Suite I - Die StrukturGebende

Teil 7: Essays 49-56

(Unten/Oben) Vollständig. (Unten/Oben) Stark Vollständig. (Unten/Oben) Total Vollständig. Fixpunkt von y. (Unten/Oben) Versiegelt. (Unten/Oben) KettenVersiegelt. (Unten/Oben) KettenVollständig. (Unten/Oben) Stark KettenVollständig. (Unten/Oben) Total KettenVollständig. art1. art2. Tarski I. Tarski II.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

unten Vollständig.
oben Vollständig.
Vollständig.

Ersterstellung: 21/02/06 **Letzte Änderung: 09/05/11**

49-1. Die Definitionen von **unten/oben Vollständig** beruhen auf Aussagen, bei denen sich der Allquantor unter anderem über alle Klassen α erstreckt:

49-1(Definition)

1) "M **unten Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\beta \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha)$$
$$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

2) "M **oben Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\beta \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \alpha)$$
$$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha).$$

3) "M **Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

M unten Vollständig.

$\wedge$

M oben Vollständig.

49-2. Interessanter Weise Klasse M genau dann unten Vollständig, wenn sie oben Vollständig ist:

49-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M unten Vollständig.*

`ii)` *M oben Vollständig.*

Beweis **49-2**

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\alpha\}$.

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$.

...

Beweis **49-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich M unten Vollständig.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`2.1`: Aus `Thema1`“$\ldots \beta$ obere M_Schranke von α”
folgt via **35-5**: $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`2.2`: Aus `Thema1`“$\ldots \beta$ obere M_Schranke von α”
folgt via **36-16**: $0 \neq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$.

`3`: Aus `2.1`“$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **2-10**: $\alpha \cap \mathsf{dom}\, M = \alpha$.

`4`: Aus `Thema1`“$0 \neq \alpha \ldots$” und
aus `3`“$\alpha \cap \mathsf{dom}\, M = \alpha$”
folgt: $0 \neq \alpha \cap \mathsf{dom}\, M$.

`5`: Aus `4`“$0 \neq \alpha \cap \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in \alpha \cap \mathsf{dom}\, M$.

`6`: Aus `5`“$\ldots \Psi \in \alpha \cap \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **36-17**:
Ψ untere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$.

`7`: Aus `VS` gleich “M unten Vollständig”,
aus `2.2`“$0 \neq \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$” und
aus `6`“Ψ untere M_Schranke von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$”
folgt via **49-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$.

`8`: Aus `2.1`“$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus `7`“$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$”
folgt via **SupInfSatz**: Ω ist M_Supremum von α.

`9`: Aus `7`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `8`“Ω ist M_Supremum von α”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

...

Beweis **49-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich M unten Vollständig.

...

Ergo `Thema1`:
$$\forall\alpha,\beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \alpha)) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha).$$

Konsequenz via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

Beweis **49-2** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich M oben Vollständig.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \alpha) \wedge (\beta \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha)$.

`2.1`: Aus `Thema1`"$\ldots \beta$ untere M_Schranke von α"
folgt via **35-4**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2.2`: Aus `Thema1`"$\ldots \beta$ untere M_Schranke von α"
folgt via **36-15**: $0 \neq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha\}$.

`3`: Aus `2.1`"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-10**: $\alpha \cap \mathsf{ran}\, M = \alpha$.

`4`: Aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3`"$\alpha \cap \mathsf{ran}\, M = \alpha$"
folgt: $0 \neq \alpha \cap \mathsf{ran}\, M$.

`5`: Aus `4`"$0 \neq \alpha \cap \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in \alpha \cap \mathsf{ran}\, M$.

`6`: Aus `5`"$\ldots \Psi \in \alpha \cap \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-17**:
Ψ obere M_Schranke von
$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha\}$.

`7`: Aus `VS` gleich "M oben Vollständig",
aus `2.2`"$0 \neq \{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha\}$" und
aus `6`"Ψ obere M_Schranke von
$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha\}$"
folgt via **49-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha\}$.

`8`: Aus `2.1`"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `7`"$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha\}$"
folgt via **InfSupSatz**: Ω ist M_Infimum von α.

`9`: Aus `7`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `8`"Ω ist M_Infimum von α"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

...

<u>Beweis</u> **49-2** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich M oben Vollständig.

. . .

Ergo `Thema1`:

$$\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha)) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

Konsequenz via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

$\square$

49-3. Wie in **49-2** gesagt, ist M genau dann unten Vollsändig, wenn M oben Vollständig. Hieraus ergibt sich ohne viel Mühe entsprechend der Definition von "Vollständig" die Äquivalenz von "unten Vollständig", "oben Vollständig" und "Vollständig". Diese im nunmerigen Satz fest gehaltene Tatsache führt dazu, dass im Folgenden nicht mehr von "unten Vollständig" oder "oben Vollständig", sondern nur noch von "Vollständig" gesprochen wird:

49-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M Vollständig.*

`ii)` *M unten Vollständig.*

`iii)` *M oben Vollständig.*

Beweis **5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich M Vollständig.

Aus `VS` gleich "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich M unten Vollständig.

Aus `VS` gleich "M unten Vollständig"
folgt via **49-2**: M oben Vollständig.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich M oben Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "M oben Vollständig"
folgt via **49-2**: M unten Vollständig.

`2:` Aus `1`"M unten Vollständig" und
aus `VS` gleich "M oben Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M Vollständig.

□

49-4. Gemäß folgenden Satzes folgt aus der Tatsache, dass $\mathsf{dom}\,M$ eine obere M_Schranke hat für M Vollständig, dass $\mathsf{dom}\,M$ ein M_Maximum hat:

49-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M Vollständig.*

$\rightarrow$) *o obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\,M$.*

Dann folgt "$\exists\Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\,M$".

Beweis **49-4**

36-13(Def) $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$.

`1.1:` Aus →) "o obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **35-5**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`1.2:` Via **2-14** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M) = \mathsf{dom}\, M$.

`1.3:` Aus →) "o obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **36-16**: $0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$.

`1.4:` Aus →) "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

`2:` Aus `1.2` "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M) = \mathsf{dom}\, M$" und
aus `1.1` "$0 \neq \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $0 \neq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$.

`3:` Aus Aus `2` "$0 \neq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$"
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Psi \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$"
folgt via **36-17**:
Ψ untere M_Schranke von $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$.

`5:` Aus `1.4` "M unten Vollständig",
aus `1.3` "$0 \neq \{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$" und
aus `4` "Ψ untere M_Schranke von $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$"
folgt via **49-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$.

`6:` Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`7:` Aus `6` "$\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
Aus `5` "$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von $\{\omega : \omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \mathsf{dom}\, M\}$"
folgt via **SupInfSatz**: Ω ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$.

`8:` Aus `7` "Ω ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **38-11**: Ω ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

`9:` Aus `5` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `8`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

□

49-5. Gemäß folgenden Satzes folgt aus der Tatsache, dass $\mathsf{ran}\, M$ eine untere M_Schranke hat für M Vollständig, dass $\mathsf{ran}\, M$ ein M_Minimum hat:

49-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M Vollständig.*

$\rightarrow$) *u untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$".

Beweis **49-5**

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$.

1.1: Aus →) "u untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **35-5**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

1.2: Via **2-14** gilt: $(\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) = \mathsf{ran}\, M$.

1.3: Aus →) "u untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-15**: $0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$.

1.4: Aus →) "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

2: Aus 1.2 "$(\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) = \mathsf{ran}\, M$" und
aus 1.1 "$0 \neq \mathsf{ran}\, M$"
folgt: $0 \neq (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

3: Aus Aus 2 "$0 \neq (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

4: Aus 3 "$\ldots \Psi \in (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **36-17**:
Ψ obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$.

5: Aus 1.4 "M oben Vollständig",
aus 1.3 "$0 \neq \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$" und
aus 4 "Ψ obere M_Schranke von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$"
folgt via **49-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$.

6: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

7: Aus 6 "$\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
Aus 5 "$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M\}$"
folgt via **InfSupSatz**: Ω ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

8: Aus 7 "Ω ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-10**: Ω ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

9: Aus 5 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 8
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

□

unten Stark Vollständig.
oben Stark Vollständig.
Stark Vollständig.

Ersterstellung: 21/02/06 **Letzte Änderung: 09/05/11**

50-1. Ähnlich zu der Definition von "Vollständig" beruhen die Definitionen von **unten/oben Stark Vollständig** auf der Verwendung von Allquantoren, die sich über alle Klassen α erstrecken:

50-1(Definition)

1) "M **unten Stark Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

2) "M **oben Stark Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha).$$

3) "M **ist Stark Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

M unten Stark Vollständig.

$\wedge$

M oben Stark Vollständig.

50-2. Mit dem folgenden Satz wird klar gestellt, dass es sich bei "unten/oben Stark Vollständig" um eine stärkere Begriffsbildung als bei "Vollständig" handelt:

50-2(Satz)

Es gelte:

→) *M unten Stark Vollständig.* *oder* *M oben Stark Vollständig.* *oder* *M Stark Vollständig.*

Dann folgt "M Vollständig".

Beweis **50-2**

1: Nach "→) *oder*" gilt: M unten Stark Vollständig $\vee$ M oben Stark Vollständig $\vee$ M Stark Vollständig.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **50-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.1.Fall` M unten Stark Vollständig.

`Thema2.1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha)$.

3: Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ untere M_Schranke von α"
folgt via **35-4**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

4: Aus `1.1.Fall`"M unten Stark Vollständig",
aus `Thema2.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus 3"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **50-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$

Konsequenz via **49-1(Def)**: `A1` | "M unten Vollständig"

2.2: Aus `A1` gleich "M unten Vollständig"
folgt via **49-3**: M Vollständig.

...

Beweis **50-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` M oben Stark Vollständig.

`Thema2.1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ obere M_Schranke von α"
folgt via **35-5**: $\alpha \subseteq \mathrm{dom}\, M$.

`4:` Aus `1.2.Fall`"M oben Stark Vollständig",
aus `Thema2.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3`"$\alpha \subseteq \mathrm{dom}\, M$"
folgt via **50-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$

Konsequenz via **49-1(Def)**: `A1` | "M oben Vollständig"

`2.2:` Aus `A1` gleich "M oben Vollständig"
folgt via **49-3**: M Vollständig.

...

Beweis **50-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` M Stark Vollständig.

`Thema2.1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`3.1:` Aus `1.3.Fall`"M Stark Vollständig"
folgt via **50-1(Def)**: M oben Stark Vollständig.

`3.2:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ obere M_Schranke von α"
folgt via **35-5**: $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus `3.1`"M oben Stark Vollständig",
aus `Thema2.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3.2`"$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **50-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$

Konsequenz via **49-1(Def)**: `A1` | "M oben Vollständig"

`2.2:` Aus `A1` gleich "M oben Vollständig"
folgt via **49-3**: M Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: M Vollständig.

$\square$

50-3. Im Hinblick auf die Verhältnisse bei "Vollständig" liegt der Verdacht nahe, dass eine Klasse M genau dann unten Stark Vollständig ist, wenn M oben Stark Vollständig ist. Dass dies nicht der Fall ist, wird durch nachfolgendes Beispiel belegt und hier in Form einer Bemerkung fest gehalten:

50-3.Bemerkung

- Die Aussage
  "(M unten Stark Vollständig) $\Rightarrow$ (M oben Stark Vollständig)"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "(M oben Stark Vollständig) $\Rightarrow$ (M unten Stark Vollständig)"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "(M unten Stark Vollständig) $\Rightarrow$ (M Stark Vollständig)"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "(M oben Stark Vollständig) $\Rightarrow$ (M Stark Vollständig)"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

50-4. Durch folgendes Beispiel wird belegt, dass "unten Stark Vollständig" und "oben Stark Vollständig" unterschiedliche Konzepte sind. Genaueres zu der hier verwendeten "universellen InklusionsRelation sse" - die aus denn geordneten Paaren (λ, μ) von Mengen mit $\lambda \subseteq \mu$ besteht - wird später in **#61** gesagt:

50-4.BEISPIEL

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

c) $0 \neq \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$.

d) $\mathcal{U}$ hat kein sse_Supremum.

e) sse unten Stark Vollständig.

f) $\neg($sse oben Stark Vollständig$)$.

g) $\neg($sse Stark Vollständig$)$.

Ad d): Die einzig mögliche obere sse_Schranke von $\mathcal{U}$ ist $\bigcup \mathcal{U}$, doch wegen $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ist $\bigcup \mathcal{U}$ *keine Menge*, also auch keine obere sse_Schranke von $\mathcal{U}$. Somit hat $\mathcal{U}$ nicht nur kein sse_Supremum, $\mathcal{U}$ hat nicht einmal eine obere sse_Schranke.
Ad e): Es ist relativ einfach zu sehen, dass im Fall $0 \neq \alpha$ die *Menge* $\bigcap \alpha$ das sse_Infimum von α ist.
Ad f): Nach c) gilt $0 \neq \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$, doch via d) hat $\mathcal{U}$ kein sse_Supremum.
Ad g): Die Aussage folgt aus f).

50-5. Falls M unten Stark Vollständig unter der trivialen Zusatzbedingung $0 \neq \mathsf{ran}\, M$ ist, dann hat $\mathsf{ran}\, M$ ein M_Minimum:

50-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M unten Stark Vollständig.*

$\rightarrow)$ $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$".

Beweis **50-5**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "M unten Stark Vollständig"
folgt via **50-2**: M Vollständig.

2: Aus 1.1 "$0 \neq \mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus $\rightarrow)$ "M unten Stark Vollständig"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Psi : \Psi$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

3: Aus 2 "$\ldots \Psi$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-1(Def)**: Ψ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.

4: Aus 1.2 "M Vollständig" und
aus 3 "Ψ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **49-5**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

$\square$

50-6. Falls M oben Stark Vollständig unter der trivialen Zusatzbedingung $0 \neq \mathsf{dom}\, M$ ist, dann hat $\mathsf{dom}\, M$ ein M_Maximum:

50-6(Satz)

Es gelte:

→) *M oben Stark Vollständig.*

→) $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$".

Beweis **50-6**

1.1: Aus →) "$0 \neq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

1.2: Aus →) "M oben Stark Vollständig"
folgt via **50-2**: M Vollständig.

2: Aus 1.1 "$0 \neq \mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus →) "M oben Stark Vollständig"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Psi : \Psi$ ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$.

3: Aus 2 "$\ldots \Psi$ ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **36-1(Def)**: Ψ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 1.2 "M Vollständig" und
aus 3 "Ψ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **49-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

□

unten Total Vollständig.
oben Total Vollständig.
Total Vollständig.

Ersterstellung: 22/02/06 **Letzte Änderung: 09/05/11**

51-1. Mit **unten/oben Total Vollständig** betritt das dritte - auch: formelorientierte - "Vollständigkeits-Konzept" die Essays:

51-1(Definition)

1) "M **unten Total Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

2) "M **oben Total Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha).$$

3) "M **Total Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

M unten Total Vollständig.

$\wedge$

M oben Total Vollständig.

51-2. Im folgenden Satz wird fest gehalten, was zusätzlich zu "Vollständig" nachzuweisen ist, um "Total Vollständig" zu erhalten. Interessanter Weise genügt die Existenz "globaler" Minima und Maxima:

51-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *Vollständig.*

$\rightarrow$) o *obere* M_*Schranke von* $\mathsf{dom}\, M$.

$\rightarrow$) u *untere* M_*Schranke von* $\mathsf{ran}\, M$.

Dann folgt "M *Total Vollständig".*

Beweis **51-2**

`Thema1.1` $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Es gilt: $(\alpha = 0) \vee (0 \neq \alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha = 0$.

3: Aus →) " M Vollständig " und
aus →) " o obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$ "
folgt via **49-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3 " $\ldots \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$ "
folgt via **38-11**: Ω ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$.

5: Aus 4 " Ω ist M_Supremum von $\mathsf{dom}\, M$ "
folgt via **36-12**: Ω ist M_Infimum von 0.

6: Aus 5 " Ω ist M_Infimum von 0 " und
aus `2.1.Fall` " $\alpha = 0$ "
folgt: Ω ist M_Infimum von α.

7: Aus 3 " $\exists \Omega \ldots$ " und
aus 6
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

`2.2.Fall` $0 \neq \alpha$.

3.1: Aus →) " M Vollständig "
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

3.2: Aus `Thema1.1` " $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$ " und
aus →) " u untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$ "
folgt via **35-6**: u untere M_Schranke von α.

4: Aus 3.1 " M unten Vollständig ",
aus `2.2.Fall` " $0 \neq \alpha$ " und
aus 3.2 " u untere M_Schranke von α "
folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **51-1(Def)**: `A1` | " M unten Total Vollständig "

...

Beweis **51-2** ...

`Thema1.2` $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Es gilt: $(\alpha = 0) \vee (0 \neq \alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha = 0$.

3: Aus →) "M Vollständig" und
aus →) "u untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **49-5**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

4: Aus 3"... Ω ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-10**: Ω ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

5: Aus 4"Ω ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **36-12**: Ω ist M_Supremum von 0.

6: Aus 5"Ω ist M_Supremum von 0" und
aus 2.1.Fall"$\alpha = 0$"
folgt: Ω ist M_Supremum von α.

7: Aus 3"$\exists \Omega$..." und
aus 6
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

`2.2.Fall` $0 \neq \alpha$.

3.1: Aus →) "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

3.2: Aus Thema1.2"$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus →) "o obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **35-6**: o obere M_Schranke von α.

4: Aus 3.1"M oben Vollständig",
aus 2.2.Fall"$0 \neq \alpha$" und
aus 3.2"o obere M_Schranke von α"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **51-1(Def)**: | A2 | "M oben Total Vollständig" |

...

<u>Beweis</u> **51-2** ...

`2:` Aus `A1` gleich "M unten Total Vollständig" und
aus `A2` gleich "M oben Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M Total Vollständig.

□

51-3. Auf verblüffend einfache Weise wird nun gezeigt, dass die Konzepte "unten Total Vollständig", "oben Total Vollständig" und "Total Vollständig" identisch sind:

51-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M Total Vollständig.*

`ii)` *M unten Total Vollständig.*

`iii)` *M oben Total Vollständig.*

Beweis **51-3**

36-13(Def) $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $x\}$.
36-13(Def) $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $x\}$.

...

Beweis **51-3**

...

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich M Total Vollständig.

Aus VS gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich M unten Total Vollständig.

Thema1 $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Via **36-16** gilt:
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus VS gleich "M unten Total Vollständig" und
aus 2"$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$.

4: Aus Thema1"$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus 3"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von
$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\}$"
folgt via **SupInfSatz**: Ω ist M_Supremum von α.

5: Aus 3"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 4
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **51-1**: M oben Total Vollständig.

...

<u>Beweis **51-3**</u>

...

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich M oben Total Vollständig.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Via **36-15** gilt:
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\alpha\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus `VS` gleich "M oben Total Vollständig" und
aus 2"$\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $\alpha\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\alpha\}$.

4: Aus `Thema1.1`"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus 3"$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von
$\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $\alpha\}$"
folgt via **InfSupSatz**: Ω ist M_Infimum von α.

5: Aus 3"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 4
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **51-1**: `A1` | "M unten Total Vollständig"

1.2: Aus `A1` gleich "M unten Total Vollständig" und
aus `VS` gleich "M oben Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M Total Vollständig.

□

51-4. Aus “Total Vollständig” folgt “Stark Vollständig” und “Vollständig” . Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

51-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M Total Vollständig.*

Dann folgt:

`a)` *M Vollständig.*

`b)` *M Stark Vollständig.*

<u>Beweis **51-4**</u>

`Thema1.1` $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus →) "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

3: Aus 2 "M unten Total Vollständig" und
aus `Thema1.1` "$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1.1`: $(0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **50-1(Def)**: `A1` "M unten Stark Vollständig"

`Thema1.2` $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus →) "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M oben Total Vollständig.

3: Aus 2 "M oben Total Vollständig" und
aus `Thema1.2` "$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema1.2`: $(0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **50-1(Def)**: `A2` "M oben Stark Vollständig"

1.b): Aus `A1` gleich "M unten Stark Vollständig" und
aus `A2` gleich "M oben Stark Vollständig"
folgt via **50-1(Def)**: M Stark Vollständig.

2.a): Aus 1.b) "M Stark Vollständig"
folgt via **50-2**: M Vollständig.

$\square$

51-5. Falls M Total Vollständig ist, dann sind $\mathsf{dom}\, M, \mathsf{ran}\, M, M$ nicht leer und $\mathsf{dom}\, M$ hat ein M_Maximum und $\mathsf{ran}\, M$ hat ein M_Minimum:

51-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M Total Vollständig.*

Dann folgt:

a) $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

b) $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

c) $0 \neq M$.

d) $\exists \Omega : \Omega$ *ist M_Maximum von* $\mathsf{dom}\, M$.

e) $\exists \Psi : \Psi$ *ist M_Minimum von* $\mathsf{ran}\, M$.

<u>Beweis **51-5**</u>

`1.1:` Aus →) “M Total Vollständig”
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`1.3:` Aus →) “M Total Vollständig”
folgt via **51-4**: M Stark Vollständig.

`2.1:` Aus `1.1` “M unten Total Vollständig” und
aus `1.2` “$0 \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Phi : \Phi$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$.

`2.2:` Aus `1.3` “M Stark Vollständig”
folgt via **50-1(Def)**: M unten Stark Vollständig.

`2.3:` Aus `1.3` “M Stark Vollständig”
folgt via **50-1(Def)**: M oben Stark Vollständig.

`3:` Aus `2.1` “$\ldots \Phi$ ist M_Infimum von $\mathsf{ran}\, M$”
folgt via **36-1(Def)**: Φ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$.

`4.a):` Aus `3` “Φ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$”
folgt via **35-4**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M$.

`4.b):` Aus `3` “Φ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$”
folgt via **35-4**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M$.

`4.c):` Aus `3` “Φ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M$”
folgt via **35-4**: $0 \neq M$.

`5.d):` Aus `2.3` “M oben Stark Vollständig” und
aus `4.a)` “$0 \neq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **50-6**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

`5.e):` Aus `2.2` “M unten Stark Vollständig” und
aus `4.b)` “$0 \neq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **50-5**: $\exists \Psi : \Psi$ ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

□

r Relation in x *und* r reflexiv in x:

unten Stark Vollständig.
oben Stark Vollständig.
Total Vollständig.

Ersterstellung: 22/02/06 **Letzte Änderung: 09/05/11**

52-1. Handelt es sich bei r um eine reflexive Relation in x, dann gilt $\mathsf{ran}\, r = x$ und somit ist die Definition von "unten Stark Vollständig" in diesem Kontext deutlich einfacher:

52-1(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` r *unten Stark Vollständig.*

`ii)` $\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ *ist* r*_Infimum von* $\alpha)$.

Beweis **52-1**

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in$x$"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

`1.2:` Via **50-1(Def)** gilt: r unten Stark Vollständig
$\Leftrightarrow (\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist r_Infimum von $\alpha))$.

`2:` Aus `1.2`"(r unten Stark Vollständig)
$\Leftrightarrow ((0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist r_Infimum von $\alpha))$" und
aus `1.1`"$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: r unten Stark Vollständig
$\Leftrightarrow (\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist r_Infimum von $\alpha))$.

$\square$

52-2. Handelt es sich bei r um eine reflexive Relation in x, dann gilt $\mathsf{dom}\, r = x$ und somit ist die Definition von "oben Stark Vollständig" in diesem Kontext deutlich einfacher:

52-2(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *r oben Stark Vollständig.*

`ii)` $\forall\alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ *ist* r*_Supremum von* $\alpha)$.

Beweis **52-2**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in$x$"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

`1.2:` Via **50-1(Def)** gilt: r oben Stark Vollständig
$\Leftrightarrow (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist r_Supremum von $\alpha))$.

`2:` Aus `1.2`"(r oben Stark Vollständig)
$\Leftrightarrow ((0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist r_Supremum von $\alpha))$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: r oben Stark Vollständig
$\Leftrightarrow (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist r_Supremum von $\alpha))$.

□

52-3. Falls r eine reflexive Relation in einer nicht leeren Klasse x ist und falls r unten Stark Vollständig ist, dann hat x ein r_Minimum:

52-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) $0 \neq x$.

$\rightarrow$) *r unten Stark Vollständig.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von x".

Beweis **52-3**

1: Aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x" und
aus $\rightarrow$)"$0 \neq x$"
folgt via **34-5**: $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.

2: Aus $\rightarrow$)"r unten Stark Vollständig" und
aus 1"$0 \neq \mathsf{ran}\, r$"
folgt via **50-5**: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von $\mathsf{ran}\, r$.

3: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

4: aus 2"$\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von $\mathsf{ran}\, r$" und
aus 3"$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von x.

□

52-4. Falls r eine reflexive Relation in einer nicht leeren Klasse x ist und falls r oben Stark Vollständig ist, dann hat x ein r_Maximum:

52-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) $0 \neq x$.

$\rightarrow$) *r oben Stark Vollständig.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist r_Maximum von x".

Beweis **52-4**

1: Aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
aus $\rightarrow$) "$0 \neq x$"
folgt via **34-5**: $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

2: Aus $\rightarrow$) "r oben Stark Vollständig" und
aus 1 "$0 \neq \mathsf{dom}\, r$"
folgt via **50-6**: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Maximum von $\mathsf{dom}\, r$.

3: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

4: aus 2 "$\exists \Omega : \Omega$ ist r_Maximum von $\mathsf{dom}\, r$" und
aus 3 "$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Maximum von x.

□

52-5. Für reflexive Relationen in x ergibt sich folgendes Kriterium für Totale Vollständigkeit:

52-5(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

... sind die Aussagen i), ii), iii) *äquivalent:*

i) r *Total Vollständig.*

ii) $\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ *ist* M_*Infimum von* $\alpha)$.

iii) $\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi$ *ist* M_*Supremum von* $\alpha)$.

Beweis **52-5** $\boxed{\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}}$ VS gleich r Total Vollständig.

1.1: Aus VS gleich "r Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: r unten Total Vollständig.

1.2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

2: Aus 1.1"r unten Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: $\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

3: Aus 2"$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$" und
aus 1.2"$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Beweis **52-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$

VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha).$

1: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x.$

2: Aus VS gleich "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha)$" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha).$

3: Aus 2 "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha)$"
folgt via **51-1(Def)**: r unten Total Vollständig.

4: Aus 3 "r unten Total Vollständig"
folgt via **51-3**: r oben Total Vollständig.

5: Aus 4 "r oben Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**:
$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$

6: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x.$

7: Aus 5 "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha)$" und
aus 6 "$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$

1: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x.$

2: Aus VS gleich "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq x) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha)$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$

3: Aus 2 "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha)$"
folgt via **51-1(Def)**: r oben Total Vollständig.

4: Aus 3 "r oben Total Vollständig"
folgt via **51-3**: r Total Vollständig.

□

52-6. Falls r eine reflexive Relation in x ist, falls r Vollständig ist und falls x sowohl eine untere als auch eine obere r_Schranke hat, dann ist r Total Vollständig:

52-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) *r Vollständig.*

$\rightarrow$) *u untere r_Schranke von x.*

$\rightarrow$) *o obere r_Schranke von x.*

Dann folgt "r Total Vollständig".

Beweis **52-6**

1: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $(\mathsf{dom}\, r = x) \wedge (\mathsf{ran}\, r = x)$.

2.1: Aus $\rightarrow$)"o obere r_Schranke von x" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, r = x \ldots$"
folgt: o obere r_Schranke von $\mathsf{dom}\, r$.

2.2: Aus $\rightarrow$)"u untere r_Schranke von x" und
aus 1"$\ldots \mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: u untere r_Schranke von $\mathsf{ran}\, r$.

3: Aus $\rightarrow$)"r Vollständig",
aus 2.1"o obere r_Schranke von $\mathsf{dom}\, r$" und
aus 2.2"u untere r_Schranke von $\mathsf{ran}\, r$"
folgt via **51-2**: r Total Vollständig.

$\square$

52-7. Falls r Total Vollständig ist und falls r eine reflexive Relation in x ist, dann sind r, x nicht leer und x hat sowohl ein r_Minimum als auch ein r_Maximum:

52-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

$\rightarrow$) r *Total Vollständig.*

Dann folgt:

a) $0 \neq r$.

b) $0 \neq x$.

c) $\exists \Omega : \Omega$ *ist* r*_Minimum von* x.

d) $\exists \Psi : \Psi$ *ist* r*_Maximum von* x.

<u>Beweis **52-7**</u>

`1.a):` Aus →) "r Total Vollständig"
folgt via **51-5**: $0 \neq r$.

`1.2:` Aus →) "r Total Vollständig"
folgt via **51-5**: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von $\mathsf{ran}\, r$.

`1.3:` Aus →) "r Total Vollständig"
folgt via **51-5**: $\exists \Psi : \Psi$ ist r_Maximum von $\mathsf{dom}\, r$.

`1.4:` Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $(\mathsf{dom}\, r = x) \wedge (\mathsf{ran}\, r = x)$.

`2.b):` Aus →) "r Relation in x" und
aus `1.a)` "$0 \neq r$"
folgt via **10-19**: $0 \neq x$.

`2.c):` Aus `1.2` "$\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von $\mathsf{ran}\, r$" und
aus `1.4` "$\ldots \mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Minimum von x.

`2.d):` Aus `1.3` "$\exists \Psi : \Psi$ ist r_Maximum von $\mathsf{dom}\, r$" und
aus `1.4` "$\mathsf{dom}\, r = x \ldots$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi$ ist r_Maximum von x.

$\square$

Fixpunkt von y.

Ersterstellung: 23/04/07 **Letzte Änderung: 11/05/11**

53-1. Nun betreten die **Fixpunkte von** y die Essays. Die Forderung "$p \in \mathsf{dom}\, y$" soll verhindern, $\mathcal{U}$ als Fixpunkt von y zu akzeptieren:

53-1(Definition)

"p **Fixpunkt von** y" genau dann, wenn gilt:

$p \in \mathsf{dom}\, y$.

$\wedge$

$y(p) = p$.

53-2. Fixpunkte in y sind auf jeden Fall Mengen:

53-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent.*

`i)` *p Fixpunkt von y.*

`ii)` *"p Menge" und "$y(p) = p$".*

`iii)` *"$y(p)$ Menge" und "$y(p) = p$".*

Beweis **53-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p Fixpunkt von y.

`1:` Aus `VS` gleich "p Fixpunkt von y"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) = p)$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathsf{dom}\, y \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3:` Aus `2`"p Menge" und
aus `1`"$\ldots y(p) = p$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (y(p) = p)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (y(p) = p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge… " und
aus `VS` gleich "$\ldots y(p) = p$"
folgt: $y(p)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$y(p)$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots y(p) = p$"
folgt: $(y(p) \text{ Menge}) \wedge (y(p) = p)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(y(p) \text{ Menge}) \wedge (y(p) = p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y(p)$ Menge… "
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y(p) = p$"
folgt via **53-1(Def)**: p Fixpunkt von y.

$\square$

53-3. Durch den folgenden Satz wird deutlich, dass "$p \in \mathsf{dom}\, y$" verhindert, das Universum als Fixpunkt von y anzusehen:

53-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $y(p) = p$.

`ii)` *"$p = \mathcal{U}$" oder "p Fixpunkt von y".*

Beweis **53-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $y(p) = p$.

`1:` Es gilt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = \mathcal{U}$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \text{ Fixpunkt von } y)$.

`1.2.Fall` $p \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y(p) = p$" und
aus `1.2.Fall` "$p \neq \mathcal{U}$"
folgt: $y(p) \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$y(p) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, y$.

`4:` Aus `3` "$p \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus `VS` gleich "$y(p) = p$"
folgt via **53-1(Def)**: p Fixpunkt von y.

`5:` Aus `4`
folgt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \text{ Fixpunkt von } y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(p = \mathcal{U}) \vee (p \text{ Fixpunkt von } y)$.

Beweis **53-3** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p = \mathcal{U}) \vee (p \text{ Fixpunkt von } y)$.

1: Aus `VS`
folgt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \text{ Fixpunkt von } y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = \mathcal{U}$.

2: Via **17-7** gilt: $y(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$y(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$" und
aus `1.1.Fall`"$p = \mathcal{U}$"
folgt: $y(p) = p$.

`1.2.Fall` p Fixpunkt von y.

Aus `1.2.Fall`
folgt via **53-1(Def)**: $y(p) = p$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y(p) = p$.

□

53-4. Trivialer Weise ist $y(p)$ ein Fixpunkt von y, wenn p ein Fixpunkt von y ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - d) - c) - a)`:

53-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *p Fixpunkt von y.*

Dann folgt:

a) *$y(p)$ Fixpunkt von y.*

b) $y(p) \in \mathsf{dom}\, y$.

c) $y(p) = y(y(p))$.

d) $p = y(y(p))$.

Beweis **53-4**

1: Aus $\rightarrow$) "p Fixpunkt von y"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) = p)$.

2.b): Aus 1 "$p \in \mathsf{dom}\, y \ldots$" und
aus 1 "$\ldots y(p) = p$"
folgt: $y(p) \in \mathsf{dom}\, y$.

2.d): Aus 1 "$\ldots y(p) = p$" und
aus 1 "$\ldots y(p) = p$"
folgt: $p = y(y(p))$.

3.c): Aus 2.d) "$p = y(y(p))$" und
aus 1 "$\ldots y(p) = p$"
folgt: $y(p) = y(y(p))$.

4.a): Aus 2.b) "$y(p) \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus 3.c) "$y(p) = y(y(p))$"
folgt via **53-1(Def)**: $y(p)$ Fixpunkt von y.

$\square$

53-5. Fixpunkte von Funktionen f zeichnen sich gegenüber allgemeineren Fixpunkten unter anderem dadurch aus, dass sie in $\mathsf{ran}\, f$ liegen.
Die Beweis-Reihenfolge ist `f) - b) - d) - a) - c) - e)`:

53-5(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) p *Fixpunkt von* f.

Dann folgt:

`a)` $p \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$.

`b)` $f(p) \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$.

`c)` $0 \neq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$.

`d)` p *Fixpunkt von* $f \circ f$.

`e)` $p \in \mathsf{dom}\,(f \circ f)$.

`f)` $p = (f \circ f)(p)$.

Beweis **53-5**

`1.1:` Aus →) "p Fixpunkt von f"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = f(p))$.

`1.2:` Aus →) "p Fixpunkt von f"
folgt via **53-2**: p Menge.

`1.3:` Aus →) "p Fixpunkt von f"
folgt via **53-4**: $f(p) \in \mathsf{dom}\, f$.

`1.4:` Aus →) "p Fixpunkt von f"
folgt via **53-4**: $p = f(f(p))$.

`1.5:` Aus →) "f Funktion" und
aus →) "f Funktion"
folgt via **18-46**: $(f \circ f)(p) = f(f(p))$.

...

Beweis **53-5** . . .

`2.1`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `1.1` "$p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $f(p) \in \mathsf{ran}\, f$.

`2.f)`: Aus `1.4` "$p = f(f(p))$" und
aus `1.5` "$(f \circ f)(p) = f(f(p))$"
folgt: $p = (f \circ f)(p)$.

`3.1`: Aus `1.1` "$\ldots p = f(p)$" und
aus `2.1` "$f(p) \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $p \in \mathsf{ran}\, f$.

`3.b)`: Aus `1.3` "$f(p) \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `2.1` "$f(p) \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **2-2**: $f(p) \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$.

`3.d)`: Aus `1.2` "p Menge" und
aus `2.f)` "$p = (f \circ f)(p)$"
folgt via **53-2**: p Fixpunkt von $f \circ f$.

`4.a)`: Aus `1.1` "$p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `3.1` "$p \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **2-2**: $p \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$.

`4.c)`: Aus `3.b)` "$f(p) \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{ran}\, f)$.

`4.e)`: Aus `3.d)` "p Fixpunkt von $f \circ f$"
folgt via **53-1(Def)**: $p \in \mathsf{dom}\,(f \circ f)$.

$\square$

53-6. Wenn p ein Fixpunkt von y ist und wenn p oder $y(p)$ in C sind, dann sind p und $y(p)$ auch in $C \cap \mathsf{dom}\, y$:

53-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *p Fixpunkt von y.*

$\rightarrow$) $p \in C$. *oder* $y(p) \in C$.

Dann folgt:

a) $p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

b) $y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

Beweis **53-6**

1: Aus $\rightarrow$) "p Fixpunkt von y"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) = p)$.

2.1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(p \in C) \vee (y(p) \in C)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $p \in C$.

3: Aus `2.1.1.Fall` "$p \in C$" und
aus 1 "$p \in \mathsf{dom}\, y \ldots$"
folgt via **2-2**: $p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

4: Aus 1 "$\ldots y(p) = p$" und
aus 3 "$p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt: $y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $(p \in C \cap \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y)$.

`2.1.2.Fall` $y(p) \in C$.

3: Aus $\rightarrow$) "p Fixpunkt von y"
folgt via **53-4**: $y(p) \in \mathsf{dom}\, y$.

4: Aus `2.1.2.Fall` "$y(p) \in C$" und
aus 3 "$y(p) \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

5: Aus 1 "$\ldots y(p) = p$" und
aus 4 "$y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt: $p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

6: Aus 5 und
aus 4
folgt: $(p \in C \cap \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

A1 | "$(p \in C \cap \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y)$"

2.a): Aus A1
folgt: $p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

2.b): Aus A1
folgt: $y(p) \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

$\square$

53-7. Fixpunkte von Einschränkungen von y auf D sind auch Fixpunkte von y:

53-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von y auf D.*

$\rightarrow$) *p Fixpunkt von e.*

Dann folgt "p Fixpunkt von y".

Beweis **53-7**

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Fixpunkt von e"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, e) \wedge (e(p) = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Fixpunkt von e"
folgt via **53-2**: p Menge.

`2:` Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von y auf D" und
aus `1.1` "$p \in \mathsf{dom}\, e \ldots$"
folgt via **ES**: $e(p) = y(p)$.

`3:` Aus `1.1` "$\ldots e(p) = p$" und
aus `2` "$e(p) = y(p)$"
folgt: $y(p) = p$.

`4:` Aus `1.2` "p Menge" und
aus `3` "$y(p) = p$"
folgt via **53-2**: p Fixpunkt von y.

□

53-8. Wenn p ein Fixpunkt der Einschränkung von y auf D ist und $p \in C$ gilt, dann gilt unter anderem auch $p \in (C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, y$:

53-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von y auf D.*

$\rightarrow$) *p Fixpunkt von e.*

$\rightarrow$) *$p \in C$.*

Dann folgt:

a) $p \in C \cap D$.

b) $p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

c) $p \in (C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, y$.

<u>Beweis **53-8**</u>

1: Aus →) "p Fixpunkt von e"
folgt via **53-1(Def)**: $p \in \mathsf{dom}\, e$.

2: Aus →) "e Einschränkung von y auf D"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, y$.

3: Aus 1 "$p \in \mathsf{dom}\, e$" und
aus 2 "$\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt: $p \in D \cap \mathsf{dom}\, y$.

4: Aus 3 "$p \in D \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $(p \in D) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, y)$.

5.a): Aus →) "$p \in C$" und
aus 4 "$p \in D \ldots$"
folgt via **2-2**: $p \in C \cap D$.

5.b): Aus →) "$p \in C$" und
aus 4 "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $p \in C \cap \mathsf{dom}\, y$.

6.c): Aus 5.a) "$p \in C \cap D$" und
aus 4 "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $p \in (C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, y$.

□

53-9. Die Klasse aller Fixpunkte von y wird in die Essays eingeführt:

53-9(Definition)

$$\mathsf{53.0}(y) = \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}.$$

53-10. Da jeder Fixpunkt von y eine Menge ist, ist es nicht allzu überraschend, dass p genau dann ein Fixpunkt von y ist, wenn $p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$:

53-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{\omega : \omega \text{ } \textit{Fixpunkt von } y\}$.

`ii)` p *Fixpunkt von* y.

`iii)` *"*$p \in \mathsf{dom}\, y$*" und "*$y(p) = p$*"*.

53-9(Def) $\{\omega : \omega \text{ } \textit{Fixpunkt von } y\}$.

Beweis **53-10** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt: p Fixpunkt von y.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich p Fixpunkt von y.

Aus `VS` gleich "p Fixpunkt von y"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) = p)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p \in \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) = p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, y \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p \in \mathsf{dom}\, y) \wedge (y(p) = p)$"
folgt via **53-1(Def)**: p Fixpunkt von y.

`3:` Aus 2"p Fixpunkt von y" und
aus 1"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

□

53-11. Es folgen drei grundlegenden Aussagen über $\{\omega : \omega$ Fixpunkt von $y\}$:

53-11(Satz)

a) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $y\} \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

b) *Aus* "$0 \neq \{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $y\}$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *Fixpunkt von* y".

c) *Aus* "p *Fixpunkt von* y" *folgt* "$0 \neq \{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $y\}$.

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $y\}$.

Beweis **53-11** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt: α Fixpunkt von y.

3: Aus 2 "α Fixpunkt von y"
folgt via **53-1(Def)**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, y$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}) \Rightarrow (\omega \in \mathsf{dom}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\} \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

b) VS gleich $0 \neq \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

2: Aus 1 "$\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt: Ω Fixpunkt von y.

3: Aus 1 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 2 "Ω Fixpunkt von y"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ Fixpunkt von y.

c) VS gleich p Fixpunkt von y.

1: Aus VS gleich "p Fixpunkt von y"
folgt via **53-10**: $p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

2: Aus 1 "$p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

□

53-12. Da jeder Fixpunkt von y eine Menge ist, ist es gut nachvollziehbar, dass $C \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $y\}$ die Klasse aller Fixpunkte von y ist, die in C sind:

53-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in C \cap \{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $y\}$.

`ii)` *“$p \in C$” und “p Fixpunkt von y”.*

`iii)` *“$p \in C$” und “$y(p) = p$”.*

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $y\}$.

<u>Beweis</u> **53-12** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in C \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in C \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt via **2-2**: $(p \in C) \wedge (p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt: p Fixpunkt von y.

`3:` Aus `1`"$p \in C \ldots$" und
aus `2`"p Fixpunkt von y"
folgt: $(p \in C) \wedge (p \text{ Fixpunkt von } C)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \in C) \wedge (p \text{ Fixpunkt von } y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Fixpunkt von y"
folgt via **53-1(Def)**: $y(p) = p$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in C \ldots$" und
aus `1`"$y(p) = p$"
folgt: $(p \in C) \wedge (y(p) = p)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in C) \wedge (y(p) = p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in C \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `1`"1" p Menge und
aus `VS` gleich "$\ldots y(p) = p$"
folgt via **53-2**: p Fixpunkt von y.

`3:` Aus `2`"p Fixpunkt von y"
folgt via **53-10**: $p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$p \in C \ldots$" und
aus `3`"$p \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$"
folgt via **2-2**: $p \in C \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } y\}$.

$\square$

unten versiegelt.
oben versiegelt.
versiegelt.
unten KettenVersiegelt.
oben KettenVersiegelt.
KettenVersiegelt.

Ersterstellung: 23/04/07 **Letzte Änderung: 11/05/11**

54-1. Eine Klasse y ist genau dann **unten** M**_versiegelt** wenn y nicht durch M_Infima nicht leerer TeilKlassen von y verlassen werden kann. Eine ähnliche Begriffsbildung liegt bei **oben** M**_versiegelten** Klassen vor:

54-1(Definition)

1) "y **unten** M**_versiegelt**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in y).$$

2) "y **oben** M**_versiegelt**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in y).$$

3) "y **ist** M**_versiegelt**" genau dann, wenn gilt:

y unten M_versiegelt.

$\wedge$

y oben M_versiegelt.

54-2. y ist M_versiegelt, wenn y den binären Durchschnitt von $\mathsf{dom}\,M$ und $\mathsf{ran}\,M$ umfasst - und dies ist auf jeden Fall dann gegeben, wenn $\mathsf{dom}\,M \subseteq y$ oder $\mathsf{ran}\,M \subseteq y$ gilt:

54-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\,M \subseteq y$.

oder

$\mathsf{ran}\,M \subseteq y$.

oder

$(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq y$.

Dann folgt "y ist M_versiegelt."

Beweis **54-2**

`1.1`: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:
$$(\mathsf{dom}\, M \subseteq y) \vee (\mathsf{ran}\, M \subseteq y) \vee ((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, M \subseteq y$.

`2`: Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3`: Aus `2`"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `1.1.1.Fall`"$\mathsf{dom}\, M \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y$.

`1.1.2.Fall` $\mathsf{ran}\, M \subseteq y$.

`2`: Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3`: Aus `2`"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `1.1.2.Fall`"$\mathsf{ran}\, M \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y$.

`1.1.3.Fall` $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1`	"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y$"

...

<u>Beweis **54-2**</u>

...

`Thema1.2` $(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta$ ist M_Infimum von α"
folgt via **36-3**: $\beta \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus 2"$\beta \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `A1` gleich "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $\beta \in y$.

Ergo `Thema1.2`:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in y).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: `A2` | "y unten M_versiegelt"

`Thema1.3` $(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

`2:` Aus `Thema1.3`"$\ldots \beta$ ist M_Supremum von α"
folgt via **36-4**: $\beta \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus 2"$\beta \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `A1` gleich "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $\beta \in y$.

Ergo `Thema1.3`:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in y).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: `A3` | "y oben M_versiegelt"

`1.4:` Aus `A2` gleich "y unten M_versiegelt" und
aus `A3` gleich "y oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: y ist M_versiegelt.

□

54-3. Aus **54-2** ergeben sich ohne viel Mühe Aussagen `abce)`. Dass 0 sowohl unten als auch oben M_versiegelt ist, folgt aus dem Umstand, dass die definierende Prämisse bei 0 nie erfüllt werden kann:

54-3(Satz)

a) $\mathsf{dom}\, M$ *ist* M*_versiegelt.*

b) $\mathsf{ran}\, M$ *ist* M*_versiegelt.*

c) $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *ist* M*_versiegelt.*

d) 0 *ist* M*_versiegelt.*

e) $\mathcal{U}$ *ist* M*_versiegelt.*

Beweis **54-3** a)

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus 1 "$\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **54-2**: $\mathsf{dom}\, M$ ist M_versiegelt.

b)

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus 1 "$\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **54-2**: $\mathsf{ran}\, M$ ist M_versiegelt.

c)

1: Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus 1 "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **54-2**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ ist M_versiegelt.

Beweis **54-3** d)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq 0) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha)$

1: Aus Thema1.1 "$\ldots \alpha \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\alpha = 0.$

2: Es gilt Thema1.1 "$0 \neq \alpha \ldots$."
Es gilt 1 "$\alpha = 0.$"
Ex falso quodlibet folgt: $\beta \in 0.$

Ergo Thema1.1:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq 0) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in 0).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: A1 | "0 unten M_versiegelt"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq 0) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)$

1: Aus Thema1.2 "$\ldots \alpha \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\alpha = 0.$

2: Es gilt Thema1.2 "$0 \neq \alpha \ldots$."
Es gilt 1 "$\alpha = 0.$"
Ex falso quodlibet folgt: $\beta \in 0.$

Ergo Thema1.2:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq 0) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in 0).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: A2 | "0 oben M_versiegelt"

1.3: Aus A1 gleich "0 unten M_versiegelt" und
aus A2 gleich "0 oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: 0 ist M_versiegelt.

e)

1: Via **0-18** gilt: $\text{dom}\, M \subseteq \mathcal{U}.$

2: Aus 1 "$\text{dom}\, M \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **54-2**: $\mathcal{U}$ ist M_versiegelt.

$\square$

54-4. Die Eigenschaft, unten M_versiegelt zu sein, bleibt bei Durchschnittsbildung erhalten:

<u>**54-4(Satz)**</u>

a) *Aus "a unten M_versiegelt" und "y unten M_versiegelt" folgt "$a \cap y$ unten M_versiegelt".*

b) *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha$ unten M_versiegelt$)$" folgt "$\bigcap A$ unten M_versiegelt".*

<u>Beweis **54-4**</u> `a)`

`VS` gleich $(a$ unten M_versiegelt$) \wedge (y$ unten M_versiegelt$)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\beta$ ist M_Infimum von $\gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$" folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq a$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$" folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq y$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "a unten M_versiegelt. . . ", aus `2.1`"$0 \neq \gamma \subseteq a$" und aus `Thema1`"$\ldots \beta$ ist M_Infimum von γ" folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in a$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "y unten M_versiegelt. . . ", aus `2.2`"$0 \neq \gamma \subseteq y$" und aus `Thema1`"$\ldots \beta$ ist M_Infimum von γ" folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in y$.

`4:` Aus `3.1`"$\beta \in a$" und aus `3.2`"$\beta \in y$" folgt via **2-2**: $\beta \in a \cap y$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in a \cap y).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $a \cap y$ unten M_versiegelt.

<u>Beweis **54-4**</u> `b)` `VS` gleich $\forall\gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma \text{ unten } M\text{\_versiegelt}).$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma).$

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\delta \in A.$

`3.1:` Aus `Thema2` "$\delta \in A$" und
aus `VS` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in A)$
$\Rightarrow (\gamma \text{ unten } M\text{\_versiegelt})$"
folgt: δ unten M_versiegelt.

`3.2:` Aus `Thema2` "$\delta \in A$"
folgt via **1-15**: $\bigcap A \subseteq \delta.$

`4:` Aus `Thema1` "$\ldots \gamma \subseteq \bigcap A \ldots$" und
aus `3.2` "$\bigcap A \subseteq \delta$"
folgt via **0-6**: $\gamma \subseteq \delta.$

`5:` Aus `3.1` "δ unten M_versiegelt",
aus `Thema1` "$0 \neq \gamma \ldots$",
aus `4` "$\gamma \subseteq \delta$" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta$ ist M_Infimum von γ"
folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in \delta.$

Ergo `Thema2`: `A1` | "$\forall\delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta)$"

`3:` Aus `Thema1` "$\ldots \beta$ ist M_Infimum von γ"
folgt via **36-3**: β Menge.

`4:` Aus `A1` gleich "$\forall\delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta)$" und
aus `3` "β Menge"
folgt via **1-13**: $\beta \in \bigcap A.$

Ergo `Thema1`:

$$\forall\gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in \bigcap A).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $\bigcap A$ unten M_versiegelt.

□

54-5. Die Eigenschaft, oben M_versiegelt zu sein, bleibt bei Durchschnittsbildung erhalten:

54-5(Satz)

a) *Aus "a oben M_versiegelt" und "y oben M_versiegelt"*
folgt "$a \cap y$ oben M_versiegelt".

b) *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha$ oben M_versiegelt$)$"*
folgt "$\bigcap A$ oben M_versiegelt".

Beweis **54-5** a)
VS gleich $(a$ oben M_versiegelt$) \wedge (y$ oben M_versiegelt$)$.

Thema1 $(0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\beta$ ist M_Supremum von $\gamma)$.

2.1: Aus Thema1"$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$"
folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq a$.

2.2: Aus Thema1"$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$"
folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq y$.

3.1: Aus VS gleich "a oben M_versiegelt…",
aus 2.1"$0 \neq \gamma \subseteq a$" und
aus Thema1"…β ist M_Supremum von γ"
folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in a$.

3.2: Aus VS gleich "y oben M_versiegelt…",
aus 2.2"$0 \neq \gamma \subseteq y$" und
aus Thema1"…β ist M_Supremum von γ"
folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in y$.

4: Aus 3.1"$\beta \in a$" und
aus 3.2"$\beta \in y$"
folgt via **2-2**: $\beta \in a \cap y$.

Ergo Thema1:
$$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in a \cap y).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $a \cap y$ oben M_versiegelt.

Beweis **54-5** `b)` `VS` gleich $\forall\gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma \text{ oben } M\_\text{versiegelt})$.

`Thema1` $(0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \gamma)$.

`Thema2` $\delta \in A$.

`3.1:` Aus `Thema2`"$\delta \in A$" und
aus `VS` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma \text{ oben } M\_\text{versiegelt})$"
folgt: δ oben $M_$versiegelt.

`3.2:` Aus `Thema2`"$\delta \in A$"
folgt via **1-15**: $\bigcap A \subseteq \delta$.

`4:` Aus `Thema1`"$\ldots\gamma \subseteq \bigcap A\ldots$" und
aus `3.2`"$\bigcap A \subseteq \delta$"
folgt via **0-6**: $\gamma \subseteq \delta$.

`5:` Aus `3.1`"δ oben $M_$versiegelt",
aus `Thema1`"$0 \neq \gamma\ldots$",
aus `4`"$\gamma \subseteq \delta$" und
aus `Thema1`"$\ldots\beta$ ist $M_$Supremum von γ"
folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in \delta$.

Ergo `Thema2`: `A1` | "$\forall\delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta)$"

`3:` Aus `Thema1`"$\ldots\beta$ ist $M_$Supremum von γ"
folgt via **36-4**: β Menge.

`4:` Aus `A1` gleich "$\forall\delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta)$" und
aus `3`"β Menge"
folgt via **1-13**: $\beta \in \bigcap A$.

Ergo `Thema1`:
$$\forall\gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in \bigcap A).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $\bigcap A$ oben $M_$versiegelt.

□

54-6. Die Aussagen **54-4** und **54-5** können einfach kombiniert werden:

54-6(Satz)

a) *Aus "a ist M_versiegelt" und "y ist M_versiegelt" folgt "$a \cap y$ ist M_versiegelt".*

b) *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha$ ist M_versiegelt$)$" folgt "$\bigcap A$ ist M_versiegelt".*

Beweis **54-6** `a)` `VS` gleich $(a$ ist M_versiegelt$) \wedge (y$ ist M_versiegelt$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "a ist M_versiegelt…"
folgt via **54-1(Def)**: a unten M_versiegelt.

`1.2:` Aus `VS` gleich "a ist M_versiegelt…"
folgt via **54-1(Def)**: a oben M_versiegelt.

`1.3:` Aus `VS` gleich "…y ist M_versiegelt…"
folgt via **54-1(Def)**: y unten M_versiegelt.

`1.4:` Aus `VS` gleich "…y ist M_versiegelt…"
folgt via **54-1(Def)**: y oben M_versiegelt.

`2.1:` Aus `1.1`"a unten M_versiegelt" und
aus `1.3`"y unten M_versiegelt"
folgt via **54-4**: $a \cap y$ unten M_versiegelt.

`2.2:` Aus `1.2`"a oben M_versiegelt" und
aus `1.4`"y oben M_versiegelt"
folgt via **54-5**: $a \cap y$ oben M_versiegelt.

`3:` Aus `2.1`"$a \cap y$ unten M_versiegelt" und
aus `2.2`"$a \cap y$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $a \cap y$ ist M_versiegelt.

Beweis **54-6** `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\text{\_versiegelt})$.

`Thema1.1` $\beta \in A$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in A$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\text{\_versiegelt})$"
folgt: β ist M_versiegelt.

`3:` Aus 2"β ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: β unten M_versiegelt.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta \text{ unten } M\text{\_versiegelt})$.

Konsequenz via **54-4**: `A1` "$\bigcap A$ unten M_versiegelt."

`Thema1.2` $\beta \in A$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in A$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\text{\_versiegelt})$"
folgt: β ist M_versiegelt.

`3:` Aus 2"β ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: β oben M_versiegelt.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta \text{ oben } M\text{\_versiegelt})$.

Konsequenz via **54-5**: `A2` "$\bigcap A$ oben M_versiegelt."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\bigcap A$ unten M_versiegelt" und
aus `A2` gleich "$\bigcap A$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $\bigcap A$ ist M_versiegelt.

$\square$

54-7. Aus Vollständigkeit folgt, dass unten beschränkte und unten versiegelte, nicht leere Klassen ein Minimum haben:

54-7(Satz)

Es gelte:

→) *M Vollständig.*

→) $0 \neq y$.

→) *u untere M_Schranke von y.*

→) *y unten M_versiegelt.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von y".

Beweis **54-7**

1: Aus →) "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

2: Aus 1 "M unten Vollständig",
aus →) "$0 \neq y$" und
aus →) "u untere M_Schranke von y"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von y.

3: Aus →) "$0 \neq y$"
folgt via **0-20**: $0 \neq y \subseteq y$.

4: Aus →) "y unten M_versiegelt",
aus 3 "$0 \neq y \subseteq y$" und
aus 2 "$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von y"
folgt via **54-1(Def)**: $\Omega \in y$.

5: Aus 4 "$\Omega \in y$" und
aus 2 "$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von y"
folgt via **38-6**: Ω ist M_Minimum von y.

6: Aus 2 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 5
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von y.

□

54-8. Aus Vollständigkeit folgt, dass oben beschränkte und oben Versiegelte, nicht leere Klassen ein Maximum haben:

54-8(Satz)

Es gelte:

→) *M Vollständig.*

→) $0 \neq y$.

→) *o obere M_Schranke von y.*

→) *y oben M_versiegelt.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von y".

Beweis **54-8**

1: Aus →) "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

2: Aus 1 "M oben Vollständig",
aus →) "$0 \neq y$" und
aus →) "o obere M_Schranke von y"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von y.

3: Aus →) "$0 \neq y$"
folgt via **0-20**: $0 \neq y \subseteq y$.

4: Aus →) "y oben M_versiegelt",
aus 2.1 "$0 \neq y \subseteq y$" und
aus 2 "$\dots \Omega$ ist M_Supremum von y"
folgt via **54-1(Def)**: $\Omega \in y$.

5: Aus 4 "$\Omega \in y$" und
aus 2 "$\dots \Omega$ ist M_Supremum von y"
folgt via **38-7**: Ω ist M_Maximum von y.

6: Aus 2 "$\exists \Omega \dots$" und
aus 5
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von y.

□

54-9. $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist unten M_versiegelt und $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist oben M_versiegelt:

54-9(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *unten* M*_versiegelt.*

b) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *oben* M*_versiegelt.*

Beweis **54-9** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$(0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma)$
Aus `Thema1` "... β ist M_Infimum von γ" und aus `Thema1` "$0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \dots$"	
folgt via **41-46**:	$\beta \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$(0 \neq \alpha \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]) \wedge (\gamma \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)$
Aus `Thema1` "... γ ist M_Supremum von α" und aus `Thema1` "$0 \neq \alpha \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} b] \dots$"	
folgt via **41-47**:	$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \gamma : ((0 \neq \alpha \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]) \wedge (\gamma \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b]$ oben M_versiegelt.

□

54-10. Falls r eine Relation in x ist, dann folgt: x ist r_versiegelt:

54-10(Satz)

Aus "r Relation in x" folgt "x ist r_versiegelt".

Beweis **54-10**

1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

2: Aus 1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$"
folgt via **54-2**: x ist r_versiegelt.

□

54-11. Falls M transitiv ist, dann folgt: $[a \overset{M}{|} b]$, $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ und $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ sind M_versiegelt:

<u>54-11(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{|} b]$ *ist M_versiegelt.*

b) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *ist M_versiegelt.*

c) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *ist M_versiegelt.*

Beweis **54-11** `a)`

`Thema1.1` $(0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma)$.

Aus →) "M transitiv",
aus `Thema1.1`"… δ ist M_Infimum von γ" und
aus `Thema1.1`"$0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b]$ …"
folgt via **44-9**: $\delta \in [a \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1.1`:

$$\forall \gamma, \delta : ((0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma)) \Rightarrow (\delta \in [a \overset{M}{|} b]).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: `A1` | "$[a \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt."

`Thema1.2` $(0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma)$.

Aus →) "M transitiv",
aus `Thema1.2`"… δ ist M_Supremum von γ" und
aus `Thema1.2`"$0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b]$ …"
folgt via **44-9**: $\delta \in [a \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1.2`:

$$\forall \gamma, \delta : ((0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma)) \Rightarrow (\delta \in [a \overset{M}{|} b]).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: `A2` | "$[a \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$[a \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt" und
aus `A2` gleich "$[a \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt.

Beweis **54-11** `b)`

`1.1:` Via **54-9** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\beta$ ist M_Supremum von $\gamma)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta$ ist M_Supremum von γ"
folgt via **36-1(Def)**: β obere M_Schranke von γ.

`3:` Aus $\rightarrow$)"M transitiv",
aus 2"β obere M_Schranke von γ" und
aus `Thema1.2`"$0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$"
folgt via **44-14**: $\beta \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.2`:

$$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: `A1` | "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt."

`2:` Aus `1.1`"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt" und
aus `A1` gleich "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt.

Beweis **54-11** `c)`

`Thema1.1` $(0 \neq \alpha \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"... δ ist M_Infimum von α"
folgt via **36-1(Def)**: δ untere M_Schranke von α.

`3:` Aus →)"M transitiv",
aus `1`"δ untere M_Schranke von α" und
aus `Thema1.1`"$0 \neq \alpha \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ..."
folgt via **44-22**: $\delta \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1.1`:

$$\forall \alpha, \delta : ((0 \neq \alpha \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha)) \Rightarrow (\delta \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: `A1` "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt."

`1.2:` Via **54-9** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

`2:` Aus `A1` gleich "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt" und
aus `1.2`"$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt.

□

54-12. Falls M transitiv *und* antiSymmetrisch ist, dann ist $[a \overset{M}{|} b[$ unten M_versiegelt und $]a \overset{M}{|} b]$ ist oben M_versiegelt:

54-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *M antiSymmetrisch.*

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{|} b[$ *unten M_versiegelt.*

b) $]a \overset{M}{|} b]$ *oben M_versiegelt.*

Beweis **54-12** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b[) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma).$

Aus →) “M transitiv”,
aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus Thema1“$0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b[\ldots$” und
aus Thema1“$\ldots \delta$ ist M_Infimum von γ”

folgt via **46-19**: $\delta \in [a \overset{M}{|} b[.$

Ergo Thema1:

$$\forall \gamma, \delta : ((0 \neq \gamma \subseteq [a \overset{M}{|} b[) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \gamma)) \Rightarrow (\delta \in [a \overset{M}{|} b[).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} b[$ unten M_versiegelt.

b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq]a \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma).$

Aus →) “M transitiv”,
aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus Thema1“$0 \neq \gamma \subseteq]a \overset{M}{|} b]\ldots$” und
aus Thema2“$\ldots \delta$ ist M_Supremum von γ”

folgt via **46-18**: $\delta \in]a \overset{M}{|} b].$

Ergo Thema1:

$$\forall \gamma, \delta : ((0 \neq \gamma \subseteq]a \overset{M}{|} b]) \wedge (\delta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma)) \Rightarrow (\delta \in]a \overset{M}{|} b]).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $]a \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

□

54-13. y **ist unten** M**_KettenVersiegelt**, wenn y durch M_Infima von nicht leeren "M_TeilKetten von y" nicht verlassen werden kann. Eine ähnliche Definition wird für "y **oben** M**_KettenVersiegelt** gegeben. y **ist** M**_KettenVersiegelt**, wenn y sowohl unten als auch oben M_KettenVersiegelt ist:

54-13(Definition)

1) "y **unten** M**_KettenVersiegelt**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha) \Rightarrow (\beta \in y).$$

2) "y **oben** M**_KettenVersiegelt**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha) \Rightarrow (\beta \in y).$$

3) "y **ist** M**_KettenVersiegelt**" genau dann, wenn gilt:

y unten M_KettenVersiegelt.

$\wedge$

y oben M_KettenVersiegelt.

54-14. "(unten/oben) KettenVersiegelt" tritt häufiger als "(unten/oben) versiegelt" auf:

54-14(Satz)

`a)` *Aus "y unten M_versiegelt" folgt "y unten M_KettenVersiegelt".*

`b)` *Aus "y oben M_versiegelt" folgt "y oben M_KettenVersiegelt".*

`c)` *Aus "y ist M_versiegelt" folgt "y ist M_KettenVersiegelt".*

Beweis **54-14** `a)` `VS` gleich y unten M_versiegelt.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$
$\wedge(\beta$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

`2:` Aus `Thema1`
folgt: $(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

`3:` Aus →) "y unten M_versiegelt" und
aus 2 "$(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta$ ist M_Infimum von $\alpha)$"
folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in y$.

Ergo `Thema1`:
$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (\beta$ ist M_Infimum von $\alpha)) \Rightarrow (\beta \in y)$.

Konsequenz via **54-13(Def)**: y unten M_KettenVersiegelt.

Beweis **54-14** `b) VS` gleich y oben M_versiegelt.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$
$\wedge(\beta$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

`2:` Aus `Thema1`
folgt: $(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "y oben M_versiegelt" und
aus `2`"$(0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\beta$ ist M_Supremum von $\alpha)$"
folgt via **54-1(Def)**: $\beta \in y$.

Ergo `Thema1`:
$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq y) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (\beta$ ist M_Supremum von $\alpha)$
$\Rightarrow (\beta \in y)$.

Konsequenz via **54-13(Def)**: y oben M_KettenVersiegelt.

`c) VS` gleich y ist M_versiegelt.

`1.1:` Aus `VS` gleich "y ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: y unten M_versiegelt.

`1.2:` Aus `VS` gleich "y ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: y oben M_versiegelt.

`2.1:` Aus `1.1`"y unten M_versiegelt"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: y unten M_KettenVersiegelt.

`2.2:` Aus `1.2`"y oben M_versiegelt"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: y oben M_KettenVersiegelt.

`3:` Aus `2.1`"y unten M_KettenVersiegelt" und
aus `2.2`"y oben M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: y ist M_KettenVersiegelt.

$\square$

54-15. Die Eigenschaft, unten M_KettenVersiegelt zu sein, bleibt bei Durchschnittsbildung erhalten:

54-15(Satz)

a) *Aus "a unten M_KettenVersiegelt" und "y unten M_KettenVersiegelt" folgt "$a \cap y$ unten M_KettenVersiegelt".*

b) *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha$ unten M_KettenVersiegelt$)$" folgt "$\bigcap A$ unten M_KettenVersiegelt".*

Beweis **54-15** `a)`
`VS` gleich $(a \text{ unten } M\_\text{KettenVersiegelt}) \wedge (y \text{ unten } M\_\text{KettenVersiegelt})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\gamma \text{ ist } M\_\text{Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$”
folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq a$.

`2.2:` Aus `Thema1`“$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$”
folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq y$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “a unten $M_$KettenVersiegelt...”,
aus `2.1`“$0 \neq \gamma \subseteq a$”,
aus `Thema1`“...γ ist $M_$Kette ...” und
aus `Thema1`“...β ist $M_$Infimum von γ”
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in a$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “...y unten $M_$KettenVersiegelt”,
aus `2.2`“$0 \neq \gamma \subseteq y$”,
aus `Thema1`“...γ ist $M_$Kette ...” und
aus `Thema1`“...β ist $M_$Infimum von γ”
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in y$.

`4:` Aus `3.1`“$\beta \in a$” und
aus `3.2`“$\beta \in y$”
folgt via **2-2**: $\beta \in a \cap y$.

Ergo `Thema1`:
$$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\gamma \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in a \cap y).$$

Konsequenz via **54-13(Def)**: $a \cap y$ unten $M_$KettenVersiegelt.

Beweis **54-15** `b) VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha \text{ unten } M\_\text{KettenVersiegelt}).$

`Thema1` $(0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\gamma \text{ ist } M\_\text{Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \gamma).$

`Thema2` $\delta \in A.$

`3.1:` Aus `Thema2`“$\delta \in A$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in A)$
$\Rightarrow (\alpha \text{ unten } M\_\text{KettenVersiegelt})$”
folgt: δ unten M_KettenVersiegelt.

`3.2:` Aus `Thema2`“$\delta \in A$”
folgt via **1-15**: $\bigcap A \subseteq \delta.$

`4:` Aus `Thema1`“$\ldots \gamma \subseteq \bigcap A \ldots$” und
aus `3.2`“$\bigcap A \subseteq \delta$”
folgt via **0-6**: $\gamma \subseteq \delta.$

`5:` Aus `3.1`“δ unten M_KettenVersiegelt”,
aus `Thema1`“$0 \neq \gamma \ldots$”,
aus `4`“$\gamma \subseteq \delta$”,
aus `Thema1`“$\ldots \gamma$ ist M_Kette$\ldots$” und
aus `Thema1`“$\ldots \beta$ ist M_Infimum von γ”
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in \delta.$

Ergo `Thema2`: `A1` | “$\forall\delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta).$”

`3:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta$ ist M_Infimum von γ”
folgt via **36-3**: β Menge.

`4:` Aus `A1` gleich “$\forall\delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta)$” und
aus `3`“β Menge”
folgt via **1-13**: $\beta \in \bigcap A.$

Ergo `Thema1`:
$\forall\gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\gamma \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \gamma))$
$\Rightarrow (\beta \in \bigcap A).$

Konsequenz via **54-13(Def)**: $\bigcap A$ unten M_KettenVersiegelt.

□

54-16. Die Eigenschaft, oben M_KettenVersiegelt zu sein, bleibt bei Durchschnittsbildung erhalten:

54-16(Satz)

a) *Aus "a oben M_KettenVersiegelt" und "y oben M_KettenVersiegelt" folgt "$a \cap y$ oben M_KettenVersiegelt".*

b) *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha$ oben M_KettenVersiegelt$)$" folgt "$\bigcap A$ oben M_KettenVersiegelt".*

<u>Beweis **54-16**</u> `a)`

`VS` gleich $(a \text{ oben } M\_\text{KettenVersiegelt}) \wedge (y \text{ oben } M\_\text{KettenVersiegelt})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\gamma \text{ ist } M\_\text{Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$"
folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq a$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$0 \neq \gamma \subseteq a \cap y \ldots$"
folgt via **2-9**: $0 \neq \gamma \subseteq y$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "a oben $M_$KettenVersiegelt... ",
aus `2.1`"$0 \neq \gamma \subseteq a$",
aus `Thema1`"$\ldots \gamma$ ist $M_$Kette ... " und
aus `Thema1`"$\ldots \beta$ ist $M_$Supremum von γ"
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in a$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ oben $M_$KettenVersiegelt",
aus `2.2`"$0 \neq \gamma \subseteq y$",
aus `Thema1`"$\ldots \gamma$ ist $M_$Kette ... " und
aus `Thema1`"$\ldots \beta$ ist $M_$Supremum von γ"
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in y$.

`4:` Aus `3.1`"$\beta \in a$" und
aus `3.2`"$\beta \in y$"
folgt via **2-2**: $\beta \in a \cap y$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq a \cap y) \wedge (\gamma \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \gamma)) \Rightarrow (\beta \in a \cap y).$$

Konsequenz via **54-13(Def)**: $a \cap y$ oben $M_$KettenVersiegelt.

<u>Beweis **54-16**</u> `b)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha \text{ oben } M\text{\_KettenVersiegelt}).$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\gamma \text{ ist } M\text{\_Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma).$

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\delta \in A.$

`3.1:` Aus `Thema2`“$\delta \in A$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in A)$
$\Rightarrow (\alpha \text{ oben } M\text{\_KettenVersiegelt})$”
folgt: $\delta \text{ oben } M\text{\_KettenVersiegelt}.$

`3.2:` Aus `Thema2`“$\delta \in A$”
folgt via **1-15**: $\bigcap A \subseteq \delta.$

`4:` Aus `Thema1`“$\ldots \gamma \subseteq \bigcap A \ldots$” und
aus `3.2`“$\bigcap A \subseteq \delta$”
folgt via **0-6**: $\gamma \subseteq \delta.$

`5:` Aus `3.1`“$\delta \text{ oben } M\text{\_KettenVersiegelt}$”,
aus `Thema1`“$0 \neq \gamma \ldots$”,
aus `4`“$\gamma \subseteq \delta$”,
aus `Thema1`“$\ldots \gamma \text{ ist } M\text{\_Kette} \ldots$” und
aus `Thema1`“$\ldots \beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma$”
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in \delta.$

Ergo `Thema2`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta).\text{”}}$

`3:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma$”
folgt via **36-4**: β Menge.

`4:` Aus `A1` gleich “$\forall \delta : (\delta \in A) \Rightarrow (\beta \in \delta)$” und
aus `3`“β Menge”
folgt via **1-13**: $\beta \in \bigcap A.$

Ergo `Thema1`:
$\forall \gamma, \beta : ((0 \neq \gamma \subseteq \bigcap A) \wedge (\gamma \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \gamma))$
$\Rightarrow (\beta \in \bigcap A).$

Konsequenz via **54-13(Def)**: $\bigcap A \text{ oben } M\text{\_KettenVersiegelt}.$

□

54-17. Die Aussagen **54-15** und **54-16** können einfach kombiniert werden:

54-17(Satz)

a) *Aus "a ist M_KettenVersiegelt"*
und "y ist M_KettenVersiegelt"
folgt "$a \cap y$ ist M_KettenVersiegelt".

b) *Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha$ ist M_KettenVersiegelt$)$"*
folgt "$\bigcap A$ ist M_KettenVersiegelt".

Beweis **54-17** a)
VS gleich $(a$ ist M_KettenVersiegelt$) \wedge (y$ ist M_KettenVersiegelt$)$.

1.1: Aus VS gleich "a ist M_KettenVersiegelt…"
folgt via **54-13(Def)**: a unten M_KettenVersiegelt.

1.2: Aus VS gleich "a ist M_KettenVersiegelt…"
folgt via **54-13(Def)**: a oben M_KettenVersiegelt.

1.3: Aus VS gleich "…y ist M_KettenVersiegelt…"
folgt via **54-13(Def)**: y unten M_KettenVersiegelt.

1.4: Aus VS gleich "…y ist M_KettenVersiegelt…"
folgt via **54-13(Def)**: y oben M_KettenVersiegelt.

2.1: Aus 1.1"a unten M_KettenVersiegelt" und
aus 1.3"y unten M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-15**: $a \cap y$ unten M_KettenVersiegelt.

2.2: Aus 1.2"a oben M_KettenVersiegelt" und
aus 1.4"y oben M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-16**: $a \cap y$ oben M_KettenVersiegelt.

3: Aus 2.1"$a \cap y$ unten M_KettenVersiegelt" und
aus 2.2"$a \cap y$ oben M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: $a \cap y$ ist M_KettenVersiegelt.

Beweis **54-17** `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{KettenVersiegelt})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in A$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in A$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in A)$
$\Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{KettenVersiegelt})$"
folgt: β ist $M_$KettenVersiegelt.

`3:` Aus 2"β ist $M_$KettenVersiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: β unten $M_$KettenVersiegelt.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta \text{ unten } M\_\text{KettenVersiegelt})$.

Konsequenz via **54-15**: `A1` | "$\bigcap A$ unten $M_$KettenVersiegelt."

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in A$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in A$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in A)$
$\Rightarrow (\alpha \text{ ist } M\_\text{KettenVersiegelt})$"
folgt: β ist $M_$KettenVersiegelt.

`3:` Aus 2"β ist $M_$KettenVersiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: β oben $M_$KettenVersiegelt.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta \text{ oben } M\_\text{KettenVersiegelt})$.

Konsequenz via **54-16**: `A2` | "$\bigcap A$ oben $M_$KettenVersiegelt."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\bigcap A$ unten $M_$KettenVersiegelt" und
aus `A2` gleich "$\bigcap A$ oben $M_$KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: $\bigcap A$ ist $M_$KettenVersiegelt.

$\square$

unten KettenVollständig.
oben KettenVollständig.
KettenVollständig.
unten Stark KettenVollständig.
oben Stark KettenVollständig.
Stark KettenVollständig.
unten Total KettenVollständig.
oben Total KettenVollständig.
Total KettenVollständig.

Ersterstellung: 03/05/06 **Letzte Änderung: 11/05/11**

55-1. Eine Klasse M ist genau dann **unten KettenVollständig**, wenn jede nicht leere M_Kette, die eine untere M_Schranke hat, ein M_Infimum hat. Eine ähnliche Definition wird für M **oben KettenVollständig** gegeben. M ist genau dann **KettenVollständig**, wenn M unten und oben KettenVollständig ist:

55-1(Definition)

1) "M **unten KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ untere } M\_\text{Schranke von } \alpha) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha).$$

2) "M **oben KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\beta \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \alpha) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$$

3) "M **KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

M unten KettenVollständig.

$\wedge$

M oben KettenVollständig.

55-2. Aus "Vollständig" folgt fast trivialer Weise "KettenVollständig" :

55-2(Satz)

Aus "M Vollständig" folgt "M KettenVollständig".

Beweis **55-2** `VS` gleich M Vollständig.

`Thema1.1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$
$\wedge(\beta$ untere M_Schranke von $\alpha)$.

2: Aus `VS` gleich "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

3: Aus 2"M unten Vollständig",
aus `Thema1.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `Thema1.1`"$\ldots \beta$ untere M_Schranke von α"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1.1`:
$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **55-1(Def)**: `A1` "M unten KettenVollständig"

...

<u>Beweis **55-2**</u> `VS` gleich M Vollständig.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$
$\wedge(\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`2:` Aus `VS` gleich "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

`3:` Aus 2"M oben Vollständig",
aus `Thema1.2`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \beta$ obere M_Schranke von α"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema1.2`:
$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **55-1(Def)**: `A1` | "M oben KettenVollständig"

`1.3:` Aus `A1` gleich "M unten KettenVollständig" und
aus `A2` gleich "M oben KettenVollständig"
folgt via **55-1(Def)**: M KettenVollständig.

$\square$

55-3. In vielleicht erwartetem Gleichklang von "unten KettenVollständig" und "unten KetteVersiegelt" gilt folgender, ein M_Minimum spezieller M_Ketten garantierende Satz:

55-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M unten KettenVollständig.*

$\rightarrow)$ $0 \neq K$.

$\rightarrow)$ *K ist M_Kette.*

$\rightarrow)$ *u untere M_Schranke von K.*

$\rightarrow)$ *K unten M_KettenVersiegelt.*

Dann folgt "$\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von K.".

Beweis **55-3**

1.1: Aus $\rightarrow)$"M unten KettenVollständig",
aus $\rightarrow)$"$0 \neq K$",
aus $\rightarrow)$"K ist M_Kette" und
aus $\rightarrow)$"u untere M_Schranke von K"
folgt via **55-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von K.

1.2: Aus $\rightarrow)$"$0 \neq K$"
folgt via **0-20**: $0 \neq K \subseteq K$.

2: Aus $\rightarrow)$"K unten M_KettenVersiegelt",
aus 1.2"$0 \neq K \subseteq K$",
aus $\rightarrow)$"K ist M_Kette" und
aus 1.1"$\ldots\Omega$ ist M_Infimum von K"
folgt via **54-13(Def)**: $\Omega \in K$.

3: Aus 2"$\Omega \in K$" und
aus 1.2"$\ldots\Omega$ ist M_Infimum von K"
folgt via **38-6**: Ω ist M_Minimum von K.

4: Aus 1.1"$\exists\Omega\ldots$" und
aus 3
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von K.

□

55-4. In vielleicht erwartetem Gleichklang von “oben KettenVollständig” und “oben KetteVersiegelt” gilt folgender, ein M_Maximum spezieller M_Ketten garantierende Satz:

<u>55-4(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M oben KettenVollständig.*

$\rightarrow$) $0 \neq K$.

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

$\rightarrow$) *o obere M_Schranke von K.*

$\rightarrow$) *K oben M_KettenVersiegelt.*

Dann folgt “$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von K.”.

<u>Beweis **55-4**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow$)“M oben KettenVollständig”,
aus $\rightarrow$)“$0 \neq K$”,
aus $\rightarrow$)“K ist M_Kette” und
aus $\rightarrow$)“o obere M_Schranke von K”
folgt via **55-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von K.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)“$0 \neq K$”
folgt via **0-20**: $0 \neq K \subseteq K$.

`2:` Aus $\rightarrow$)“K oben M_KettenVersiegelt”,
aus `1.2`“$0 \neq K \subseteq K$”,
aus $\rightarrow$)“K ist M_Kette” und
aus `1.1`“$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von K”
folgt via **54-13(Def)**: $\Omega \in K$.

`3:` Aus `2`“$\Omega \in K$” und
aus `1.2`“$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von K”
folgt via **38-7**: Ω ist M_Maximum von K.

`4:` Aus `1.1`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von K.

$\square$

55-5. Ähnlich wie "unten Stark Vollständig" wird M **unten Stark KettenVollständig** definiert. Der Unterschied besteht darin, dass nunmehr die Existenz von M_Infima nicht leerer M_Ketten gefordert wird. M **oben Stark KettenVollständig** wird ähnlich festgelegt und M **Stark KettenVollständig** gilt genau dann, wenn M sowohl unten als auch oben Stark KettenVollständig ist:

55-5(Definition)

1) "M **unten Stark KettenVollständig**"
genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha).$$

2) "M **oben Stark KettenVollständig**"
genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$$

3) "M **Stark KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

M unten Stark KettenVollständig.

$\wedge$

M oben Stark KettenVollständig.

55-6. Aus Stark Vollständig folgt Stark KettenVollständig und hiervon gibt es Variationen mit unten/oben:

55-6(Satz)

a) *Aus "M unten Stark Vollständig" folgt "M unten Stark KettenVollständig".*

b) *Aus "M oben Stark Vollständig" folgt "M oben Stark KettenVollständig".*

c) *Aus "M Stark Vollständig" folgt "M Stark KettenVollständig".*

Beweis **55-6** a) `VS` gleich M unten Stark Vollständig.

`Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})$.

2: Aus `Thema1` "$\ldots \alpha$ ist M_Kette"
folgt via **30-69**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus `VS` gleich "M unten Stark Vollständig",
aus `Thema1` "$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus 2 "$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: M unten Stark KettenVollständig.

Beweis **55-6** `b)` `VS` gleich M oben Stark Vollständig.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})$.

2: Aus `Thema1` "$\ldots \alpha$ ist M_Kette"
folgt via **30-69**: $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus `VS` gleich "M oben Stark Vollständig",
aus `Thema1` "$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus 2 "$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: M oben Stark KettenVollständig.

`c)` `VS` gleich M Stark Vollständig.

1.1: Aus `VS` gleich "M Stark Vollständig"
folgt via **50-1(Def)**: M unten Stark Vollständig.

1.2: Aus `VS` gleich "M Stark Vollständig"
folgt via **50-1(Def)**: M oben Stark Vollständig.

2.1: Aus 1.1 "M unten Stark Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: M unten Stark KettenVollständig.

2.2: Aus 1.2 "M oben Stark Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: M oben Stark KettenVollständig.

3: Aus 2.1 "M unten Stark KettenVollständig" und
aus 2.2 "M oben Stark KettenVollständig"
folgt via **55-5(Def)**: M Stark KettenVollständig.

$\square$

55-7. Aus Stark KettenVollständig folgt KettenVollständig und hiervon gibt es Variationen mit unten/oben:

55-7(Satz)

a) *Aus "M unten Stark KettenVollständig" folgt "M unten KettenVollständig".*

b) *Aus "M oben Stark KettenVollständig" folgt "M oben KettenVollständig".*

c) *Aus "M Stark KettenVollständig" folgt "M KettenVollständig".*

Beweis **55-7** a) VS gleich M unten Stark KettenVollständig.

Thema1 $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$ $\wedge(\beta$ untere M_Schranke von $\alpha)$.

Aus VS gleich "M unten Stark KettenVollständig",
aus Thema1 "$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus Thema1 "$\ldots \alpha$ ist M_Kette$\ldots$"
folgt via **55-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo Thema1:
$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha)$ $\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **55-1(Def)**: M unten KettenVollständig.

Beweis **55-7** `b)` `VS` gleich $\qquad$ M oben Stark KettenVollständig.

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$
> $\wedge(\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$.
>
> Aus `VS` gleich "M oben Stark KettenVollständig",
> aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
> aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist M_Kette$\ldots$"
> folgt via **55-5(Def)**: $\qquad$ $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema1`:
$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **55-1(Def)**: $\qquad$ M oben KettenVollständig.

`c)` `VS` gleich $\qquad$ M Stark KettenVollständig.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M Stark KettenVollständig"
folgt via **55-5(Def)**: $\qquad$ M unten Stark KettenVollständig.

`1.2:` Aus `VS` gleich "M Stark KettenVollständig"
folgt via **55-5(Def)**: $\qquad$ M oben Stark KettenVollständig.

`2.1:` Aus `1.1`"M unten Stark KettenVollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\qquad$ M unten KettenVollständig.

`2.2:` Aus `1.2`"M oben Stark Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\qquad$ M oben KettenVollständig.

`3:` Aus `2.1`"M unten KettenVollständig" und
aus `2.2`"M oben KettenVollständig"
folgt via **55-1(Def)**: $\qquad$ M KettenVollständig.

$\square$

55-8. Falls M unten Stark KettenVollständig ist, so hat jede nicht lerere, unten M_KettenVersiegelte M_Kette ein M_Minimum:

55-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M unten Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) $0 \neq K$.

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

$\rightarrow$) *K unten M_KettenVersiegelt.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von K".

Beweis **55-8**

1.1: Aus $\rightarrow$)"M unten Stark KettenVollständig",
aus $\rightarrow$)"$0 \neq K$" und
aus $\rightarrow$)"K ist M_Kette"
folgt via **55-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von K.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$0 \neq K$"
folgt via **0-20**: $0 \neq K \subseteq K$.

2: Aus $\rightarrow$)"K unten M_KettenVersiegelt",
aus 1.2"$0 \neq K \subseteq K$",
aus $\rightarrow$)"K ist M_Kette" und
aus 1.1"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von K"
folgt via **54-13(Def)**: $\Omega \in K$.

3: Aus 2"$\Omega \in K$" und
aus 1.1"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von K"
folgt via **38-6**: Ω ist M_Minimum von K.

4: Aus 1.1"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 3
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von K.

□

55-9. Falls M oben Stark KettenVollständig ist, so hat jede nicht lerere, oben M_KettenVersiegelte M_Kette ein M_Maximum:

55-9(Satz)

Es gelte:

→) *M oben Stark KettenVollständig.*

→) $0 \neq K$.

→) *K ist M_Kette.*

→) *K oben M_KettenVersiegelt.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von K".

Beweis **55-9**

1.1: Aus →) "M oben Stark KettenVollständig",
aus →) "$0 \neq K$" und
aus →) "K ist M_Kette"
folgt via **55-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von K.

1.2: Aus →) "$0 \neq K$"
folgt via **0-20**: $0 \neq K \subseteq K$.

2: Aus →) "K oben M_KettenVersiegelt",
aus 1.2 "$0 \neq K \subseteq K$",
aus →) "K ist M_Kette" und
aus 1.1 "... Ω ist M_Supremum von K"
folgt via **54-13(Def)**: $\Omega \in K$.

3: Aus 2 "$\Omega \in K$" und
aus 1.1 "... Ω ist M_Supremum von K"
folgt via **38-7**: Ω ist M_Maximum von K.

4: Aus 1.1 "$\exists \Omega \dots$" und
aus 3
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von K.

□

55-10. Ähnlich wie "unten Total Vollständig" wird M **unten Total Ketten-Vollständig** definiert. Der Unterschied besteht darin, dass nunmehr die Existenz von M_Infima nicht leerer M_Ketten gefordert wird. M **oben Total Ketten-Vollständig** wird ähnlich festgelegt und M **Total KettenVollständig** gilt genau dann, wenn M sowohl unten als auch oben Total KettenVollständig ist:

55-10(Definition)

1) "M **unten Total KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \alpha).$$

2) "M **oben Total KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha : (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette}) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha).$$

3) "M **Total KettenVollständig**" genau dann, wenn gilt:

M unten Total KettenVollständig.

$\wedge$

M oben Total KettenVollständig.

55-11. Aus Total Vollständig folgt Total KettenVollständig:

55-11(Satz)

Aus "M Total Vollständig" folgt "M Total KettenVollständig".

Beweis **55-11** `VS` gleich M Total Vollständig.

`Thema1.1` α ist M_Kette.

`2.1:` Aus `VS` gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"α ist M_Kette"
folgt via **30-69**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `2.1`"M unten Total Vollständig" und
aus `2.2`"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha$ ist M_Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **55-10(Def)**: `A1` | "M unten Total KettenVollständig"

`Thema1.2` α ist M_Kette.

`2.1:` Aus `VS` gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M oben Total Vollständig.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"α ist M_Kette"
folgt via **30-69**: $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `2.1`"M oben Total Vollständig" und
aus `2.2`"$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha$ ist M_Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **55-10(Def)**: `A2` | "M oben Total KettenVollständig"

`1.3:` Aus `A1` gleich "M unten Total KettenVollständig" und
aus `A2` gleich "M oben Total KettenVollständig"
folgt via **55-10(Def)**: M Total KettenVollständig.

$\square$

55-12. Aus “Total KettenVollständig” folgt “Stark KettenVollständig” und hiervon gibt es Variationen mit unten/oben:

55-12(Satz)

a) *Aus “M unten Total KettenVollständig” folgt “M unten Stark KettenVollständig”.*

b) *Aus “M oben Total KettenVollständig” folgt “M oben Stark KettenVollständig”.*

c) *Aus “M Total KettenVollständig” folgt “M Stark KettenVollständig”.*

Beweis **55-12** `a)` `VS` gleich M unten Total KettenVollständig.

> `Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$.
>
> Aus `VS` gleich "M unten Total KettenVollständig" und
> aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist M_Kette"
> folgt via **55-10(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: M unten Stark KettenVollständig.

`b)` `VS` gleich M oben Total KettenVollständig.

> `Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$.
>
> Aus `VS` gleich "M oben Total KettenVollständig" und
> aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist M_Kette"
> folgt via **55-10(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: M oben Stark KettenVollständig.

`c)` `VS` gleich M Total KettenVollständig.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M Total KettenVollständig"
folgt via **55-10(Def)**: M unten Total KettenVollständig.

`1.2:` Aus `VS` gleich "M Total KettenVollständig"
folgt via **55-10(Def)**: M oben Total KettenVollständig.

`2.1:` Aus `1.1`"M unten Total KettenVollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: M unten Stark KettenVollständig.

`2.2:` Aus `1.2`"M oben Total Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: M oben Stark KettenVollständig.

`3:` Aus `2.1`"M unten Stark KettenVollständig" und
aus `2.2`"M oben Stark KettenVollständig"
folgt via **55-5(Def)**: M Stark KettenVollständig.

$\square$

art1. art2.
Tarski I. Tarski II.

Ersterstellung: 18/07/07 **Letzte Änderung: 12/05/11**

56-1. Die Definition **art1** zu sein entspringt der Beobachtung, dass die hierunter verborgenen Aussagen mit einiger Hartnäckigkeit bei dem **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6), entnommenen Beweis der Fixpunktsätze von Tarski vorkommen:

56-1(Definition)

"E **ist** (p, y, M)**art1**" genau dann, wenn gilt:

$p \in E$.

$\wedge$

$y[E] \subseteq E$.

$\wedge$

E oben M_KettenVersiegelt.

56-2. Falls p eine Menge ist, dann ist $\mathcal{U}$ von (p,y,M)**art1** und falls p eine Unmenge ist, dann gibt es keine Klasse, die (p,y,M)**art1** ist. Falls E von (p,y,M)**art1** ist, dann ist E nicht leer:

56-2(Satz)

a) *Aus "p Menge" folgt "$\mathcal{U}$ ist (p,y,M)**art1**".*

b) *Aus "p Unmenge" folgt "$\forall\alpha : \neg(\alpha$ ist (p,y,M)**art1**$)$".*

c) *Aus "E ist (p,y,M)**art1**" folgt "$0 \neq E$".*

Beweis **56-2** a) VS gleich p Menge.

1.1: Aus VS gleich "p Menge"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

1.2: Via **0-18** gilt: $y[\mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$.

1.3: Via **54-3** gilt: $\mathcal{U}$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1.3"$\mathcal{U}$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\mathcal{U}$ ist M_KettenVersiegelt.

3: Aus 2"$\mathcal{U}$ ist M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: $\mathcal{U}$ oben M_KettenVersiegelt.

4: Aus 1.1"$p \in \mathcal{U}$",
aus 1.2"$y[\mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$" und
aus 3"$\mathcal{U}$ oben M_KettenVersiegelt"
folgt via **56-1(Def)**: $\mathcal{U}$ ist (p,y,M)**art1**.

Beweis **56-2** `b)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ ist (p, y, M)**art1**
$\vee$
$\forall\alpha : \neg(\alpha$ ist (p, y, M)**art1**$)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist (p, y, M)**art1**.

`2:` Aus `1.1.Fall`"... Ω ist (p, y, M)**art1**"
folgt via **56-1(Def)**: $p \in \Omega$.

`3:` Aus `2`"$p \in \Omega$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`4:` Es gilt `3`"p Menge".
Es gilt `VS` gleich "p Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\forall\alpha : \neg(\alpha$ ist (p, y, M)**art1**$)$.

`1.2.Fall` $\forall\alpha : \neg(\alpha$ ist (p, y, M)**art1**$)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\forall\alpha : \neg(\alpha$ ist (p, y, M)**art1**$)$.

`c)` `VS` gleich E ist (p, y, M)**art1**.

`1:` Aus `VS` gleich "E ist (p, y, M)**art1**"
folgt via **56-1(Def)**: $p \in E$.

`2:` Aus `1`"$p \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

□

56-3. Hinter der folgenden Aussage verbirgt sich das erste von fünf Beispielen von Klassen, die **art1** sind:

56-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $p \in \mathsf{dom}\, M$.

$\rightarrow$) $y[\mathsf{dom}\, M] \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

Dann folgt "$\mathsf{dom}\, M$ *ist* (p, y, M)**art1**".

Beweis **56-3**

1: Via **54-3** gilt: $\mathsf{dom}\, M$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1"$\mathsf{dom}\, M$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\mathsf{dom}\, M$ ist M_KettenVersiegelt.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\, M$ ist KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: $\mathsf{dom}\, M$ oben M_KettenVersiegelt.

4: Aus $\rightarrow$)"$p \in \mathsf{dom}\, M$",
aus $\rightarrow$)"$y[\mathsf{dom}\, M] \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus 3"$\mathsf{dom}\, M$ oben M_KetttenVersiegelt"
folgt via **56-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, M$ ist (p, y, M)**art1**.

$\square$

56-4. Hinter der folgenden Aussage verbirgt sich das zweite von fünf Beispielen von Klassen, die **art1** sind:

56-4(Satz)

Es gelte:

→) $p \in \mathsf{ran}\, M$.

→) $y[\mathsf{ran}\, M] \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

Dann folgt "$\mathsf{ran}\, M$ *ist* (p, y, M)**art1**".

Beweis **56-4**

1: Via **54-3** gilt: $\mathsf{ran}\, M$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1"$\mathsf{ran}\, M$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\mathsf{ran}\, M$ ist M_KettenVersiegelt.

3: Aus 2"$\mathsf{ran}\, M$ ist KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: $\mathsf{ran}\, M$ oben M_KettenVersiegelt.

4: Aus →)"$p \in \mathsf{ran}\, M$",
aus →)"$y[\mathsf{ran}\, M] \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus 3"$\mathsf{ran}\, M$ oben M_KetttenVersiegelt"
folgt via **56-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, M$ ist (p, y, M)**art1**.

□

56-5. Hinter der folgenden Aussage verbirgt sich das dritte von fünf Beispielen von Klassen, die **art1** sind:

56-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\rightarrow$) $y[(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Dann folgt "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *ist* (p, y, M)**art1**".

Beweis **56-5**

1: Via **54-3** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ ist M_KettenVersiegelt.

3: Aus 2"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ ist KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ oben M_KettenVersiegelt.

4: Aus $\rightarrow$)"$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$",
aus $\rightarrow$)"$y[(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus 3"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ oben M_KetttenVersiegelt"
folgt via **56-1(Def)**: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ ist (p, y, M)**art1**.

□

56-6. Nun wird das vierte von fünf Beispielen für Klassen, die art1 sind, gegeben. Kurz gefasst gilt, falls r Relation in x ist und falls $y[x]$ eine TeilKlasse von x ist, dass dann p, x, y, r für jedes $p \in x$ **art1** sind:

56-6(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) $p \in x$.

→) $y[x] \subseteq x$.

*Dann folgt "x ist (p, y, r)***art1***".*

Beweis **56-6**

1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

2: Aus 1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$"
folgt via **54-2**: x ist r_versiegelt.

3: Aus 2 "x ist M_versiegelt"
folgt via **54-14**: x ist r_KettenVersiegelt.

4: Aus 3 "x ist KettenVersiegelt"
folgt via **54-13(Def)**: x oben r_KettenVersiegelt.

5: Aus →) "$p \in x$",
aus A1 gleich "$y[x] \subseteq x$" und
aus 4 "x oben r_KettenVersiegelt"
folgt via **56-1(Def)**: x ist (p, y, r)**art1**.

□

56-7. Im letzten der fünf Beispiele von Klassen, die **art1** sind, tritt eine Klasse auf, die $\preceq$ _vermehrend ist:

56-7(Satz)

Es gelte:

→) $\preceq$ *Halbordnung in* x.

→) $p \in x$.

→) y *ist* $\preceq$ *_vermehrend auf* x.

Dann folgt "$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ *ist* $(p, y, \preceq)$**art1**".

Beweis **56-7**

`HO`-**Notation**.

`1.1`: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2`: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ reflexiv in x.

`1.3`: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ transitiv.

`2`: Aus `1.1` "$\preceq$ Relation in x",
aus `1.2` "$\preceq$ reflexiv in x" und
aus →) "$p \in x$" folgt via **43-19**: $p \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$.

...

<u>Beweis</u> **56-7** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\alpha \in y[[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle]$.

4: Aus Thema3.1"$\alpha \in y[[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle]$"
folgt via **8-7**: $\exists\Omega : (\Omega \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle) \wedge ((\Omega, \alpha) \in y)$.

5: Aus 4"$\ldots \Omega \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \ldots$"
folgt via **41-25**: $p \preceq \Omega$.

6: Aus 1.1"$\preceq$ Relation in x" und
aus 5"$p \preceq \Omega$"
folgt via **34-1**: $\Omega \in x$.

7: Aus →)"y ist $\preceq$ -vermehrend auf x",
aus 6"$\Omega \in x$" und
aus 4"$\ldots (\Omega, \alpha) \in y$"
folgt via **30-7(Def)**: $\Omega \preceq \alpha$.

8: Aus 1.3"$\preceq$ transitiv",
aus 5"$p \preceq \Omega$" und
aus 7"$\Omega \preceq \alpha$"
folgt via **30-38**: $p \preceq \alpha$.

9: Aus 8"$p \preceq \alpha$"
folgt via **41-25**: $\alpha \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$.

Ergo Thema3.1: $\forall\alpha : (\alpha \in y[[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle]) \Rightarrow (\alpha \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{"}y[[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle] \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle\text{"}}$

...

Beweis **56-7** . . .

3.2: Aus 1.3“$\preceq$ transitiv”

folgt via **54-11**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $\preceq$ _versiegelt.

4: Aus 3.2“$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $\preceq$ _versiegelt”

folgt via **54-14**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $\preceq$ _KettenVersiegelt.

5: Aus 4“$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $\preceq$ _KettenVersiegelt”

folgt via **54-13(Def)**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ oben $\preceq$ _KettenVersiegelt.

6: Aus 2“$p \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”,

aus A1 gleich “$y[[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle] \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$” und

aus 5“$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ oben $\preceq$ _KettenVersiegelt”

folgt via **56-1(Def)**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $(p, y, \preceq)$**art1**.

□

56-8. Es folgen die Definitionen von vier Klassen, die bei den Beweisen der Fixpunktsätze von Tarski eine wichtige Rolle spielen. Bei $\mathsf{56.0}(p,y,M)$ handelt es sich um die Zusammenfassung aller *Mengen*, die (p,y,M)**art1** sind. Die Klasse $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$ müsste streng genommen nicht mit einem eigenen Symbol versehen werden. Dass dies dennoch geschieht, ist in einer dadurch vereinfachten Notation begründet. Gerne würde ich bei der Definition von $\mathsf{56.2}(p,y,M,q)$ auf "$y(q)$" verzichten und statt dessen eine auf "$(p,q) \in y$" basierte Definition geben. Jedoch führten die Versuche, dies umzusetzen, zu weit vom eigentlichen Beweis weg. Ähnlich wie bei $\mathsf{56.1}(p,y,M)$ könnte auch $\mathsf{56.2}(p,y,M,q)$ ohne eigenes Symbol verwendet werden. Aus Gründen der Vereinfachung wird dieser KlassenTerm verwendet. Bei $\mathsf{56.3}(p,y,M)$ handelt es sich um eine sehr technisch anmutende Klasse. Es ist Tarskis Beweisidee zu verdanken, dass etwas derartig Verwickeltes dennoch Bedeutung hat:

56-8(Definition)

1) $\mathsf{56.0}(p,y,M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p,y,M)\textbf{art1}\}$.

2) $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

3) $\mathsf{56.2}(p,y,M,q) = \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap (\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

4) $\mathsf{56.3}(p,y,M) = \mathsf{56.1}(p,y,M)$
$$\cap\Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}.$$

56-9. Es folgt ein Kriterium für $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$:

56-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

`ii)` *"E Menge" und "E ist* (p, y, M)**art1***"*.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

Beweis **56-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

Aus `VS` gleich "$E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$" und
aus "$\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$."
folgt: $(E \text{ Menge}) \wedge (E \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (E \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}$" und
aus `VS` gleich "E Menge ..."
folgt: $E \in \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M))\mathbf{art1}\}$.

`2:` Aus `1`"$E \in \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\} = \mathsf{56.0}(p, y, M)$"
folgt: $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

□

56-10. Nun werden einige nahe liegende Folgerungen aus $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$ gezogen. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - e) - c) - f)`:

56-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

Dann folgt:

a) $p \in E$.

b) $y[E] \subseteq E$.

c) $y[E]$ *Menge.*

d) E *oben* M_*KettenVersiegelt.*

e) $\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq E$.

f) $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ *Menge.*

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

<u>Beweis **56-10**</u>

1.1: Aus →) “$E \in$ 56.0(p,y,M) ”
folgt via **56-9**: $(E$ Menge$) \wedge (E$ ist (p,y,M)**art1**$)$.

1.2: Aus →) “$E \in$ 56.0(p,y,M) ”
folgt via **1-15**: $\bigcap$ 56.0$(p,y,M) \subseteq E$.

2.a): Aus 1.1 “…E ist (p,y,M)**art1**”
folgt via **56-1(Def)**: $p \in E$.

2.b): Aus 1.1 “…E ist (p,y,M)**art1**”
folgt via **56-1(Def)**: $y[E] \subseteq E$.

2.d): Aus 1.1 “…E ist (p,y,M)**art1**”
folgt via **56-1(Def)**: E oben M_KettenVersiegelt.

2.e): Aus “56.1$(p,y,M) = \bigcap$ 56.0(p,y,M)” und
aus 1.2 “$\bigcap$ 56.0$(p,y,M) \subseteq E$”
folgt: 56.1$(p,y,M) \subseteq E$.

3.c): Aus 2.b) “$y[E] \subseteq E$” und
aus 1.1 “E Menge…”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $y[E]$ Menge.

3.f): Aus 2.e) “56.1$(p,y,M) \subseteq E$” und
aus 1.1 “E Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: 56.1(p,y,M) Menge.

□

56-11. Die folgenden, einfach zu beweisenden Resultate verkürzen angenehm einige Beweise:

56-11(Satz)

a) *Aus* "p *Unmenge*" *folgt* "$\mathsf{56.0}(p,y,M) = 0$" *und* "$\mathsf{56.1}(p,y,M) = \mathcal{U}$".

b) *Aus* "$E \in \mathsf{56.0}(p,y,M)$" *und* "$w \in \mathsf{56.1}(p,y,M)$" *folgt* "$w \in E$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,y,M) = \{\omega : \omega \text{ } ist \text{ } (p,y,M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

Beweis **56-11** a) VS gleich p Unmenge.

Thema1.1 $\alpha \in 56.0(p, y, M)$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in 56.0(p, y, M)$" folgt via **56-9**: α ist (p, y, M)**art1**.

2: Aus VS gleich "p Unmenge" folgt via **56-2**: $\neg(\alpha$ ist (p, y, M)**art1**$)$.

3: Es gilt 1"α ist (p, y, M)**art1**".
Es gilt 2"$\neg(\alpha$ ist (p, y, M)**art1**$)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 56.0(p, y, M)$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in 56.0(p, y, M)) \Rightarrow (\alpha \notin 56.0(p, y, M))$.

Konsequenz via **0-19**: A1 | "$56.0(p, y, M) = 0$"

1.2: $56.1(p, y, M) = \bigcap 56.0(p, y, M) \stackrel{\text{A1}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

2: Aus A1 gleich "$56.0(p, y, M) = 0$" und aus 1.2 "$56.1(p, y, M) = \ldots = \mathcal{U}$" folgt: $(56.0(p, y, M) = 0) \wedge (56.1(p, y, M) = \mathcal{U})$.

b) VS gleich $(E \in 56.0(p, y, M)) \wedge (w \in 56.1(p, y, M))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots w \in 56.1(p, y, M)$" und aus "$56.1(p, y, M) = \bigcap 56.0(p, y, M)$" folgt: $w \in \bigcap 56.0(p, y, M)$.

2: Aus 1"$w \in \bigcap 56.0(p, y, M)$" und aus VS gleich "$E \in 56.0(p, y, M) \ldots$" folgt via **1-13**: $w \in E$.

□

56-12. Im folgenden Satz wird die Frage thematisiert, inwieweit es sich bei $\mathtt{56.1}(p, y, M)$ um die "kleinste" Klasse, die (p, y, M)**art1** ist, handelt. Interessanter Weise ist dies der Fall, wenn p eine Menge ist. Unabhängig davon sind die beiden komplizierteren der drei (p, y, M)**art1** definierenden Aussagen gültig:

56-12(Satz)

a) *Aus "p Menge" folgt "*$p \in \mathtt{56.1}(p, y, M)$*".*

b) $y[\mathtt{56.1}(p, y, M)] \subseteq \mathtt{56.1}(p, y, M)$.

c) $\mathtt{56.1}(p, y, M)$ *oben M_KettenVersiegelt.*

d) *Aus "p Menge" folgt "*$\mathtt{56.1}(p, y, M)$ *ist* (p, y, M)**art1***".*

56-8(Def) $\mathtt{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathtt{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathtt{56.0}(p, y, M)$.

Beweis **56-12**

8-22(Def) $\{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p, y, M)\}$.

---

a) `VS` gleich p Menge.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$”
folgt via **56-9**: α ist (p, y, M)**art1**.

`3:` Aus 2“α ist (p, y, M)**art1**”
folgt via **56-1(Def)**: $p \in \alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)) \Rightarrow (p \in \alpha)$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)) \Rightarrow (p \in \alpha)$” und
aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via **1-13**: $p \in \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

`2:` Aus `1.2`“$p \in \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$” und
aus “$\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$”
folgt: $p \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

<u>Beweis **56-12**</u> `b)`

`Thema1` $\alpha \in y[\mathsf{56.1}(p,y,M)\,]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in y[\mathsf{56.1}(p,y,M)\,]$" und
aus "$\mathsf{56.1}(p,y,M) \;= \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$"
folgt: $\alpha \in y[\bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)\,]$.

`3:` Via **8-27** gilt: $y[\bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)\,] \subseteq \bigcap\{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,\}$.

`4:` Aus 2 "$\alpha \in y[\bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)\,]$" und
aus 3 "$y[\bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)\,] \subseteq \bigcap\{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,\}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \bigcap\{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,\}$.

`Thema5.1` $\beta \in \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

`6.1:` Aus `Thema5.1` "$\beta \in \mathsf{56.0}(p,y,M)$"
folgt via **56-9**: β ist (p,y,M)**art1**.

`6.2:` Aus `Thema5.1` "$\beta \in \mathsf{56.0}(p,y,M)$"
folgt via **56-10**: $y[\beta]$ Menge.

`7.1:` Aus 6.1 "β ist (p,y,M)**art1**"
folgt via **56-1(Def)**: $y[\beta] \subseteq \beta$.

`7.2:` Aus `Thema5.1` "$\beta \in \mathsf{56.0}(p,y,M)$" und
aus 6.2 "$y[\beta]$ Menge"
folgt via **8-23**: $y[\beta] \in \{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,\}$.

`8:` Aus 4 "$\alpha \in \bigcap\{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,\}$" und
aus 7.2 "$y[\beta] \in \{y[\lambda] : \lambda \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,\}$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in y[\beta]$.

`9:` Aus 8 "$\alpha \in y[\beta]$" und
aus 7.1 "$y[\beta] \subseteq \beta$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema5.1`:

`A1`	"$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{56.0}(p,y,M)\,) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

...

...

<u>Beweis</u> **56-12** `b)` ...

[Thema1] $\alpha \in y[\mathsf{56.1}(p, y, M)]$.

...

`5.2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in y[\mathsf{56.1}(p, y, M)]$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`6`: Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{56.0}(p, y, M)) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `5.2`"α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

`7`: Aus `6`"$\alpha \in \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$" und
aus "$\bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M) = \mathsf{56.1}(p, y, M)$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y[\mathsf{56.1}(p, y, M)]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $y[\mathsf{56.1}(p, y, M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

`c)`

[Thema1.1] $\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$"
folgt via **56-10**:
α oben M_KettenVersiegelt.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)) \Rightarrow (\alpha$ oben M_KettenVersiegelt$)$"

`1.2`: Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.0}(p, y, M)) \Rightarrow (\alpha$ oben M_KettenVersiegelt$)$"
folgt via **54-16**: $\bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt.

`2`: Aus `1.2`"$\bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt" und
aus "$\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$"
folgt: $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt.

<u>Beweis **56-12**</u> `d)` `VS` gleich p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $y[\mathsf{56.1}(p, y, M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt.

`2:` Aus `1.1`“$p \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$”,
aus `1.2`“$y[\mathsf{56.1}(p, y, M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$” und
aus `1.3`“$\mathsf{56.1}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt”
folgt via **56-1(Def)**: $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ ist (p, y, M)**art1**.

□

56-13. Wenn eine *Menge* (p, y, M)**art1** ist, dann umfasst sie $\mathsf{56.1}(p, y, M)$:

56-13(Satz)

*Aus "E Menge" und "E ist (p, y, M)**art1**" folgt "$\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq E$".*

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

Beweis **56-13**

1: Aus →) "E Menge" und
aus →) "E ist (p, y, M)**art1**"
folgt via **56-9**: $E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

2: Aus 1 "$E \in \mathsf{56.0}(p, y, M)$"
folgt via **56-10**: $\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq E$.

□

56-14. Eine Anwendung von **56-13** ist das folgende Resultat:

56-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) E *Menge.*

$\rightarrow$) E *ist* (p, y, M)**art1**.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

Dann folgt "$\mathsf{56.1}(p, y, M) = E$."

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\textbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

Beweis **56-14**

1: Aus $\rightarrow$) "E Menge" und
aus $\rightarrow$) "E ist (p, y, M)**art1**"
folgt via **56-13**: $\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq E$.

2: Aus 1 "$\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq E$" und
aus $\rightarrow$) "$E \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{56.1}(p, y, M) = E$.

$\square$

56-15. Falls r eine Relation in einer Menge x ist und falls $p \in x$ und $y[x] \subseteq x$ gilt, dann ist $\mathsf{56.1}(p, y, r)$ eine TeilKlasse von x:

56-15(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *x Menge.*

→) *$p \in x$.*

→) *$y[x] \subseteq x$.*

Dann folgt "$\mathsf{56.1}(p, y, r) \subseteq x$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, r) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, y, r)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, r) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, r)$.

Beweis **56-15**

1: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "$p \in x$" und
aus →) "$y[x] \subseteq x$"
folgt via **56-6**: x ist $(p, y, r)\mathbf{art1}$.

2: Aus →) "x Menge" und
aus 1 "x ist $(p, y, r)\mathbf{art1}$"
folgt via **56-13**: $\mathsf{56.1}(p, y, r) \subseteq x$.

□

56-16. Es folgt eine Modifikation von **56-15** für r_vermehrende Klassen y. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

56-16(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) x *Menge.*

$\rightarrow$) $p \in x$.

$\rightarrow$) y *ist* r*_vermehrend auf* x.

Dann folgt:

a) $\mathsf{56.1}(p, y, r) \subseteq x$.

b) $\mathsf{56.1}(p, y, r) \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

c) $x \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, r) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, y, r)\textbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, r) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, r)$.

<u>Beweis **56-16**</u>

`1.1:` Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "y ist r_vermehrend auf x"
folgt via **34-2**: $y[x] \subseteq x$.

`1.c):` Aus →) "y ist r_vermehrend auf x"
folgt via **30-11**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

`2.a):` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "x Menge",
aus →) "$p \in x$" und
aus `1.1` "$y[x] \subseteq x$"
folgt via **56-15**: $\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq x$.

`3.b):` Aus `2.a)` "$\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq x$" und
aus `1.c)` "$x \subseteq \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{56.1}(p, y, M) \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

□

56-17. Die folgende Definition ebnet den Weg zu einfacheren Formulierungen im Beweis der Fixpunktsätze von Tarski:

56-17(Definition)

"E, f **sind** (p, M)**art2**" genau dann, wenn gilt:

E Menge.

$\wedge$

$p \in E$.

$\wedge$

f Funktion.

$\wedge$

f ist M_vermehrend auf E.

56-18. Es werden grundlegende Eigenschaften von Klassen, die **art2** sind, angegeben:

56-18(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ E, f *sind* $(p, M)\mathbf{art2}$.

Dann folgt:

a) $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

b) $\mathsf{56.1}(p, f, M)$ *ist* $(p, f, M)\mathbf{art1}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, M) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, f, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, M)$.

Beweis **56-18**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$"E, f sind $(p, M)\mathbf{art2}$"
folgt via **56-17(Def)**: $p \in E$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"E, f sind $(p, M)\mathbf{art2}$"
folgt via **56-17(Def)**: f ist M_vermehrend auf E.

`2.1:` Aus `1.1`"$p \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.a):` Aus `1.2`"f ist M_vermehrend auf E"
folgt via **30-11**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3.b):` Aus `2.1`"p Menge"
folgt via **56-12**: $\mathsf{56.1}(p, f, M)$ ist $(p, f, M)\mathbf{art1}$.

□

56-19. Nun wird **56-16** für Klassen, die **art2** sind, adaptiert und um `d)` erweitert. Aussage `c)` könnte via **56-18** schneller bewiesen werden, doch sollte der Fluss der Argumentation nicht gestört werden:

56-19(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) x, f *sind* (p, r)**art2**.

Dann folgt:

a) $\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq x$.

b) $\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

c) $x \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

d) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p, f, r))$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, r) = \{\omega : \omega$ *ist* (p, f, r)**art1**$\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, r) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, r)$.

<u>Beweis</u> **56-19** `abc)`

`1.1:` Aus →) “x, f sind (p, r)**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: x Menge.

`1.2:` Aus →) “x, f sind (p, r)**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: $p \in x$.

`1.4:` Aus →) “x, f sind (p, r)**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: f ist r_vermehrend auf x.

`2.a):` Aus →) “r Relation in x”,
aus `1.1` “x Menge”,
aus `1.2` “$p \in x$” und
aus `1.3` “f ist r_vermehrend auf x”
folgt via **56-16**: $\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq x$.

`2.b):` Aus →) “r Relation in x”,
aus `1.1` “x Menge”,
aus `1.2` “$p \in x$” und
aus `1.3` “f ist r_vermehrend auf x”
folgt via **56-16**: $\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2.c):` Aus →) “r Relation in x”,
aus `1.1` “x Menge”,
aus `1.2` “$p \in x$” und
aus `1.3` “f ist r_vermehrend auf x”
folgt via **56-16**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

<u>Beweis **56-19**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$.

`2.1:` Via **56-12** gilt: $f[\mathsf{56.1}(p, f, r)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, r)$.

`2.2:` Aus →) " x, f sind (p, r)**art2** "
folgt via **56-17(Def)**: f Funktion.

`2.3:` Aus →) " r Relation in x " und
aus →) " x, f sind (p, r)**art2** "
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2.2` " f Funktion " ,
aus `Thema1` " $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$ " und
aus `2.3` " $\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$ "
folgt via **18-27**: $f(\alpha) \in f[\mathsf{56.1}(p, f, r)]$.

`4:` Aus `3` " $f(\alpha) \in f[\mathsf{56.1}(p, f, r)]$ " und
aus `2.1` " $f[\mathsf{56.1}(p, f, r)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, r)$ "
folgt via **0-4**: $f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p, f, r))$.

□

56-20. Falls $\preceq$ eine Halbordnung in x ist, dann ist zusätzlich zu **56-19** das folgende Resultat verfügbar:

56-20(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow)$ x, f *sind* $(p, \preceq)$**art2**.

Dann folgt "$\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, \preceq) = \{\omega : \omega$ *ist* $(p, f, \preceq)$**art1**$\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, \preceq)$.

Beweis **56-20**

1.1: Aus →) “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: x Menge.

1.2: Aus →) “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: $p \in x$.

1.3: Aus →) “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: f ist $\preceq$ _vermehrend auf x.

1.4: Aus →) “$\preceq$ Halbordnung in x”
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

2.1: Aus →) “$\preceq$ Halbordnung in x”,
aus 1.2 “$p \in x$” und
aus 1.3 “f ist $\preceq$ _vermehrend auf x”
folgt via **56-7**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**.

2.2: Aus 1.4 “$\preceq$ Relation in x”
folgt via **42-1**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq x$.

3: Aus 2.2 “$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq x$” und
aus 1.1 “x Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ Menge.

4: Aus 3 “$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ Menge” und
aus 2.1 “$[p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**”
folgt via **56-13**: $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$.

□

56-21. Die folgende Aussage ist trivial. Dass sie dennoch in den Essays erscheint liegt daran, dass an späteren Beweisstellen schnell auf die die beiden Schlussfolgerungen zurück gegriffen werden soll - und das heisst, dass der lange Umweg über die Definition von $\mathsf{56.2}(p,y,M,q)$ und die Eigenschaften von Intervallen, von binären Vereinigungen und von binären Durchschnitten vermieden werden soll:

56-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \mathsf{56.2}(p,y,M,q)$.

Dann folgt:

a) $w \in \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

b) *"w_M_q" oder "y(q)_M_w"*.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,y,M) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p,y,M)\textbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p,y,M,q) = \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap (\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Beweis **56-21**

1: Aus →) “ $w \in 56.2(p, y, M, q)$ ” und
aus “ $56.2(p, y, M, q) = 56.1(p, y, M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$”
folgt: $w \in 56.1(p, y, M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

2: Aus 1 “ $w \in 56.1(p, y, M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$ ”
folgt via **2-2**: $(w \in 56.1(p, y, M)) \wedge (w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

3.a): Aus 2
folgt: $w \in 56.1(p, y, M)$.

3.1: Aus 2 “ $\ldots w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$ ”
folgt via **2-2**: $(w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]) \vee (w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

Fallunterscheidung

3.1.1.Fall $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

4: Aus 3.1.1.Fall “ $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$”
folgt via **41-25**: $w \_ M \_ q$.

5: Aus 4
folgt: $(w \_ M \_ q) \vee (y(q) \_ M \_ w)$.

3.1.2.Fall $w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

4: Aus 3.1.2.Fall “ $w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$”
folgt via **41-25**: $y(q) \_ M \_ w$.

5: Aus 4
folgt: $(w \_ M \_ q) \vee (y(q) \_ M \_ w)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

A1 | “ $(w \_ M \_ q) \vee (y(q) \_ M \_ w)$ ”

3.b): Aus A1
folgt: $(w \_ M \_ q) \vee (y(q) \_ M \_ w)$.

□

56-22. Dass die folgende Aussage in den Essays erscheint liegt daran, dass später einfache Bedingungen, die "$w \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$" garantieren, verfügbar sein sollen:

56-22(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $w \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

$\rightarrow)$

w_M_q.	
	oder
$w\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$.	
	oder
$y(q)\_M\_w$.	
	oder
$y(q)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$.	

Dann folgt "$w \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \text{ } \mathit{ist} \text{ } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p, y, M, q) = \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

Beweis **56-22**

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(w \_ M \_ q) \vee (w \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q) \vee (y(q) \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q) \vee (y(q) \_ M \_ w)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $w \_ M \_ q$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$w \_ M \_ q$"

folgt via **41-25**: $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

`3:` Aus 2"$w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$"

folgt via **2-2**: $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`1.1.2.Fall` $w \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`"$w \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$"
folgt via **41-3**: $w \_ M \_ q$.

`3:` Aus 2"$w \_ M \_ q$"

folgt via **41-25**: $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

`4:` Aus 2"$w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$"

folgt via **2-2**: $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`1.1.3.Fall` $y(q) \_ M \_ w$.

`2:` Aus `1.1.3.Fall`"$y(q) \_ M \_ w$"

folgt via **41-25**: $w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`3:` Aus 2"$w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$"

folgt via **2-2**: $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

...

<u>Beweis **56-22**</u>

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.1.4.Fall}}$ $\qquad y(q)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w.$

2: Aus `1.1.4.Fall` “$y(w)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$”
folgt via **41-3**: $\qquad y(w)\_M\_q.$

3: Aus 2 “$y(q)\_M\_w$”
folgt via **41-25**: $\qquad w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

4: Aus 3 “$w \in [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **2-2**: $\qquad w \in \langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}w \in \langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle\text{”}}$

1.2: Aus $\rightarrow)$ “$w \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$” und
aus `A1` gleich “$w \in \langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **2-2**: $\qquad w \in \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap (\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

2: Aus 1.2 “$w \in \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap (\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle)$” und
aus “$\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap (\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot\rangle) = \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$”
folgt: $\qquad w \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q).$

□

56-23. Unter vertrauten Bedingungen gilt für alle $\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,r)$ die beinahe selbstbezügliche Aussage $\alpha \in \mathsf{56.2}(p,y,r,\alpha)$:

56-23(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) *x Menge.*

$\rightarrow$) *$p \in x$.*

$\rightarrow$) *$y[x] \subseteq x$.*

Dann folgt "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,r)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{56.2}(p,y,r,\alpha))$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,y,r) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p,y,r)\textbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,y,r) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,r)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p,y,r,\alpha) = \mathsf{56.1}(p,y,r) \cap (\langle \cdot \overset{r}{|} \alpha] \cup [y(\alpha) \overset{r}{|} \cdot \rangle)$.

<u>Beweis **56-23**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, r)$.

2: Aus →) “ r Relation in x ” ,
aus →) “ x Menge ” ,
aus →) “ $p \in x$ ” und
aus →) “ $y[x] \subseteq x$ ”
folgt via **56-15**: $\mathsf{56.1}(p, y, r) \subseteq x$.

3: Aus `Thema1` “ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, r)$ ” und
aus 2 “ $\mathsf{56.1}(p, y, r) \subseteq x$ ”
folgt via **0-4**: $\alpha \in x$.

4: Aus →) “ r reflexiv in x ” und
aus 3 “ $\alpha \in x$ ”
folgt via **30-17(Def)**: α_r_α.

5: Aus →) “ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, r)$ ” und
aus 4 “ α_r_α ”
folgt via **56-22**: $\alpha \in \mathsf{56.2}(p, y, r, \alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, r)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{56.2}(p, y, r, \alpha))$.

□

56-24. Der nunmehrige Satz beinhaltet zwei einfache, doch im Folgenden nützliche Aussagen:

56-24(Satz)

a) $\mathsf{56.2}(p,y,M,q) \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

b) $y[\mathsf{56.2}(p,y,M,q)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,y,M) = \{\omega : \omega \ \mathit{ist}\ (p,y,M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p,y,M,q) = \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

Beweis **56-24**

`1.1:` $\mathsf{56.2}(p,y,M,q) = \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle) \overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

`1.2:` Via **56-12** gilt: $y[\mathsf{56.1}(p,y,M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

`2.a):` Aus `1.1`
folgt: $\mathsf{56.2}(p,y,M,q) \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

`3:` Aus `2.a)` "$\mathsf{56.2}(p,y,M,q) \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$"
folgt via **8-9**: $y[\mathsf{56.2}(p,y,M,q)] \subseteq y[\mathsf{56.1}(p,y,M)]$.

`4.b):` Aus `3` "$y[\mathsf{56.2}(p,y,M,q)] \subseteq y[\mathsf{56.1}(p,y,M)]$" und
aus `1.2` "$y[\mathsf{56.1}(p,y,M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$"
folgt via **0-6**: $y[\mathsf{56.2}(p,y,M,q)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

□

56-25. Im folgenden Satz wird Hinreichendes dafür formuliert, dass für alle $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ die "vertauschte" Aussage $p \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, \alpha)$ gilt:

56-25(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) x, f *sind* $(p, \preceq)$**art2**.

Dann folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \Rightarrow (p \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, \alpha))$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, \preceq) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, f, \preceq)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, \preceq)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, \alpha) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap (\langle \cdot \overset{\preceq}{|} \alpha] \cup [f(\alpha) \overset{\preceq}{|} \cdot \rangle)$.

Beweis **56-25**

`HO`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,.$

`2.1:` Aus $\rightarrow\!)$ “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: $p \in x.$

`2.2:` Aus $\rightarrow\!)$ “$\preceq$ Halbordnung in x”,
aus $\rightarrow\!)$ “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-20**: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle.$

`3.1:` Aus `2.1`“$p \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$” und
aus `2.2`“$\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle.$

`4.1:` Aus `3.1`“p Menge”
folgt via **56-12**: $p \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,.$

`4.2:` Aus `3.2`“$\alpha \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $p \preceq \alpha.$

`5:` Aus `4.1`“$p \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$” und
aus `4.2`“$p \preceq \alpha$”
folgt via **56-22**: $p \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, \alpha)\,.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \Rightarrow (p \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, \alpha)).$

$\square$

56-26. Nun wird die Frage thematisiert, unter welchen Voraussetzungen aus $\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r)$ die Aussage $f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p,f,r\alpha)$ folgt. Interessanter Weise reicht hierfür etwas weniger als in **56-25**:

56-26(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) r *reflexiv in* x.

→) x, f *sind* (p,r)**art2**.

Dann folgt "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r)) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p,f,r,\alpha))$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,f,r) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p,f,r)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,f,r) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,f,r)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p,f,r,\alpha) = \mathsf{56.1}(p,f,r) \cap (\langle\cdot \overset{r}{|} \alpha] \cup [f(\alpha) \overset{r}{|} \cdot\rangle)$.

Beweis **56-26**

1.1: Aus →) "x, f sind (p,r)**art2**"
folgt via **56-17(Def)**:
$(x \text{ Menge}) \wedge (p \in x) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } r\_\text{vermehrend auf } x)$.

1.2: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "x, f sind (p,r)**art2**"
folgt via **56-19**: $\mathsf{56.1}(p,f,r) \subseteq x$.

1.3: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "x, f sind (p,r)**art2**"
folgt via **56-19**: $\mathsf{56.1}(p,f,r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus →) "r Relation in x" und
aus 1"… f ist $r_$vermehrend auf x"
folgt via **34-2**: $f[x] \subseteq x$.

<u>Beweis **56-26**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$.

`4.1`: $\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha) \overset{\mathbf{56-24}}{\subseteq} \mathsf{56.1}(p, f, r) \overset{1.3}{\subseteq} \mathsf{dom}\, f$.

`4.2`: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x",
aus `1.1` "x Menge...",
aus `1.1` "$\ldots p \in x \ldots$",
aus `2` "$f[x] \subseteq x$" und
aus `Thema3` "$\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$"
folgt via **56-23**: $\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)$.

`5.2`: Aus `4.1`
folgt via **0-6**: $\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha) \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`6`: Aus `1.1` "$\ldots f$ Funktion...",
aus `4.2` "$\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)$" und
aus `5.2` "$\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha) \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(\alpha) \in f[\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)]$.

`7`: Via **56-24** gilt: $f[\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, r)$.

`8`: Aus `5` "$f(\alpha) \in f[\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)]$" und
aus `6` "$f[\mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, r)$"
folgt via **0-4**: $f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$.

`9`: Aus `8` "$f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$" und
aus `1.2` "$\mathsf{56.1}(p, f, r) \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $f(\alpha) \in x$.

`10`: Aus →) "r reflexiv in x" und
aus `9` "$f(\alpha) \in x$"
folgt via **30-17(Def)**: $f(\alpha)\_r\_f(\alpha)$.

`11`: Aus `8` "$f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p, f, r)$" und
aus `10` "$f(\alpha)\_r\_f(\alpha)$"
folgt via **56-22**: $f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha)$.

Ergo `Thema3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, r)) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p, f, r, \alpha))$.

□

56-27. Nun wird Hinreichendes formuliert, um zu erreichen, dass $\mathsf{56.2}(p, y, M, q)$ oben M_KettenVersiegelt ist:

56-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *p Menge.*

$\rightarrow$) $q \in \mathsf{ran}\, M$.

Dann folgt "$\mathsf{56.2}(p, y, M, q)$ oben M_KettenVersiegelt".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.2}(p, y, M, q) = \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap (\langle \cdot \overset{M}{|} q] \cup [y(q) \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

<u>Beweis **56-27**</u>

1.1: Via **56-24** gilt: $\mathsf{56.2}(p, y, M, q) \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "p Menge"
folgt via **56-12**: $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ ist $(p, y, M)\mathbf{art1}$.

2: Aus 1.2 "$\mathsf{56.1}(p, y, M)$ ist $(p, y, M)\mathbf{art1}$"
folgt via **56-1(Def)**: $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt.

Beweis **56-27** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.2}(p, y, M, q)\,) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)$.

`4:` Aus `Thema3`“$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{56.2}(p, y, M, q)\ \ldots$” und
aus `1.1`“$\mathsf{56.2}(p, y, M, q) \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$ ”
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

`5:` Aus `Thema3`“$0 \neq \alpha \ldots$” und
aus `4`“$\alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$ ”
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

`6:` Aus `5`“$0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, y, M)$ ” ,
aus `Thema3`“$\ldots \alpha$ ist M_Kette . . . ” ,
aus `Thema3`“$\ldots \beta$ ist M_Supremum von α” und
aus `2`“$\mathsf{56.1}(p, y, M)$ oben M_KettenVersiegelt” ”
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

`7:` Es gilt: q obere M_Schranke von α
$\vee$
$(\neg(q \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \alpha))$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` q obere M_Schranke von α.

`8:` Aus `Thema3`“$\ldots \beta$ ist M_Supremum von α” und
aus `7.1.Fall`“q obere M_Schranke von α
folgt via **36-1(Def)**: $\beta\text{\_}M\text{\_}q$.

`9:` Aus `6`“$\beta \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$ ” und
aus `8`“$\beta\text{\_}M\text{\_}q$”
folgt via **56-22**: $\beta \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$.

. . .

Beweis **56-27** . . .

`Thema3` $(0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.2}(p, y, M, q)) \wedge (\alpha$ ist M_Kette$)$
$\wedge(\beta$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`7.2.Fall` $\neg(q$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`8:` Aus `7.2.Fall`"$\neg(q$ obere M_Schranke von $\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**:
q keine obere M_Schranke von α.

`9:` Aus →) "$q \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `8`"q keine obere M_Schranke von α"
folgt via **35-10**: $\exists \Omega : (\Omega \in \alpha) \wedge (\neg(\Omega\_M\_q))$.

`10.1:` Aus `9`"$\ldots \Omega \in \alpha \ldots$" und
aus `Thema3`"$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{56.2}(p, y, M, q) \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$.

`10.2:` Aus `Thema3`"$\ldots \beta$ ist M_Supremum von α" und
aus `9`"$\ldots \Omega \in \alpha \ldots$"
folgt via **36-4**: Ω_M_β.

`11:` Aus `10.1`"$\Omega \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$"
folgt via **56-21**: $(\Omega\_M\_q) \vee (y(q)\_M\_\Omega)$.

`12:` Aus `11`"$(\Omega\_M\_q) \vee (y(q)\_M\_\Omega)$" und
aus `9`"$\ldots \neg(\Omega\_M\_q)$"
folgt: $y(q)\_M\_\Omega$.

`13:` Aus →) "M transitiv",
aus `12`"$y(q)\_M\_\Omega$" und
aus `10.2`"Ω_M_β"
folgt via **30-38**: $y(q)\_M\_\beta$.

`14:` Aus `6`"$\beta \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$" und
aus `13`"$y(q)\_M\_\beta$"
folgt via **56-22**: $\beta \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\beta \in \mathsf{56.2}(p, y, M, q)$.

. . .

<u>Beweis</u> **56-27** ...

Ergo `Thema3`:

$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.2}(p,y,M,q)\,) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha))$

$$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{56.2}(p,y,M,q)\,).$$

Konsequenz via **54-13(Def)**: $\mathsf{56.2}(p,y,M,q)$ oben M_KettenVersiegelt.

□

56-28. Es folgt ein kurz gefasstes Kriterium zur Beschreibung der Elemente von $\mathsf{56.3}(p,y,M)$:

56-28(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $w \in \mathsf{56.3}(p,y,M)$.

`ii)` $w \in \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

$\wedge$

$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)) \Rightarrow (\beta\_M\_w)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,y,M) = \{\omega : \omega \ \mathit{ist}\ (p,y,M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.3}(p,y,M)$

$$= \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}.$$

Beweis **56-28** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $w \in \mathsf{56.3}(p,y,M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{56.3}(p,y,M)$" und aus "$\mathsf{56.3}(p,y,M) = \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}$"

folgt: $w \in \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}$"
folgt via **2-2**:

$$(w \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge (w \in \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}).$$

`3:` Aus `2`"$\ldots w \in \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}$"

folgt: $y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} w[\,] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} w]$.

...

Beweis **56-28** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $w \in 56.3(p,y,M)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $(\alpha \in 56.1(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w)$.

5: Aus Thema4.1 "... $\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w$"
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{|} w[$.

6: Aus Thema4.1 "$\alpha \in 56.1(p,y,M)$ ..." und
aus 5 "$\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{|} w[$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in 56.1(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} w[$.

7: Aus Thema4.1 "... $(\alpha,\beta) \in y$ ..." und
aus 6 "$\alpha \in 56.1(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} w[$"
folgt via **8-8**: $\beta \in y[56.1(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} w[]$.

8: Aus 7 "$\beta \in y[56.1(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} w[]$" und
aus 3 "$y[56.1(p,y,M) \cap \langle \cdot \overset{M}{|} w[] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} w]$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} w]$.

9: Aus 8 "$\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} w]$"
folgt via **41-25**: $\beta \_ M \_ w$.

Ergo Thema4.1:

A1	"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in 56.1(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w)) \Rightarrow (\beta \_ M \_ w)$"

4.2: Aus 2 "$w \in 56.1(p,y,M)$ ..." und
aus A1 gleich
"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in 56.1(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w)) \Rightarrow (\beta \_ M \_ w)$"
folgt:
$w \in 56.1(p,y,M)$
$\wedge \quad (\forall \alpha, \beta : (\alpha \in 56.1(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w)) \Rightarrow (\beta \_ M \_ w))$.

<u>Beweis **56-28**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(w \in \mathsf{56.1}(p,y,M))$

$$\wedge(\forall\alpha,\beta : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)) \Rightarrow (\beta\_M\_w))$$

`Thema1.1` $\gamma \in y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\big].$

2: Aus `Thema1.1` "$\gamma \in y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\big]$"
folgt via **8-7**:

$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\big) \wedge ((\Omega,\gamma) \in y).$$

3: Aus 2 "$\ldots\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\ldots$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge (\Omega \in \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\big).$

4: Aus 3 "$\ldots\Omega \in \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[$"
folgt via **41-25**: $\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w.$

5: Aus 3 "$\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M)\ \ldots$",
aus 2 "$\ldots(\Omega,\gamma) \in y$",
aus 4 "$\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\forall\alpha,\beta :$
$(\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge ((\alpha,\beta) \in y) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)) \Rightarrow$
(β_M_w)"
folgt: $\gamma\_M\_w.$

6: Aus 5 "γ_M_w"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot\overset{M}{|}w\big].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall\gamma : (\gamma \in y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\big]) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot\overset{M}{|}w\big]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1}\Big|\ \text{“}y\big[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot\overset{M}{|}w\big[\big] \subseteq \langle\cdot\overset{M}{|}w\big]\text{”}}$

...

<u>Beweis **56-28**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(w \in \mathsf{56.1}(p, y, M)\,)$

$$\wedge(\forall\alpha, \beta : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, M)\,) \wedge ((\alpha, \beta) \in y) \wedge (\alpha\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w)) \Rightarrow (\beta\_M\_w))$$

...

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{56.1}(p, y, M)\ \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2:` Aus `A1` gleich "$y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} w\big[\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} w\big]$" und
aus `1.2`"w Menge"
folgt: $w \in \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big[\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big]\Big\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{56.1}(p, y, M)\ \ldots$" und
aus 2"$w \in \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big[\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big]\Big\}$"
folgt via **2-2**: $w \in \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big[\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big]\Big\}$.

`4:` Aus 3"$w \in \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big[\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big]\Big\}$"
und
aus "$\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big[\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega\big]\Big\} = \mathsf{56.3}(p, y, M)$"
folgt: $w \in \mathsf{56.3}(p, y, M)$.

□

56-29. Es folgt ein kurz gefasstes Kriterium zur Beschreibung der Elemente von $\mathsf{56.3}(p, f, M)$, wenn f eine Funktion ist:

56-29(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $w \in \mathsf{56.3}(p, f, M)$.

`ii)` $w \in \mathsf{56.1}(p, f, M)$.

$\wedge$

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, M)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w) \Rightarrow (f(\alpha) \_ M \_ w).$$

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, f, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.3}(p, f, M)$

$$= \mathsf{56.1}(p, f, M) \cap \left\{\omega : f\left[\mathsf{56.1}(p, f, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega[\,]\right] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega]\right\}.$$

<u>Beweis **56-29**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $w \in 56.3(p, f, M)$.

1.1: Aus VS gleich " $w \in 56.3(p, f, M)$ "
folgt via **56-28**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{" } w \in 56.1(p, f, M) \text{ "}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in 56.1(p, f, M)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w)$.

2: Aus →) " f Funktion " und
aus Thema1.2 " $\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ "
folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)) \in f$.

3: Aus VS gleich " $w \in 56.3(p, f, M)$ " ,
aus Thema1.2 " $\alpha \in 56.1(p, f, M) \ldots$ " ,
aus 2 " $(\alpha, f(\alpha)) \in f$ " und
aus Thema1.2 " $\ldots \alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w$ "
folgt via **56-28**: $f(\alpha) \_ M \_ w$.

Ergo Thema1.2:

$\boxed{\texttt{A2} \mid \text{" } \forall \alpha : (\alpha \in 56.1(p, f, M)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w) \Rightarrow (f(\alpha) \_ M \_ w) \text{ "}}$

1.3: Aus A1 und
aus A2
folgt: $w \in 56.1(p, f, M)$

$\wedge \quad (\forall \alpha : ((\alpha \in 56.1(p, f, M)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w)) \Rightarrow (f(\alpha) \_ M \_ w))$.

Beweis **56-29** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(w \in \mathsf{56.1}(p, f, M))$

$\wedge \quad (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, M)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_w)) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_w))$

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\gamma \in \mathsf{56.1}(p, f, M)) \wedge ((\gamma, \delta) \in f) \wedge (\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_w)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\gamma, \delta) \in f \ldots$"
folgt via **7-5**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1`"$\ldots (\gamma, \delta) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\delta = f(\gamma)$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in \mathsf{56.1}(p, f, M) \ldots$",
aus `2.1`"$\gamma \in \mathsf{dom}\, f$",
aus `Thema1.1`"$\ldots \gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_w$" und
aus `VS` gleich
$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, M)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_w)$
$\Rightarrow (f(\alpha)\_M\_w)$
folgt: $f(\gamma)\_M\_w$.

`4:` Aus `3`"$f(\gamma)\_M\_w$" und
aus `2.2`"$\delta = f(\gamma)$"
folgt: δ_M_w.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \mathsf{56.1}(p, f, M)) \wedge ((\gamma, \delta) \in f) \wedge (\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_w)) \Rightarrow (\delta\_M\_w)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{56.1}(p, f, M) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : (\gamma \in \mathsf{56.1}(p, f, M)) \wedge ((\gamma, \delta) \in f) \wedge (\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_w)$
$\Rightarrow (\delta\_M\_w)$"
folgt via **56-28**: $w \in \mathsf{56.3}(p, f, M)$.

$\square$

56-30. Der nunmehrige Satz beinhaltet zwei einfache, doch im Folgenden nützliche Aussagen über $\mathsf{56.3}(p,y,M)$:

56-30(Satz)

a) $\mathsf{56.3}(p,y,M) \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

b) $y[\mathsf{56.3}(p,y,M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,y,M) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p,y,M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,y,M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,y,M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.3}(p,y,M)$

$$= \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \left\{\omega : y\left[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\ \omega[\,]\right] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ \omega]\right\}.$$

Beweis **56-30**

1.1: $\mathsf{56.3}(p,y,M,q) = \mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \left\{\omega : y\left[\mathsf{56.1}(p,y,M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\ \omega[\,]\right] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ \omega]\right\}$

$\overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

1.2: Via **56-12** gilt: $y[\mathsf{56.1}(p,y,M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

2.a): Aus 1.1
folgt: $\mathsf{56.3}(p,y,M,q) \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

3: Aus 2.a) “$\mathsf{56.3}(p,y,M,q) \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$”
folgt via **8-9**: $y[\mathsf{56.3}(p,y,M,q)] \subseteq y[\mathsf{56.1}(p,y,M)]$.

4.b): Aus 3 “$y[\mathsf{56.3}(p,y,M,q)] \subseteq y[\mathsf{56.1}(p,y,M)]$” und
aus 1.2 “$y[\mathsf{56.1}(p,y,M)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$”
folgt via **0-6**: $y[\mathsf{56.3}(p,y,M,q)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,y,M)$.

□

56-31. Falls $\mathsf{56.3}(p, y, M)$ ungleich $\mathsf{56.1}(p, y, M)$ ist, dann gibt es Ω mit speziellen Eigenschaften:

56-31(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

$\rightarrow$) $w \notin \mathsf{56.3}(p, y, M)$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

e.1) $\Omega \in \mathsf{56.1}(p, y, M)$.

e.2) $\Omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ w$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \ \mathit{ist}\ (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.3}(p, y, M)$

$$= \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\ \omega[\,] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ \omega]\Big\}.$$

<u>Beweis **56-31**</u>

1: Aus →) “ $w \notin \mathsf{56.3}(p,y,M)$ ”
folgt via **56-28**:
$\neg\Big((w \in \mathsf{56.1}(p,y,M))\wedge(\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M))\wedge((\alpha,\beta) \in y)\wedge(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w))$
$\Rightarrow (\beta\_M\_w))\Big).$

2: Aus 1
folgt: $\neg(w \in \mathsf{56.1}(p,y,M))$
$\vee(\neg(\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M))\wedge((\alpha,\beta) \in y)\wedge(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)) \Rightarrow (\beta\_M\_w))).$

3: Aus 2
folgt: $w \notin \mathsf{56.1}(p,y,M)$
$\vee(\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge ((\Omega,\Psi) \in y) \wedge (\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w) \wedge (\neg(\Psi\_M\_w))).$

4: Aus →) “ $w \in \mathsf{56.1}(p,y,M)$ ” und
aus 3“ $w \notin \mathsf{56.1}(p,y,M)$
$\vee(\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M))\wedge((\Omega,\Psi) \in y)\wedge(\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)\wedge(\neg(\Psi\_M\_w)))$”
folgt:
$\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge ((\Omega,\Psi) \in y) \wedge (\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w) \wedge (\neg(\Psi\_M\_w)).$

5: Aus 4
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge (\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w).$

□

56-32. In Variation von **56-26** wird nun Hinreichendes dafür angegeben, dass aus $\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r)$ die Aussage $f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p,f,r,\beta)$ folgt. Hierzu sind Voraussetzungen an p, f, r und an β erforderlich:

56-32(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *x, f sind (p,r)***art2**.

Dann folgt "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r)) \wedge (\alpha \,\overset{\mathbf{ir}}{r}\, \beta) \wedge (\beta \in \mathsf{56.3}(p,f,r))$
$\Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p,f,r,\beta))$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,f,r) = \{\omega : \omega$ *ist* (p,f,r)**art1**$\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,f,r) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,f,r)$.

56-8(Def)

$$\mathsf{56.3}(p,f,r) = \mathsf{56.1}(p,f,r) \cap \left\{\omega : f\left[\mathsf{56.1}(p,f,r) \cap \langle \cdot \overset{r}{|}\, \omega [\,\right] \subseteq \langle \cdot \overset{r}{|}\, \omega]\right\}.$$

<u>Beweis **56-32**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\quad(\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r)) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_\beta) \wedge (\beta \in \mathsf{56.3}(p,f,r))$.

`2.1:` Via **56-12** gilt: $\quad f[\mathsf{56.1}(p,f,r)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,f,r)$.

`2.2:` Aus →) “x, f sind (p,r)**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: $\quad f$ Funktion.

`2.3:` Aus →) “r Relation in x” und
aus →) “x, f sind (p,r)**art2**”
folgt via **56-19**: $\quad \mathsf{56.1}(p,f,r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r) \ldots$” und
aus `2.3`“$\mathsf{56.1}(p,f,r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **0-4**: $\quad \alpha \in \mathsf{dom}\, f$.

`3.2:` Aus `2.2`“f Funktion”,
aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r) \ldots$” und
aus `2.3`“$\mathsf{56.1}(p,f,r) \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-27**: $\quad f(\alpha) \in f[\mathsf{56.1}(p,f,r)]$.

`4.1:` Aus `2.2`“f Funktion”,
aus `Thema1`“$\ldots \beta \in \mathsf{56.3}(p,f,r)$”,
aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r) \ldots$”,
aus `3.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus `Thema1`“$\ldots \alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_\beta \ldots$”
folgt via **56-29**: $\quad f(\alpha)\_r\_\beta$.

`4.2:` Aus `3.2`“$f(\alpha) \in f[\mathsf{56.1}(p,f,r)]$” und
aus `2.1`“$f[\mathsf{56.1}(p,f,r)] \subseteq \mathsf{56.1}(p,f,r)$”
folgt via **0-4**: $\quad f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p,f,r)$.

`5:` Aus `4.2`“$f(\alpha) \in \mathsf{56.1}(p,f,r)$” und
aus `4.1`“$f(\alpha)\_r\_\beta$”
folgt via **56-22**: $\quad f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p,f,r,\beta)$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,r)) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_\beta) \wedge (\beta \in \mathsf{56.3}(p,f,r))) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p,f,r,\beta)).$$

□

56-33. Nun geht es darum, aus $w \in \mathsf{56.3}(p,f,\preceq)$ auf $f[\mathsf{56.2}(p,f,\preceq,w)] \subseteq \mathsf{56.2}(p,f,\preceq,2)$ zu schließen. Dies gelingt unter Zusatzannahmen:

56-33(Satz)

Es gelte:

→) $\preceq$ *Halbordnung in* x.

→) x, f *sind* $(p,\preceq)$**art2**.

→) $w \in \mathsf{56.3}(p,f,\preceq)$.

Dann folgt "$f[\mathsf{56.2}(p,f,\preceq,w)] \subseteq \mathsf{56.2}(p,f,\preceq,w)$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p,f,\preceq) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p,f,\preceq)\textbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p,f,\preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p,f,\preceq)$.

56-8(Def)

$\mathsf{56.3}(p,f,\preceq) = \mathsf{56.1}(p,f,\preceq) \cap \left\{\omega : f\left[\mathsf{56.1}(p,f,\preceq) \cap \langle\cdot \overset{\preceq}{|}\, \omega[\,\right] \subseteq \langle\cdot \overset{\preceq}{|}\, \omega]\right\}$.

Beweis **56-33**

HO.HOIR-**Notation**.

1.1: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

1.2: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ reflexiv in x.

1.3: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ transitiv in x.

1.4: Aus →) "x, f sind $(p,\preceq)$**art2**"
folgt via **54-17(Def)**: f Funktion.

1.5: Aus →) "x, f sind $(p,\preceq)$**art2**"
folgt via **54-17(Def)**: f ist $\preceq$ _vermehrend auf x.

...

Beweis **56-33**. . .

`Thema2.1` $\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$.

3: Aus Thema2.1 “ $\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ ”
folgt via **56-21**:
$$(\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge ((\alpha \preceq w) \vee (f(w) \preceq \alpha)).$$

4: Aus 3 “ $\ldots (\alpha \preceq w) \vee (f(w) \preceq \alpha)$ ”
folgt via **41-4**: $((\alpha \prec w) \vee (\alpha = w)) \vee (f(w) \preceq \alpha)$.

5: Aus 3 “ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \ldots$ ” und
aus 4 “ $((\alpha \prec w) \vee (\alpha = w)) \vee (f(w) \preceq \alpha)$ ”
folgt:
$$(\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (((\alpha \prec w) \vee (\alpha = w)) \vee (f(w) \preceq \alpha)).$$

6: Aus 5
folgt:
$$\begin{array}{r}(\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \prec w) \\ \vee \\ (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha = w) \\ \vee \\ (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (f(w) \preceq \alpha).\end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $(\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \prec w)$.

Aus 1.1 “ $\preceq$ Relation in x ” ,
aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ” ,
aus 6.1.Fall “ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \ldots$ ” ,
aus 6.1.Fall “ $\ldots \alpha \prec w$ ” und
aus Thema2.1 “ $\ldots w \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ”
folgt via **56-32**: $f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$.

. . .

. . .

Beweis **56-33** ...

`Thema2.1` $\alpha \in 56.2(p, f, \preceq, w)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $(\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha = w)$.

7: Aus `6.2.Fall`"$\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)$ ..." und
aus `6.2.Fall`"... $\alpha = w$"
folgt: $w \in 56.1(p, f, \preceq)$.

8: Aus `1.1`"$\preceq$ Relation in x",
aus `1.2`"$\preceq$ reflexiv in x",
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**" und
aus 7"$w \in 56.1(p, f, \preceq)$"
folgt via **56-26**: $f(w) \in 56.2(p, f, \preceq, w)$.

9: Aus 8"$f(w) \in 56.2(p, f, \preceq, w)$" und
aus `6.2.Fall`"... $\alpha = w$"
folgt: $f(\alpha) \in 56.2(p, f, \preceq, w)$.

`6.3.Fall` $(\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)) \wedge (f(w) \preceq \alpha)$.

7.1: Aus `1.1`"$\preceq$ Relation in x",
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**" und
aus `6.3.Fall`"$\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)$ ..."
folgt via **56-19**: $f(\alpha) \in 56.1(p, f, \preceq)$.

7.2: Aus `1.1`"$\preceq$ Relation in x",
aus `1.3`"$\preceq$ transitiv in x",
aus `1.5`"f ist $\preceq$_vermehrend auf x",
aus `1.4`"f Funktion" und
aus `6.3.Fall`"... $f(w) \preceq \alpha$"
folgt via **37-35**: $f(w) \preceq f(\alpha)$.

8: Aus `7.1`"$f(\alpha) \in 56.1(p, f, \preceq)$" und
aus `7.2`"$f(w) \preceq f(\alpha)$"
folgt via **56-22**: $f(\alpha) \in 56.2(p, f, \preceq, w)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$f(\alpha) \in 56.2(p, f, \preceq, w)$.

...

Beweis **56-33** . . .

Ergo `Thema2.1`: $\boxed{\texttt{A1} \Big| \text{ “}\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w))\text{”}}$

`2.2:` Aus `1.4`“ f Funktion ” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)) \Rightarrow (f(\alpha) \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w))$”
folgt via **18-32**: $f[\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)] \subseteq \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$.

□

56-34. Im folgenden Satz wird zunächst die Frage thematisiert, für welche α die Klasse $\mathsf{56.2}(p, \preceq, x, \alpha)$ von $(p, x, \preceq)$**art1** ist. Die angegebenen hinreichenden Bedingungen gruppieren sich um bisher untersuchte Klassen wie Halbordnungen, Klassen von **art2** und Elemente von $\mathsf{56.3}(p, \preceq, x)$. Als Konsequenz aus der **art1**-Eigenschaft von $\mathsf{56.2}(p, \preceq, x, \alpha)$ ergibt sich via $\mathsf{56.2}(p, \preceq, x, \alpha) \subseteq \mathsf{56.1}(p, \preceq, x)$ rasch die Erkenntnis $\mathsf{56.2}(p, \preceq, x, \alpha) = \mathsf{56.1}(p, \preceq, x)$, so dass nun für die Elemente von $\mathsf{56.1}(p, \preceq, x)$ unerwartete Aussagen zur Verfügung stehen:

56-34(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow)$ x, f *sind* $(p, \preceq)$**art2**.

$\rightarrow)$ $w \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ *ist* $(p, f, \preceq)$**art1**.

b) $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

c) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,) \Rightarrow ((\alpha \preceq w) \vee (f(w) \preceq \alpha))$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, \preceq) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, f, \preceq)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, \preceq)$.

56-8(Def)

$$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap \Big\{\omega : f\big[\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap \langle\cdot \overset{\preceq}{|}\ \omega[\,\big] \subseteq \langle\cdot \overset{\preceq}{|}\ \omega]\Big\}.$$

$\mathtt{HO}$-**Notation**.

<u>Beweis **56-34**</u> `ab)`

`1.1:` Aus →) “ $\preceq$ Halbordnung in x ”
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Aus →) “ $\preceq$ Halbordnung in x ”
folgt via **34-12**: $\preceq$ transitiv.

`1.3:` Aus →) “ $\preceq$ Halbordnung in x ”
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}\,(\preceq) = x$.

`1.4:` Aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ”
folgt via **56-17(Def)**: x Menge.

`1.5:` Aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ”
folgt via **56-17(Def)**: $p \in x$.

`1.6:` Aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ”
folgt via **56-17(Def)**: f Funktion.

`1.7:` Via **56-24** gilt: $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

`1.8:` Via **56-30** gilt: $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

`1.9:` Aus →) “ $\preceq$ Halbordnung in x ”,
aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ” und
aus →) “ $w \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ”
folgt via **56-33**: $f[\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)] \subseteq \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$.

`2.1:` Aus `1.5` “ $p \in x$ ”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.2:` Aus →) “ $w \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ” und
aus `1.8` “ $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ”
folgt via **0-4**: $w \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

`2.3:` Aus `1.1` “ $\preceq$ Relation in x ” und
aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ”
folgt via **56-19**: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$.

...

<u>Beweis **56-34**</u> `ab)` ...

`3.1:` Aus `1.7`“ $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ” und
aus `2.3`“ $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$ ”
folgt vi **0-6**: $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) \subseteq x$.

`3.2:` Aus `2.3`“ $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$ ” und
aus `1.3`“ $\mathsf{ran}\,(\preceq) = x$ ”
folgt: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{ran}\,(\preceq)$.

`3.3:` Aus →) “ $\preceq$ Halbordnung in x ” ,
aus →) “ x, f sind $(p, \preceq)$**art2** ” und
aus `2.2`“ $w \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ”
folgt via **56-25**: $p \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$.

`4.1:` Aus `2.2`“ $w \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ” und
aus `3.2`“ $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{ran}\,(\preceq)$ ”
folgt via **0-4**: $w \in \mathsf{ran}\,(\preceq)$.

`4.2:` Aus `3.1`“ $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) \subseteq x$ ” und
aus `1.4`“ x Menge ”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ Menge.

`5:` Aus `1.2`“ $\preceq$ transitiv ” ,
aus `2.1`“ p Menge ” und
aus `4.1`“ $w \in \mathsf{ran}\,(\preceq)$ ”
folgt via **56-27**: $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ oben $\preceq$ _KettenVersiegelt.

`6.a):` Aus `3.3`“ $p \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ ” ,
aus `1.9`“ $f[\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)] \subseteq \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ ” und
aus `5`“ $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ oben $\preceq$ _KettenVersiegelt ”
folgt via **56-1(Def)**: $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**.

`7.b):` Aus `4.2`“ $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ Menge ” ,
aus `6.a)`“ $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$ ist $(p, f, \preceq)$**art1** ” und
aus `1.7`“ $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ”
folgt via **56-14**: $\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

Beweis **56-34** c)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

2: Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in x",
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**" und
aus →) "$w \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$"
folgt via des bereits bewiesenen b):
$$\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq).$$

3: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$" und
aus 2 "$\mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$.

4: Aus 3 "$\alpha \in \mathsf{56.2}(p, f, \preceq, w)$"
folgt via **56-21**: $(\alpha \preceq w) \vee (f(w) \preceq \alpha)$.

□

56-35. Mit dem Beweis der folgenden, technischen Aussage wird ein Teil des Beweises von **56-37** ausgekoppelt:

56-35(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow\!)$ x, f *sind* $(p, \preceq)$**art2**.

Dann folgt

"$\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\beta \in f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)]) \wedge (\alpha \prec \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \preceq \beta)$".

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, \preceq) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, f, \preceq)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, \preceq)$.

56-8(Def)

$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap \left\{\omega : f\left[\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap \langle \cdot \overset{\preceq}{|} \omega[\,\right] \subseteq \langle \cdot \overset{\preceq}{|} \omega]\right\}$.

`HO.HOIR`-**Notation**.

Beweis **56-35**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: $(\preceq \text{ Halbordnung in } x) \wedge (\preceq \text{ Relation in } x)$
$\wedge(\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv}) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch})$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**"
folgt via **56-17(Def)**: $(x \text{ Menge}) \wedge (p \in x)$
$\wedge(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } \preceq \text{\_vermehrend auf } x)$.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots \preceq$ Relation in $x \ldots$" und
aus $\rightarrow\!)$ "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**"
folgt via **56-19**: $(\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x) \wedge (\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

...

Beweis **56-35** ...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,\preceq)) \wedge (\beta \in f[\mathsf{56.3}(p,f,\preceq)]) \wedge (\alpha \prec \beta)$.

4: Aus 1.3“... f Funktion... ” und
aus →)“ $\beta \in f[\mathsf{56.3}(p,f,\preceq)]$ ”
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{56.3}(p,f,\preceq)) \wedge (\beta = f(\Omega))$.

5: Aus 1.1“ $\preceq$ Halbordnung in x ... ”,
aus →)“ x, f sind $(p,\preceq)$**art2** ”,
aus 4“... $\Omega \in \mathsf{56.3}(p,f,\preceq)$ ... ” und
aus Thema3“ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p,f,\preceq)$ ... ”
folgt via **56-34**: $(\alpha \preceq \Omega) \vee (f(\Omega) \preceq \alpha)$.

6: Aus 5“ $(\alpha \preceq \Omega) \vee (f(\Omega) \preceq \alpha)$ ” und
aus 4“... $\beta = f(\Omega)$ ”
folgt: $(\alpha \preceq \Omega) \vee (\beta \preceq \alpha)$.

7: Aus 1.1“... $\preceq$ antiSymmetrisch ” und
aus Thema3“... $\alpha \prec \beta$ ”
folgt via **46-1**: $\neg(\beta \preceq \alpha)$.

8: Aus 5“ $(\alpha \preceq \Omega) \vee (\beta \preceq \alpha)$ ” und
aus 7“ $\neg(\beta \preceq \alpha)$ ”
folgt: $\alpha \preceq \Omega$.

9: Aus 2“... $\Omega \in \mathsf{56.3}(p,f,\preceq)$ ... ”
folgt via **56-28**: $\Omega \in \mathsf{56.1}(p,f,\preceq)$.

10: Aus 9“ $\Omega \in \mathsf{56.1}(p,f,\preceq)$ ” und
aus 2“ $\mathsf{56.1}(p,f,\preceq) \subseteq x$ ... ”
folgt via **0-4**: $\Omega \in x$.

11: Aus 1.2“... f Funktion... ”,
aus 1.2“... f ist $\preceq$ _vermehrend auf x ” und
aus 10“ $\Omega \in x$ ”
folgt via **30-15**: $\Omega \preceq f(\Omega)$.

12: Aus 11“ $\Omega \preceq f(\Omega)$ ” und
aus 4“... $\beta = f(\Omega)$ ”
folgt: $\Omega \preceq \beta$.

...

...

Beweis **56-35** ...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)) \wedge (\beta \in f[56.3(p, f, \preceq)]) \wedge (\alpha \prec \beta)$.

...

13: Aus 8"$\alpha \preceq \Omega$"
folgt via **41-4**: $(\alpha \prec \Omega) \vee (\alpha = \Omega)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{13.1.Fall}}$ $\alpha \prec \Omega$.

14: Aus Thema3"$\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)$ ..." und
aus 2"... $56.1(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.

15: Aus 1.2"... f Funktion... ",
aus 4"... $\Omega \in 56.3(p, f, \preceq)$ ... ",
aus Thema3"$\alpha \in 56.1(p, f, \preceq)$ ... ",
aus 14"$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 13.1.Fall"$\alpha \prec \Omega$"
folgt via **56-29**: $f(\alpha) \preceq \Omega$.

16: Aus 1.1"... $\preceq$ transitiv... ",
aus 15"$f(\alpha) \preceq \Omega$" und
aus 12"$\Omega \preceq \beta$"
folgt via **30-38**: $f(\alpha) \preceq \beta$.

$\boxed{\texttt{13.2.Fall}}$ $\alpha = \Omega$.

14.1: Aus 4"... $\beta = f(\Omega)$" und
aus 13.2.Fall"$\alpha = \Omega$"
folgt: $\beta = f(\alpha)$.

14.2: Aus 1.1"... $\preceq$ Relation in x ... ",
aus 1.1"... $\preceq$ reflexiv in x ..." und
aus 12"$\Omega \preceq \beta$"
folgt via **34-11**: $\beta \preceq \beta$.

15: Aus 14.1"$\beta = f(\alpha)$" und
aus 14.2"$\beta \preceq \beta$"
folgt: $f(\alpha) \preceq \beta$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$f(\alpha) \preceq \beta$.

...

Beweis **56-35** . . .

Ergo Thema3:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\beta \in f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)\,]) \wedge (\alpha \prec \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \preceq \beta).$$

$\square$

56-36. Mit dem Beweis der folgenden, technischen Aussage wird ein weiterer Teil des Beweises von **56-37** ausgekoppelt:

56-36(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv.*

→) *M antiSymmetrisch.*

→) *K ist M_Kette.*

→) $K \subseteq \mathsf{56.3}(p, y, M)$.

→) *sup ist M_Supremum von K.*

→) $w \in K$.

Dann folgt

$$\text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p, y, M)) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup) \wedge (\alpha\_M\_w) \wedge ((\alpha, \beta) \in y)) \Rightarrow (\beta\_M\_sup)\text{”}.$$

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, y, M) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, y, M)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, y, M) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, y, M)$.

56-8(Def) $\mathsf{56.3}(p, y, M)$

$$= \mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \Big\{\omega : y\big[\mathsf{56.1}(p, y, M) \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \omega[\,]\big] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \omega]\Big\}.$$

<u>Beweis **56-36**</u>

`1.1:` Aus →) “ $w \in K$ ” und
aus →) “ $K \subseteq \mathsf{56.3}(p,y,M)$ ”
folgt via **0-4**: `A1` | “ $w \in \mathsf{56.3}(p,y,M)$ ”

`2:` Aus `A1` gleich “ $w \in \mathsf{56.3}(p,y,M)$ ”
folgt via **56-28**: `A2` | “ $w \in \mathsf{56.1}(p,y,M)$ ”

`1.2:` Aus →) “ sup ist M-Supremum von K ” und
aus →) “ $w \in K$ ”
folgt via **36-4**: `A3` | “ w_M_sup ”

`Thema1.3`

$$(\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M)) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup) \wedge (\alpha\_M\_w) \wedge ((\alpha,\beta) \in y).$$

`2:` Aus `Thema1.3` “ $\ldots \alpha\_M\_w \ldots$ ”
folgt via **41-4**: $(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w) \vee (\alpha = w)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$.

`3:` Aus `A1` gleich “ $w \in \mathsf{56.3}(p,y,M)$ ”,
aus `Thema1.3` “ $\alpha \in \mathsf{56.1}(p,y,M) \ldots$ ”,
aus `Thema1.3` “ $\ldots (\alpha,\beta) \in y$ ” und
aus `2.1.Fall` “ $\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$ ”
folgt via **56-28**: β_M_w.

`4:` Aus →) “ M transitiv ”,
aus `3` “ β_M_w ” und
aus `A3` gleich “ w_M_sup ”
folgt via **30-38**: β_M_sup.

...

...

Beweis **56-36** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$

$$(\alpha \in 56.1(p,y,M)) \wedge (\alpha\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_sup) \wedge (\alpha\_M\_w) \wedge ((\alpha,\beta) \in y).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\alpha = w.$

3: Aus →) “$w \in K$” und
aus `2.2.Fall`“$\alpha = w$”
folgt: $\alpha \in K.$

4: Aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus →) “K ist M_Kette”,
aus →) “sup ist M_Supremum von K”,
aus 3“$\alpha \in K$” und
aus `Thema1.3`“$\ldots \alpha\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_sup \ldots$”
folgt via **SupZwischenWertSatz**:
$$\exists \xi : (\xi \in K) \wedge (\alpha\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\xi) \wedge (\xi\_M\_sup).$$

5: Aus 4“$\ldots \xi \in K \ldots$” und
aus →) “$K \subseteq 56.3(p,y,M)$”
folgt via **0-4**: $\xi \in 56.3(p,y,M)$.

6: Aus 4“$\xi \in 56.3(p,y,M)$”,
aus `Thema1.3`“$\alpha \in 56.1(p,y,M) \ldots$”,
aus `Thema1.3`“$\ldots (\alpha,\beta) \in y$” und
aus 4“$\ldots \alpha\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\xi \ldots$”
folgt via **56-28**: $\beta\_M\_\xi.$

7: Aus →) “M transitiv”,
aus 6“β_M_ξ” und
aus 4“$\ldots \xi\_M\_sup$”
folgt via **30-38**: $\beta\_M\_sup.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\beta\_M\_sup.$

Ergo `Thema1.3`:

$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 56.1(p,y,M)) \wedge (\alpha\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_sup) \wedge (\alpha\_M\_w) \wedge ((\alpha,\beta) \in y)) \Rightarrow (\beta\_M\_sup).$

□

56-37. Falls $\preceq$ eine antiSymmetrische Halbordnung in x ist und falls x, f von $(p, \preceq)$**art2** sind, dann ist $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ gleich $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ und folglich treffen alle Eigenschaften, die für die Elemente von $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ gelten auch auf alle Elemente von $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ zu. Darüber hinaus gehend ist $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ eine $\preceq$ _Kette:

56-37(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow)$ x, f *sind* $(p, \preceq)$**art2**.

Dann folgt:

a) $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ *ist* $(p, f, \preceq)$**art1**.

b) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

c) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ *ist* $\preceq$ *_Kette.*

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, \preceq) = \{\omega : \omega \textit{ ist } (p, f, \preceq)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, \preceq)$.

56-8(Def)

$$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap \left\{\omega : f\left[\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \cap \langle\cdot \overset{\preceq}{|} \omega[\,\right] \subseteq \langle\cdot \overset{\preceq}{|} \omega]\right\}.$$

Beweis **56-37**

HO.HOIR-**Notation**.

1.1: Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: ($\preceq$ Relation in x) $\wedge$ ($\preceq$ Halbordnung in x)
$\wedge$($\preceq$ transitiv) $\wedge$ ($\preceq$ antiSymmetrisch).

1.2: Aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**"
folgt via **56-17(Def)**: (x Menge) $\wedge$ ($p \in x$)
$\wedge$(f Funktion) $\wedge$ (f ist $\preceq$ -vermehrend auf x).

1.3: Via **56-30** gilt: $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

1.4: Via **56-12** gilt: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ oben $\preceq$ -KettenVersiegelt.

2.1: Aus 1.1"... $\preceq$ Halbordnung in x ..." und
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**"
folgt via **56-20**: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$.

2.2: Aus 1.2"... $p \in x$ ..."
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2.3: Aus 1.1"$\preceq$ Relation in x ..." und
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**"
folgt via **56-19**: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$.

3.1: Aus 2.2"p Menge"
folgt via **56-12**: $p \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

3.2: Aus 1.3"$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$" und
aus 2.3"$\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq x$.

...

<u>Beweis **56-37**</u> ...

`4.1:` Es gilt: $(p \notin \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)) \vee (p \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq))$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $p \notin \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

`5:` Aus 3"$p \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$" und
aus `4.1.1.Fall`"$p \notin \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$"
folgt via **56-31**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\Omega \prec p)$.

`6:` Aus 5"$\ldots \Omega \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \ldots$" und
aus `2.1`"$\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$.

`7:` Aus 6"$\Omega \in [p \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $p \preceq \Omega$.

`8:` Aus `1.1`"$\ldots \preceq$ antiSymmetrisch" und
aus 7"$p \preceq \Omega$"
folgt via **46-1**: $\neg(\Omega \prec p)$.

`9:` Es gilt 8"$\neg(\Omega \prec p)$".
Es gilt 5"$\ldots \Omega \prec p$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

`4.1.2.Fall` $p \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$p \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$"

Beweis **56-37** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.2}}$ $\beta \in f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)]$.

5: Via **56-30** gilt: $f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

6: Aus Thema4.2 "$\beta \in f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)]$" und
aus 5 "$f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)] \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

$\boxed{\texttt{Thema7.1}}$ $(\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \prec \beta)$.

Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x",
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**",
aus Thema7.1 "$\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ...",
aus Thema4.2 "$\beta \in f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)]$" und
aus Thema7.1 "... $\alpha \prec \beta$"
folgt via **56-35**: $f(\alpha) \preceq \beta$.

Ergo Thema7.1:

A2	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \prec \beta) \Rightarrow (f(\alpha) \preceq \beta)$"

7.2: Aus 1.2 "... f Funktion... ",
aus 6 "$\beta \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$" und
aus A2 gleich
"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \prec \beta) \Rightarrow (f(\alpha) \preceq \beta)$"
folgt via **56-29**: $\beta \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

Ergo Thema4.2: $\forall \beta : (\beta \in f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)]) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A3	"$f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)] \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$"

...

<u>Beweis</u> **56-37** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.3}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\alpha \text{ ist } \preceq \text{\_Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } \preceq \text{\_Supremum von } \alpha)$.

`5:` Aus `Thema4.3`"... $\alpha \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ..." und
aus `1.3`"$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

`6:` Aus `Thema4.3`"$0 \neq \alpha$ ..." und
aus `5`"$\alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

`7:` Aus `1.4`"$\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ oben $\preceq$ _KettenVersiegelt",
aus `6`"$0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$",
aus `Thema4.3`"... α ist $\preceq$ _Kette... " und
aus `Thema4.3`"... β ist $\preceq$ _Supremum von α"
folgt via **54-13(Def)**: $\beta \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$

...

...

Beweis **56-37** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.3}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\alpha \text{ ist } \preceq\text{\_Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } \preceq\text{\_Supremum von } \alpha)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema8.1}}$ $(\gamma \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \prec \beta)$.

9: Aus 1.1"$\preceq$ Relation in x ..." und
aus Thema4.3"... α ist $\preceq$_Kette... "
folgt via **34-4**: $\alpha \subseteq x$.

10: Aus Thema4.3"$0 \neq \alpha$ ..." und
aus 9"$\alpha \subseteq x$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq x$.

11: Aus 1.1"... $\preceq$ transitiv... ",
aus 1.1"... $\preceq$ antiSymmetrisch",
aus 1.2"... f ist $\preceq$_vermehrend auf x",
aus 1.2"... f Funktion... ",
aus 10"$0 \neq \alpha \subseteq x$",
aus Thema4.3"... β ist $\preceq$_Supremum von α" und
aus Thema8.1"... $\gamma \prec \beta$"
folgt via **46-13**:
$\exists \Omega : (\Omega \in \alpha) \wedge (\neg(f(\Omega) \preceq \gamma))$.

12: Aus 11"... $\Omega \in \alpha$ ..." und
aus Thema4.3"... $\alpha \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ..."
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

13: Aus 1.1"... $\preceq$ Halbordnung in x ...",
aus →)"x, f sind $(p, \preceq)$**art2**",
aus 12"$\Omega \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ " und
aus Thema8.1"$\gamma \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ..."
folgt via **56-34**: $(\gamma \preceq \Omega) \vee (f(\Omega) \preceq \gamma)$.

14: Aus 12"$(\gamma \preceq \Omega) \vee (f(\Omega) \preceq \gamma)$" und
aus 11"... $\neg(f(\Omega) \preceq \gamma)$"
folgt: $\gamma \preceq \Omega$.

...

...

...

<u>Beweis **56-37**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema4.3}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq 56.3(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \text{ ist } \preceq\text{\_Kette})$
$\wedge(\beta \text{ ist } \preceq\text{\_Supremum von } \alpha)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema8.1}}$ $(\gamma \in 56.1(p, f, \preceq)) \wedge (\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \prec \beta)$.

...

`15:` Aus `1.2`“... f Funktion... ” und
aus `Thema8.1`“... $\gamma \in \mathsf{dom}\, f$ ...”
folgt via **18-22**: $(\gamma, f(\gamma)) \in f$.

`16:` Aus `1.1`“... $\preceq$ transitiv... ”,
aus `1.1`“... $\preceq$ antiSymmetrisch”,
aus `Thema4.3`“... α ist $\preceq$_Kette... ”,
aus `Thema4.3`“... $\alpha \subseteq 56.3(p, f, \preceq)$ ...”,
aus `Thema4.3`“... β ist $\preceq$_Supremum von α”,
aus `11`“... $\Omega \in \alpha$ ...”,
aus `Thema8.1`“$\gamma \in 56.1(p, f, \preceq)$ ...”,
aus `Thema8.1`“... $\gamma \prec \beta$”,
aus `14`“$\gamma \preceq \Omega$” und
aus `15`“$(\gamma, f(\gamma)) \in f$”
folgt via **56-36**: $f(\gamma) \preceq \beta$.

Ergo `Thema8.1`:

A4	“$\forall \gamma : (\gamma \in 56.1(p, f, \preceq)) \wedge (\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \prec \beta) \Rightarrow (f(\gamma) \preceq \beta)$”

`8.2:` Aus `7`“$\beta \in 56.1(p, f, \preceq)$ ” und
aus `A4` gleich
“$\forall \gamma : (\gamma \in 56.1(p, f, \preceq)) \wedge (\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \prec \beta) \Rightarrow (f(\gamma) \preceq \beta)$”
folgt via **56-29**: $\beta \in 56.3(p, f, \preceq)$.

...

Beweis **56-37** . . .

Ergo `Thema4.3`:

$\forall \alpha, \beta : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)) \wedge (\alpha \text{ ist } \preceq\text{-Kette}) \wedge (\beta \text{ ist } \preceq\text{-Supremum von } \alpha)$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq))$.

Konsequenz via **54-13(Def)**: | `A5` | “$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ oben $\preceq$-KettenVersiegelt” |

`4.a):` Aus `A1` gleich “$p \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$”,
aus `A3` gleich “$f[\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)] \subseteq \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$” und
aus `A5` gleich “$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ oben $\preceq$-KettenVersiegelt”
folgt via **56-1(Def)**: $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**.

`4.4:` Aus `3.2`“$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq x$” und
aus `1.2`“x Menge . . . ”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ Menge.

`5.b):` Aus `4.4`“$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ Menge”,
aus `4.a)`“$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**” und
aus `1.3`“$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) \subseteq \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$”
folgt via **56-14**: $\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

. . .

Beweis **56-37** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.1}}$ $(\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\beta \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,)$.

7: Aus Thema6.1 "$\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\ \ldots$" und
aus 5.b) "$\mathsf{56.3}(p, f, \preceq) = \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$.

8: Aus 1.1 "$\ldots \preceq$ Halbordnung in $x \ldots$",
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**",
aus 7 "$\alpha \in \mathsf{56.3}(p, f, \preceq)$" und
aus Thema6.1 "$\ldots \beta \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$"
folgt via **56-34**: $(\beta \preceq \alpha) \vee (f(\alpha) \preceq \beta)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{8.1.Fall}}$ $\beta \preceq \alpha$.

Aus 8.1.Fall
folgt: $(\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha)$.

$\boxed{\texttt{8.2.Fall}}$ $f(\alpha) \preceq \beta$.

9: Aus Thema6.1 "$\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\ \ldots$" und
aus 2.3 "$\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in x$.

10: Aus 1.2 "$\ldots f$ Funktion$\ldots$",
aus 1.2 "$\ldots f$ ist $\preceq$ _vermehrend auf x" und
aus 9 "$\alpha \in x$"
folgt via **30-15**: $\alpha \preceq f(\alpha)$.

11: Aus 1.1 "$\ldots \preceq$ transitiv$\ldots$",
aus 10 "$\alpha \preceq f(\alpha)$" und
aus 8.2.Fall "$f(\alpha) \preceq \beta$"
folgt via **30-38**: $\alpha \preceq \beta$.

12: Aus 11
folgt: $(\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha)$.

...

<u>Beweis</u> **56-37** ...

Ergo $\texttt{Thema6.1}$:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\beta \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)\,)) \Rightarrow ((\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha)).$$

Konsequenz via **30-68(Def)**: $\boxed{\texttt{A6} \mid \text{“}\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) \text{ ist } \preceq\text{-Kette”}}$

$\texttt{6.c)}$: Aus $\texttt{A6}$
folgt: $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ ist $\preceq$-Kette.

□

56-38. Mit dem FixpunktSatz **Tarski I** ist der erste Höhepunkt von Suite I erreicht:

56-38(Satz) (Tarski I)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) $\preceq$ *oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) x, f *sind* $(p, \preceq)$**art2**.

Dann folgt:

a) $\exists \Omega : \Omega$ *ist* $\preceq$ *-Maximum von* $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

b) *Aus "max ist* $\preceq$ *-Maximum von* $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ *"*
folgt "max Fixpunkt von f*"*
und "max $\in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$ *"*
und "max $\in x$*"* .

c) *Es gibt* Ψ*, so dass gilt:*

e.1) Ψ *Fixpunkt von* f.

e.2) $\Psi \in \mathsf{56.1}(p, f, \preceq)$.

e.3) $\Psi \in x$.

56-8(Def) $\mathsf{56.0}(p, f, \preceq) = \{\omega : \omega \text{ ist } (p, f, \preceq)\mathbf{art1}\}$.

56-8(Def) $\mathsf{56.1}(p, f, \preceq) = \bigcap \mathsf{56.0}(p, f, \preceq)$.

Beweis **56-38**

`HO`-**Notation**.

---

a)

1.1: Aus →) “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-18**: $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**.

1.2: Aus →) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x” und
aus →) “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-37**: $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$ ist $\preceq$ -Kette.

1.3: Via **56-12** gilt: $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$ oben $\preceq$ -KettenVersiegelt.

2: Aus 1.1“$\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$ ist $(p, f, \preceq)$**art1**”
folgt via **56-2**: $0 \neq \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$.

3: Aus →) “$\preceq$ oben Stark KettenVollständig”,
aus 2“$0 \neq \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$”,
aus 1.2“$\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$ ist $\preceq$ -Kette” und
aus 1.3“$\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$ oben $\preceq$ -KettenVersiegelt”
folgt via **55-9**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\preceq$ -Maximum von $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$.

b) VS gleich max ist $\preceq$ -Maximum von $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$.

1.1: Aus →) “x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-17(Def)**: (f Funktion) $\wedge$ (f ist $\preceq$ -vermehrend auf x).

1.2: Aus →) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x”
folgt via **34-13**: ($\preceq$ Relation in x) $\wedge$ ($\preceq$ antiSymmetrisch).

1.3: Aus VS gleich “max ist $\preceq$ -Maximum von $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$”
folgt via **38-1(Def)**: $max \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$.

1.4: Aus VS gleich “max ist $\preceq$ -Maximum von $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$”
folgt via **38-4**: max Menge.

...

Beweis **56-38** `b) VS` gleich $\qquad$ max ist $\preceq$ -Maximum von $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$.

...

`2.1:` Aus `1.2`“$\preceq$ Relation in x” und
aus →)“x, f sind $(p, \preceq)$**art2**”
folgt via **56-19**: $\qquad$ $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\preceq$ Relation in x”,
aus →)“x, f sind $(p, \preceq)$**art2**” und
aus `1.3`“$max \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$”
folgt via **56-19**: $\qquad$ $f(max) \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$.

`3.1:` Aus `1.3`“$max \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$” und
aus `2.1`“$\mathtt{56.1}(p, f, \preceq) \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $\qquad$ $max \in x$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “max ist $\preceq$ -Maximum von $\mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$” und
aus `2.2`“$f(max) \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$”
folgt via **38-4**: $\qquad$ $f(max) \preceq max$.

`4:` Aus `1.1`“f Funktion ...”,
aus `1.1`“... f ist $\preceq$ -vermehrend auf x” und
aus `3.1`“$max \in x$”
folgt via **30-15**: $\qquad$ $max \preceq f(max)$.

`5:` Aus `1.2`“... $\preceq$ antiSymmetrisch”,
aus `3.2`“$f(max) \preceq max$” und
aus `4`“$max \preceq f(max)$”
folgt via **30-47**: $\qquad$ $f(max) = max$.

`6:` Aus `1.4`“max Menge” und
aus `5`“$f(max) = max$”
folgt via **53-2**: $\qquad$ max Fixpunkt von f.

`7:` Aus `6`“max ist Fixpunkt von f”,
aus `1.3`“$max \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)$” und
aus `3.1`“$max \in x$”
folgt: $\qquad$ $(max \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (max \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)) \wedge (max \in x)$.

<u>Beweis</u> **56-38** `c)`

`1:` Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x" ,
aus →) "$\preceq$ oben Stark KettenVollständig" und
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$\exists \Psi : \Psi \text{ ist } \preceq\text{-Maximum von } \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)\,.$$

`2:` Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x" ,
aus →) "$\preceq$ oben Stark KettenVollständig" ,
aus →) "x, f sind $(p, \preceq)$**art2**" und
aus `1`"$\ldots \Psi$ ist $\preceq$-Maximum von x"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$$(\Psi \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Psi \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\Psi \in x).$$

`3:` Aus `1`"$\exists \Psi \ldots$" ,
aus `2`"Ψ Fixpunkt von $f \ldots$" ,
aus `2`"$\ldots \Psi \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)\ \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Psi \in x$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Psi \in \mathtt{56.1}(p, f, \preceq)\,) \wedge (\Psi \in x).$

□

56-39. Mit dem nun folgenden FixpunktSatz **Tarski II** wird **Tarski I** für Späteres - wenn die Definitionen von $(p, f, \preceq)$**art1** und von $(p, \preceq)$**art2** nicht mehr so präsent sind - einfacher formuliert. Die Aussage "$0 \neq x$ Menge" ist ein Kürzel für $(0 \neq x) \wedge (x$ Menge):

56-39(Satz) (Tarski II)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) $\preceq$ *oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) $0 \neq x$ *Menge.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* $\preceq$ *_vermehrend auf* x.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` Ω *Fixpunkt von* f.

`e.2)` $\Omega \in x$.

Beweis **56-39**

`1:` Aus $\rightarrow$)"$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in x$.

`2:` Aus $\rightarrow$)"$\ldots x$ Menge",
aus `1`"$\ldots \Psi \in x$",
aus $\rightarrow$)"f Funktion" und
aus $\rightarrow$)"f ist $\preceq$ _vermehrend auf x"
folgt via **56-17(Def)**: x, f sind $(\Psi, \preceq)$**art2**.

`3:` Aus $\rightarrow$)"$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x",
aus $\rightarrow$)"$\preceq$ oben Stark KettenVollständig" und
aus `2`"x, f sind $(\Psi, \preceq)$**art2**"
folgt via **Tarski I**: $\exists \Omega : (\Omega$ Fixpunkt von $f) \wedge (\Omega \in x)$.

$\square$

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.