 0$ ist und dass o eine obere M_Schranke von y ist, ohne dass u_M_o gilt:

37-17.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p), (q, p), (p, q)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p\}$.

$\rightarrow$) $y = \{p\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) $0 \neq y$.

c) q untere M_Schranke von y.

d) q obere M_Schranke von y.

e) $\neg(q\_M\_q)$.

Ad e): Falls q_M_q, dann müsste, da p, q Mengen sind, gemäß Definition M die Gleichung $p = q$ gelten. Nach Voraussetzung gilt aber $p \neq q$.

37-18. Falls M transitiv ist und falls w M_vermehrend auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine obere M_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-18(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *w ist M_vermehrend auf E.*

$\rightarrow$) $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$.

Dann folgt "o obere M_Schranke von y".

Beweis **37-18**

`Thema1.1` $\gamma \in y$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in y$" und
aus →)"$\ldots y \subseteq E$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in E$.

`3:` Aus →)"w ist M_vermehrend auf E" und
aus `2`"$\gamma \in E$"
folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\gamma\_M\_\Omega)$.

`4:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in y$",
aus `3`"$\ldots (\gamma, \Omega) \in w \ldots$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$"
folgt: Ω_M_o.

`5:` Aus →)"M transitiv",
aus `3`"$\ldots \gamma\_M\_\Omega$" und
aus `4`"Ω_M_o"
folgt via **30-38**: γ_M_o.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in y) \Rightarrow (\gamma\_M\_o)$"

`1.2:` Aus →)"$0 \neq y \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in y) \Rightarrow (\gamma\_M\_o)$"
folgt via **35-3**: o obere M_Schranke von y.

□

37-19. Falls M transitiv ist und falls w M_verringernd auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine untere M_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-19(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv.*

→) *w ist M_verringernd auf E.*

→) $0 \neq y \subseteq E$.

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta)$.

Dann folgt "u untere M_Schranke von y".

Beweis **37-19**

1:
$$(M \text{ transitiv}) \wedge (w \text{ ist } M\text{\_verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta))$$
$$\overset{30-83}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \wedge (w \text{ ist } M\text{\_verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta))$$
$$\overset{30-83}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \wedge (w \text{ ist } M^{-1}\text{\_vermehrend auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta))$$
$$\overset{30-81}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \wedge (w \text{ ist } M^{-1}\text{\_vermehrend auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M^{-1}\_u))$$
$$\overset{37-18}{\Rightarrow} u \text{ obere } M^{-1}\text{\_Schranke von } y$$
$$\overset{35-2}{\Leftrightarrow} u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y.$$

2: Aus 1 folgt:
$$(M \text{ transitiv}) \wedge (w \text{ ist } M\text{\_verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta))$$
$$\Rightarrow (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y).$$

□

37-20. Falls M transitiv ist und falls die *Funktion* f M_vermehrend auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine obere M_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-20(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *transitiv.*

$\rightarrow$) f *ist* M_*vermehrend auf* E.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_o)$.

Dann folgt "o *obere* M_*Schranke von* y*".*

Beweis **37-20**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in y \ldots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_o)$"
folgt: $f(\gamma)\_M\_o$.

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1`"$\ldots (\gamma, \beta) \in f$"
folgt via **18-20**: $\beta = f(\gamma)$.

`3:` Aus `2.2`"$\beta = f(\gamma)$" und
aus `2.1`"$f(\gamma)\_M\_o$"
folgt: β_M_o.

Ergo `Thema1.1`: | `A1` | "$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$"

`1.2:` Aus →) "M transitiv",
aus →) "f ist M_vermehrend auf E",
aus →) "$0 \neq y \subseteq E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$"
folgt via **37-18**: o obere M_Schranke von y.

□

37-21. Falls M transitiv ist und falls die *Funktion* f M_verringernd auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine untere M_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *transitiv.*

$\rightarrow$) f *ist* M*_verringernd auf* E.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_M\_f(\alpha))$.

Dann folgt "u *untere* M*_Schranke von* y*".*

Beweis **37-21**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in y \ldots$” und
aus →)“$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_M\_f(\alpha))$”
folgt: $u\_M\_f(\gamma)$.

`2.2:` Aus →)“f Funktion” und
aus `Thema1.1`“$\ldots (\gamma, \beta) \in f$”
folgt via **18-20**: $\beta = f(\gamma)$.

`3:` Aus `2.2`“$\beta = f(\gamma)$” und
aus `2.1`“$u\_M\_f(\gamma)$”
folgt: u_M_β.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (u\_M\_\beta)$”

`1.2:` Aus →)“M transitiv”,
aus →)“f ist M_verringernd auf E”,
aus →)“$0 \neq y \subseteq E$” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (u\_M\_\beta)$”
folgt via **37-19**: u untere M_Schranke von y.

□

37-22. In keinem der Sätze **37-18,19,20,21** kann die Voraussetzung “ M transitiv” ohne Weiteres durch “ M transitiv in z” ersetzt werden, da nicht garantiert werden kann, dass jene Klassen, die in den jeweiligen Beweisen unter Einbeziehung der Transitivität untersucht werden, tatsächlich in z liegen. Passend konstruierte Beispiele folgen. Interessanter Weise ändert sich die Situation, wenn M zusätzlich eine Relation in z ist. Genaueres wird hierzu später gesagt:

37-22.Bemerkung

- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv in } z) \wedge (w \text{ ist } M\text{\_vermehrend auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
  $$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_o))\text{”}$$
  $$\Rightarrow (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv in } z) \wedge (w \text{ ist } M\text{\_verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
  $$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta))\text{”}$$
  $$\Rightarrow (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv in } z) \wedge (f \text{ ist } M\text{\_vermehrend auf } E) \wedge (f \text{ Funktion})$$
  $$\wedge(0 \neq y \subseteq E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_o))\text{”}$$
  $$\Rightarrow (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } y)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv in } z) \wedge (f \text{ ist } M\text{\_verringernd auf } E) \wedge (f \text{ Funktion})$$
  $$\wedge(0 \neq y \subseteq E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_M\_f(\alpha)))\text{”}$$
  $$\Rightarrow (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } y)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

37-23. Mit dem folgenden Beispiel wird gezeigt, dass in **37-18** die Voraussetzung "M transitiv" nicht ohne Weiteres auf "M transitiv in v" abgeschwächt werden kann:

<u>37-23.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) o Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $p \neq o$.

$\rightarrow$) $q \neq o$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p), (p, q), (q, o)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p\}$.

$\rightarrow$) $w = \{(p, q)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p\}$.

$\rightarrow$) $y = \{p\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) w ist M_vermehrend auf E.

c) $0 \neq y \subseteq E$.

d) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$.

e) o keine obere M_Schranke von y.

Ad e): Es gilt $p \in y$, doch es gilt wegen $p \neq o$, $q \neq o$ und $q \neq o$ *nicht* p_M_o.

37-24. Mit dem folgenden Beispiel wird gezeigt, dass in **37-19** die Voraussetzung "M transitiv" nicht ohne Weiteres auf "M transitiv in z" abgeschwächt werden kann:

<u>37-24.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) o Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $p \neq u$.

$\rightarrow$) $q \neq u$.

$\rightarrow$) $M = \{(u, q), (q, p), (p, p)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p\}$.

$\rightarrow$) $w = \{(p, q)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p\}$.

$\rightarrow$) $y = \{p\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) w ist M_verringernd auf E.

c) $0 \neq y \subseteq E$.

d) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_M\_\beta)$.

e) u keine untere M_Schranke von y.

Ad e): Es gilt $p \in y$, doch es gilt wegen $p \neq q$, $q \neq u$ und $q \neq u$ *nicht* u_M_p.

37-25. Mit dem folgenden Beispiel wird gezeigt, dass in **37-20** die Voraussetzung "M transitiv" nicht ohne Weiteres auf "M transitiv in z" abgeschwächt werden kann:

<u>37-25.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) p Menge.

→) q Menge.

→) o Menge.

→) $p \neq q$.

→) $p \neq o$.

→) $q \neq o$.

→) $M = \{(p,p),(p,q),(q,o)\}$.

→) $z = \{p\}$.

→) $f = \{(p,q)\}$.

→) $E = \{p\}$.

→) $y = \{p\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv in z.

b) f ist M_vermehrend auf E.

c) f Funktion.

d) $0 \neq y \subseteq E$.

e) $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_o)$.

f) o keine obere M_Schranke von y.

Ad f): Es gilt $p \in y$, doch es gilt wegen $p \neq o$, $q \neq o$ und $q \neq o$ *nicht* p_M_o.

37-26. Mit dem folgenden Beispiel wird gezeigt, dass in **37-21** die Voraussetzung "M transitiv" nicht ohne Weiteres auf "M transitiv in z" abgeschwächt werden kann:

<u>37-26.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) p Menge.

→) q Menge.

→) o Menge.

→) $p \neq q$.

→) $p \neq u$.

→) $q \neq u$.

→) $M = \{(u, q), (q, p), (p, p)\}$.

→) $z = \{p\}$.

→) $f = \{(p, q)\}$.

→) $E = \{p\}$.

→) $y = \{p\}$.

Dann folgt:

`a)` M transitiv in z.

`b)` f ist M_verringernd auf E.

`c)` f Funktion.

`d)` $0 \neq y \subseteq E$.

`e)` $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_M\_f(\alpha))$.

`f)` u keine untere M_Schranke von y.

Ad `f)`: Es gilt $p \in y$, doch es gilt wegen $p \neq q$, $q \neq u$ und $q \neq u$ *nicht* u_M_p.

37-27. Nun wird gezeigt, dass wenn r eine transitive Relation in x ist, wenn u eine untere r_Schranke von y ist und wenn U_M_u gilt, auch U eine untere r_Schranke von y ist. Analoges gilt laut `b)` für obere r_Schranken von y:

37-27(Satz)

Aus "r Relation in x" und "r transitiv in x" und ...

`a)` *... und "u untere r_Schranke von y" und "U_r_u"*

folgt "U untere r_Schranke von y".

`b)` *... und "o obere r_Schranke von y" und "o_r_O"*

folgt "O obere r_Schranke von y".

<u>Beweis **37-27**</u> `a)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x)$
$\wedge(u \text{ untere } r\text{\_Schranke von } y) \wedge (U\_r\_u)$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots U\_r\_u$"
folgt via **30-2**: `A1` | "$U \in \mathsf{dom}\, r$"

> `Thema1.2` $\alpha \in y$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere r_Schranke von $y \ldots$" und
> aus `Thema1.2`"$\alpha \in y$"
> folgt via **35-1(Def)**: u_r_α.
>
> `3.1:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
> aus `2`"u_r_α"
> folgt via **34-1**: $(u \in x) \wedge (\alpha \in x)$.
>
> `3.2:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots U\_r\_u$"
> folgt via **34-1**: $U \in x$.
>
> `4:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ transitiv in $x \ldots$",
> aus `3.2`"$U \in x$",
> aus `3.1`"$u \in x \ldots$",
> aus `3.1`"$\ldots \alpha \in x$",
> aus `VS` gleich "$\ldots U\_r\_u$" und
> aus `2`"u_r_α"
> folgt via **30-30(Def)**: U_r_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (U\_r\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$U \in \mathsf{dom}\, r$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (U\_r\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: U untere r_Schranke von y.

Beweis **37-27** b)

1: $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x) \wedge (o \text{ obere } r\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_r\_O)$

$\overset{\mathbf{11-7}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x) \wedge (o \text{ obere } r\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_r\_O)$

$\overset{\mathbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r^{-1} \text{ transitiv in } x) \wedge (o \text{ obere } r\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_r\_O)$

$\overset{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r^{-1} \text{ transitiv in } x) \wedge (o \text{ untere } r^{-1}\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_r\_O)$

$\overset{\mathbf{30-82}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r^{-1} \text{ transitiv in } x) \wedge (o \text{ untere } r^{-1}\text{\_Schranke von } y) \wedge (O\_r^{-1}\_o)$

$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} O \text{ untere } r^{-1}\text{\_Schranke von } y$

$\overset{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} O \text{ obere } r\text{\_Schranke von } y.$

2: Aus 1 folgt: $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x) \wedge (o \text{ obere } r\text{\_Schranke von } y) \wedge (o\_r\_O)$

$\Rightarrow (O \text{ obere } r\text{\_Schranke von } y).$

□

37-28. Im folgenden Satz wird Hinreichendes dafür angegeben, dass für jede untere r_Schranke u von y und jede obere r_Schranke o von y die Aussage u_r_o gil:

37-28(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r transitiv in x.*

→) $0 \neq y$.

→) *u untere r_Schranke von y.*

→) *o obere r_Schranke von y.*

Dann folgt "u_r_o".

Beweis **37-28**

`1:` Aus →) "$0 \neq y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in y$.

`2.1:` Aus →) "u untere r_Schranke von y" und
aus `1` "$\ldots \Omega \in y$"
folgt via **35-1(Def)**: u_r_Ω.

`2.2:` Aus →) "o obere r_Schranke von y" und
aus `1` "$\ldots \Omega \in y$"
folgt via **35-1(Def)**: Ω_r_o.

`3.1:` Aus →) "r Relation in x" und
aus `2.1` "u_r_Ω"
folgt via **34-1**: $(u \in x) \wedge (\Omega \in x)$.

`3.2:` Aus →) "r Relation in x" und
aus `2.2` "Ω_r_o"
folgt via **34-1**: $o \in x$.

`4:` Aus →) "r transitiv in x",
aus `3.1` "$u \in x \ldots$",
aus `3.1` "$\ldots \Omega \in x$",
aus `3.2` "$o \in x$",
aus `2.1` "u_r_Ω" und
aus `2.2` "Ω_r_o"
folgt via **30-30(Def)**: u_r_o.

□

37-29. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls w eine r_vermehrende Klasse auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine obere r_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-29(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv in x.*

$\rightarrow$) *w ist r_vermehrend auf E.*

$\rightarrow$) $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_r\_o)$.

Dann folgt "o obere r_Schranke yon y".

<u>Beweis **37-29**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in y$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in y$” und
aus $\rightarrow$)“$\ldots y \subseteq E$”
folgt via **0-4**: $\gamma \in E$.

`3:` Aus $\rightarrow$)“w ist r_vermehrend auf E” und
aus `2`“$\gamma \in E$”
folgt via **30-7(Def)**: $\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\gamma\_r\_\Omega)$.

`4:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in y$”,
aus `3`“$\ldots (\gamma, \Omega) \in w \ldots$” und
aus $\rightarrow$)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_r\_o)$”
folgt: Ω_r_o.

`5.1:` Aus $\rightarrow$)“r Relation in x” und
aus `3`“$\ldots \gamma\_r\_\Omega$”
folgt via **34-1**: $(\gamma \in x) \wedge (\Omega \in x)$.

`5.2:` Aus $\rightarrow$)“r Relation in x” und
aus `4`“Ω_r_o”
folgt via **34-1**: $o \in x$.

`6:` Aus $\rightarrow$)“r transitiv in x”,
aus `5.1`“$\gamma \in x \ldots$”,
aus `5.1`“$\ldots \Omega \in x$”,
aus `5.2`“$o \in x$”,
aus `3`“$\ldots \gamma\_r\_\Omega$” und
aus `4`“Ω_r_o”
folgt via **30-30(Def)**: γ_r_o.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \gamma : (\gamma \in y) \Rightarrow (\gamma\_r\_o)$”

`1.2:` Aus $\rightarrow$)“$0 \neq y \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in y) \Rightarrow (\gamma\_r\_o)$”
folgt via **35-3**: o obere r_Schranke von y.

□

37-30. Falls r transitive Relation in x ist und falls w eine r_verringernde Klasse auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine untere r_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-30(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r transitiv in x.*

→) *w ist r_verringernd auf E.*

→) $0 \neq y \subseteq E$.

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_r\_\beta)$.

Dann folgt "u untere r_Schranke yon y".

Beweis **37-30**

1:

$$(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x)$$
$$\wedge(w \text{ ist } r\_\text{verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_r\_\beta))$$

$$\stackrel{\mathbf{11-7}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x)$$
$$\wedge(w \text{ ist } r\_\text{verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_r\_\beta))$$

$$\stackrel{\mathbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r^{-1} \text{ transitiv in } x)$$
$$\wedge(w \text{ ist } r\_\text{verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_r\_\beta))$$

$$\stackrel{\mathbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r^{-1} \text{ transitiv in } x)$$
$$\wedge(w \text{ ist } r^{-1}\_\text{vermehrend auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_r\_\beta))$$

$$\stackrel{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} (r^{-1} \text{ Relation in } x) \wedge (r^{-1} \text{ transitiv in } x)$$
$$\wedge(w \text{ ist } r^{-1}\_\text{vermehrend auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_r^{-1}\_u))$$

$$\stackrel{\mathbf{37-29}}{\Rightarrow} u \text{ obere } r^{-1}\_\text{Schranke von } y$$

$$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} u \text{ untere } r\_\text{Schranke von } y.$$

2: Aus 1 folgt:

$$(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ transitiv in } x)$$
$$\wedge(w \text{ ist } r\_\text{verringernd auf } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$$
$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (u\_r\_\beta))$$

$$\Rightarrow (u \text{ untere } r\_\text{Schranke von } y).$$

□

37-31. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls die *Funktion* f r_vermehrend auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine obere r_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-31(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ r *Relation in* x.

$\rightarrow)$ r *transitiv in* x.

$\rightarrow)$ f *ist* r_*vermehrend auf* E.

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (f(\alpha)\_r\_o)$.

Dann folgt "o *obere* r_*Schranke von* y*".*

Beweis **37-31**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f).$

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in y \ldots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (f(\alpha)\_r\_o)$"
folgt: $f(\gamma)\_r\_o.$

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1`"$\ldots (\gamma, \beta) \in f$"
folgt via **18-20**: $\beta = f(\gamma).$

`3:` Aus `2.2`"$\beta = f(\gamma)$" und
aus `2.1`"$f(\gamma)\_r\_o$"
folgt: $\beta\_r\_o.$

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\beta\_r\_o)$"

`1.2:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r transitiv in x",
aus →) "f ist r_vermehrend auf E",
aus →) "$0 \neq y \subseteq E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (\beta\_r\_o)$"
folgt via **37-29**: o obere r_Schranke von y.

□

37-32. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls die *Funktion* f r_verringernd auf E ist, dann kann via des folgenden Satzes eine untere r_Schranke von jeder nichtleeren TeilKlasse von E gefunden werden:

37-32(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *transitiv in* x.

$\rightarrow$) f *ist* r*_verringernd auf* E.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_r\_f(\alpha))$.

Dann folgt "u *untere* r*_Schranke von* y*".*

Beweis **37-32**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\gamma \in y \ldots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (u\_r\_f(\alpha))$"
folgt: $u\_r\_f(\gamma)$.

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1` "$\ldots (\gamma, \beta) \in f$"
folgt via **18-20**: $\beta = f(\gamma)$.

`3:` Aus `2.2` "$\beta = f(\gamma)$" und
aus `2.1` "$u\_r\_f(\gamma)$"
folgt: u_r_β.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (u\_r\_\beta)$"

`1.2:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r transitiv in x",
aus →) "f ist r_verringernd auf E",
aus →) "$0 \neq y \subseteq E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \beta : ((\gamma \in y) \wedge ((\gamma, \beta) \in f)) \Rightarrow (u\_r\_\beta)$"
folgt via **37-30**: u untere r_Schranke von y.

□

37-33. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls w r_vermehrend auf - ganz - x ist, dann folgt aus p_r_q und $(q,\alpha)\in w$ stets p_r_α:

<u>**37-33(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv in x.*

$\rightarrow$) *w ist r_vermehrend auf x.*

$\rightarrow$) *p_r_q.*

Dann folgt "$\forall\alpha : ((q,\alpha)\in w) \Rightarrow (p\_r\_\alpha)$".

<u>Beweis **37-33**</u>

`Thema1` $(q,\alpha)\in w$.

2: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "p_r_q"
folgt via **34-1**: $(p\in x)\wedge(q\in x)$.

3: Aus $\rightarrow$) "w ist r_vermehrend auf x",
aus 2 "$\ldots q\in x$" und
aus `Thema1` "$(q,\alpha)\in w$"
folgt via **30-7(Def)**: q_r_α.

4: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus 3 "q_r_α"
folgt via **34-1**: $\alpha\in x$.

5: Aus $\rightarrow$) "r transitiv in x",
aus 2 "$p\in x\ldots$",
aus 2 "$\ldots q\in x$",
aus 4 "$\alpha\in x$",
aus $\rightarrow$) "p_r_q" und
aus 3 "q_r_α"
folgt via **30-30(Def)**: p_r_α.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : ((q,\alpha)\in w) \Rightarrow (p\_r\_\alpha)$.

□

37-34. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls w r_verringernd auf - ganz - x ist, dann folgt aus q_r_p und $(q,\alpha) \in w$ stets α_r_p:

37-34(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) r *transitiv in* x.

→) w *ist* r*_verringernd auf* x.

→) q_r_p.

Dann folgt "$\forall \alpha : ((q,\alpha) \in w) \Rightarrow (\alpha\_r\_p)$".

Beweis **37-34**

`Thema1` $(q,\alpha) \in w$.

2: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "q_r_p"
folgt via **34-1**: $(q \in x) \wedge (p \in x)$.

3: Aus →) "w ist r_verringernd auf x",
aus 2 "$q \in x \ldots$" und
aus `Thema1` "$(q,\alpha) \in w$"
folgt via **30-7(Def)**: α_r_q.

4: Aus →) "r Relation in x" und
aus 3 "α_r_q"
folgt via **34-1**: $\alpha \in x$.

5: Aus →) "r transitiv in x",
aus 4 "$\alpha \in x$",
aus 2 "$q \in x \ldots$",
aus 2 "$\ldots p \in x$",
aus 3 "α_r_q" und
aus →) "q_r_p"
folgt via **30-30(Def)**: α_r_p.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : ((q,\alpha) \in w) \Rightarrow (\alpha\_r\_p)$.

□

37-35. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls die *Funktion* f r_vermehrend auf - ganz - x ist, dann folgt aus p_r_q stets $p\_r\_f(q)$:

37-35(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *transitiv in* x.

$\rightarrow$) f *ist* r*_vermehrend auf* x.

$\rightarrow$) f *Funktion*

$\rightarrow$) p_r_q.

Dann folgt "$p\_r\_f(q)$".

Beweis **37-35**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r transitiv in x",
aus $\rightarrow$) "f ist r_vermehrend auf x" und
aus $\rightarrow$) "p_r_q"
folgt via **37-33**: $\forall\alpha : ((q,\alpha) \in f) \Rightarrow (p\_r\_\alpha)$.

2: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "p_r_q"
folgt via **34-1**: $q \in z$.

3: Aus $\rightarrow$) "f ist r_vermehrend auf x"
folgt via **30-11**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

4: Aus 2"$q \in x$" und
aus 3"$x \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $q \in \mathsf{dom}\, f$.

5: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus 4"$q \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(q, f(q)) \in f$.

6: Aus 5"$(q, f(q)) \in f$" und
aus 1"$\forall\alpha : ((q,\alpha) \in f) \Rightarrow (p\_r\_\alpha)$"
folgt: $p\_r\_f(q)$.

□

37-36 Falls r eine transitive Relation in x ist und falls die *Funktion* f r_verringernd auf - ganz - x ist, dann folgt aus q_r_p stets $f(q)\_r\_p$:

37-36(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *transitiv in* x.

$\rightarrow$) f *ist* r*_verringernd auf* x.

$\rightarrow$) f *Funktion*

$\rightarrow$) q_r_p.

Dann folgt "$f(q)\_r\_p$".

Beweis **37-36**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r transitiv in x",
aus $\rightarrow$) "f ist r_verringernd auf x" und
aus $\rightarrow$) "q_r_p"
folgt via **37-34**: $\forall\alpha : ((q, \alpha) \in f) \Rightarrow (\alpha\_r\_p)$.

2: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "q_r_p"
folgt via **34-1**: $q \in x$.

3: Aus $\rightarrow$) "f ist r_verringernd auf x"
folgt via **30-11**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

4: Aus 2 "$q \in x$" und
aus 3 "$x \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $q \in \mathsf{dom}\, f$.

5: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus 4 "$q \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(q, f(q)) \in f$.

6: Aus 5 "$(q, f(q)) \in f$" und
aus 1 "$\forall\alpha : ((q, \alpha) \in f) \Rightarrow (\alpha\_r\_p)$"
folgt: $f(q)\_r\_p$.

$\square$

min **ist** M**_Minimum von** x.
max **ist** M**_Maximum von** x.
p **kein** M**_Minimum von** x.
p **kein** M**_Maximum von** x.
x **hat kein** M**_Minimum**.
x **hat kein** M**_Maximum**.

Ersterstellung: 20/02/06 **Letzte Änderung: 07/05/11**

38-1. In der folgenden Definition werden Klassen, die **(kein)** M**_Minimum** oder **(kein)** M**_Maximum** einer anderen Klasse sind, in die Essays eingeführt. Auch wird gesagt, was es heißt, **kein** M**_Minimum** oder **kein** M**_Maximum** zu haben:

38-1(Definition)

1) "min **ist** M**_Minimum von** x" genau dann, wenn gilt:

min untere M_Schranke von x.

$\wedge$

$min \in x$.

2) "max **ist** M**_Maximum von** x" genau dann, wenn gilt:

max obere M_Schranke von x.

$\wedge$

$max \in x$.

3) "p **kein** M**_Minimum von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(p \text{ ist } M\_\text{Minimum von } x).$$

4) "p **kein** M**_Maximum von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(p \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x).$$

5) "x **hat kein** M**_Minimum**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Minimum von } x).$$

6) "x **hat kein** M**_Maximum**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x).$$

38-2. Im folgenden Satz werden - unter anderem - M_Minima (M_Maxima) mit M^{-1}_Maxima (M^{-1}_Minima) identifiziert. Dies hat auch Auswirkungen auf die weiteren, in **38-1(Def)** vorgestellten Konzepte. In der Hauptsache können damit im Folgenden Sätze, die ansonsten für M_Minima *und* für M_Maxima mit sehr ähnlichen Beweisen versehen werden müssten, deutlich kürzer bewiesen werden:

38-2(Satz)

a) *“min ist M_Minimum von x”*
genau dann, wenn “min ist M^{-1}_Maximum von x”.

b) *“max ist M_Maximum von x”*
genau dann, wenn “max ist M^{-1}_Minimum von x”.

c) *“p kein M_Minimum von x”*
genau dann, wenn “p kein M^{-1}_Maximum von x”.

d) *“p kein M_Maximum von x”*
genau dann, wenn “p kein M^{-1}_Minimum von x”.

e) *“x hat kein M_Minimum”*
genau dann, wenn “x hat kein M^{-1}_Maximum”.

f) *“x hat kein M_Maximum”*
genau dann, wenn “x hat kein M^{-1}_Minimum”.

Beweis **38-2** a)

1: min ist M_Minimum von x

$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow}$ (min untere M_Schranke von x) $\wedge$ ($min \in x$)

$\overset{\textbf{35-2}}{\Leftrightarrow}$ (min obere M^{-1}_Schranke von x) $\wedge$ ($min \in x$)

$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow}$ min ist M^{-1}_Maximum von x.

2: Aus 1
folgt: (min ist M_Minimum von x) $\Leftrightarrow$ (min ist M^{-1}_Maximum von x).

Beweis **38-2** b)

1: $$max \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x$$

$$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (max \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (max \in x)$$

$$\overset{\textbf{35-2}}{\Leftrightarrow} (max \text{ untere } M^{-1}\_\text{Schranke von } x) \wedge (max \in x)$$

$$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} max \text{ ist } M^{-1}\_\text{Minimum von } x.$$

2: Aus 1
folgt: $(max \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x) \Leftrightarrow (max \text{ ist } M^{-1}\_\text{Minimum von } x)$.

c)

1: $$p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x$$

$$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M\_\text{Minimum von } x)$$

$$\overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M^{-1}\_\text{Maximum von } x)$$

$$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} p \text{ kein } M^{-1}\_\text{Maximum von } x.$$

2: Aus 1
folgt: $(p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x) \Leftrightarrow (p \text{ kein } M^{-1}\_\text{Maximum von } x)$.

d)

1: $$p \text{ kein } M\_\text{Maximum von } x$$

$$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x)$$

$$\overset{\text{b)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M^{-1}\_\text{Minimum von } x)$$

$$\overset{\textbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} p \text{ kein } M^{-1}\_\text{Minimum von } x.$$

2: Aus 1
folgt: $(p \text{ kein } M\_\text{Maximum von } x) \Leftrightarrow (p \text{ kein } M^{-1}\_\text{Minimum von } x)$.

Beweis **38-2** e)

1:
$$x \text{ hat kein } M\_\text{Minimum}$$
$$\overset{\mathbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Minimum von } x)$$
$$\overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{Maximum von } x)$$
$$\overset{\mathbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Maximum}.$$

2: Aus 1
folgt: $(x \text{ hat kein } M\_\text{Minimum}) \Leftrightarrow (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Maximum})$.

f)

1:
$$x \text{ hat kein } M\_\text{Maximum}$$
$$\overset{\mathbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x)$$
$$\overset{\text{b)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{Minimum von } x)$$
$$\overset{\mathbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Minimum}.$$

2: Aus 1
folgt: $(x \text{ hat kein } M\_\text{Maximum}) \Leftrightarrow (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Minimum})$.

$\square$

38-3. Im folgenden Satz sind grundlegende Eigenschaften von M_Minima aufgelistet. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - e) - f) - g) - c)`:

38-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *min ist M_Minimum von x.*

Dann folgt:

`a)` *min ist M_Infimum von x.*

`b)` *min Menge.*

`c)` $0 \neq x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`d)` *min_M_min.*

`e)` $min \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`f)` $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$.

`g)` $\forall \alpha : (\alpha$ *untere M_Schranke von* $x) \Rightarrow (\alpha\_M\_min)$.

<u>Beweis **38-3**</u>

`1:` Aus →) "min ist M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $(min$ untere M_Schranke von $x) \wedge (min \in x)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots min \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`2.a):` Aus `1`"$\ldots min \in x$" und
aus `1`"min untere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **36-9**: min ist M_Infimum von x.

`3.b):` Aus `2.a)`"min ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: min Menge.

`3.1:` Aus `2.a)`"min ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3.d):` Aus `2.a)`"min ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: min_M_min.

`3.e):` Aus `2.a)`"min ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: $min \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3.f):` Aus `2.a)`"min ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min$_$M$_$\alpha)$.

`3.g):` Aus `2.a)`"min ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$_M_$min)$.

`4.c):` Aus `2.1`"$0 \neq x$" und
aus `3.1`"$x \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt: $0 \neq x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

□

38-4. Im folgenden Satz sind grundlegende Eigenschaften von M_Maxima aufgelistet. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - e) - f) - g) - c)`:

38-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *max ist M_Maximum von x.*

Dann folgt:

`a)` *max ist M_Supremum von x.*

`b)` *max Menge.*

`c)` $0 \neq x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`d)` max_M_max.

`e)` $max \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`f)` $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)$.

`g)` $\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x) \Rightarrow (max\_M\_\alpha)$.

Beweis **38-4**

`1:` Aus →) "max ist M_Maximum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $(max$ obere M_Schranke von $x) \wedge (max \in x)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots max \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`2.a):` Aus `1`"$\ldots max \in x$" und
aus `1`"max obere M_Schranke von $x \ldots$"
folgt via **36-9**: max ist M_Supremum von x.

`3.b):` Aus `2.a)`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-4**: max Menge.

`3.1:` Aus `2.a)`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-4**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3.d):` Aus `2.a)`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-4**: max_M_max.

`3.e):` Aus `2.a)`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-4**: $max \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3.f):` Aus `2.a)`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-4**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$_$M$_$max)$.

`3.g):` Aus `2.a)`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $x) \Rightarrow (max$_M_$\alpha)$.

`4.c):` Aus `2.1`"$0 \neq x$" und
aus `3.1`"$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $0 \neq x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

□

38-5. Im folgenden Satz werden Eigenschaften von M_Minima, von M_Maxima, von unteren M_Schranken und von oberen M_Schranken beim Übergang zu Teil-Klassen diskutiert:

38-5(Satz)

a) *Aus "$y \subseteq x$" und "min ist M_Minimum von x"*
folgt "min untere M_Schranke von y".

b) *Aus "$min \in y \subseteq x$" und "min ist M_Minimum von x"*
folgt "min ist M_Minimum von y".

c) *Aus*
"$y \subseteq x$" und
"u untere M_Schranke von x" und
"mn ist M_Minimum von y"
folgt "u_M_mn".

d) *Aus "$y \subseteq x$" und "max ist M_Maximum von x"*
folgt "max obere M_Schranke von y".

e) *Aus "$max \in y \subseteq x$" und "max ist M_Maximum von x"*
folgt "max ist M_Maximum von y".

f) *Aus*
"$y \subseteq x$" und
"o obere M_Schranke von x" und
"mx ist M_Maximum von y"
folgt "mx_M_o".

<u>Beweis</u> **38-5** `a)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (min \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots min$ ist M_Minimum von x”
folgt via **38-3**: min ist M_Infimum von x.

`2:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x \ldots$” und
aus `1`“min ist M_Infimum von x”
folgt via **36-5**: min untere M_Schranke von y.

`b)` `VS` gleich $(min \in y \subseteq x) \wedge (min \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \subseteq x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots min$ ist M_Minimum von x”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: min untere M_Schranke von y.

`2:` Aus `1`“min untere M_Schranke von y” und
aus `VS` gleich “$min \in y \ldots$”
folgt via **38-1(Def)**: min ist M_Minimum von y.

`c)`
`VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } x) \wedge (mn \text{ ist } M\text{\_Minimum von } y)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots mn$ ist M_Minimum von y”
folgt via **38-3**: mn ist M_Infimum von y.

`2:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots u$ untere M_Schranke von $x \ldots$” und
aus `1`“mn ist M_Infimum von y”
folgt via **36-5**: u_M_mn.

<u>Beweis **38-5**</u> `d)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (max$ ist M_Maximum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots max$ ist M_Maximum von x"
folgt via **38-4**: max ist M_Supremum von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"max ist M_Supremum von x"
folgt via **36-5**: max obere M_Schranke von y.

`e)` `VS` gleich $(max \in y \subseteq x) \wedge (max$ ist M_Maximum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots max$ ist M_Maximum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: max obere M_Schranke von y.

`2:` Aus `1`"max obere M_Schranke von y" und
aus `VS` gleich "$max \in y \ldots$"
folgt via **38-1(Def)**: max ist M_Maximum von y.

`f)`
`VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (o$ obere M_Schranke von $x) \wedge (mx$ ist M_Maximum von $y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots mx$ ist M_Maximum von y"
folgt via **38-4**: mx ist M_Supremum von y.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere M_Schranke von $x \ldots$" und
aus `1`"mx ist M_Supremum von y"
folgt via **36-5**: mx_M_o.

□

38-6. Im folgenden Satz sind drei zu "*min* ist M_Minimum von x" äquivalente Aussagen zu finden:

38-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` *min ist M_Minimum von x.*

`ii)` $(min \in x) \wedge (min$ *untere M_Schranke von* $x)$.

`iii)` $(min \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

`iv)` $(min \in x) \wedge (min$ *ist M_Infimum von* $x)$.

<u>Beweis **38-6**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\qquad$ min ist M_Minimum von x.

Aus `VS` gleich "min ist M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad$ $(min \in x) \wedge (min$ untere M_Schranke von $x)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\qquad$ $(min \in x) \wedge (min$ untere M_Schranke von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots min$ untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\qquad$ $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$min \in x \ldots$" und
aus `1`
folgt: $\qquad$ $(min \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $\qquad$ $(min \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$min \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\qquad$ $0 \neq x$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-3**: $\qquad$ min untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$min \in x \ldots$" und
aus `2`"min untere M_Schranke von x"
folgt via **36-9**: $\qquad$ min ist M_Infimum von x.

`4:` Aus `VS` gleich "$min \in x \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\qquad$ $(min \in x) \wedge (min$ ist M_Infimum von $x)$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\qquad$ $(min \in x) \wedge (min$ ist M_Infimum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots min$ ist M_Infimum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad$ min untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$min \in x \ldots$" und
aus `1`"min untere M_Schranke von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad$ min ist M_Minimum von x.

$\square$

38-7. Im folgenden Satz sind drei zu “*max* ist M_Maximum von x” äquivalente Aussagen zu finden:

38-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` *max ist M_Maximum von x.*

`ii)` $(max \in x) \wedge (max$ *obere M_Schranke von* $x)$.

`iii)` $(max \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)).$

`iv)` $(max \in x) \wedge (max$ *ist M_Supremum von* $x)$.

<u>Beweis **38-7**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\qquad max$ ist M_Maximum von x.

Aus `VS` gleich "max ist M_Maximum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad (max \in x) \wedge (max$ obere M_Schranke von $x)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\qquad (max \in x) \wedge (max$ obere M_Schranke von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots max$ obere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$max \in x \ldots$" und
aus `1`
folgt: $\qquad (max \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $\qquad (max \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$max \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq x$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)$"
folgt via **35-3**: $\qquad max$ obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$max \in x \ldots$" und
aus `2`"max obere M_Schranke von x"
folgt via **36-9**: $\qquad max$ ist M_Supremum von x.

`4:` Aus `VS` gleich "$max \in x \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\qquad (max \in x) \wedge (max$ ist M_Supremum von $x)$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\qquad (max \in x) \wedge (max$ ist M_Supremum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots max$ ist M_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad max$ obere M_Schranke von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$max \in x \ldots$" und
aus `1`"max obere M_Schranke von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad max$ ist M_Maximum von x.

□

38-8. In Spezialisierung von **38-6** sind im folgenden Satz drei zu "min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\,M$" äquivalente Aussagen zu finden:

38-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` min *ist* M*_Minimum von* $\mathsf{dom}\,M$.

`ii)` min *untere* M*_Schranke von* $\mathsf{dom}\,M$.

`iii)` $(min \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

`iv)` min *ist* M*_Infimum von* $\mathsf{dom}\,M$.

Beweis **38-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\,M$.

Aus `VS` gleich "min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\,M$"
folgt via **38-1(Def)**: min untere M_Schranke von $\mathsf{dom}\,M$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich min untere Schranke von $\mathsf{dom}\,M$.

Aus `VS` gleich "min untere Schranke von $\mathsf{dom}\,M$"
folgt via **35-1(Def)**: $(min \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $(min \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

Aus `VS` gleich "$min \in \mathsf{dom}\,M \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$"
folgt via **38-6**: min ist M_Infimum von $\mathsf{dom}\,M$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich min ist M_Infimum von $\mathsf{dom}\,M$.

`1:` Aus `VS` gleich "min ist M_Infimum von $\mathsf{dom}\,M$"
folgt via **36-3**: $min \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1`"$min \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **2-2**: $min \in \mathsf{dom}\,M$.

`3:` Aus `2`"$min \in \mathsf{dom}\,M$" und
aus `VS` gleich "min ist M_Infimum von $\mathsf{dom}\,M$"
folgt via **38-6**: min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\,M$.

□

38-9. In Spezialisierung von **38-7** sind im folgenden Satz drei zu "max ist M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$" äquivalente Aussagen zu finden:

38-9(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv) *sind äquivalent:*

i) max *ist* M*_Maximum von* $\mathsf{ran}\, M$.

ii) max *obere* M*_Schranke von* $\mathsf{ran}\, M$.

iii) $(max \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

iv) max *ist* M*_Supremum von* $\mathsf{ran}\, M$.

Beweis **38-9** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich max ist M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$.

Aus VS gleich "max ist M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-1(Def)**: max obere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ VS gleich max obere Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.

Aus VS gleich "max obere Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-1(Def)**: $(max \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}}$ VS gleich $(max \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

Aus VS gleich "$max \in \mathsf{ran}\, M \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)$"
folgt via **38-7**: max ist M_Supremum von $\mathsf{ran}\, M$.

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{i)}}$ VS gleich max ist M_Supremum von $\mathsf{ran}\, M$.

1: Aus VS gleich "max ist M_Supremum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-4**: $max \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1 "$max \in (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $max \in \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus 2 "$max \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus VS gleich "max ist M_Supremum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-7**: max ist M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$.

□

38-10. Ähnlich zu **38-8** sind im folgenden Satz drei zu "*min* ist M_Minimum von ran M" äquivalente Aussagen zu finden:

38-10(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv) *sind äquivalent:*

i) *min ist M_Minimum von* ran M.

ii) $(min \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (min$ *untere M_Schranke von* $\mathsf{ran}\, M)$.

iii) $(min \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

iv) *min ist M_Infimum von* ran M.

Beweis **38-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich min ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

1: Aus VS gleich "min ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-1(Def)**:
$(min$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M) \wedge (min \in \mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1
folgt: $(min \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (min$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(min \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (min$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots min$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$.

2: Aus VS gleich "$min \in \mathsf{ran}\, M \ldots$" und
aus 1
folgt: $(min \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $(min \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha))$.

Aus VS gleich "$min \in \mathsf{ran}\, M \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$"
folgt via **38-6**: min ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich min ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

1: Aus VS gleich "min ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-3**: $min \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1"$min \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $min \in \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus 2"$min \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus VS gleich "min ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-6**: min ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

$\square$

38-11. Ähnlich zu **38-9** sind im folgenden Satz drei zu "max ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\,M$" äquivalente Aussagen zu finden:

38-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` *max ist M_Maximum von* $\mathsf{dom}\,M$.

`ii)` $(max \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (max$ *obere M_Schranke von* $\mathsf{dom}\,M)$.

`iii)` $(max \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

`iv)` *max ist M_Supremum von* $\mathsf{dom}\,M$.

<u>Beweis **38-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich max ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

`1:` Aus `VS` gleich “max ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$”
folgt via **38-1(Def)**:
$(max$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M) \wedge (max \in \mathsf{dom}\, M)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(max \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (max$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$
`VS` gleich $(max \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (max$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich “max obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$”
folgt via **35-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)$.

`2:` Aus `VS` gleich “$max \in \mathsf{dom}\, M \ldots$” und
aus `1`
folgt: $(max \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(max \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max))$.

Aus `VS` gleich “$max \in \mathsf{dom}\, M \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha\_M\_max)$”
folgt via **38-7**: max ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich max ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$.

`1:` Aus `VS` gleich “max ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$”
folgt via **36-4**: $max \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1`“$max \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt via **2-2**: $max \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `2`“$max \in \mathsf{dom}\, M$” und
aus `VS` gleich “max ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$”
folgt via **38-7**: max ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

□

38-12. im folgenden Satz wird unter anderem fest gehalten, dass eine Klasse x genau dann ein M_Minimum hat, wenn der binäre Durchschnitt von x und der Klasse aller unteren M_Schranken von x ungleich der leeren Menge ist:

38-12(Satz)

a) *"min ist M_Minimum von x"*

$\Leftrightarrow$ *"min $\in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"*.

b) *Aus "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"*

folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x".

c) *Aus "min ist M_Minimum von x"*

folgt "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$".

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *untere M_Schranke von* $x\}$.

Beweis **38-12** `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\qquad$ min ist M_Minimum von x.

`1:` Aus `VS` gleich "min ist M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad (min \in x) \wedge (min$ untere M_Schranke von $x)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots min$ untere M_Schranke von x"
folgt via **36-15**: $\qquad min \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`3:` Aus `1`"$min \in x \ldots$" und
aus `2`"$min \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **2-2**: $\qquad min \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\qquad min \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$min \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **2-2**: $\qquad (min \in x) \wedge (min \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots min \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt: $\qquad min$ untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `2`"min untere M_Schranke von x" und
aus `1`"$min \in x \ldots$"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad min$ ist M_Minimum von x.

`b)` `VS` gleich $\qquad 0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **0-20**: $\qquad \exists \Omega : \Omega \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\qquad \Omega$ ist M_Minimum von x.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_Minimum von x"
folgt: $\qquad \exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

`c)` `VS` gleich $\qquad min$ ist M_Minimum von x.

`1:` Aus `VS` gleich "min ist M_Minimum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\qquad min \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `1`"$min \in x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.

□

38-13. im folgenden Satz wird unter anderem fest gehalten, dass eine Klasse x genau dann ein M_Maximum hat, wenn der binäre Durchschnitt von x und der Klasse aller oberen M_Schranken von x ungleich der leeren Menge ist:

38-13(Satz)

a) *"max ist M_Maximum von x"*

$$\Leftrightarrow \quad \text{“}max \in x \cap \{\omega : \omega \textit{ obere M\_Schranke von } x\}\text{”}.$$

b) *Aus* "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $x\}$"

folgt "$\exists \Omega : \Omega$ *ist M_Maximum von* x".

c) *Aus "max ist M_Maximum von x"*

folgt "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $x\}$".

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ *obere M_Schranke von* $x\}$.

Beweis **38-13** `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\qquad$ max ist M_Maximum von x.

`1:` Aus `VS` gleich "max ist M_Maximum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad (max \in x) \wedge (max$ obere M_Schranke von $x)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots max$ obere M_Schranke von x"
folgt via **36-16**: $\qquad max \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`3:` Aus `1`"$max \in x \ldots$" und
aus `2`"$max \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **2-2**: $\qquad max \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\qquad max \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$max \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **2-2**: $\qquad (max \in x) \wedge (max \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots max \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt: $\qquad max$ obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `2`"max obere M_Schranke von x" und
aus `1`"$max \in x \ldots$"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad max$ ist M_Maximum von x.

`b)` `VS` gleich $\qquad 0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **0-20**: $\qquad \exists \Omega : \Omega \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\qquad \Omega$ ist M_Maximum von x.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_Maximum von x"
folgt: $\qquad \exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von x.

`c)` `VS` gleich $\qquad max$ ist M_Maximum von x.

`1:` Aus `VS` gleich "max ist M_Maximum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\qquad max \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

`2:` Aus `1`"$max \in x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$"
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

$\square$

38-14. Mit dem folgenden Satz wird ein definitions-orientierter Überblick gegeben, was es heißt, *kein M*_Minimum von x zu sein:

38-14(Satz)

a) *Aus "p keine untere M_Schranke von x" folgt "p kein M_Minimum von x".*

b) *Aus "$p \notin x$" folgt "p kein M_Minimum von x".*

c) *Aus "p kein M_Minimum von x" folgt "$p \notin x$" oder "p keine untere M_Schranke von x".*

d) *Aus "p untere M_Schranke von x" und "p kein M_Minimum von x" folgt "$p \notin x$".*

e) *Aus "$p \in x$" und "p kein M_Minimum von x" folgt "p keine untere M_Schranke von x".*

Beweis **38-14** `abc)`

`1:`

$$p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x$$

$$\stackrel{\mathbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M\_\text{Minimum von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{38-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg((p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (p \in x))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)) \vee (\neg(p \in x))$$

$$\stackrel{\mathbf{35-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (\neg(p \in x))$$

$$\Leftrightarrow (p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (p \notin x).$$

`2:` Aus 1
folgt:

$$p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x$$

$$\Leftrightarrow (p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x) \vee (p \notin x).$$

`3.a):` Aus 2
folgt:

$$(p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x)$$
$$\Rightarrow (p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x).$$

`3.b):` Aus 2
folgt:

$$(p \notin x) \Rightarrow (p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x).$$

`3.c):` Aus 2
folgt:

$$(p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x)$$
$$\Rightarrow ((p \notin x) \vee (p \text{ keine untere } M\_\text{Schranke von } x)).$$

<u>Beweis **38-14**</u> `d)`

`VS` gleich $(p \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x) \wedge (p \text{ kein } M\_\text{Minimum von } x)$.

`1:` Es gilt: $(p \in x) \vee (p \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich "p untere M_Schranke von $x \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$p \in x$"
folgt via **38-1(Def)**: p ist M_Minimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ kein M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$.

`4:` Es gilt `4`"$\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$".
Es gilt `2`"p ist M_Minimum von x".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin x$.

`1.2.Fall` $p \notin x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin x$.

Beweis **38-14** `e)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p$ kein M_Minimum von $x)$.

`1:` Es gilt: $(p$ untere M_Schranke von $x) \vee (\neg(p$ untere M_Schranke von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p untere M_Schranke von x.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **38-1(Def)**: p ist M_Minimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ kein M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$.

`4:` Es gilt `3` "$\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$".
Es gilt `2` "p ist M_Minimum von x".
Ex falso quodlibet folgt: p keine untere M_Schranke von x.

`1.2.Fall` $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$"
folgt via **35-1(Def)**: p keine untere M_Schranke von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p keine untere M_Schranke von x.

□

38-15. Mit dem folgenden Satz wird ein definitions-orientierter Überblick gegeben, was es heißt, *kein* M_Maximum von x zu sein:

38-15(Satz)

a) *Aus "p keine obere M_Schranke von x" folgt "p kein M_Maximum von x".*

b) *Aus "$p \notin x$" folgt "p kein M_Maximum von x".*

c) *Aus "p kein M_Maximum von x" folgt "$p \notin x$" oder "p keine obere M_Schranke von x".*

d) *Aus "p obere M_Schranke von x" und "p kein M_Maximum von x" folgt "$p \notin x$".*

e) *Aus "$p \in x$" und "p kein M_Maximum von x" folgt "p keine obere M_Schranke von x".*

Beweis **38-15** a)

1: p keine obere M_Schranke von x

$\stackrel{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow}$ p keine untere M^{-1}_Schranke von x

$\stackrel{\mathbf{38-14}}{\Rightarrow}$ p kein M^{-1}_Minimum von x

$\stackrel{\mathbf{38-2}}{\Rightarrow}$ p kein M_Maximum von x.

2: Aus 1 folgt: (p keine obere M_Schranke von x) $\Rightarrow$ (p kein M_Maximum von x).

b) VS gleich $p \notin x$.

1: Aus VS gleich "$p \notin x$" folgt via **38-14**: p kein M^{-1}_Minimum von x.

2: Aus 1 "p kein M^{-1}_Minimum von x" folgt via **38-2**: p kein M_Maximum von x.

Beweis **38-15** c)

1: p kein M_Maximum von x

$\stackrel{\text{38-2}}{\Rightarrow} p$ kein M^{-1}_Minimum von x

$\stackrel{\text{38-14}}{\Rightarrow} (p \notin x) \vee (p$ keine untere M^{-1}_Schranke von $x)$

$\stackrel{\text{35-2}}{\Rightarrow} (p \notin x) \vee (p$ keine obere M_Schranke von $x)$.

2: Aus 1
folgt: p kein M_Maximum von x
$\Rightarrow (p \notin x) \vee (p$ keine obere M_Schranke von $x)$.

d)

1: $(p$ obere M_Schranke von $x) \wedge (p$ kein M_Maximum von $x)$

$\stackrel{\text{35-2}}{\Leftrightarrow} (p$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \wedge (p$ kein M_Maximum von $x)$

$\stackrel{\text{38-2}}{\Leftrightarrow} (p$ untere M^{-1}_Schranke von $x) \wedge (p$ kein M^{-1}_Minimum von $x)$

$\stackrel{\text{38-14}}{\Rightarrow} p \notin x$.

2: Aus 1
folgt: $(p$ obere M_Schranke von $x) \wedge (p$ kein M_Maximum von $x)$
$\Rightarrow (p \notin x)$.

e)

1: $(p \in x) \wedge (p$ kein M_Maximum von $x)$

$\stackrel{\text{38-2}}{\Leftrightarrow} (p \in x) \wedge (p$ kein M^{-1}_Minimum von $x)$

$\stackrel{\text{38-14}}{\Rightarrow} p$ keine untere M^{-1}_Schranke von x

$\stackrel{\text{35-2}}{\Leftrightarrow} p$ keine obere M_Schranke von x.

2: Aus 1
folgt: $(p \in x) \wedge (p$ kein M_Maximum von $x)$
$\Rightarrow (p$ keine obere M_Schranke von $x)$.

□

38-16. Vor dem Hintergrund, dass jedes M_Minimum von x ein M_Infimum von x ist, ist der folgende Satz wenig überraschend. Aussage `b)` ist ein analoges Resultat für M_Maxima und M_Suprema:

38-16(Satz)

`a)` *Aus "p kein M_Infimum von x" folgt "p kein M_Minimum von x".*

`b)` *Aus "p kein M_Supremum von x" folgt "p kein M_Maximum von x".*

Beweis **38-16** `a)` `VS` gleich p kein M_Infimum von x.

`1:` Es gilt: $(p$ ist M_Minimum von $x) \vee (\neg(p$ ist M_Minimum von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Minimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall` “p ist M_Minimum von x”
folgt via **38-3**: p ist M_Infimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich “p kein M_Infimum von x”
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(p$ ist M_Infimum von $x)$.

`4:` Es gilt `3` “$\neg(p$ ist M_Infimum von $x)$” .
Es gilt `2` “p ist M_Infimum von x” .
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Minimum von x.

`1.2.Fall` $\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$.

Aus `1.1.Fall` “$\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$”
folgt via **38-1(Def)**: p kein M_Minimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_Minimum von x.

`b)`

`1:` p kein M_Supremum von x

$\overset{\mathbf{36-2}}{\Leftrightarrow}$ p kein M^{-1}_Infimum von x

$\overset{\mathrm{a)}}{\Rightarrow}$ p kein M^{-1}_Minimum von x

$\overset{\mathbf{38-2}}{\Leftrightarrow}$ p kein M_Maximum von x.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p$ kein M_Supremum von $x) \Rightarrow (p$ kein M_Maximum von $x)$.

□

38-17. In etwas verballhornter Form sagt der folgende Satz, dass wenn x kein M_Minimum hat, jedes y kein M_Minimum von x ist. In `b)` wird eine analoge Aussage für Klassen x formuliert, die kein M_Maximum haben:

38-17(Satz)

`a)` *Aus "x hat kein M_Minimum" folgt "p kein M_Minimum von x".*

`b)` *Aus "x hat kein M_Maximum" folgt "p kein M_Maximum von x".*

<u>Beweis</u> **38-17** `a)` `VS` gleich x hat kein M_Minimum.

`1:` Es gilt: $(p \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x) \vee (\neg(p \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Minimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`“p ist M_Minimum von x”
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich “x hat kein M_Minimum”
folgt via **38-1(Def)**: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$.

`4:` Es gilt `2`“$\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x” .
Es gilt `3`“$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$” .
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Minimum von x.

`1.2.Fall` $\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$.

Aus `1.2.Fall`“$\neg(p$ ist M_Minimum von $x)$”
folgt via **38-1(Def)**: p kein M_Minimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_Minimum von x.

`b)` `VS` gleich x hat kein M_Maximum.

`1:` Aus `VS` gleich “x hat kein M_Maximum”
folgt via **38-2**: x hat kein M^{-1}_Minimum.

`2:` Aus `2`“x hat kein M^{-1}_Minimum”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: p kein M^{-1}_Minimum von x.

`3:` Aus `2`“p kein M^{-1}_Minimum von x”
folgt via **38-2**: p kein M_Maximum von x.

□

38-18. Laut folgendem Satz hat eine Klasse, die kein M_Infimum hat, auch kein M_Minimum. Analoges gilt gemäß `b)` für Klassen, die kein M_Supremum haben:

38-18(Satz)

`a)` *Aus "x hat kein M_Infimum" folgt "x hat kein M_Minimum".*

`b)` *Aus "x hat kein M_Supremum" folgt "x hat kein M_Maximum".*

Beweis **38-18** `a)` `VS` gleich x hat kein M_Infimum.

`1:` Es gilt:
$(\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x) \vee (\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Omega$ ist M_Minimum von x"
folgt via **38-6**: Ω ist M_Infimum von x.

`3:` aus `1.1.Fall`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_Infimum von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x.

`4:` Aus `VS` gleich "x hat kein M_Infimum"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $x)$.

`5:` Es gilt `3`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x".
Es gilt `4`"$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: x hat kein M_Minimum.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$"
folgt via **38-1(Def)**: x hat kein M_Minimum.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
x hat kein M_Minimum.

`b)`

`1:`
$$
\begin{aligned}
& x \text{ hat kein } M\text{\_Supremum} \\
\overset{\mathbf{36-2}}{\Leftrightarrow}\ & x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_Infimum} \\
\overset{\text{a)}}{\Rightarrow}\ & x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_Minimum} \\
\overset{\mathbf{38-2}}{\Leftrightarrow}\ & x \text{ hat kein } M\text{\_Maximum.}
\end{aligned}
$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x$ hat kein M_Supremum$) \Rightarrow (x$ hat kein M_Maximum$)$.

□

38-19. Nun wird gezeigt, dass jede unten M_unbeschränkte Klasse
kein M_Minimum hat. Analoges gilt laut `b)` für oben unbeschränkte Klassen:

38-19(Satz)

`a)` *Aus “x unten M_unbeschränkt” folgt “x hat kein M_Minimum”.*

`b)` *Aus “x oben M_unbeschränkt” folgt “x hat kein M_Maximum”.*

Beweis **38-19** `a)` `VS` gleich x unten M_unbeschränkt.

`1:` Aus `VS` gleich “x unten M_unbeschränkt”
folgt via **36-23**: x hat kein M_Infimum.

`2:` Aus `1`“x hat kein M_Infimum”
folgt via **38-18**: x hat kein M_Minimum.

`b)` `VS` gleich x oben M_unbeschränkt.

`1:` Aus `VS` gleich “x oben M_unbeschränkt”
folgt via **36-23**: x hat kein M_Supremum.

`2:` Aus `1`“x hat kein M_Supremum”
folgt via **38-18**: x hat kein M_Maximum.

□

38-20. Wenn eine Klasse kein M_Minimum hat, dann sind untere M_Schranken keine Elemente dieser Klasse und, umgekehrt, jedes Element dieser Klasse ist keine untere M_Schranke dieser Klasse. Analoges gilt laut `cd)` für Klassen, die kein M_Maximum haben:

38-20(Satz)

`a)` *Aus "x hat kein M_Minimum" und "u untere M_Schranke von x"* *folgt* "$u \notin x$".

`b)` *Aus "x hat kein M_Minimum" und "$p \in x$"* *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".

`c)` *Aus "x hat kein M_Maximum" und "o obere M_Schranke von x"* *folgt* "$o \notin x$".

`d)` *Aus "x hat kein M_Maximum" und "$p \in x$"* *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$".

Beweis **38-20** `a)`
`VS` gleich $(x$ hat kein M_Minimum$) \wedge (u$ untere M_Schranke von $x)$.

`1:` Es gilt: $(u \in x) \vee (u \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $u \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich "… u untere M_Schranke von x" und aus `1.1.Fall` "$u \in x$" folgt via **38-1(Def)**: u ist M_Minimum von x.

`3:` Aus `VS` gleich "x hat kein M_Minimum…" folgt via **38-17**: u kein M_Minimum von x.

`4:` Aus `3` "u kein M_Minimum von x" folgt via **38-1(Def)**: $\neg(u$ ist M_Minimum von $x)$.

`5:` Es gilt `4` "$\neg(u$ ist M_Minimum von $x)$".
Es gilt `2` "u ist M_Minimum von x".
Ex falso quodlibet folgt: $u \notin x$.

`1.2.Fall` $u \notin x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $u \notin x$.

Beweis **38-20** `b)` `VS` gleich $(x \text{ hat kein } M\_\text{Minimum}) \wedge (p \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`2:` Es gilt: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$
$\vee(\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega)))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus `1`"$0 \neq x$" und
aus `2.1.Fall`"$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-3**: p untere $M_$Schranke von x.

`4:` Aus `3`"p untere $M_$Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$"
folgt via **38-1(Def)**: p ist $M_$Minimum von x.

`5:` Aus `VS` gleich "x hat kein $M_$Minimum$\ldots$"
folgt via **38-17**: p kein $M_$Minimum von x.

`6:` Aus `5`"p kein $M_$Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $\neg(p$ ist $M_$Minimum von $x)$.

`7:` Es gilt `6`"$\neg(p$ ist $M_$Minimum von $x)$".
Es gilt `4`"p ist $M_$Minimum von x".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

`2.2.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

Beweis **38-20** c)

1: $$(x \text{ hat kein } M\_\text{Maximum}) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x)$$

$$\overset{\mathbf{38-2}}{\Leftrightarrow} (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Minimum}) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x)$$

$$\overset{\mathbf{35-2}}{\Leftrightarrow} (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Minimum}) \wedge (o \text{ untere } M^{-1}\_\text{Schranke von } x)$$

$$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} o \notin x.$$

2: Aus 1
folgt: $$(x \text{ hat kein } M\_\text{Maximum}) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x) \Rightarrow (o \notin x).$$

d)

1: $$(x \text{ hat kein } M\_\text{Maximum}) \wedge (p \in x)$$

$$\overset{\mathbf{38-2}}{\Leftrightarrow} (x \text{ hat kein } M^{-1}\_\text{Minimum}) \wedge (p \in x)$$

$$\overset{\text{b)}}{\Rightarrow} \exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(p\_M^{-1}\_\Omega))$$

$$\overset{\mathbf{30-82}}{\Leftrightarrow} \exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p)).$$

2: Aus 1
folgt: $$(x \text{ hat kein } M\_\text{Maximum}) \wedge (p \in x) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))).$$

$\square$

38-21. Wenn alle Elemente von x *keine* unteren M_Schranken von x sind, dann hat x - laut `a)` - kein M_Minimum. Analoges gilt laut `b)` für Klassen, die kein M_Maximum haben:

38-21(Satz)

`a)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ *keine untere* M*_Schranke von* $x)$"

folgt "x *hat kein* M*_Minimum*".

`b)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ *keine obere* M*_Schranke von* $x)$"

folgt "x *hat kein* M*_Maximum*".

<u>Beweis **38-21**</u> `a)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ keine untere M_Schranke von $x)$.

`1:` Es gilt:
$(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x) \vee (\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots\Omega$ ist M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $(\Omega \in x) \wedge (\Omega$ untere M_Schranke von $x)$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ keine untere M_Schranke von $x)$"
folgt: Ω keine untere M_Schranke von x.

`4:` Aus `3`"Ω keine untere M_Schranke von x"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(\Omega$ untere M_Schranke von $x)$.

`5:` Es gilt `2`"$\ldots\Omega$ untere M_Schranke von x".
Es gilt `4`"$\neg(\Omega$ untere M_Schranke von $x)$".
Ex falso quodlibet folt: x hat kein M_Minimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$"
folgt via **38-1(Def)**: x hat kein M_Minimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x hat kein M_Minimum.

`b)`

`1:` $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ keine obere M_Schranke von $x)$

$\stackrel{\textbf{35-2}}{\Leftrightarrow} \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ keine untere M^{-1}_Schranke von $x)$

$\stackrel{\text{a)}}{\Rightarrow} x$ hat kein M^{-1}_Minimum

$\stackrel{\textbf{38-2}}{\Leftrightarrow} x$ hat kein M_Maximum.

`2:` Aus `1`
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ keine obere M_Schranke von $x)$
$\Rightarrow (x$ hat kein M_Maximum$)$.

□

38-22. Entsprechend folgenden Satzes hat die leere Menge weder ein M_Minimum noch ein M_Maximum:

<u>**38-22(Satz)**</u>

a) 0 *hat kein* M*_Minimum.*

b) 0 *hat kein* M*_Maximum.*

<u>Beweis **38-22**</u> `a)`

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von 0 $\vee$ $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von 0).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von 0.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Omega$ ist M_Minimum von 0"
folgt via **38-1(Def)**: $\Omega \in 0$.

`3:` Es gilt `2`"$\Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: 0 hat kein M_Minimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von 0).

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von 0)"
folgt via **38-1(Def)**: 0 hat kein M_Minimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: 0 hat kein M_Minimum.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: 0 hat kein M^{-1}_Minimum.

`2:` Aus `1`"0 hat kein M^{-1}_Minimum"
folgt via **38-2**: 0 hat kein M_Maximum.

$\square$

38-23. Im folgenden Satz wird fest gestellt, dass ein M_Minimum von $\{x\}$ notwendiger Weise gleich x ist und dass x in der Tat ein M_Minimum von $\{x\}$ ist, wenn x_M_x gilt. Analoges gilt laut `cd)` für M_Maxima von $\{x\}$:

38-23(Satz)

`a)` *Aus "min ist M_Minimum von* $\{x\}$*" folgt "*$min = x$*".*

`b)` *Aus "x_M_x" folgt "x ist M_Minimum von* $\{x\}$*".*

`c)` *Aus "max ist M_Maximum von* $\{x\}$*" folgt "*$max = x$*".*

`d)` *Aus "x_M_x" folgt "x ist M_Maximum von* $\{x\}$*".*

Beweis **38-23** `a)` `VS` gleich *min* ist M_Minimum von $\{x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "*min* ist M_Minimum von $\{x\}$"
folgt via **38-1(Def)**: $min \in \{x\}$.

`2:` Aus `1`"$min \in \{x\}$"
folgt via **1-6**: $min = x$.

Beweis **38-23** `b)` `VS` gleich x_M_x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x_M_x"
folgt via **30-2**: x Menge.

`2:` Aus `1.1`"x Menge"
folgt via **1-3**: `A1` | "$x \in \{x\}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \{x\}$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{x\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = x$.

`3:` Aus `2`"$\alpha = x$" und
aus `VS` gleich "x_M_x"
folgt: x_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{x\}) \Rightarrow (x\_M\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x \in \{x\}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{x\}) \Rightarrow (x\_M\_\alpha)$"
folgt via **38-6**: x ist M_Minimum von $\{x\}$.

`c)` `VS` gleich max ist M_Maximum von $\{x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "max ist M_Maximum von $\{x\}$"
folgt via **38-1(Def)**: $max \in \{x\}$.

`2:` Aus `1`"$max \in \{x\}$"
folgt via **1-6**: $max = x$.

`d)` `VS` gleich x_M_x.

`1:` Aus `VS` gleich "x_M_x"
folgt via **30-81**: $x\_M^{-1}\_x$.

`2:` Aus `1`"$x\_M^{-1}\_x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: x ist M^{-1}_Minimum von $\{x\}$.

`3:` Aus `2`"x ist M^{-1}_Minimum von $\{x\}$"
folgt via **38-2**: x ist M_Maximum von $\{x\}$.

$\square$

38-24. Falls r eine Relation in x ist und falls p ein r_Minimum von y ist (oder ein r_Maximum von p ist), dann gilt $p \in x$ und $y \subseteq x$:

38-24(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *p ist M_Minimum von y.* / *p ist M_Maximum von y.* *oder*

Dann folgt:

a) $p \in x$.

b) $0 \neq y \subseteq x$.

Beweis **38-24**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

2.1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:
$(p$ ist M_Minimum von $y) \vee (p$ ist M_Maximum von $y)$.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **38-24** ...

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` p ist M_Minimum von y.

`3.1:` Aus `2.1.1.Fall`“p ist M_Minimum von y”
folgt via **38-1(Def)**: $p \in y$.

`3.2:` Aus `2.1.1.Fall`“p ist M_Minimum von y”
folgt via **38-3**: $0 \neq y \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

`4:` Aus `3.2`“$\ldots y \subseteq \mathsf{ran}\, r \ldots$” und
aus `1`“$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$”
folgt via **0-6**: $y \subseteq x$.

`5.1:` Aus `3.2`“$0 \neq y \ldots$” und
aus `4`“$y \subseteq x$”
folgt: $0 \neq y \subseteq x$.

`5.2:` Aus `3.1`“$p \in y$” und
aus `4`“$y \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $p \in x$.

`6:` Aus `5.2` und
aus `5.1`
folgt: $(p \in x) \wedge (0 \neq y \subseteq x)$.

`2.1.2.Fall` p ist M_Maximum von y.

`3.1:` Aus `2.1.2.Fall`“p ist M_Maximum von y”
folgt via **38-1(Def)**: $p \in y$.

`3.2:` Aus `2.1.2.Fall`“p ist M_Maximum von y”
folgt via **38-4**: $0 \neq y \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

`4:` Aus `3.2`“$\ldots y \subseteq \mathsf{dom}\, r \ldots$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$”
folgt via **0-6**: $y \subseteq x$.

`5.1:` Aus `3.2`“$0 \neq y \ldots$” und
aus `4`“$y \subseteq x$”
folgt: $0 \neq y \subseteq x$.

`5.2:` Aus `3.1`“$p \in y$” und
aus `4`“$y \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $p \in x$.

`6:` Aus `5.2` und
aus `5.1`
folgt: $(p \in x) \wedge (0 \neq y \subseteq x)$.

...

<u>Beweis **38-24**</u> ...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$(p \in x) \wedge (0 \neq y \subseteq x)$"

`2.a):` Aus `A1`
folgt: $p \in x.$

`2.b):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq y \subseteq x.$

□

38-25. Entsprechend folgendem Satz ist, wenn r eine Relation in x ist, u genau dann eine untere r_Schranke von x, wenn u ein r_Infimum von x ist und dies ist genau dann der Fall, wenn u ein r_Minimum von x ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - iii) - ii)`:

38-25(Satz)

unter der Voraussetzung …

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

… sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *u untere r_Schranke von x.*

`ii)` *u ist r_Infimum von x.*

`iii)` *u ist r_Minimum von x.*

Beweis **38-25** `i) ⇒ iii)` `VS` gleich u untere r_Schranke von x.

`1:` Aus $\rightarrow$)“r Relation in x” und
aus `VS` gleich “u untere r_Schranke von x”
folgt via **37-1**: $u \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich “u untere r_Schranke von x” und
aus `1`“$u \in x$”
folgt via **38-1(Def)**: u ist r_Minimum von x.

`iii) ⇒ ii)` `VS` gleich u ist r_Minimum von x.

Aus `VS` gleich “u ist r_Minimum von x”
folgt via **38-3**: u ist r_Infimum von x.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich u ist r_Infimum von x.

Aus `VS` gleich “u ist r_Infimum von x”
folgt via **36-1(Def)**: u untere r_Schranke von x.

□

38-26. Entsprechend folgendem Satz ist, wenn r eine Relation in x ist, o genau dann eine obere r_Schranke von x, wenn o ein r_Supremum von x ist und dies ist genau dann der Fall, wenn o ein r_Maximum von x ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - iii) - ii)`:

38-26(Satz)

onter der Voraussetzung ...

$\rightarrow)$ *r Relation in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *o obere r_Schranke von x.*

`ii)` *o ist r_Supremum von x.*

`iii)` *o ist r_Maximum von x.*

Beweis **38-26** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich o obere r_Schranke von x.

`1:` Aus $\rightarrow)$ "r Relation in x" und
aus `VS` gleich "o obere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $o \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich "o obere r_Schranke von x" und
aus `1` "$o \in x$"
folgt via **38-1(Def)**: o ist r_Maximum von x.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich o ist r_Maximum von x.

Aus `VS` gleich "o ist r_Maximum von x"
folgt via **38-4**: o ist r_Supremum von x.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich o ist r_Supremum von x.

Aus `VS` gleich "o ist r_Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: o obere r_Schranke von x.

□

38-27. Entsprechend folgendem Satz ist, wenn r eine Relation in x ist, x genau dann unten r_unbeschränkt, wenn x kein r_Infimum hat und dies ist genau dann der Fall, wenn x kein r_Minimum hat:

38-27(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *x unten r_unbeschränkt.*

`ii)` *x hat kein r_Infimum.*

`iii)` *x hat kein r_Minimum.*

Beweis **38-27** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich x unten r_unbeschränkt.

Aus `VS` gleich "x unten r_unbeschränkt"
folgt via **36-23**: x hat kein r_Infimum.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich x hat kein r_Infimum.

Aus `VS` gleich "x hat kein r_Infimum"
folgt via **38-18**: x hat kein r_Minimum.

<u>Beweis</u> **38-27** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich x hat kein r_Minimum.

`1:` Es gilt:
$(\exists\Omega : \Omega$ untere r_Schranke von $x) \vee (\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere r_Schranke von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ untere r_Schranke von x.

`2:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus `1.1.Fall` "... Ω untere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $\Omega \in x$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "x hat kein r_Minimum" und
aus `1.1.Fall` "... Ω untere r_Schranke von x"
folgt via **38-20**: $\Omega \notin x$.

`4:` Es gilt `3` "$\Omega \notin x$".
Es gilt `2` "$\Omega \in x$".
Ex falso quodlibet folgt: x unten r_unbeschränkt.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere r_Schranke von $x)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(\exists\Omega : \Omega$ untere r_Schranke von $x)$"
folgt via **35-1(Def)**: x unten r_unbeschränkt.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x unten r_unbeschränkt.

□

38-28. Entsprechend folgendem Satz ist, wenn r eine Relation in x ist, x genau dann oben r_unbeschränkt, wenn x kein r_Supremum hat und dies ist genau dann der Fall, wenn x kein r_Maximum hat:

38-28(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) *r Relation in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *x oben r_unbeschränkt.*

`ii)` *x hat kein r_Supremum.*

`iii)` *x hat kein r_Maximum.*

Beweis **38-28** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich x oben r_unbeschränkt.

Aus `VS` gleich "x oben r_unbeschränkt"
folgt via **36-23**: x hat kein r_Supremum.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich x hat kein r_Supremum.

Aus `VS` gleich "x hat kein r_Supremum"
folgt via **38-18**: x hat kein r_Maximum.

Beweis **38-28** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x hat kein r_Maximum.

`1:` Es gilt:
$(\exists\Omega : \Omega \text{ obere } r\text{\_Schranke von } x) \vee (\neg(\exists\Omega : \Omega \text{ obere } r\text{\_Schranke von } x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ obere r_Schranke von x.

`2:` Aus →) "r Relation in x" und
aus `1.1.Fall` "... Ω obere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $\Omega \in x$.

`3:` Aus →) "x hat kein r_Maximum" und
aus `1.1.Fall` "... Ω obere r_Schranke von x"
folgt via **38-20**: $\Omega \notin x$.

`4:` Es gilt `3` "$\Omega \notin x$".
Es gilt `2` "$\Omega \in x$".
Ex falso quodlibet folgt: x oben r_unbeschränkt.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere r_Schranke von $x)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere r_Schranke von $x)$"
folgt via **35-1(Def)**: x oben r_unbeschränkt.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x oben r_unbeschränkt.

□

μin **ist** M**_minimales Element von** x.
μin **ist** M**_maximales Element von** x.
p **kein** M**_minimales Element von** x.
p **kein** M**_maximales Element von** x.
x **hat kein** M**_minimales Element**.
x **hat kein** M**_maximales Element**.
Satz vom minimalen Element.
Satz vom maximalen Element.

Ersterstellung: 20/02/06 **Letzte Änderung: 21/05/11**

39-1. In der folgenden Definition werden **(keine)** M**_minimalen** und **(keine)** M**_maximalen Elemente einer Klasse** x in die Essays eingeführt. Auch wird fest gelegt, was es heißt, **kein** M**_minimales** und **kein** M**_maximales Element zu haben**. Die Begriffsbildungen sind ähnlich zu denen der unteren und oberen M_Schranken, der M_Infima und M_Suprema und der M_Minima und M_Maxima:

...

39-1.

...

39-1(Definition)

1) "μin **ist** M**_minimales Element von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mu in \in x.$$
$$\wedge$$
$$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha).$$

2) "μax **ist** M**_maximales Element von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mu ax \in x.$$
$$\wedge$$
$$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\mu ax\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu ax).$$

3) "p **kein** M**_minimales Element von** x" genau dann, wenn gilt:

$\neg$(p ist M_minimales Element von x).

4) "p **kein** M**_maximales Element von** x" genau dann, wenn gilt:

$\neg$(p ist M_maximales Element von x).

5) "x **hat kein** M**_minimales Element**" genau dann, wenn gilt:

$\neg$($\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x).

6) "x **hat kein** M**_maximales Element**" genau dann, wenn gilt:

$\neg$($\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x).

39-2. Mit dem folgenden Satz werden, hauptsächlich um spätere Beweise abzukürzen, die in **39-1(Def)** rund um M_minimale und M_maximale Elemente platzierten Begriffe in Beziehung zu den korrespondierenden Begriffen bezüglich M^{-1} gesetzt:

39-2(Satz)

a) *"μin ist M_minimales Element von x"*
genau dann, wenn "μin ist M^{-1}_maximales Element von x".

b) *"μax ist M_maximales Element von x"*
genau dann, wenn "μax ist M^{-1}_minimales Element von x".

c) *"p kein M_minimales Element von x"*
genau dann, wenn "p kein M^{-1}_maximales Element von x".

d) *"p kein M_maximales Element von x"*
genau dann, wenn "p kein M^{-1}_minimales Element von x".

e) *"x hat kein M_minimales Element"*
genau dann, wenn"x hat kein M^{-1}_maximales Element".

f) *"x hat kein M_maximales Element"*
genau dann, wenn"x hat kein M^{-1}_minimales Element".

Beweis **39-2** a)

1: μin ist M_minimales Element von x

$$\stackrel{\textbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (\mu in \in x) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$$

$$\stackrel{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} (\mu in \in x) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\mu in\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$$

$$\stackrel{\textbf{30-81}}{\Leftrightarrow} (\mu in \in x) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\mu in\_M^{-1}\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M^{-1}\_\mu in)$$

$$\stackrel{\textbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \mu in \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } x.$$

2: Aus 1 folgt: μin ist M_minimales Element von x
$\Leftrightarrow$ (μin ist M^{-1}_maximales Element von x).

Beweis **39-2** b)

1: μax ist M_maximales Element von x

$\overset{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (\mu ax \in x) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\mu ax\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu ax)$

$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} (\mu ax \in x) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\mu ax)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu ax)$

$\overset{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow} (\mu ax \in x) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\mu ax)) \Rightarrow (\mu ax\_M^{-1}\_\alpha)$

$\overset{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow}$ μax ist M^{-1}_minimales Element von x.

2: Aus 1 folgt: μax ist M_maximales Element von x
$\Leftrightarrow$ (μax ist M^{-1}_minimales Element von x).

c)

1: p kein M_minimales Element von x

$\overset{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg$($p$ ist M_minimales Element von x)

$\overset{\mathbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg$($p$ ist M^{-1}_maximales Element von x)

$\overset{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow}$ p kein M^{-1}_maximales Element von x.

2: Aus 1 folgt: p kein M_minimales Element von x
$\Leftrightarrow$ (p kein M^{-1}_maximales Element von x).

d)

1: p kein M_maximales Element von x

$\overset{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg$($p$ ist M_maximales Element von x)

$\overset{\mathbf{b)}}{\Leftrightarrow} \neg$($p$ ist M^{-1}_minimales Element von x)

$\overset{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow}$ p kein M^{-1}_minimales Element von x.

2: Aus 1 folgt: p kein M_maximales Element von x
$\Leftrightarrow$ (p kein M^{-1}_minimales Element von x).

<u>Beweis</u> **39-2** `e)`

`1:` x hat kein M_minimales Element

$$\stackrel{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x)$$

$$\stackrel{\mathtt{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_maximales Element.}$$

`2:` Aus `1` folgt: x hat kein M_minimales Element

$$\Leftrightarrow (x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_maximales Element}).$$

`f)`

`1:` x hat kein M_maximales Element

$$\stackrel{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } x)$$

$$\stackrel{\mathtt{b)}}{\Leftrightarrow} \neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } x)$$

$$\stackrel{\mathbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_minimales Element.}$$

`2:` Aus `1` folgt: x hat kein M_maximales Element

$$\Leftrightarrow (x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_minimales Element}).$$

□

39-3. Im folgenden Satz werden zwei Eigenschaften von M_minimalen Elementen angegeben:

<u>**39-3(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) μin *ist* M_*minimales Element von* x.

Dann folgt:

`a)` μin *Menge.*

`b)` $0 \neq x$.

<u>Beweis **39-3**</u> `ab)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "μin ist M_minimales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in x$.

`2.a):` Aus `1` "$\mu in \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: μin Menge.

`2.b):` Aus `1` "$\mu in \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

$\square$

39-4. Im folgenden Satz werden zwei Eigenschaften von M_maximalen Elementen angegeben:

39-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) μax *ist* M*_maximales Element von* x.

Dann folgt:

a) μax *Menge.*

b) $0 \neq x$.

Beweis **39-4** ab)

1: Aus $\rightarrow$)"μax ist M_maximales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu ax \in x$.

2.a): Aus 1"$\mu ax \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: μax Menge.

2.b): Aus 1"$\mu ax \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

□

39-5. Im folgenden Satz wird gesagt, dass im Fall $x \cap \mathsf{dom}\, M = 0$ jedes Element μ aus x ein M_minimales Element von x ist:

39-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \cap \mathsf{dom}\, M = 0$.

$\rightarrow)$ $\mu \in x$.

Dann folgt "μ ist M_minimales Element von x".

Beweis **39-5**

`Thema1.1` $(\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_\mu)$.

2: Aus `Thema1.1` "$\ldots \alpha\_M\_\mu$"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x \ldots$" und
aus 2 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3 "$\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, M$" und
aus $\rightarrow)$ "$x \cap \mathsf{dom}\, M = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

5: Es gilt 4 "$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: μ_M_α.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_\mu)) \Rightarrow (\mu\_M\_\alpha)$"

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$\mu \in x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_\mu)) \Rightarrow (\mu\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: μ ist M_minimales Element von x.

□

39-6. Im folgenden Satz wird gesagt, dass im Fall $x \cap \mathsf{ran}\, M = 0$ jedes Element μ aus x ein M_maximales Element von x ist:

39-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \cap \mathsf{ran}\, M = 0$.

$\rightarrow)$ $\mu \in x$.

Dann folgt "μ ist M_maximales Element von x".

Beweis **39-6**

`Thema1.1` $(\alpha \in x) \wedge (\mu\_M\_\alpha)$.

2: Aus `Thema1.1`"$\ldots \mu\_M\_\alpha$"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x \ldots$" und
aus 2"$\alpha \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap \mathsf{ran}\, M$.

4: Aus 3"$\alpha \in x \cap \mathsf{ran}\, M$" und
aus $\rightarrow)$"$x \cap \mathsf{ran}\, M = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

5: Es gilt 4"$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: α_M_μ.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\mu\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu)$"

1.2: Aus $\rightarrow)$"$\mu \in x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\mu\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu)$"
folgt via **39-1(Def)**: μ ist M_maximales Element von x.

□

39-7. Wenn μin ein M_minimales Element von x ist und falls $\mu in \in y \subseteq x$ gilt, dann folgt via folgendem Satz, dass μin auch ein M_minimales Element von y ist. Analoges gilt laut `b)` für M_maximale Elemente:

39-7(Satz)

`a)` *Aus "$\mu in \in y \subseteq x$" und "μin ist M_minimales Element von x" folgt "μin ist M_minimales Element von y".*

`b)` *Aus "$\mu ax \in y \subseteq x$" und "μax ist M_maximales Element von x" folgt "μax ist M_maximales Element von y".*

Beweis **39-7** `a)`

`VS` gleich $(\mu in \in y \subseteq x) \wedge (\mu in$ ist M_minimales Element von $x)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in y) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mu in$ ist M_minimales Element von x",
aus 2"$\alpha \in x$" und
aus `Thema1.1`"$\ldots \alpha\_M\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: μin_M_α.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : ((\alpha \in y) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)\text{”}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mu in \in y \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in y) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: μin ist M_minimales Element von y.

`b)`

`1:` $(\mu ax \in y \subseteq x) \wedge (\mu ax$ ist M_maximales Element von $x)$

$\stackrel{\textbf{39-2}}{\Leftrightarrow} (\mu ax \in y \subseteq x) \wedge (\mu ax$ ist M^{-1}_minimales Element von $x)$

$\stackrel{\text{a)}}{\Rightarrow} \mu ax$ ist M^{-1}_minimales Element von y

$\stackrel{\textbf{39-2}}{\Leftrightarrow} \mu ax$ ist M_maximales Element von y.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\mu ax \in y \subseteq x) \wedge (\mu ax$ ist M_maximales Element von $x)$
$\Rightarrow (\mu ax$ ist M_maximales Element von $y)$.

$\square$

39-8. Mit dem folgenden Satz wird ein definitions-orientierter Überblick gegeben, was es heißt, *kein* M_minimales Element von x zu sein. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - d) - e)`:

39-8(Satz)

a) *Aus "$p \notin x$" folgt "p kein M_minimales Element von x".*

b) *Aus "$q \in x$" und "q_M_p" und "$\neg(p\_M\_q)$" folgt "p kein M_minimales Element von x".*

c) *Aus "p kein M_minimales Element von x" folgt "$p \notin x$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".*

d) *Aus "$p \in x$" und "p kein M_minimales Element von x" folgt "$\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$".*

e) *Aus "$\forall\alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$" und "$p$ kein M_minimales Element von x" folgt "$p \notin x$".*

Beweis **39-8** `ac)`

`1:` p kein M_minimales Element von x

$$\stackrel{\textbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(p \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } x)$$

$$\stackrel{\textbf{39-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg((p \in x) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)))$$

$$\Leftrightarrow ((p \notin x) \vee (\neg(\forall\alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))))$$

$$\Leftrightarrow ((p \notin x) \vee (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega)))).$$

`2.a):` Aus `1` folgt:

$$(p \notin x) \Rightarrow (p \text{ kein } M\_\text{minimales Element von } x).$$

`2.c):` Aus `1` folgt:

$$p \text{ kein } M\_\text{minimales Element von } x$$
$$\Rightarrow ((p \notin x) \vee (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega)))).$$

<u>Beweis **39-8**</u> `b)` `VS` gleich $(q \in x) \wedge (q\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_q))$.

`1:` Es gilt: p ist M_minimales Element von x
$\vee(\neg(p$ ist M_minimales Element von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_minimales Element von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p ist M_minimales Element von x",
aus `VS` gleich "$q \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_M\_p \ldots$"
folgt via **39-1(Def)**: p_M_q.

`3:` Es gilt `2`"p_M_q".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots \neg(p\_M\_q)$".
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_minimales Element von x.

`1.2.Fall` $\neg(p$ ist M_minimales Element von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(p$ ist M_minimales Element von $x)$"
folgt via **39-1(Def)**: p kein M_minimales Element von p.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_minimales Element von x.

`d)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p$ kein M_minimales Element von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ kein M_minimales Element von x"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$(p \notin x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))).$$

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$" und
aus `1`"$(p \notin x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega)))$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_p) \wedge (\neg(p\_M\_\Omega))$.

<u>Beweis **39-8**</u> `e)` `VS` gleich
$(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)) \wedge (p \text{ kein } M\text{\_minimales Element von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ kein M_minimales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(p \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(p \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg((p \in x) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)))$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$" und
aus `3`"$(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)))$"
folgt: $\neg(p \in x)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $p \notin x$.

$\square$

39-9. Mit dem folgenden Satz wird ein definitions-orientierter Überblick gegeben, was es heißt, *kein* M_maximales Element von x zu sein:

<u>39-9(Satz)</u>

a) *Aus* "$p \notin x$" *folgt* "p *kein* M*_maximales Element von* x".

b) *Aus* "$q \in x$" *und* "p_M_q" *und* "$\neg(q\_M\_p)$"
folgt "p *kein* M*_maximales Element von* x".

c) *Aus* "p *kein* M*_maximales Element von* x"
folgt "$p \notin x$" *oder* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$".

d) *Aus* "$p \in x$" *und* "p *kein* M*_maximales Element von* x"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$".

e) *Aus* "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
und "p *kein* M*_maximales Element von* x"
folgt "$p \notin x$".

<u>Beweis</u> **<u>39-9</u>** `a)` `VS` gleich $p \notin x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin x$"
folgt via **39-8**: p kein M^{-1}_minimales Element von x.

`2:` Aus `1`"p kein M^{-1}_minimales Element von x"
folgt via **39-2**: p kein M_maximales Element von x.

`b)` `VS` gleich $(q \in x) \wedge (p\_M\_q) \wedge (\neg(q\_M\_p))$..

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q \ldots$"
folgt via **30-81**: $q\_M^{-1}\_p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(q\_M\_p)$"
folgt via **30-82**: $\neg(p\_M^{-1}\_q)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$q \in x \ldots$",
aus `1.1`"$q\_M^{-1}\_p$" und
aus `1.2`"$\neg(p\_M^{-1}\_q)$"
folgt via **39-8**: p kein M^{-1}_minimales Element von x.

`3:` Aus `2`"p kein M^{-1}_minimales Element von x"
folgt via **39-2**: p kein M_maximales Element von x.

<u>Beweis **39-9**</u> `c)` `VS` gleich p kein M_maximales Element von x.

`1:` Aus `VS` gleich "... p kein M_maximales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(p$ ist M_maximales Element von $x)$.

`2:` Aus `1` "$\neg(p$ ist M_maximales Element von $x)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg((p \in x) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(p \notin x) \vee (\neg(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(p \notin x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p)))$.

`d)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (p$ kein M_maximales Element von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... p kein M_maximales Element von x"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$(p \notin x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p)))$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in x$" und
aus `1` "$(p \notin x) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p)))$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_p))$.

`e)` `VS` gleich
$(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)) \wedge (p$ kein M_maximales Element von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... p kein M_maximales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(p$ ist M_maximales Element von $x)$.

`2:` Aus `1` "$\neg(p$ ist M_maximales Element von $x)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg((p \in x) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha\_M)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$" und
aus `3` "$(\neg(p \in x)) \vee (\neg(\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)))$"
folgt: $\neg(p \in x)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $p \notin x$.

$\square$

39-10. Im folgenden Satz wird fest gehalten, dass wenn eine Klasse x kein M_minimales Element hat, dann auch jede Klasse kein M_minimales Element von x ist. Analoges gilt laut `b)` für Klassen, die kein M_maximales Element haben:

39-10(Satz)

`a)` *Aus "x hat kein M_minimales Element"*
folgt "p kein M_minimales Element von x".

`b)` *Aus "x hat kein M_maximales Element"*
folgt "p kein M_maximales Element von x".

<u>Beweis **39-10**</u> `a)` `VS` gleich x hat kein M_minimales Element.

`1:` Es gilt: p ist M_minimales Element von x
$\vee$
$\neg(p$ ist M_minimales Element von $x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_minimales Element von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p ist M_minimales Element von x"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x.

`3:` Aus `VS` gleich "x hat kein M_minimales Element"
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $x)$.

`4:` Es gilt `2`"$\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x".
Es gilt `3`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $x)$".
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_minimales Element von x.

`1.2.Fall` $\neg(p$ ist M_minimales Element von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(p$ ist M_minimales Element von $x)$"
folgt via **39-1(Def)**: p kein M_minimales Element von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
p kein M_minimales Element von x.

`b)` `VS` gleich x hat kein M_maximales Element.

`1:` Aus `VS` gleich "x hat kein M_maximales Element"
folgt via **39-2**: x hat kein M^{-1}_minimales Element.

`2:` Aus `2`"x hat kein M^{-1}_minimales Element"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
p kein M^{-1}_minimales Element von x.

`3:` Aus `2`"p kein M^{-1}_minimales Element von x"
folgt via **39-2**: p kein M_maximales Element von x.

□

39-11. Im folgenden Satz wird eine definitions-nahe Bedingung für "x hat kein M_minimales Element" angegeben. Implizit wird hier fest gehalten, dass die Suche nach M_minimalen Elementen von x - natürlich - auf x beschränkt werden kann. Ein analoges Resultat gilt laut `b)` auch für Klassen, die kein M_maximales Element haben:

39-11(Satz)

`a)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$" *folgt "$x$ hat kein M_minimales Element".*

`b)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha\_M\_\Omega) \wedge (\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$" *folgt "$x$ hat kein M_maximales Element".*

<u>Beweis **39-11**</u> `a)`
`VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$.

`1:` Es gilt: $\exists\Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von x
$\vee$
$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von $x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Psi$ ist M_minimales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\Psi \in x$.

`3:` Aus `2`"$\Psi \in x$" und
aus `VS` gleich
"$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_\alpha) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega\_M\_\Psi) \wedge (\neg(\Psi\_M\_\Omega))$.

`4:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Psi$ ist M_minimiales Element von x",
aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$"
aus `3`"$\ldots \Omega\_M\_\Psi \ldots$" und
folgt via **39-1(Def)**: Ψ_M_Ω.

`5:` Es gilt `4`"Ψ_M_Ω".
Es gilt `3`"$\neg(\Psi\_M\_\Omega)$".
Ex falso quodlibet folgt:
x hat kein M_minimales Element.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von $x)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von $x)$"
folgt via **39-1(Def)**: x hat kein M_minimales Element.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
x hat kein M_minimales Element.

<u>Beweis **39-11** `b)`</u>

`1:` $$\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\alpha\_M\_\Omega)\wedge(\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$$

$$\stackrel{\mathbf{30-81}}{\Leftrightarrow}\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\Omega\_M^{-1}\_\alpha)\wedge(\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$$

$$\stackrel{\mathbf{30-82}}{\Leftrightarrow}\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\Omega\_M^{-1}\_\alpha)\wedge(\neg(\alpha\_M^{-1}\_\Omega)))$$

$$\stackrel{\mathtt{a)}}{\Rightarrow} x \text{ hat kein } M^{-1}\text{\_minimales Element}$$

$$\stackrel{\mathbf{39-2}}{\Leftrightarrow} x \text{ hat kein } M\text{\_maximales Element.}$$

`2:` Aus `1` folgt:
$$\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\alpha\_M\_\Omega)\wedge(\neg(\Omega\_M\_\alpha)))$$
$$\Rightarrow(x \text{ hat kein } M\text{\_maximales Element}).$$

□

39-12. Da Klassen mit M_minimalen Elementen stets nicht leer sind, ist das folgende Resultat, wonach 0 kein M_minimales Element hat, wenig verblüffend. Laut `b)` hat 0 auch kein M_maximales Element:

39-12(Satz)

`a)` 0 *hat kein M_minimales Element.*

`b)` 0 *hat kein M_maximales Element.*

Beweis **39-12** `a)`

`Thema1` $\alpha \in 0$.

`2:` Es gilt `Thema1`"$\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt:
$$\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\Omega\_M\_\alpha) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)).$$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\Omega\_M\_\alpha) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\Omega)))$.

Konsequenz via **39-11**: 0 hat kein M_minimales Element.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: 0 hat kein M^{-1}_minimales Element.

`2:` Aus `1`"0 hat kein M^{-1}_minimales Element"
folgt via **39-2**: 0 hat kein M_maximales Element.

□

39-13. Da M_minimale Elemente von x stets Elemente von x sind und Singelton x aus höchstens einem Element - nämlich x - besteht, ist die folgende Aussage wenig überraschend:

39-13(Satz)

a) *Aus "μin ist M_minimales Element von $\{x\}$"*
folgt "$\mu in = x$" und "x Menge".

b) *Aus "μax ist M_maximales Element von $\{x\}$"*
folgt "$\mu ax = x$" und "x Menge".

Beweis **39-13** a) VS gleich μin ist M_minimales Element von $\{x\}$.

1.1: Aus VS gleich "μin ist M_minimales Element von $\{x\}$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in \{x\}$.

1.2: Aus VS gleich "μin ist M_minimales Element von $\{x\}$"
folgt via **39-3**: μin Menge.

2: Aus 1.1"$\mu in \in \{x\}$"
folgt via **1-6**: $\mu in = x$.

3: Aus 2"$\mu in = x$" und
aus 1.2"μin Menge"
folgt: x Menge.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $(\mu in = x) \wedge (x \text{ Menge})$.

b) VS gleich μax ist M_maximales Element von $\{x\}$.

1: Aus VS gleich "μax ist M_maximales Element von $\{x\}$"
folgt via **39-2**: μax ist M^{-1}_minimales Element von $\{x\}$.

2: Aus 1"μax ist M^{-1}_minimales Element von $\{x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(\mu ax = x) \wedge (x \text{ Menge})$.

□

39-14. Laut folgendem Satz ist x genau dann eine Menge,
wenn x ein M_minimales Element von Singelton x ist - und dies ist genau dann der Fall, wenn $\{x\}$ überhaupt ein M_minimales Element hat - und dies ist äquivalent dazu, dass x ein M_maximales Element von $\{x\}$ ist - und dies ist genau dann der Fall, wenn $\{x\}$ überhaupt ein M_maximales Element hat. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - ii) - iv) - iii) - v) - i)`:

39-14(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Menge.*

`ii)` x *ist* M*_minimales Element von* $\{x\}$.

`iii)` x *ist* M*_maximales Element von* $\{x\}$.

`iv)` $\exists\Omega : \Omega$ *ist* M*_minimales Element von* $\{x\}$.

`v)` $\exists\Omega : \Omega$ *ist* M*_maximales Element von* $\{x\}$.

Beweis **39-14** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **1-3**: $x \in \{x\}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in \{x\}) \wedge (\alpha\_M\_x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{x\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\alpha = x$.

`3:` Aus `2`"$\alpha = x$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_x$"
folgt: x_M_x.

`4:` Aus `3`"x_M_x" und
aus `2`"$\alpha = x$"
folgt: x_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{x\}) \wedge (\alpha\_M\_x)) \Rightarrow (x\_M\_\alpha)$"

`2:` Aus `1.1`"$x \in \{x\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{x\}) \wedge (\alpha\_M\_x)) \Rightarrow (x\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: x ist M_minimales Element von $\{x\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich x ist M_minimales Element von $\{x\}$.

Aus `VS` gleich "x ist M_minimales Element von $\{x\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $\{x\}$.

Beweis **39-14** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $\{x\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Omega$ ist M_minimales Element von $\{x\}$"
folgt via **39-1(Def)**: $\Omega \in \{x\}$.

`2:` Aus `1.1`"$\Omega \in \{x\}$"
folgt via **1-6**: $\Omega = x$.

`3:` Aus `1.1`"$\Omega \in \{x\}$" und
aus `2`"$\Omega = x$"
folgt: `A1` | "$x \in \{x\}$"

> `Thema1.2` $(\alpha \in \{x\}) \wedge (x\_M\_\alpha)$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{x\} \ldots$"
> folgt via **1-6**: $\alpha = x$.
>
> `3:` Aus `2`"$\alpha = x$" und
> aus `Thema1.2`"$\ldots x\_M\_\alpha$"
> folgt: x_M_x.
>
> `4:` Aus `2`"$\alpha = x$" und
> aus `3`"x_M_x"
> folgt: α_M_x.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall\alpha : ((\alpha \in \{x\}) \wedge (x\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_x)$"

`2:` Aus `A1` gleich "$x \in \{x\}$" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha : ((\alpha \in \{x\}) \wedge (x\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_x)$"
folgt via **39-1(Def)**: x ist M_maximales Element von $\{x\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich x ist M_maximales Element von $\{x\}$.

Aus `VS` gleich "x ist M_maximales Element von $\{x\}$"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\{x\}$.

<u>Beweis</u> **39-14** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\exists\Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\{x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ ist M_maximales Element von $\{x\}$"
folgt via **39-1(Def)**: $\Omega \in \{x\}$.

`2:` Aus `1`"$\Omega \in \{x\}$"
folgt via **1-6**: x Menge.

$\square$

39-15. Im folgenden Satz werden zwei hinreichende Bedingungen dafür gegeben, dass, unter der Voraussetzung, dass μin ein M_minimales Element von x ist, die Klasse μin auch ein M_minimales Element von $\{p\} \cup x$ ist:

39-15(Satz)

a) *Aus "μin ist M_minimales Element von x" und "μin_M_p" folgt "μin ist M_minimales Element von $\{p\} \cup x$".*

b) *Aus "μin ist M_minimales Element von x" und "$\neg(p$_M_$\mu in)$" folgt "μin ist M_minimales Element von $\{p\} \cup x$".*

Beweis **39-15** `a)` `VS` gleich $(\mu in \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x) \wedge (\mu in\_M\_p)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "μin ist M_minimales Element von $x \ldots$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in x$.

`2:` Aus `1.1`"$\mu in \in x$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$\mu in \in \{p\} \cup x$"

`Thema1.2` $(\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{p\} \cup x \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p\}) \vee (\alpha \in x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \{p\}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mu in\_M\_p$" und
aus `3`"$\alpha = p$"
folgt: μin_M_α.

`2.2.Fall` $\alpha \in x$.

Aus `VS` gleich "μin ist M_minimales Element von $x \ldots$",
aus `2.2.Fall`"$\alpha \in x$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: μin_M_α.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: μin_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mu in \in \{p\} \cup x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: μin ist M_minimales Element von $\{p\} \cup x$.

<u>Beweis **39-15**</u> `b)` `VS` gleich $\neg(p\_M\_\mu in)$.

`1.1:` Aus →) "μin ist M_minimales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in x$.

`2:` Aus `1.1` "$\mu in \in x$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$\mu in \in \{p\} \cup x$"

`Thema1.2` $(\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{p\} \cup x \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p\}) \vee (\alpha \in x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \{p\}$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

`4:` Aus `3` "$\alpha = p$" und
aus `Thema1.2` "$\ldots \alpha\_M\_\mu in$"
folgt: $p\_M\_\mu in$.

`5:` Es gilt `4` "$p\_M\_\mu in$".
Es gilt `VS` gleich "$\neg(p\_M\_\mu in)$".
Ex falso quodlibet folgt: μin_M_α.

`2.2.Fall` $\alpha \in x$.

Aus →) "μin ist M_minimales Element von x",
aus `2.2.Fall` "$\alpha \in x$" und
aus `Thema1.2` "$\ldots \alpha\_M\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: μin_M_α.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: μin_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"

...

<u>Beweis</u> **39-15** `b)` `VS` gleich $\neg(p\_M\_\mu in)$.

...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mu in \in \{p\} \cup x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: μin ist M_minimales Element von $\{p\} \cup x$.

□

39-16. Im folgenden Satz werden zwei hinreichende Bedingungen dafür gegeben, dass, unter der Voraussetzung, dass μax ein M_maximales Element von x ist, die Klasse μax auch ein M_maximales Element von $\{p\} \cup x$ ist:

39-16(Satz)

a) *Aus "μax ist M_maximales Element von x" und "$p\_M\_\mu ax$" folgt "μax ist M_maximales Element von $\{p\} \cup x$".*

b) *Aus "μax ist M_maximales Element von x" und "$\neg(\mu ax\_M\_p)$" folgt "μax ist M_maximales Element von $\{p\} \cup x$".*

Beweis **39-16** a) VS gleich (μax ist M_maximales Element von x) $\wedge$ ($p\_M\_\mu ax$).

1.1: Aus VS gleich "μax ist M_maximales Element von $x \ldots$"
folgt via **39-2**: μax ist M^{-1}_minimales Element von x.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots p\_M\_\mu ax$"
folgt via **30-81**: $\mu ax\_M^{-1}\_p$.

2: Aus 1.1 "μax ist M^{-1}_minimales Element von x" und
aus 1.2 "$\mu ax\_M^{-1}\_p$"
folgt via **39-15**: μax ist M^{-1}_minimales Element von $\{p\} \cup x$.

3: Aus 2 "μax ist M^{-1}_minimales Element von $\{p\} \cup x$"
folgt via **39-2**: μax ist M_maximales Element von $\{p\} \cup x$.

b) VS gleich (μax ist M_maximales Element von x) $\wedge$ ($\neg(\mu ax\_M\_p)$).

1.1: Aus VS gleich "μax ist M_maximales Element von $x \ldots$"
folgt via **39-2**: μax ist M^{-1}_minimales Element von x.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \neg(\mu ax\_M\_p)$"
folgt via **30-82**: $\neg(p\_M^{-1}\_\mu ax)$.

2: Aus 1.1 "μax ist M^{-1}_minimales Element von x" und
aus 1.2 "$\neg(p\_M^{-1}\_\mu ax)$"
folgt via **39-15**: μax ist M^{-1}_minimales Element von $\{p\} \cup x$.

3: Aus 2 "μax ist M^{-1}_minimales Element von $\{p\} \cup x$"
folgt via **39-2**: μax ist M_maximales Element von $\{p\} \cup x$.

□

39-17. In Weiterführung von **39-15** und in Vorbereitung des **Satzes vom minimalen Element** wird nun gezeigt, dass wenn M transitiv ist, wenn $p\_M\_\mu in$ gilt und wenn μin ein M_minimales Element von x ist, folgt, dass p ein M_minimales Element von $\{p\} \cup x$ ist:

39-17(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *μin ist M_minimales Element von x.*

$\rightarrow$) *$p\_M\_\mu in$.*

Dann folgt "p ist M_minimales Element von $\{p\} \cup x$".

Beweis **39-17**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$p\_M\_\mu in$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `1.1` "p Menge"
folgt via **2-28**: `A1` | "$p \in \{p\} \cup x$"

...

Beweis **39-17**

...

`Thema1.2` $(\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_p)$.

2: Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{p\} \cup x \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p\}) \vee (\alpha \in x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \{p\}$.

3: Aus `2.1.Fall`"$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

4: Aus 3"$\alpha = p$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_p$"
folgt: p_M_p.

5: Aus 4"p_M_p" und
aus 3"$\alpha = p$"
folgt: p_M_α.

`2.2.Fall` $\alpha \in x$.

3: Aus →) "M transitiv",
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_p$" und
aus →) "$p\_M\_\mu in$"
folgt via **30-38**: $\alpha\_M\_\mu in$.

4: Aus →) "μin ist M_minimales Element von x",
aus `2.2.Fall`"$\alpha \in x$" und
aus 3"$\alpha\_M\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: μin_M_α.

5: Aus →) "M transitiv",
aus →) "$p\_M\_\mu in$" und
aus 4"μin_M_α"
folgt via **30-38**: p_M_α.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

...

<u>Beweis **39-17**</u>

...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$p \in \{p\} \cup x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{p\} \cup x) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: p ist M_minimales Element von $\{p\} \cup x$.

□

39-18. In Weiterführung von **39-15** und in Vorbereitung des **Satzes vom maximalen Element** wird nun gezeigt, dass wenn M transitiv ist, wenn μax_M_p gilt und wenn μax ein M_maximales Element von x ist, folgt, dass p ein M_maximales Element von $\{p\} \cup x$ ist:

<u>**39-18(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *μax ist M_maximales Element von x.*

$\rightarrow$) *μax_M_p.*

Dann folgt "p ist M_maximales Element von $\{p\} \cup x$".

<u>Beweis **39-18**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"M transitiv"
folgt via **30-83**: M^{-1} transitiv.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"μax ist M_maximales Element von x"
folgt via **39-2**: μax ist M^{-1}_minimales Element von x.

`1.3:` Aus $\rightarrow$)"μax_M_p"
folgt via **30-81**: $p\_M^{-1}\_\mu ax$.

`2:` Aus `1.1`"M^{-1} transitiv",
aus `1.2`"μax ist M^{-1}_minimales Element von x" und
aus `1.3`"$p\_M^{-1}\_\mu ax$"
folgt via **39-17**: p ist M^{-1}_minimales Element von $\{p\} \cup x$.

`3:` Aus `2`"p ist M^{-1}_minimales Element von $\{p\} \cup x$"
folgt via **39-2**: p ist M_maximales Element von $\{p\} \cup x$.

$\square$

39-19. Eine Menge kann, muss aber nicht, ein M_minimales Element haben. Jene Mengen, die ein M_minimales Element haben, werden in einer speziellen Klasse zusammen gefasst. Eine analoge Definition bezieht sich auf Mengen, die ein M_maximales Element haben:

39-19(Definition)

1) $\mathtt{39.0}(M) = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\}$.

2) $\mathtt{39.1}(M) = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$.

39-20. Es folgen zwei im Hinblick auf **39-2** wenig überraschende Aussagen über die Klassen $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } \omega)\}$
und $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{maximales Element von } \omega)\}$:

39-20(Satz)

a) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M\_\textit{minimales Element von } \omega)\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M^{-1}\_\textit{maximales Element von } \omega)\}.$

b) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M\_\textit{maximales Element von } \omega)\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M^{-1}\_\textit{minimales Element von } \omega)\}.$

39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M\_\textit{minimales Element von } \omega)\}$
39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M^{-1}\_\textit{minimales Element von } \omega)\}$
39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M\_\textit{maximales Element von } \omega)\}$
39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } M^{-1}\_\textit{maximales Element von } \omega)\}.$

Beweis **39-20** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } \omega)\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } \omega)\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von α.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist M_minimales Element von α"
folgt via **39-2**: Ω ist M^{-1}_maximales Element von α.

`4:` Aus `2.2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"Ω ist M^{-1}_maximales Element von α"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M^{-1}_maximales Element von α.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M^{-1}_maximales Element von α" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{maximales Element von } \omega)\}$.

Ergo `Thema1.1`:
$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } \omega)\})$
$\Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{maximales Element von } \omega)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{minimales Element von } \omega)\}$
$\subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\_\text{maximales Element von } \omega)\}$"

...

Beweis **39-20** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$

$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M^{-1}_maximales Element von α.

`3:` Aus `2.2`"... Ω ist M^{-1}_maximales Element von α"
folgt via **39-2**: Ω ist M_minimales Element von α.

`4:` Aus `2.2`"$\exists \Omega$ ..." und
aus `3`"Ω ist M_minimales Element von α"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von α.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von α" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

Ergo `Thema1.1`:
$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\})$
$\Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2` "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$
$\subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$
$\subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$
$\subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_maximales Element von } \omega)\}$.

Beweis **39-20** `b)`

`Thema1.1`

$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von α.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist M_maximales Element von α"
folgt via **39-2**: Ω ist M^{-1}_minimales Element von α.

`4:` Aus `2.2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"Ω ist M^{-1}_minimales Element von α"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von α.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von α" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

Ergo `Thema1.1`:
$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\})$
$\Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$
$\subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"

...

Beweis **39-20** `b)`

...

`Thema1.2`
$$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}.$$

`2.1:` Aus `Thema1.2`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`
"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von α.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von α"
folgt via **39-2**: Ω ist M_maximales Element von α.

`4:` Aus `2.2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"Ω ist M_maximales Element von α"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von α.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von α" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt:
$$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}.$$

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2` "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}.$$

□

39-21. Die Resultate von `ab)` beinhalten bis auf "kosmetische" Modifikationen den **Satz vom minimalen Element** und den **Satz von maximalen Element**. Aussagen `cd)` machen deutlich, dass die Klasse der Mengen, die ein M_minimales Element - oder ein M_maximales Element - besitzen, sehr groß ist. Dies liegt für "kleine Klassen M" unter anderem an **39-5**, wonach jede nicht leere Klasse, die mit $\mathsf{dom}\, M$ einen leeren Durchschnitt hat, M_minimale Elemente hat. Analog gilt via **39-6**, dass jede nicht leere Klasse, die mit $\mathsf{ran}\, M$ einen leeren Durchschnitt hat, M_maximale Elemente hat:

39-21(Satz)

Es gelte:

→) M *transitiv.*

Dann folgt:

a) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ *ist M_minimales Element von* $\omega)\}$.

b) $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ *ist M_maximales Element von* $\omega)\}$.

c) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ *ist M_minimales Element von* $\omega)\}$ *Unmenge.*

d) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ *ist M_maximales Element von* $\omega)\}$ *Unmenge.*

39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ *ist M_minimales Element von* $\omega)\}$.
39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ *ist M_maximales Element von* $\omega)\}$.

Beweis **39-21**

39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M^{-1}\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

---

a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2`“α Menge”
folgt via **39-14**:
$\exists \Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von $\{\alpha\}$.

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\alpha\}$ Menge.

`5:` Aus `3`“$\exists \Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von $\{\alpha\}$” und
aus `4`“$\{\alpha\}$ Menge”
folgt:
$\{\alpha\} \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\})$”

...

<u>Beweis **39-21**</u> `a)`

...

`Thema1.2` $(\alpha \in \mathcal{U})$
$\wedge(\beta \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\})$.

`2:` Aus `Thema1.2`
"$\ldots \beta \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi$ ist M_minimales Element von β.

`3:` Es gilt: $(\alpha\_M\_\Psi) \vee (\neg(\alpha\_M\_\Psi))$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` α_M_Ψ.

`4:` Aus →) "M transitiv",
aus `2`"$\ldots \Psi$ ist M_minimales Element von β" und
aus `3.1.Fall`"α_M_Ψ"
folgt via **39-17**:
α ist M_minimales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$.

`5:` Aus `4`"α ist M_minimales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$"
folgt:
$\exists \Upsilon : \Upsilon$ ist M_minimiales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$.

...

...

Beweis **39-21** `a)`

...

`Thema1.2` $(\alpha \in \mathcal{U})$
$\wedge(\beta \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $\neg(\alpha\_M\_\Psi)$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Psi$ ist M_minimales Element von β" und
aus `3.2.Fall`"$\neg(\alpha\_M\_\Psi)$"
folgt via **39-15**:
Ψ ist M_minimales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \Psi$ ist M_minimales Element von β"
folgt:
$\exists \Upsilon : \Upsilon$ ist M_minimiales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | "$\exists \Upsilon : \Upsilon$ ist M_minimales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$"

`4:` Aus `Thema1.2`
"$\ldots \beta \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`5:` Aus `4`"β Menge"
folgt via **2-28**: $\{\alpha\} \cup \beta$ Menge.

`6:` Aus `A2` gleich
"$\exists \Upsilon : \Upsilon$ ist M_minimales Element von $\{\alpha\} \cup \beta$" und
aus `5`"$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge"
folgt:
$\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

...

<u>Beweis **39-21**</u> `a)`

...

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	“$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathcal{U})\wedge(\beta\in\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\})\Rightarrow(\{\alpha\}\cup\beta\in\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\})$”

`1.3:` Aus `A1` “$\forall\alpha:(\alpha\in\mathcal{U})\Rightarrow(\{\alpha\}\in\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\})$” und
aus `A2` “$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathcal{U})\wedge(\beta\in\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\})\Rightarrow(\{\alpha\}\cup\beta\in\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\})$”
folgt via $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}$**Induktion**:
$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}\subseteq\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_minimales Element von $\omega)\}$.

`b)`

`1:` Aus →) “M transitiv”
folgt via **30-83**: M^{-1} transitiv.

`2:` Aus `1` “M^{-1} transitiv”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}\subseteq\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von $\omega)\}$.

`3:` Via **39-20** gilt: $\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$
$=\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von $\omega)\}$.

`4:` Aus `2` “$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}\subseteq\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von $\omega)\}$” und
aus `3` “$\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$
$=\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M^{-1}_minimales Element von $\omega)\}$”
folgt: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}\subseteq\{\omega:(\exists\Omega:\Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$.

<u>Beweis **39-21**</u> `c)`

`1:` Aus →) “ M transitiv ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}.$$

`2:` Via **28-22** gilt: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$ Unmenge.

`3:` Aus `1` “ $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$ ” und
aus `2` “ $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$ Unmenge ”
folgt via **0-7**: $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$ Unmenge.

`d)`

`1:` Aus →) “ M transitiv ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}.$$

`2:` Via **28-22** gilt: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$ Unmenge.

`3:` Aus `1` “ $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$ ” und
aus `2` “ $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}$ Unmenge ”
folgt via **0-7**: $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$ Unmenge.

□

39-22. Im **Satz vom minimalen Element** wird gesagt, dass jede nicht leere, endliche Klasse ein M_minimales Element hat, wenn M transitiv ist:

39-22(Satz) (Satz vom minimalen Element)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ $0 \neq x$.

$\rightarrow)$ *x endlich.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x".

Beweis **39-22**

39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

1: Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq x$" und
aus $\rightarrow)$ "x endlich"
folgt via **28-21**: $x \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

2: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv"
folgt via **39-21**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

3: Aus 1 "$x \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus 2 "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt via **0-4**: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

4: Aus 3 "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x.

□

39-23. Im **Satz vom maximalen Element** wird gesagt, dass jede nicht leere, endliche Klasse ein M_maximales Element hat, wenn M transitiv ist:

39-23(Satz) (Satz vom maximalen Element)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) $0 \neq x$.

$\rightarrow$) *x endlich.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x".

Beweis **39-23**

39-19(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$.

1: Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x$" und
aus $\rightarrow$) "x endlich"
folgt via **28-21**: $x \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$.

2: Aus $\rightarrow$) "M transitiv"
folgt via **39-21**: $\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$.

3: Aus 1 "$x \in \mathcal{P}^*_{\text{endl}}$" und
aus 2 "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$"
folgt via **0-4**: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$.

4: Aus 3 "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $\omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x.

□

39-24. Im folgenden Satz wird für Relationen r in x fest gestellt, dass aus $\mu \in E$ und $x \cap E = 0$ stets folgt, dass μ sowohl r_minimales als auch r_maximales Element von E ist:

39-24(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) $x \cap E = 0$.

$\rightarrow$) $\mu \in E$.

Dann folgt:

a) μ *ist* r*_minimales Element von* E.

b) μ *ist* r*_maximales Element von* E.

Beweis **39-24**

1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

2.1: Aus 1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$"
folgt via **2-15**: $(\mathsf{dom}\, r) \cap E \subseteq x \cap E$.

2.2: Aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **2-15**: $(\mathsf{ran}\, r) \cap E \subseteq x \cap E$.

3.1: $E \cap \mathsf{dom}\, r \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, r) \cap E \stackrel{2.1}{\subseteq} x \cap E \stackrel{\rightarrow)}{=} 0$.

3.2: $E \cap \mathsf{ran}\, r \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{ran}\, r) \cap E \stackrel{2.2}{\subseteq} x \cap E \stackrel{\rightarrow)}{=} 0$.

4.1: Aus 3.1 "$E \cap \mathsf{dom}\, r \ldots \subseteq \ldots 0$"
folgt via **0-18**: $E \cap \mathsf{dom}\, r = 0$.

4.2: Aus 3.2 "$E \cap \mathsf{ran}\, r \ldots \subseteq \ldots 0$"
folgt via **0-18**: $E \cap \mathsf{ran}\, r = 0$.

5.a): Aus 4.1 "$E \cap \mathsf{dom}\, r = 0$" und
aus →) "$\mu \in E$"
folgt via **39-5**: μ ist r_minimales Element von E.

5.b): Aus 4.2 "$E \cap \mathsf{ran}\, r = 0$" und
aus →) "$\mu \in E$"
folgt via **39-6**: μ ist r_maximales Element von E.

□

M_Minimum von x: M_minimales Element von x.
M_Maximum von x: M_maximales Element von x.

Ersterstellung: 20/02/06 **Letzte Änderung: 21/05/11**

40-1. Laut folgendem Satz ist jedes M_Minmimum von x ein M_minimales Element von x. Analoges gilt via `b)` für M_Maxima und M_maximale Elemente:

40-1(Satz)

`a)` *Aus "min ist M_Minimum von x" folgt "min ist M_minimales Element von x".*

`b)` *Aus "max ist M_Maximum von x" folgt "max ist M_maximales Element von x".*

Beweis **40-1** `a)` `VS` gleich min ist M_Minimum von x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "min ist M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: `A1` | "$min \in x$"

> `Thema1.2` $(\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_min)$.
>
> Aus `VS` gleich "min ist M_Minimum von x" und
> aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \ldots$"
> folgt via **38-3**: min_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_min)) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$min \in x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha\_M\_min)) \Rightarrow (min\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: min ist M_minimales Element von x.

`b)`

`1:`

max ist M_Maximum von x

$\stackrel{\mathbf{38-2}}{\Leftrightarrow}$ max ist M^{-1}_Minimum von x

$\stackrel{\text{a)}}{\Rightarrow}$ max ist M^{-1}_minimales Element von x

$\stackrel{\mathbf{39-2}}{\Leftrightarrow}$ max ist M_maximales Element von x.

`2:` Aus `1`
folgt: max ist M_Maximum von x
$\Rightarrow$ (max ist M_maximales Element von x).

□

40-2. Im folgenden, nahe an **40-1** gelegenem Satz wird fest gestellt, dass wenn p nicht einmal ein M_minimales Element von x ist, p auch kein M_Minimum von x ist. Analoges gilt laut `b)` für M_maximale Elemente und M_Maxima:

40-2(Satz)

`a)` *Aus "p kein M_minimales Element von x"*
folgt "p kein M_Minimum von x".

`b)` *Aus "p kein M_maximales Element von x"*
folgt "p kein M_Maximum von x".

<u>Beweis **40-2**</u> `a)` `VS` gleich p kein M_minimales Element von x.

`1:` Es gilt: p ist M_Minimum von x $\vee$ $\neg$(p ist M_Minimum von x).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p ist M_Minimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p ist M_Minimum von x" folgt via **40-1**: p ist M_minimales Element von x.

`3:` Aus `VS` gleich "p kein M_minimales Element von x" folgt via **39-1(Def)**: $\neg$(p ist M_minimales Element von x).

`4:` Es gilt `3`"$\neg$(p ist M_minimales Element von x)".
Es gilt `2`"p ist M_minimales Element von x".
Ex falso quodlibet folgt: p kein M_Minimum von x.

`1.2.Fall` $\neg$(p ist M_Minimum von x).

Aus `1.2.Fall`"$\neg$(p ist M_Minimum von x)" folgt via **38-1(Def)**: p kein M_Minimum von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p kein M_Minimum von x.

`b)`

`1:` p kein M_maximales Element von x

$\overset{\textbf{39-2}}{\Leftrightarrow}$ p kein M^{-1}_minimales Element von x

$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow}$ p kein M^{-1}_Minimum von x

$\overset{\textbf{38-2}}{\Leftrightarrow}$ p kein M_Maximum von x.

`2:` Aus `1` folgt: p kein M_maximales Element von x $\Rightarrow$ (p kein M_Maximum von x).

□

40-3. Wenn x nicht einmal ein M_minimales Element hat, dann hat x laut folgendem Satz auch kein M_Minimum. Laut `b)` gilt eine analoge Aussage für M_maximale Element und M_Maxima:

40-3(Satz)

`a)` *Aus "x hat kein M_minimales Element" folgt "x hat kein M_Minimum".*

`b)` *Aus "x hat kein M_maximales Element" folgt "x hat kein M_Maximum".*

<u>Beweis **40-3**</u> `a)` `VS` gleich x hat kein M_minimales Element.

`1:` Es gilt:
$(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x) \vee (\neg(\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

`2:` Aus `1.1.Fall`“…Ω ist M_Minimum von x”
folgt via **40-1**: Ω ist M_minimales Element von x.

`3:` Aus `VS` gleich “x hat kein M_minimales Element”
folgt via **39-10**: Ω kein M_minimales Element von x.

`4:` Aus `3`“Ω kein M_minimales Element von x”
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist M_minimales Element von $x)$.

`5:` Es gilt `4`“$\neg(\Omega$ ist M_minimales Element von $x)$” .
Es gilt `2`“Ω ist M_minimales Element von x” .
Ex falso quodlibet folgt: x hat kein M_Minimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$.

Aus `1.2.Fall`“$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $x)$”
folgt via **38-1(Def)**: x hat kein M_Minimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x hat kein M_Minimum.

`b)`

`1:` x hat kein M_maximales Element

$\overset{\mathbf{39-2}}{\Leftrightarrow}$ x hat kein M^{-1}_minimales Element

$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow}$ x hat kein M^{-1}_Minimum

$\overset{\mathbf{38-2}}{\Leftrightarrow}$ x hat kein M_Maximum.

`2:` Aus `1`
folgt: x hat kein M_maximales Element
$\Rightarrow$ (x hat kein M_Maximum).

$\square$

40-4. Laut folgendem Satz gilt für jedes M_Minimum min von x und jedes M_minimales Element μin von x sowohl $min\_M\_\mu in$ als auch μin_M_min:

40-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *min ist M_Minimum von x.*

$\rightarrow$) *μin ist M_minimales Element von x.*

Dann folgt "$min\_M\_\mu in$" und "μin_M_min".

Beweis **40-4**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "min ist M_Minimum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $min \in x$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "μin ist M_minimales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in x$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "min ist M_Minimum von x" und
aus `1.2` "$\mu in \in x$"
folgt via **38-3**: $min\_M\_\mu in$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "μin ist M_minimales Element von x",
aus `1.1` "$min \in x$" und
aus `2` "$min\_M\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: μin_M_min.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(min\_M\_\mu in) \wedge (\mu in\_M\_min)$.

□

40-5. Laut folgendem Satz gilt für jedes M_Maximum max von x und jedes M_maximales Element μax von x sowohl $max\_M\_\mu ax$ als auch μax_M_max:

<u>40-5(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *max ist M_Maximum von x.*

$\rightarrow$) *μax ist M_maximales Element von x.*

Dann folgt "$max\_M\_\mu ax$" und "μax_M_max".

<u>Beweis **40-5**</u>

`1.1`: Aus $\rightarrow$)"max ist M_Maximum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $max \in x$.

`1.2`: Aus $\rightarrow$)"μax ist M_maximales Element von x"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu ax \in x$.

`2`: Aus $\rightarrow$)"max ist M_Maximum von x" und
aus `1.2`"$\mu ax \in x$"
folgt via **38-4**: μax_M_max.

`3`: Aus $\rightarrow$)"μax ist M_maximales Element von x",
aus `1.1`"$max \in x$" und
aus `2`"μax_M_max"
folgt via **39-1(Def)**: $max\_M\_\mu ax$.

`4`: Aus `3` und
aus `2`
folgt: $(max\_M\_\mu ax) \wedge (\mu ax\_M\_max)$.

□

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.