Suite I - Die StrukturGebende

Teil 9: Essays 71-90

(Keine) $\subseteq$maximale M_Kette. k hat (keine) $\subseteq$maximale M_Kette. Tarski III. Tarski IV. sub. sub-Notation. Hausdorffscher MaximalitätsSatz I (auch: RelationsVersion). Hausdorffscher MaximalitätsSatz II (auch: RelationsVersion). Lemma von Zorn I (auch: TeilMengenVersion). Lemma von Zorn II (auch: TeilMengenVersion). E ist M_isoton auf z. E ist M_antiton auf z. Tarski V. Tarski VI. Tarski VII. Tarski VIII. Tarski IX.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

K **ist** $\subseteq$**maximale** M_**Kette**.
y **keine** $\subseteq$**maximale** M_**Kette**.
k **hat** $\subseteq$**maximale** M_**Kette**.
y **hat keine** $\subseteq$**maximale** M_**Kette**.

Ersterstellung: 19/06/07 **Letzte Änderung: 09/06/11**

71-1. Eine M_Kette, die keine echte TeilKlasse einer anderen M_Kette ist, ist eine "$\subseteq$maximale M_Kette". Eine Klasse k "hat genau dann eine $\subseteq$maximale M_Kette", wenn k TeilKlasse einer $\subseteq$maximalen Kette ist. Schließlich hat y "keine $\subseteq$maximale M_Kette", wenn es keine $\subseteq$maximale M_Kette gibt, die y umfasst:

71-1(Definition)

1) "K **ist** $\subseteq$**maximale** M**_Kette**" genau dann, wenn gilt:

$$K \text{ ist } M\text{\_Kette.}$$
$$\wedge$$
$$\forall \alpha : ((K \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})) \Rightarrow (\alpha = K).$$

2) "y **keine** $\subseteq$**maximale** M**_Kette**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(y \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette}).$$

3) "k **hat** $\subseteq$**maximale** M**_Kette**" genau dann, wenn gilt:

$$\exists \Omega : (k \subseteq \Omega) \wedge (\Omega \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette}).$$

4) "y **hat keine** $\subseteq$**maximale** M**_Kette**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\exists \Omega : (y \subseteq \Omega) \wedge (\Omega \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette})).$$

71-2. Jede TeilKlasse einer $\subseteq$maximalen M_Kette hat eine $\subseteq$maximale M_Kette:

<u>71-2(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *K ist $\subseteq$maximale M_Kette.*

$\rightarrow$) *$k \subseteq K$.*

Dann folgt "k hat $\subseteq$maximale M_Kette".

<u>Beweis **71-2**</u>

`1`: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = K$.

`2.1`: Aus `1`"$\ldots \Omega = K$" und
aus $\rightarrow$)"K ist $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt: Ω ist $\subseteq$maximale M_Kette.

`2.2`: Aus $\rightarrow$)"$k \subseteq K$" und
aus `1`"$\ldots \Omega = K$"
folgt: $k \subseteq \Omega$.

`3`: Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2`"$k \subseteq \Omega$" und
aus `2.1`"Ω ist $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt: $\exists \Omega : (k \subseteq \Omega) \wedge (\Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$.

`4`: Aus `3`"$\exists \Omega : (k \subseteq \Omega) \wedge (\Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$"
folgt via **71-1(Def)**: k hat $\subseteq$maximale M_Kette.

$\square$

71-3. Falls K eine $\subseteq$maximale M_Kette ist, falls p_M_p und für alle $\alpha \in M$ entweder α_M_p oder p_M_α gilt, dann folgt $p \in K$:

71-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ K *ist* $\subseteq$*maximale* M_*Kette.*

$\rightarrow)$ p_M_p.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$.

Dann folgt "$p \in K$".

Beweis **71-3**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$"p_M_p"
folgt via **30-2**: p Menge.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"K ist $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: K ist M_Kette.

`2:` Aus $\rightarrow)$"p_M_p",
aus `1.2`"K ist M_Kette" und
aus $\rightarrow)$"$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p))$"
folgt via **30-78**: $\{p\} \cup K$ ist M_Kette.

`3:` Via **2-7** gilt: $K \subseteq \{p\} \cup K$.

`4:` Aus $\rightarrow)$"K ist $\subseteq$maximale M_Kette",
aus `2`"$\{p\} \cup K$ ist M_Kette" und
aus `3`"$K \subseteq \{p\} \cup K$"
folgt via **71-1(Def)**: $\{p\} \cup K = K$.

`5:` Aus `1.1`"p Menge..." und
aus `5`"$\{p\} \cup K = K$"
folgt via **2-28**: $p \in K$.

□

71-4. Nur M_Ketten können $\subseteq$maximale M_Ketten haben:

<u>71-4(Satz)</u>

Aus "k hat $\subseteq$maximale M_Kette" folgt "k ist M_Kette".

<u>Beweis **71-4**</u> `VS` gleich k hat $\subseteq$maximale M_Kette.

`1:` Aus `VS` gleich "k hat $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: $\exists\Omega : (k \subseteq \Omega) \wedge (\Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots\Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: Ω ist M_Kette.

`3:` Aus `2`"Ω ist M_Kette" und
aus `1`"$\ldots k \subseteq \Omega \ldots$"
folgt via **30-73**: k ist M_Kette.

$\square$

71-5. Falls r eine reflexive Relation in x ist und falls K eine $\subseteq$maximale r_Kette ist, dann ist jede untere r_Schranke von K in K und demnach ein r_Minimum von K:

<u>71-5(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

$\rightarrow$) K *ist* $\subseteq$*maximale* r_*Kette.*

$\rightarrow$) u *untere* r_*Schranke von* K.

Dann folgt:

a) $u \in K$.

b) u *ist* r_*Minimum von* K.

<u>Beweis **71-5**</u>

`1.1:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x" und
aus →) "u untere r_Schranke von K"
folgt via **37-9**: | `A1` "u_r_u"

`Thema1.2` $\alpha \in K$.

`2:` Aus →) "u untere r_Schranke von K" und
aus `Thema1.2` "$\alpha \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: u_r_α.

`3:` Aus 2
folgt: $(u\_r\_\alpha) \vee (\alpha\_r\_u)$.

Ergo `Thema1.2`: | `A2` "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((u\_r\_\alpha) \vee (\alpha\_r\_u))$"

`1.a):` Aus →) "K ist $\subseteq$maximale M_Kette",
aus `A1` gleich "u_r_u" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((u\_r\_\alpha) \vee (\alpha\_r\_u))$"
folgt via **71-3**: $u \in K$.

`2.b):` Aus →) "u untere r_Schranke von K" und
aus `1.a)` "$u \in K$"
folgt via **38-1(Def)**: u ist r_Minimum von K.

□

71-6. Falls r eine reflexive Relation in x ist und falls K eine $\subseteq$maximale r_Kette ist, dann ist jede obere r_Schranke von K in K ond demnach ein r_Maximum von K:

71-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) *K ist $\subseteq$maximale r_Kette.*

$\rightarrow$) *o obere r_Schranke von K.*

Dann folgt:

a) $o \in K$.

b) *o ist r_Maximum von K.*

Beweis **71-6**

1.1: Aus →) " r Relation in x " ,
aus →) " r reflexiv in x " und
aus →) " o obere r_Schranke von K "
folgt via **37-9**: A1 | " o_r_o "

Thema1.2 $\alpha \in K$.

2: Aus →) " o obere r_Schranke von K " und
aus Thema1.2 " $\alpha \in K$ "
folgt via **35-1(Def)**: α_r_o.

3: Aus 2
folgt: $(o\_r\_\alpha) \vee (\alpha\_r\_o)$.

Ergo Thema1.2: A2 | " $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((o\_r\_\alpha) \vee (\alpha\_r\_o))$ "

1.a): Aus →) " K ist ⊆maximale M_Kette " ,
aus A1 gleich " o_r_o " und
aus A2 gleich " $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow ((o\_r\_\alpha) \vee (\alpha\_r\_o))$ "
folgt via **71-3**: $o \in K$.

2.b): Aus →) " o obere r_Schranke von K " und
aus 1.a) " $o \in K$ "
folgt via **38-1(Def)**: o ist r_Maximum von K.

□

71-7. Falls $\preceq$ eine Halbordnung in x ist, dann ist jede untere $\preceq$-Schranke einer $\subseteq$maximalen $\preceq$-Kette ein $\preceq$-minimales Element von x:

71-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) K *ist* $\subseteq$*maximale* $\preceq$*-Kette.*

$\rightarrow$) u *untere* $\preceq$*-Schranke von* K.

Dann folgt "u *ist* $\preceq$*-minimales Element von* x*".*

Beweis **71-7**

`HO`-**Notation**.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv})$.

`2.1:` Aus `1`"$\preceq$ Relation in $x \ldots$" und
aus $\rightarrow$) "u untere $\preceq$-Schranke von K"
folgt via **37-1**: | `A1` | "$u \in x$" |

<u>Beweis **71-7**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \preceq u)$.

`3.1:` Aus `1`"... $\preceq$ reflexiv in x ..." und
aus `Thema2.2`"$\alpha \in x$ ..."
folgt via **30-17(Def)**: `A2` | "$\alpha \preceq \alpha$"

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\beta \in K$.

`4:` Aus →) "u untere $\preceq$ -Schranke von K" und
aus `Thema3.2`"$\beta \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: $u \preceq \beta$.

`5:` Aus `1`"... $\preceq$ transitiv",
aus `Thema2.2`"... $\alpha \preceq u$" und
aus `4`"$u \preceq \beta$"
folgt via **30-38**: $\alpha \preceq \beta$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha)$.

Ergo `Thema3.2`: `A3` | "$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha))$"

`3.3:` Aus →) "K ist $\subseteq$maximale $\preceq$ -Kette",
aus `A2` gleich "$\alpha \preceq \alpha$" und
aus `A3` gleich "$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha))$"
folgt via **71-3**: $\alpha \in K$.

`4:` Aus `VS` gleich "u untere $\preceq$ -Schranke von K" und
aus `3.3`"$\alpha \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: $u \preceq \alpha$.

Ergo `Thema2.2`: `A4` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \preceq u)) \Rightarrow (u \preceq \alpha)$"

`2.3:` Aus `A1` gleich "$u \in x$" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \preceq u)) \Rightarrow (u \preceq \alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: u ist $\preceq$ -minimales Element von x.

□

71-8. Falls $\preceq$ eine Halbordnung in x ist, dann ist jede obere $\preceq$ -Schranke einer $\subseteq$maximalen $\preceq$ -Kette ein $\preceq$ -maximales Element von x:

71-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) K *ist* $\subseteq$*maximale* $\preceq$ -*Kette.*

$\rightarrow$) o *obere* $\preceq$ -*Schranke von* K.

Dann folgt "o ist $\preceq$ -maximales Element von x".

Beweis **71-8**

HO-**Notation**.

1: Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $(\preceq$ Relation in $x) \wedge (\preceq$ reflexiv in $x) \wedge (\preceq$ transitiv$)$.

2.1: Aus 1 "$\preceq$ Relation in $x \ldots$" und
aus $\rightarrow$) "o obere $\preceq$ -Schranke von K"
folgt via **37-1**: A1 | "$o \in x$"

Beweis **71-8** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(\alpha \in x) \wedge (o \preceq \alpha)$.

3.1: Aus 1"... $\preceq$ reflexiv in x ..." und
aus Thema2.2"$\alpha \in x$ ..."
folgt via **30-17(Def)**: A2 | "$\alpha \preceq \alpha$"

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\beta \in K$.

4: Aus →)"o obere $\preceq$-Schranke von K" und
aus Thema3.2"$\beta \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: $\beta \preceq o$.

5: Aus 1"... $\preceq$ transitiv",
aus 4"$\beta \preceq o$" und
aus Thema2.2"... $o \preceq \alpha$"
folgt via **30-38**: $\beta \preceq \alpha$.

6: Aus 5
folgt: $(\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha)$.

Ergo Thema3.2:
A3 | "$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha))$"

3.3: Aus →)"K ist $\subseteq$maximale $\preceq$-Kette",
aus A2 gleich "$\alpha \preceq \alpha$" und
aus A3 gleich "$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \preceq \beta) \vee (\beta \preceq \alpha))$"
folgt via **71-3**: $\alpha \in K$.

4: Aus VS gleich "o obere $\preceq$-Schranke von K" und
aus 3.3"$\alpha \in K$"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \preceq o$.

Ergo Thema2.2: A4 | "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (o \preceq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \preceq o)$"

2.3: Aus A1 gleich "$o \in x$" und
aus A4 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (o \preceq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \preceq o)$"
folgt via **39-1(Def)**: o ist $\preceq$-maximales Element von x.

□

71-9. Falls k eine M_Kette, aber nicht $\subseteq$maximal ist, dann gibt es eine M_Kette, die k echt umfasst:

<u>71-9(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) k *ist* M*_Kette.*

$\rightarrow$) k *keine* $\subseteq$*maximale* M*_Kette.*

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` Ω *ist* M*_Kette.*

`e.2)` $k \subset \Omega$.

<u>Beweis **71-9**</u>

1: Aus →) “k keine ⊆maximale M_Kette”
folgt via **71-1(Def)**: $\neg(k \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\_\text{Kette})$.

2: Aus 1 “$\neg(k \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\_\text{Kette})$”
folgt via **71-1(Def)**:
$$\neg((k \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\forall \alpha : ((k \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette})) \Rightarrow (\alpha = k))).$$

3: Aus 2
folgt:
$$(\neg(k \text{ ist } M\_\text{Kette})) \vee (\neg(\forall \alpha : ((k \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette})) \Rightarrow (\alpha = k))).$$

4: Aus →) “k ist M_Kette” und
aus 3 “$(\neg(k \text{ ist } M\_\text{Kette}))$
$\vee(\neg(\forall \alpha : ((k \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette})) \Rightarrow (\alpha = k)))$”
folgt: $\neg(\forall \alpha : ((k \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } M\_\text{Kette})) \Rightarrow (\alpha = k))$.

5: Aus 3
folgt: $\exists \Omega : (k \subseteq \Omega) \wedge (\Omega \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (\Omega \neq k)$.

6: Aus 5. . . $\Omega \neq k$
folgt: $k \neq \Omega$.

7: Aus 5 “. . . $k \subseteq \Omega$ . . .” und
aus 6 “$k \neq \Omega$”
folgt via **57-1(Def)**: $k \subset \Omega$.

8: Aus 5 “$\exists \Omega$ . . .”,
aus 5 “. . . Ω ist M_Kette. . . ” und
aus 7 “$k \subset \Omega$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (k \subset \Omega)$.

□

71-10. Keine M_Kette, die echte TeilKlasse einer anderen M_Kette ist, kann $\subseteq$maximale M_Kette sein:

71-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *K ist M_Kette.*

$\rightarrow)$ $k \subset K$.

Dann folgt "k keine $\subseteq$maximale M_Kette".

Beweis **71-10**

1: Es gilt: k ist $\subseteq$maximale M_Kette $\vee$ $\neg$(k ist $\subseteq$maximale M_Kette).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` k ist $\subseteq$maximale M_Kette.

2: Aus $\rightarrow)$ "$k \subset K$"
folgt via **57-1(Def)**: $(k \subseteq K) \wedge (k \neq K)$.

3: Aus `1.1.Fall` "k ist $\subseteq$maximale M_Kette",
aus 2 "$k \subseteq K \ldots$" und
aus $\rightarrow)$ "K ist M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: $K = k$.

4: Es gilt 3 "$K = k$".
Es gilt 2 "$\ldots k \neq K$".
Ex falso quodlibet folgt: k keine $\subseteq$maximale M_Kette.

`1.2.Fall` $\neg$(k ist $\subseteq$maximale M_Kette).

Aus `1.2.Fall` "$\neg$(k ist $\subseteq$maximale M_Kette)"
folgt via **71-1(Def)**: k keine $\subseteq$maximale M_Kette.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
k keine $\subseteq$maximale M_Kette.

□

71-11. Falls p_M_p, dann ist 0 keine $\subseteq$maximale M_Kette und jede $\subseteq$maximale M_Kette ist ungleich der leeren Menge:

71-11(Satz)

a) *Aus "p_M_p" folgt "0 keine $\subseteq$maximale M_Kette".*

b) *Aus "p_M_p" und "K ist $\subseteq$maximale M_Kette" folgt "$0 \neq K$".*

<u>Beweis **71-11**</u> `a)` `VS` gleich p_M_p.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p_M_p"
folgt via **30-2**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p_M_p"
folgt via **30-72**: $\{p\}$ ist M_Kette.

`2:` Aus `1`"p Menge"
folgt via **57-9**: $0 \subset \{p\}$.

`3:` Aus `1.2`"$\{p\}$ ist M_Kette" und
aus `2`"$0 \subset \{p\}$"
folgt via **71-10**: 0 keine $\subseteq$maximale M_Kette.

`b)` `VS` gleich $(p\_M\_p) \wedge (K$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$.

`1:` Es gilt: $(0 = K) \vee (0 \neq K)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 = K$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "... K ist $\subseteq$maximale M_Kette" und
aus `1.1.Fall`"$0 = K$"
folgt: 0 ist $\subseteq$maximale M_Kette.

`2.2:` Aus `VS` gleich "p_M_p ..."
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: 0 keine $\subseteq$maximale M_Kette.

`3:` Aus `2.2`"0 keine $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: $\neg$(0 ist $\subseteq$maximale M_Kette).

`3:` Es gilt `2.1`"0 ist $\subseteq$maximale M_Kette".
Es gilt `3`"$\neg$(0 ist $\subseteq$maximale M_Kette)".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq K$.

`1.2.Fall` $0 \neq K$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq K$.

$\square$

71-12. Wenn M reflexiv in z mit $0 \neq z$ ist, dann ist jede $\subseteq$maximale M_Kette nicht leer:

<u>71-12(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) $0 \neq z$.

$\rightarrow$) *K ist $\subseteq$maximale M_Kette.*

Dann folgt "$0 \neq K$".

<u>Beweis **71-12**</u>

1: Aus $\rightarrow$) "$0 \neq z$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in z$.

2: Aus $\rightarrow$) "M reflexiv in z" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: Ω_M_Ω.

3: Aus 2 "Ω_M_Ω" und
aus $\rightarrow$) "K ist $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-11**: $0 \neq K$.

$\square$

sse InklusionsRelation in z: Vereinigung von *sse*_Ketten von M_Ketten.

Ersterstellung: 20/06/07 **Letzte Änderung: 09/06/11**

72-1. Falls $\mathfrak{K}$ eine sse_Kette von M_Ketten ist und sse die InklusionsRelation in z ist, dann ist die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{K}$ ebenfalls eine M_Kette:

72-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) sse *InklusionsRelation in* z.

$\rightarrow$) $\mathfrak{K}$ *ist* sse_*Kette*.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{K}) \Rightarrow (\alpha$ *ist* M_*Kette*$)$.

Dann folgt "$\bigcup \mathfrak{K}$ *ist* M_*Kette".*

<u>Beweis **72-1**</u>

`Thema1.1` $(\alpha \in \mathfrak{K}) \wedge (\beta \in \mathfrak{K})$.

`2:` Aus →) “ $\mathfrak{K}$ ist sse_Kette” und
aus `Thema1.1` “$(\alpha \in \mathfrak{K}) \wedge (\beta \in \mathfrak{K})$”
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_sse\_\beta) \vee (\beta\_sse\_\alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` α_sse_β.

`3:` Aus →) “ sse InklusionsRelation in z ” und
aus `2.1.Fall` “α_sse_β”
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \beta$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

`2.2.Fall` β_sse_α.

`3:` Aus →) “ sse InklusionsRelation in z ” und
aus `2.2.Fall` “β_sse_α”
folgt via **68-4**: $\beta \subseteq \alpha$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathfrak{K}) \wedge (\beta \in \mathfrak{K})) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$”

`1.2:` Aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{K}) \Rightarrow (\alpha$ ist M_Kette$)$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathfrak{K}) \wedge (\beta \in \mathfrak{K})) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$”
folgt via **30-76**: $\bigcup \mathfrak{K}$ ist M_Kette.

□

72-2. Falls $\mathfrak{K}$ eine sse_Kette von M_Ketten ist, dann ist die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{K}$ ebenfalls eine M_Kette:

> **72-2(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) $\mathfrak{K}$ *ist* sse_*Kette.*
>
> $\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{K}) \Rightarrow (\alpha$ *ist* M_*Kette*$)$.
>
> *Dann folgt "*$\bigcup \mathfrak{K}$ *ist* M_*Kette".*

Beweis **72-2**

1: Via **68-2** gilt: sse InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

2: Aus 1"sse InklusionsRelation in $\mathcal{U}$",
aus $\rightarrow$)"$\mathfrak{K}$ ist sse_Kette" und
aus $\rightarrow$)"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{K}) \Rightarrow (\alpha$ ist M_Kette$)$"
folgt via **72-1**: $\bigcup \mathfrak{K}$ ist M_Kette.

□

sskt InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$: $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

*sskt*_Intervalle.

sskt InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$

und

incl InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$:

incl (Unten) Stark KettenVollständig.

Tarski III.

Tarski IV.

Ersterstellung: 20/06/07 **Letzte Änderung: 10/06/11**

73-1. Es wird die Klasse aller M_Ketten in die Essays eingeführt:

73-1(Definition)

$$\mathsf{73.0}(M) = \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}.$$

73-2. Wenig überraschend ist w genau dann in der Klasse aller M_Ketten, wenn w eine Menge und eine M_Kette ist:

73-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $w \in \{\omega : \omega$ *ist* M_*Kette*$\}$.

`ii)` *"w Menge" und "w ist M_Kette".*

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M_*Kette*$\}$.

Beweis **73-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $w \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt: w ist M_Kette.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: (w Menge) $\wedge$ (w ist M_Kette).

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich (w Menge) $\wedge$ (w ist M_Kette).

Aus `VS` gleich "$\ldots w$ ist M_Kette" und
aus `VS` gleich "w Menge$\ldots$" folgt: $w \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

$\square$

73-3. Die Klasse aller M_Ketten ist eine TeilKlasse von $\mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$. Konsequenter Weise ist die Klasse aller M_Ketten eine Menge, wenn $(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ eine Menge ist:

73-3(Satz)

a) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\} \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$.

b) *Aus* "$(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ *Menge*" *folgt* "$\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$ *Menge*".

73-1(Def) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

Beweis **73-3** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$"
folgt via **73-2**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Kette})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha \text{ ist } M\text{\_Kette}$"
folgt via **30-69**: $(\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`4:` Aus `3` "$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M \ldots$" und
aus `3` "$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-12**: $\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `2` "α Menge…"
folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M)) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\} \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

`b)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$ Menge.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\} \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

`3:` Aus `2` "$\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\} \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$" und
aus `1` "$\mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$ Menge.

□

73-4. Falls $sskt$ die InklusionsRelation in der Klasse aller M_Ketten ist und falls I ein $sskt$_Intervall ist, dann ist I eine TeilKlasse von $\mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$:

73-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

$\rightarrow$) I *ist sskt_Intervall.*

Dann folgt "$I \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$".

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

Beweis **73-4**

1.1: Aus $\rightarrow$)"$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{dom}\,(sskt) = \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{ran}\,(sskt) = \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

1.3: Aus $\rightarrow$)"I ist $sskt$_Intervall"
folgt via **41-26**: $I \subseteq \langle\cdot \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

2: $\langle\cdot \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{41-18(Def)}}{=} (\mathsf{dom}\,(sskt)) \cup (\mathsf{ran}\,(sskt))$
$\overset{1.1}{=} \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}) \cup (\mathsf{ran}\,(sskt))$
$\overset{1.2}{=} \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\} \cup \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$
$\overset{\mathbf{2-14}}{=} \{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$.

3: Aus 1.3"$I \subseteq \langle\cdot \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$" und
aus 2"$\langle\cdot \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = \ldots = \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt: $I \subseteq \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

4: Via **73-3** gilt: $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\} \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$.

5: Aus 3"$I \subseteq \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$" und
aus 4"$\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\} \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$.

□

73-5. Ist $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge, dann ist, wenn $sskt$ die InklusionsRelation in der Klasse aller M_Ketten ist, jedes $sskt$_Intervall eine Menge:

73-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.*

$\rightarrow$) *I ist $sskt$_Intervall.*

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

Dann folgt "I Menge".

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M_*Kette*$\}$.

Beweis **73-5**

1: Aus $\rightarrow$) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$" und
aus $\rightarrow$) "I ist $sskt$_Intervall"
folgt via **73-4**: $I \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

2: Aus $\rightarrow$) "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$ Menge.

3: Aus 1.2"$I \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$" und
aus 2"$\mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: I Menge.

$\square$

73-6. Nun wird ein Kriterium dafür gegeben, dass $k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ gilt, wobei $sskt$ die InklusionsRelation in der Klasse aller M_Ketten ist:

73-6(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow)$ *$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`ii)` *"k ist M_Kette" und "k Menge" und "$a \subseteq k$" und "a ist M_Kette" und "a Menge".*

`iii)` *"k ist M_Kette" und "k Menge" und "$a \subseteq k$".*

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M_Kette$\}$.

Beweis **73-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$

`VS` gleich $sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

`1:` Aus $\rightarrow)$"$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$" und
aus $\rightarrow)$"$k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **68-49**:
$(a \subseteq k) \wedge (a \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}) \wedge (k \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\})$.

`2.1:` Aus `1`"... $a \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ..."
folgt via **73-2**: $(a \text{ Menge}) \wedge (a \text{ ist } M\_\text{Kette})$.

`2.2:` Aus `1`"... $k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt via **73-2**: $(k \text{ Menge}) \wedge (k \text{ ist } M\_\text{Kette})$.

`3:` Aus `2.2`"... k ist M_Kette",
aus `2.2`"k Menge",
aus `1`"$a \subseteq k$ ...",
aus `2.1`"... a ist M_Kette" und
aus `2.1`"a Menge..."
folgt:
$(k \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (k \text{ Menge}) \wedge (a \subseteq k) \wedge (a \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (a \text{ Menge})$.

<u>Beweis</u> **73-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich (k ist M_Kette) $\wedge$ (k Menge) $\wedge$ ($a \subseteq k$) $\wedge$ (a ist M_Kette) $\wedge$ (a Menge).

Aus `VS`
folgt: (k ist M_Kette) $\wedge$ (k Menge) $\wedge$ ($a \subseteq k$).

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$
`VS` gleich (k ist M_Kette) $\wedge$ (k Menge) $\wedge$ ($a \subseteq k$).

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots k$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "k ist M_Kette$\ldots$"
folgt via **73-2**: $k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots a \subseteq k \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots k$ Menge$\ldots$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: a Menge.

`1.3`: Aus `VS` gleich "k ist M_Kette$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \subseteq k$"
folgt via **30-73**: a ist M_Kette.

`2`: Aus `1.2`"a Menge" und
aus `1.3`"a ist M_Kette"
folgt via **73-2**: $a \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

`3`: Aus $\rightarrow$) "*sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \subseteq k$",
aus `2`"$a \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$" und
aus `1.1`"$k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"
folgt via **68-49**: $k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

$\square$

73-7. Falls *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ist, dann ist k genau dann in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$, wenn dieses *sskt*_Intervall ungleich der leeren Menge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ gilt, i.e. wenn k eine Menge und eine M_Kette ist:

73-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $k \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`ii)` $0 \neq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`iii)` $k \in \{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

`iv)` *"k Menge" und "k ist M_Kette".*

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

Beweis **73-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $k \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

Aus `VS` gleich "$k \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **0-20**: $0 \neq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus →) "*sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$",

aus `1`"$\ldots \Omega \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **73-6**: (k ist M_Kette) $\wedge$ (k Menge).

`3:` Aus `2`"$\ldots k$ Menge" und

aus `2`"k ist M_Kette$\ldots$"

folgt via **73-2**: $k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$.

Aus `VS` gleich "$k \in \{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$"

folgt via **73-2**: (k Menge) $\wedge$ (k ist M_Kette).

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich (k Menge) $\wedge$ (k ist M_Kette).

`1:` Via **0-6** gilt: $k \subseteq k$.

`2:` Aus →) "*sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$",

aus `VS` gleich "$\ldots k$ ist M_Kette",

aus `VS` gleich "k Menge$\ldots$" und

aus `1`"$k \subseteq k$"

folgt via **73-6**: $k \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

□

73-8. Falls $(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ eine Menge ist und falls k eine M_Kette ist, dann ist $k\in[k\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$, wobei hier $sskt$ die InklusionsRelation in $\{\omega:\omega$ ist M_Kette$\}$ ist:

73-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega:\omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ *Menge.*

$\rightarrow)$ k *ist* M*_Kette.*

Dann folgt:

a) $k\in[k\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$.

b) $0\neq[k\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$.

73-1(Def) $\{\omega:\omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

Beweis **73-8**

1: Aus $\rightarrow)$ "k ist M_Kette" und
aus $\rightarrow)$ "$(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ Menge"
folgt via **30-70**: k Menge.

2.a): Aus $\rightarrow)$ "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega:\omega$ ist M_Kette$\}$",
aus 1 "k Menge" und
aus $\rightarrow)$ "k ist M_Kette"
folgt via **73-7**: $k\in[k\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$.

2.b): Aus $\rightarrow)$ "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega:\omega$ ist M_Kette$\}$",
aus 1 "k Menge" und
aus $\rightarrow)$ "k ist M_Kette"
folgt via **73-7**: $0\neq[k\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$.

□

73-9. Im nunmehrigen Satz wird Einiges über die *incl*_Infima von E, falls E eine nicht leere TeilKlasse von $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ist, ausgesagt, wobei *incl* die InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ und *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$ ist:

73-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

$\rightarrow$) *incl InklusionsRelation in* $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt:

a) $\bigcap E \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

b) $\bigcap E$ *ist incl_Infimum von* E.

73-1(Def) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

Beweis **73-9**

`1.1:` Aus $0 \neq E$

folgt via **1-17**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\bigcap E \text{ Menge”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in E$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in E$” und

aus →)“$E \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **0-4**: $\beta \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus →)“$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$” und

aus 2“$\beta \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **73-6**: (β ist M_Kette) $\wedge$ $(a \subseteq \beta)$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((\beta \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (a \subseteq \beta))\text{”}}$

`1.3:` Aus `A2` gleich “$\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((\beta$ ist M_Kette$) \wedge (a \subseteq \beta))$”
folgt: $\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (a \subseteq \beta)$.

`2:` Aus `1.3`“$\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (a \subseteq \beta)$”

folgt via **1-15**: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“}a \subseteq \bigcap E\text{”}}$

<u>Beweis **73-9**</u>

`1.4:` Aus →) "$0 \neq E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`2:` Aus `1.4`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((\beta$ ist M_Kette$) \wedge (a \subseteq \beta))$"
folgt: Ω ist M_Kette.

`3:` Aus `1.4`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `2`"Ω ist M_Kette"
folgt via **30-75**: `A4` | "$\bigcap E$ ist M_Kette"

`1.a):` Aus →) "*sskt* InklusionsRelation in `73.0`(M)",
aus `A4` gleich "$\bigcap E$ ist M_Kette",
aus `A1` gleich "$\bigcap E$ Menge" und
aus `A3` gleich "$a \subseteq \bigcap E$"
folgt via **73-6**: $\bigcap E \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`2.b):` Aus →) "*incl* InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$",
aus `1.a)`"$\bigcap E \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$" und
aus →) "$\ldots E \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **68-14**: $\bigcap E$ ist *incl*_Infimum von E.

$\square$

73-10. Die InklusionsRelation in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$, wobei *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$ ist, ist unten Stark Vollständig:

73-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

$\rightarrow)$ *incl InklusionsRelation in* $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt "incl unten Stark Vollständig".

73-1(Def) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

<u>Beweis **73-10**</u>

`1.1:` Aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **68-6**: $incl$ antiSymmetrische Halbordnung in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1`“$incl$ antiSymmetrische Halbordnung in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **34-13**:

`A1`	“$(incl$ Relation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (incl$ reflexiv in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle)$ ”

`Thema1.2` $0 \neq \beta \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ”,
aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus `Thema1.2`“$0 \neq \beta \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **73-9**: $\bigcap \beta$ ist $incl$_Infimum von β.

`3:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcap \beta$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Omega = \bigcap \beta$ ” und
aus `2`“$\bigcap \beta$ ist $incl$_Infimum von β ”
folgt: Ω ist $incl$_Infimum von β.

`5:` Aus `3`“$\exists \Omega \ldots$ ” und
aus `4`“Ω ist $incl$_Infimum von β ”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $incl$_Infimum von β.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	“$\forall \beta : (0 \neq \beta \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist $incl$_Infimum von $\beta)$ ”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$incl$ Relation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \ldots$ ”,
aus `A1` gleich “$\ldots incl$ reflexiv in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus `A2` gleich
“$\forall \beta : (0 \neq \beta \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist $incl$_Infimum von $\beta)$”
folgt via **52-1**: $incl$ unten Stark Vollständig.

□

73-11. Falls k eine *incl*_Kette ist - *incl* ist die InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ und *sskt* ist die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ -, dann ist k eine TeilKlasse von $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$, die Vereinigung von k ist eine M_Kette und es gilt $k = 0$ oder $a \subseteq \bigcup k$:

73-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

$\rightarrow\!)$ *incl InklusionsRelation in* $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow\!)$ k *ist incl_Kette.*

Dann folgt:

a) $k \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

b) $\bigcup k$ *ist* M*_Kette.*

c) "$k = 0$" *oder* "$a \subseteq \bigcup k$".

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

Beweis **73-11** a)

1: Aus $\rightarrow\!)$ "*incl* InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **68-6**: *incl* antiSymmetrische Halbordnung in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus 1 "*incl* antiSymmetrische Halbordnung in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **34-13**: *incl* Relation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus 2 "*incl* Relation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$" und
aus $\rightarrow\!)$ "k ist *incl*_Kette"

folgt via **34-4**: $k \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **73-11** `b)`

`Thema1.1` $\beta \in k$.

`2:` Aus →) “ *sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ”,
aus →) “ *incl* InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus →) “ k ist *incl*_Kette ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $k \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `Thema1.1` “ $\beta \in k$ ” und
aus `2` “ $k \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **0-4**: $\beta \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus →)
“ *sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$” und
aus `3` “ $\beta \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **73-6**: β ist M_Kette.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “ $\forall \beta : (\beta \in k) \Rightarrow (\beta$ ist M_Kette$)$ ”

`1.2:` Aus →) “ *incl* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ”,
aus →) “ k ist *incl*_Kette ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \beta : (\beta \in k) \Rightarrow (\beta$ ist M_Kette$)$ ”
folgt via **72-1**: $\bigcup k$ ist M_Kette.

Beweis **73-11** `c)`

`1:` Es gilt: $(k=0)\vee(0\neq k)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $k=0$.

Aus `1.1.Fall`“$k=0$”
folgt: $(k=0)\vee(a\subseteq\bigcup k)$.

`1.2.Fall` $0\neq k$.

`2.1:` Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega:\omega$ ist M_Kette$\}$”,
aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$” und
aus →) “k ist $incl$_Kette”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $k\subseteq[a\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$0\neq k$”
folgt via **0-20**: $\exists\Omega:\Omega\in k$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots\Omega\in k$”
folgt via **1-15**: $\Omega\subseteq\bigcup k$.

`4:` Aus `2.2`“$\ldots\Omega\in k$” und
aus `2.1`“$k\subseteq[a\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$”
folgt via **0-4**: $\Omega\in[a\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$.

`5:` Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega:\omega$ ist M_Kette$\}$” und
aus `3`“$\Omega\in[a\overset{sskt}{|}\cdot\rangle$”
folgt via **73-6**: $a\subseteq\Omega$.

`6:` Aus `5`“$a\subseteq\Omega$” und
aus `3`“$\Omega\subseteq\bigcup k$”
folgt via **0-6**: $a\subseteq\bigcup k$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(0=k)\vee(a\subseteq\bigcup k)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(k=0)\vee(a\subseteq\bigcup k)$.

□

73-12. Falls k eine nicht leere *incl*_Kette ist - *incl* ist die InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ und *sskt* ist die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ -, deren Vereinigung eine Menge ist, dann ist $\bigcup k$ als *incl*_Supremum von k ein Element von $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$:

73-12(Satz)

Es gelte:

→) *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

→) *incl InklusionsRelation in* $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

→) k *ist incl_Kette.*

→) $0 \neq k$.

→) $\bigcup k$ *Menge.*

Dann folgt:

a) $\bigcup k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

b) $\bigcup k$ *ist incl_Supremum von* k.

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

<u>Beweis **73-12**</u>

1: Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$”,
aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$” und
aus →) “k ist $incl$_Kette”
folgt via **73-11**:

$$(k \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (\bigcup k \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge ((k = 0) \vee (a \subseteq \bigcup k)).$$

2: Aus →) “$0 \neq k$” und
aus 1 “$\ldots (k = 0) \vee (a \subseteq \bigcup k)$”
folgt: $a \subseteq \bigcup k.$

3.a): Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$”,
aus 1 “$\ldots \bigcup k$ ist M_Kette$\ldots$”,
aus →) “$\bigcup k$ Menge” und
aus 2 “$a \subseteq \bigcup k$”
folgt via **73-6**: $\bigcup k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

4.b): Aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$”,
aus 3.a) “$\bigcup k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$” und
aus 1 “$k \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \ldots$”
folgt via **68-15**: $\bigcup k$ ist $incl$_Supremum von k.

□

73-13. Falls $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge ist, dann ist die InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$, wobei *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$ ist, Stark KettenVollständig:

73-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

$\rightarrow)$ *incl InklusionsRelation in* $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

Dann folgt "incl Stark KettenVollständig".

73-1(Def) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

Beweis **73-13**

1: Aus $\rightarrow)$ "*sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$" und aus $\rightarrow)$ "*incl* InklusionsRelation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" folgt via **73-10**: *incl* unten Stark Vollständig.

2.1: Aus 1 "*incl* unten Stark Vollständig" folgt via **55-6**: A1 | "*incl* unten Stark KettenVollständig"

Beweis **73-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(0 \neq \beta) \wedge (\beta \text{ ist } incl\text{\_Kette}).$

`3.1:` Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$”, aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$” und aus `Thema2.2`“... β ist $incl$_Kette”
folgt via **73-11**: $\beta \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

`3.2:` Via **41-21** gilt: $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ist $sskt$_Intervall.

`4:` Aus →)“$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$” und aus `2.2`“$[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ist $sskt$_Intervall”
folgt via **73-4**: $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)).$

`5:` Aus `2.1`“$\beta \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$” und aus `4`“$[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$”
folgt via **0-6**: $\beta \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)).$

`6:` Aus `5`“$\beta \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$”
folgt via **1-19**: $\bigcup \beta \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M).$

`7:` Aus `5`“$\bigcup \beta \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$” und aus `VS` gleich “$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\bigcup \beta$ Menge.

`8:` Aus →) “$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$”, aus →) “$incl$ InklusionsRelation in $[a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$”, aus `Thema2.2`“... β ist $incl$_Kette”, aus `Thema2.2`“$0 \neq \beta$ ...” und aus `7`“$\bigcup \beta$ Menge”
folgt via **73-12**: $\bigcup \beta$ ist $incl$_Supremum von β.

...

...

<u>Beweis</u> **<u>73-13</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(0 \neq \beta) \wedge (\beta \text{ ist } incl\_\text{Kette})$.

...

`9`: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcup \beta$.

`10`: Aus `9`"$\ldots \Omega = \bigcup \beta$" und
aus `8`"$\bigcup \beta$ ist *incl*_Supremum von β"
folgt: Ω ist *incl*_Supremum von β.

`11`: Aus `9`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `10`"Ω ist *incl*_Supremum von β"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist *incl*_Supremum von β.

Ergo `Thema2.2`:

$$\forall \beta : ((0 \neq \beta) \wedge (\beta \text{ ist } incl\_\text{Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } incl\_\text{Supremum von } \beta).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: `A2` | "*incl* oben Stark KettenVollständig"

`2.3`: Aus `A1` gleich "*incl* unten Stark KettenVollständig" und
aus `A2` gleich "*incl* oben Stark KettenVollständig"
folgt via **55-5(Def)**: *incl* Stark KettenVollständig.

□

73-14. Im folgenden FixpunktSatz **Tarski III** werden etwas holprige Bedingungen dafür angegeben, dass eine Funktion, deren Definitions- und Bild-Bereich um $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ - wobei k eine M_Kette und $sskt$ die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ist - gruppiert ist, einen Fixpunkt hat:

73-14(Satz) (Tarski III)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist* M_*Kette*$\}$.

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

$\rightarrow$) k *ist* M_*Kette.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, f \subseteq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

e.1) Ω *Fixpunkt von* f.

e.2) $\Omega \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M_*Kette*$\}$.

Beweis **73-14**

1.1: Via **68-2** gilt:

$$\mathsf{sse} \cap ([k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \times ([k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \text{ InklusionsRelation in } [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$$

2: Aus 1.1 folgt: | A1 | "$\exists$*incl*: *incl* InklusionsRelation in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

1.2: Aus A1 gleich "... *incl* InklusionsRelation in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **68-6**: | A2 | "*incl* antiSymmetrische Halbordnung in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"

...

Beweis **73-14** ...

`1.3`: Aus →) " *sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$ ",
aus `A1` gleich " ... *incl* InklusionsRelation in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ " und
aus →) " $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge "
folgt via **73-13**: *incl* Stark KettenVollständig.

`2`: Aus `1.3` " *incl* Stark KettenVollständig "
folgt via **55-5(Def)**: `A3` | " *incl* oben Stark KettenVollständig "

`1.4`: Aus →) " *sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$ ",
aus →) " $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge " und
aus →) " k ist M_Kette "
folgt via **73-8**: `A4` | " $0 \neq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ "

`1.5`: Via **41-21** gilt: $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ist *sskt*_Intervall.

`2`: Aus →) " *sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$ ",
aus `1.5` " $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ist *sskt*_Intervall " und
aus →) " $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge "
folgt via **73-5**: `A5` | " $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ Menge "

`1.6`: Via **0-6** gilt: $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`2`: Aus `A1` gleich " ... *incl* InklusionsRelation in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ",
aus `1.6` " $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ",
aus →) " f Funktion ",
aus →) " $\mathsf{ran}\, f \subseteq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \ldots$ ",
aus →) " $\ldots [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, f$ " und
aus →) " $\forall \alpha : (\alpha \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$ "
folgt via **68-45**: `A6` | " f ist *incl*_vermehrend auf $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ "

...

<u>Beweis **73-14**</u> ...

`1.7:` Aus `A2` gleich "*incl* antiSymmetrische Halbordnung in $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$",
aus `A3` gleich "*incl* oben Stark KettenVollständig",
aus `A4` gleich "$0 \neq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$",
aus `A5` gleich "$[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ Menge",
aus →) "f Funktion" und
aus `A6` gleich "f ist *incl*_vermehrend auf $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **Tarski II**: $\exists\Omega : (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle)$.

□

73-15. Im folgenden FixpunktSatz **Tarski IV** werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass eine Funktion $f : [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \to [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ - wobei k eine M_Kette und *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$ ist - einen Fixpunkt hat:

73-15(Satz) (Tarski IV)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

$\rightarrow)$ k *ist* M*_Kette.*

$\rightarrow)$ $f : [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \to [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

e.1) Ω *Fixpunkt von* f.

e.2) $\Omega \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* M*_Kette*$\}$.

<u>Beweis **73-15**</u>

1: Aus →) “ $f : [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \to [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **21-1(Def)**:

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle).$$

2: Aus 1 “ $\ldots \mathsf{dom}\, f = [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \ldots$ ”
folgt via **0-6**: $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus →) “ $sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ ” ,
aus →) “ $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge ” ,
aus →) “ k ist M_Kette ” ,
aus 1 “ f Funktion... ” ,
aus 1 “ $\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ” ,
aus 2 “ $[k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$ ”
folgt via **Tarski III**:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \in [k \overset{sskt}{|} \cdot\rangle).$$

□

Aus $M \subseteq n$ folgt $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{n}$.

R ist M_induzierte Relation in z: $\overset{\mathbf{ir}}{R}$ ist die $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z.

R_Intervalle und M_Intervalle.

sub. sub−Notation.

$\mathsf{sub} = \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$.

Ersterstellung: 24/06/07 **Letzte Änderung: 11/06/11**

74-1. Falls $M \subseteq n$, dann ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ eine TeilKlasse von $\overset{\textbf{ir}}{n}$ und hieraus folgt Weiteres über $p\_\overset{\textbf{ir}}{n}\_q$ und $p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q$:

74-1(Satz)

a) *Aus* "$M \subseteq n$" *folgt* "$\overset{\textbf{ir}}{M} \subseteq \overset{\textbf{ir}}{n}$".

b) *Aus* "$M \subseteq n$" *und* "$p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q$" *folgt* "$p\_\overset{\textbf{ir}}{n}\_q$".

c) *Aus* "$M \subseteq n$" *und* "$\neg(p\_n\_q)$" *folgt* "$\neg(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q)$".

Beweis **74-1** `a)` `VS` gleich $M \subseteq n$.

`1.1:` Es gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M} = (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}$.

`1.2:` Es gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{n} = (n^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M \subseteq n$"
folgt via **11-6**: $M^{-1} \subseteq n^{-1}$.

`3:` Aus `2`"$n^{-1} \subseteq M^{-1}$"
folgt via **11-6**: $(M^{-1})^{-1} \subseteq (n^{-1})^{-1}$.

`4:` Aus `3`"$(M^{-1})^{-1} \subseteq (n^{-1})^{-1}$"
folgt via **5-5**: $(M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \subseteq (n^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}$.

`5:` $\overset{\mathbf{ir}}{M} \overset{1.1}{=} (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \overset{4}{\subseteq} (n^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \overset{1.2}{=} \overset{\mathbf{ir}}{n}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{n}$.

`b)` `VS` gleich $(M \subseteq n) \wedge (p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M \subseteq n \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{n}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q$" und
aus `1`"$\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{n}$"
folgt via **30-5**: $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{n} \_q$.

`c)` `VS` gleich $(M \subseteq n) \wedge (\neg(p\_n\_q))$.

`1:` Aus →) "$M \subseteq n \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \neg(p\_n\_q)$"
folgt via **30-5**: $\neg(p\_M\_q)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(p\_M\_q)$"
folgt via **41-5**: $\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q)$.

□

74-2. Falls R die M_induzierte Relation in z ist, dann ist $\overset{\mathbf{ir}}{R}$ die $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_indzuzierte Relation in z:

> **74-2(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) *R ist M_induzierte Relation in z.*
>
> $\rightarrow$) *rir ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z.*
>
> *Dann folgt "$rir = \overset{\mathbf{ir}}{R}$".*

Beweis **74-2**

`1.1:` Via **41-7** gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ irreflexiv.

`1.2:` Via **41-7** gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$.

`1.3:` Aus $\rightarrow$)"rir ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z"
folgt via **64-3**: rir Relation in z.

`2.1:` Aus $\rightarrow$)"rir ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z" und
aus `1.1`"$\overset{\mathbf{ir}}{M}$ irreflexiv"
folgt via **64-10**: rir irreflexiv.

`2.2:` Aus $\rightarrow$)"rir ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z",
aus $\rightarrow$)"R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `1.2`"$\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$"
folgt via **64-6**: $rir \subseteq R$.

`2.3:` Aus `1.3`"rir Relation in z"
folgt via **10-17**: rir Relation.

`3:` Aus `2.1`"rir irreflexiv",
aus `2.3`"rir Relation" und
aus `2.2`"$rir \subseteq R$"
folgt via **41-7**: `A1` | "$rir \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{R}$"

...

Beweis **74-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{R}$.

`2:` Aus `Thema1.4`“$\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{R}$”
folgt via **41-2**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge (\Omega\_R\_\Psi) \wedge (\Omega \neq \Psi).$$

`3:` Aus →)“R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `2`“$\ldots \Omega\_R\_\Psi \ldots$”
folgt via **64-4**: $(\Omega\_M\_\Psi) \wedge (\Omega \in z) \wedge (\Psi \in z)$.

`4:` Aus `3`“$\Omega\_M\_\Psi \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \neq \Psi$”
folgt via **41-3**: $\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\Psi$.

`5:` Aus →)“rir ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_induzierte Relation in z”,
aus `4`“$\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\Psi$”,
aus `3`“$\ldots \Omega \in z \ldots$” und
aus `3`“$\ldots \Psi \in z$”
folgt via **64-4**: Ω_rir_Ψ.

`6:` Aus `5`“Ω_rir_Ψ”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in rir$.

`7:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$” und
aus `6`“$(\Omega, \Psi) \in rir$”
folgt: $\alpha \in rir$.

Ergo `Thema1.4`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{R}) \Rightarrow (\alpha \in rir)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\overset{\mathbf{ir}}{R} \subseteq rir\text{”}}$

`1.5:` Aus `A1` gleich “$rir \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{R}$” und
aus `A2` gleich “$\overset{\mathbf{ir}}{R} \subseteq rir$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $rir = \overset{\mathbf{ir}}{R}$.

□

74-3. Falls R die M_induzierte Relation in z ist, dann ist $\overset{\textbf{ir}}{R}$ die $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z:

74-3(Satz)

Aus "R ist M_induzierte Relation in z"
folgt "$\overset{\textbf{ir}}{R}$ ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z".

Beweis **74-3** `VS` gleich R InklusionsRelation in Mz.

`1`: Via **64-2** gilt: $M \cap (z \times z)$ ist M_induzierte Relation in z.

`2`: Aus `1`
folgt: $\exists rir$: rir ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z.

`3`: Aus `VS` gleich "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `2`"… rir ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z"
folgt via **74-2**: $rir = \overset{\textbf{ir}}{R}$.

`4`: Aus `3`"$rir = \overset{\textbf{ir}}{R}$" und
aus `1`"… rir ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z"
folgt: $\overset{\textbf{ir}}{R}$ ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z.

□

74-4. Falls R die M_induzierte Relation in z ist, dann steht via **74-3** das folgende Kriterium für "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_q$" zur Verfügung:

74-4(Satz)

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow$) *R ist M_induzierte Relation in z.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $p\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_q$.

`ii)` "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" *und* "$p \in z$" *und* "$q \in z$".

`iii)` "p_M_q" *und* "$p \neq q$" *und* "$p \in z$" *und* "$q \in z$".

Beweis **74-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_q$.

`1:` Aus →) " R ist M_induzierte Relation in z "
folgt via **74-3**: $\overset{\mathbf{ir}}{R}$ ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z.

`2:` Aus `1` " $\overset{\mathbf{ir}}{R}$ ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _induzierte Relation in z " und
aus `VS` gleich " $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_q$ "
folgt via **64-4**: $(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

`1:` Aus `VS` gleich " $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q \ldots$ "
folgt via **41-3**: $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q)$.

`2:` Aus `1` " $p\_M\_q \ldots$ ",
aus `1` " $\ldots p \neq q$ ",
aus `VS` gleich " $\ldots p \in z \ldots$ " und
aus `VS` gleich " $\ldots q \in z$ "
folgt: $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

`1:` Aus →) " R ist M_induzierte Relation in z ",
aus `VS` gleich " $p\_M\_q \ldots$ ",
aus `VS` gleich " $\ldots p \in z \ldots$ " und
aus `VS` gleich " $\ldots q \in z$ "
folgt via **64-4**: p_R_q.

`2:` Aus `1` " p_R_q " und
aus `VS` gleich " $\ldots p \neq q \ldots$ "
folgt via **41-3**: $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_q$.

□

74-5. Falls R die M_induzierte Relation in z ist, dann stehen die folgenden Inklusionen für R_Intervalle zur Verfügung:

74-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *R ist M_inducierte Relation in z.*

Dann folgt:

a) $[a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b]$.

b) $]a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap]a \overset{M}{|} b[$.

c) $]a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap]a \overset{M}{|} b]$.

d) $[a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b[$.

e) $[a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

f) $]a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

g) $\langle\cdot \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

h) $\langle\cdot \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

i) $\langle\cdot \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **74-5** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in [a \overset{R}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\gamma \in [a \overset{R}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a\_R\_\gamma) \wedge (\gamma\_R\_b)$.

`3.1:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `2` "$a\_R\_\gamma \ldots$"
folgt via **64-4**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma \in z)$.

`3.2:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `2` "$\ldots \gamma\_R\_b$"
folgt via **64-4**: γ_M_b.

`4:` Aus `3.1` "$a\_M\_\gamma \ldots$" und
aus `3.2` "γ_M_b"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$.

`5:` Aus `3.1` "$\ldots \gamma \in z$" und
aus `4` "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **2-2**: $\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{R}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis</u> **74-5** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \,]a \overset{R}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1` "$\gamma \in \,]a \overset{R}{|} b[$"

folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ \gamma) \wedge (\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ b).$

`3.1:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und

aus 2 "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ \gamma \ldots$"

folgt via **74-4**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma) \wedge (\gamma \in z).$

`3.2:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und

aus 2 "$\ldots \gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ b$"

folgt via **74-4**: $\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b.$

`4:` Aus `3.1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma \ldots$" und

aus `3.2` "$\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$"

folgt via **41-25**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`5:` Aus `3.1` "$\ldots \gamma \in z$" und

aus 4 "$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **2-2**: $\gamma \in z \cap \,]a \overset{M}{|} b[.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{R}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in z \cap \,]a \overset{M}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap \,]a \overset{M}{|} b[.$

Beweis **74-5** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \,]a \overset{R}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in \,]a \overset{R}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_\gamma) \wedge (\gamma\_R\_b)$.

`3.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `2`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_\gamma \ldots$”
folgt via **74-4**: $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma) \wedge (\gamma \in z)$.

`3.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `2`“$\ldots \gamma\_R\_b$”
folgt via **64-4**: γ_M_b.

`4:` Aus `3.1`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma \ldots$” und
aus `3.2`“γ_M_b”
folgt via **41-25**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

`5:` Aus `3.1`“$\ldots \gamma \in z$” und
aus `4`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **2-2**: $\gamma \in z \cap \,]a \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{R}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in z \cap \,]a \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap \,]a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **74-5** `d)`</u>

`Thema1` $\gamma \in [a \overset{R}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1` "$\gamma \in [a \overset{R}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a\_R\_\gamma) \wedge (\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b).$

`3.1:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus 2 "$a\_R\_\gamma\ldots$"
folgt via **64-4**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma \in z).$

`3.2:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus 2 "$\ldots\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b$"
folgt via **74-4**: $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b.$

`4:` Aus `3.1` "$a\_M\_\gamma\ldots$" und
aus `3.2` "$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

`5:` Aus `3.1` "$\ldots\gamma \in z$" und
aus 4 "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **2-2**: $\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b[.$

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{R}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b[.$

<u>Beweis</u> **74-5** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $$\gamma \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle.$$

`2`: Aus `Thema1` “$\gamma \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $$a\_R\_\gamma.$$

`3`: Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `2` “a_R_γ”
folgt via **64-4**: $$(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma \in z).$$

`4`: Aus `3` “$a\_M\_\gamma \ldots$”
folgt via **41-25**: $$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

`5`: Aus `3` “$\ldots \gamma \in z$” und
aus `4` “$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **2-2**: $$\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

Ergo `Thema1`: $$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $$[a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

<u>Beweis **74-5**</u> `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \,]a \overset{R}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in \,]a \overset{R}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $a_- \overset{\mathbf{ir}}{R} {}_-\gamma.$

`3:` Aus →)“R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `2`“$a_- \overset{\mathbf{ir}}{R} {}_-\gamma$”
folgt via **74-4**: $(a_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\gamma) \wedge (\gamma \in z).$

`4:` Aus `3`“$a_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\gamma \ldots$”
folgt via **41-25**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`5:` Aus `3`“$\ldots \gamma \in z$” und
aus `4`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **2-2**: $\gamma \in z \cap \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{R}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in z \cap \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

<u>Beweis **74-5** g)</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \langle \cdot \overset{R}{|} b]$.

2: Aus Thema1 “$\gamma \in \langle \cdot \overset{R}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $\gamma \_ R \_ b$.

3: Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus 2 “$\gamma \_ R \_ b$”
folgt via **64-4**: $(\gamma \_ M \_ b) \wedge (\gamma \in z)$.

4: Aus 3 “$\gamma \_ M \_ b \ldots$”
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

5: Aus 3 “$\ldots \gamma \in z$” und
aus 4 “$\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **2-2**: $\gamma \in z \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

Ergo Thema1: $\forall \gamma : (\gamma \in \langle \cdot \overset{R}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in z \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle \cdot \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **74-5**</u> `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma\in\langle\cdot\overset{R}{|}\,b[.$

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma\in\langle\cdot\overset{R}{|}\,b[$”

folgt via **41-25**: $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b.$

`3:` Aus →)“R ist M_induzierte Relation in z” und

aus `2`“$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b$”

folgt via **74-4**: $(\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\wedge(\gamma\in z).$

`4:` Aus `3`“$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b\ldots$”

folgt via **41-25**: $\gamma\in\langle\cdot\overset{M}{|}\,b[.$

`5:` Aus `3`“$\ldots\gamma\in z$” und

aus `4`“$\gamma\in\langle\cdot\overset{M}{|}\,b[$”

folgt via **2-2**: $\gamma\in z\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\,b[.$

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma:(\gamma\in\langle\cdot\overset{R}{|}\,b[)\Rightarrow(\gamma\in z\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\,b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle\cdot\overset{R}{|}\,b[\subseteq z\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\,b[.$

Beweis **74-5** `i)`

`1.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”
folgt via **64-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq z) \wedge (\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

`1.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”
folgt via **64-9**: $(\mathsf{ran}\, R \subseteq z) \wedge (\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`2.1:` Aus `1.1` “$\mathsf{dom}\, R \subseteq z \ldots$” und
aus `1.2` “$\mathsf{ran}\, R \subseteq z \ldots$”
folgt via **2-12**: $(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) \subseteq z$.

`2.2:` Aus `1.1` “$\ldots \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus `1.2` “$\ldots \mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **2-13**: $(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus `2.1` “$(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) \subseteq z$” und
aus `2.2` “$(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt via **2-12**: $(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) \subseteq z \cap ((\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M))$.

`4:` Aus “$\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle = (\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R)$” und
aus `3` “$(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) \subseteq z \cap ((\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M))$”
folgt: $\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle \subseteq z \cap ((\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M))$.

`5:` aus `4` “$\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle \subseteq z \cap ((\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M))$” und
aus “$\langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle = (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt: $\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle \subseteq z \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

□

74-6. Nun wird Notwendiges für “ $[a \overset{R}{|} b] = z \cap [a \overset{M}{|} b]$” etc. angegeben, wobei R die M_inducierte Relation in z ist:

74-6(Satz)

Aus “R ist M_induzierte Relation in z” und…

a) *…und* “$[a \overset{R}{|} b] = z \cap [a \overset{M}{|} b]$”
folgt “$[a \overset{R}{|} b] = 0$” *oder* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$”.

b) *…und* “$]a \overset{R}{|} b[= z \cap]a \overset{M}{|} b[$”
folgt “$]a \overset{R}{|} b[= 0$” *oder* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$”.

c) *…und* “$]a \overset{R}{|} b] = z \cap]a \overset{M}{|} b]$”
folgt “$]a \overset{R}{|} b] = 0$” *oder* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$”.

d) *…und* “$[a \overset{R}{|} b[= z \cap [a \overset{M}{|} b[$”
folgt “$[a \overset{R}{|} b[= 0$” *oder* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$”.

e) *…und* “$[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” *folgt* “$[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0$” *oder* “$a \in z$”.

f) *…und* “$]a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” *folgt* “$]a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0$” *oder* “$a \in z$”.

g) *…und* “$\langle\cdot \overset{R}{|} b] = z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$” *folgt* “$\langle\cdot \overset{R}{|} b] = 0$” *oder* “$b \in z$”.

h) *…und* “$\langle\cdot \overset{R}{|} b[= z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$” *folgt* “$\langle\cdot \overset{R}{|} b[= 0$” *oder* “$b \in z$”.

i) *…und* “$\langle\cdot \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt “$(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) = z \cap ((\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$”.

<u>Beweis **74-6**</u> `a)` `VS` gleich $[a \overset{R}{|} b] = z \cap [a \overset{M}{|} b]$.

`1:` Es gilt: $([a \overset{R}{|} b] = 0) \vee (0 \neq [a \overset{R}{|} b])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $[a \overset{R}{|} b] = 0$.

Aus `1.1.Fall` “$[a \overset{R}{|} b] = 0$”
folgt: $([a \overset{R}{|} b] = 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

`1.2.Fall` $0 \neq [a \overset{R}{|} b]$.

`2:` Aus `1.2.Fall` “$0 \neq [a \overset{R}{|} b]$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{R}{|} b]$.

`3:` Aus `2` “$\ldots \Omega \in [a \overset{R}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $(a\_R\_\Omega) \wedge (\Omega\_R\_b)$.

`4.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3` “$a\_R\_\Omega \ldots$”
folgt via **64-4**: $a \in z$.

`4.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3` “$\ldots \Omega\_R\_b$”
folgt via **64-4**: $b \in z$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $([a \overset{R}{|} b] = 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$([a \overset{R}{|} b] = 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

<u>Beweis **74-6**</u> `b) VS` gleich $$]a\overset{R}{|}b[\,=z\cap\,]a\overset{M}{|}b[.$$

`1:` Es gilt: $$(]a\overset{R}{|}b[\,=0)\vee(0\neq\,]a\overset{R}{|}b[).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $]a\overset{R}{|}b[\,=0.$

Aus `1.1.Fall`“$]a\overset{R}{|}b[\,=0$”
folgt: $(]a\overset{R}{|}b[\,=0)\vee((a\in z)\wedge(b\in z)).$

`1.2.Fall` $0\neq\,]a\overset{R}{|}b[.$

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0\neq\,]a\overset{R}{|}b[$”
folgt via **0-20**: $\exists\Omega:\Omega\in\,]a\overset{R}{|}b[.$

`3:` Aus `2`“$\ldots\Omega\in\,]a\overset{R}{|}b[$”
folgt via **41-25**: $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_\Omega)\wedge(\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b).$

`4.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_\Omega\ldots$”
folgt via **74-4**: $a\in z.$

`4.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3`“$\ldots\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b$”
folgt via **74-4**: $b\in z.$

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(a\in z)\wedge(b\in z).$

`6:` Aus `5`
folgt: $(]a\overset{R}{|}b[\,=0)\vee((a\in z)\wedge(b\in z)).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(]a\overset{R}{|}b[\,=0)\vee((a\in z)\wedge(b\in z)).$$

<u>Beweis **74-6**</u> `c) VS` gleich $\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = z \cap \rbrack a \overset{M}{|} b \rbrack$.

`1:` Es gilt: $(\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = 0) \vee (0 \neq \rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = 0$.

Aus `1.1.Fall`“$\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = 0$”
folgt: $(\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

`1.2.Fall` $0 \neq \rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq \rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack$ ”
folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ \Omega) \wedge (\Omega \_ R \_ b)$.

`4.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3`“$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ \Omega \ldots$”
folgt via **74-4**: $a \in z$.

`4.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3`“$\ldots \Omega \_ R \_ b$”
folgt via **64-4**: $b \in z$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\rbrack a \overset{R}{|} b \rbrack = 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z)).$$

<u>Beweis **74-6**</u> `d) VS` gleich $[a \overset{R}{|} b[= z \cap [a \overset{M}{|} b[$.

`1:` Es gilt: $([a \overset{R}{|} b[= 0) \vee (0 \neq [a \overset{R}{|} b[)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $[a \overset{R}{|} b[= 0$.

Aus `1.1.Fall` “$[a \overset{R}{|} b[= 0$”
folgt: $([a \overset{R}{|} b[= 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

`1.2.Fall` $0 \neq [a \overset{R}{|} b[$.

`2:` Aus `1.2.Fall` “$0 \neq [a \overset{R}{|} b[$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{R}{|} b[$.

`3:` Aus `2` “$\ldots \Omega \in [a \overset{R}{|} b[$”
folgt via **41-25**: $(a \_ R \_ \Omega) \wedge (\Omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ b)$.

`4.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3` “$a \_ R \_ \Omega \ldots$”
folgt via **64-4**: $a \in z$.

`4.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z” und
aus `3` “$\ldots \Omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ b$”
folgt via **74-4**: $b \in z$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $([a \overset{R}{|} b[= 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$([a \overset{R}{|} b[= 0) \vee ((a \in z) \wedge (b \in z))$.

Beweis **74-6** `e)` `VS` gleich $[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Es gilt: $([a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (0 \neq [a \overset{R}{|} \cdot\rangle)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0$.

Aus `1.1.Fall` "$[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0$"

folgt: $([a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (a \in z)$.

`1.2.Fall` $0 \neq [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **41-25**: a_R_Ω.

`4:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und

aus `3` "a_R_Ω"

folgt via **64-4**: $a \in z$.

`5:` Aus `4`

folgt: $([a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (a \in z)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $([a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (a \in z)$.

<u>Beweis **74-6** `f)` `VS` gleich</u> $\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap \rceil a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Es gilt: $(\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (0 \neq \rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0$.

Aus `1.1.Fall` "$\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0$"
folgt: $(\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (a \in z)$.

`1.2.Fall` $0 \neq \rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq \rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_\Omega$.

`4:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `3` "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_\Omega$"
folgt via **74-4**: $a \in z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (a \in z)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\rceil a \overset{R}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (a \in z)$.

Beweis **74-6** `g)` `VS` gleich $\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = z \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]$.

`1:` Es gilt: $(\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = 0) \vee (0 \neq \langle\cdot \overset{R}{\mid} b])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = 0$.

Aus `1.1.Fall` "$\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = 0$"
folgt: $(\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = 0) \vee (b \in z)$.

`1.2.Fall` $0 \neq \langle\cdot \overset{R}{\mid} b]$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq \langle\cdot \overset{R}{\mid} b]$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \langle\cdot \overset{R}{\mid} b]$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \langle\cdot \overset{R}{\mid} b]$"
folgt via **41-25**: Ω_R_b.

`4:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `3` "Ω_R_b"
folgt via **64-4**: $b \in z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = 0) \vee (b \in z)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\langle\cdot \overset{R}{\mid} b] = 0) \vee (b \in z)$.

Beweis **74-6** `h)` `VS` gleich $\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=z\cap\langle\cdot\overset{M}{|}b[.$

`1:` Es gilt: $((\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=0)\vee(0\neq\langle\cdot\overset{R}{|}b[).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=0.$

Aus `1.1.Fall` "$\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=0$"
folgt: $((\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=0)\vee(b\in z).$

`1.2.Fall` $0\neq\langle\cdot\overset{R}{|}b[.$

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0\neq\langle\cdot\overset{R}{|}b[$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega:\Omega\in\langle\cdot\overset{R}{|}b[.$

`3:` Aus `2` "$\ldots\Omega\in\langle\cdot\overset{R}{|}b[$"
folgt via **41-25**: $\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b.$

`4:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `3` "$\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b$"
folgt via **74-4**: $b\in z.$

`5:` Aus `4`
folgt: $((\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=0)\vee(b\in z).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $((\langle\cdot\overset{R}{|}b[\,=0)\vee(b\in z).$

`i)` `VS` gleich $\langle\cdot\overset{R}{|}\cdot\rangle=z\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle.$

`1.1:` Es gilt: $\langle\cdot\overset{R}{|}\cdot\rangle=(\mathsf{dom}\,R)\cup(\mathsf{ran}\,R).$

`1.2:` Es gilt: $\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle=(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M).$

`2:` $(\mathsf{dom}\,R)\cup(\mathsf{ran}\,R)\overset{1.1}{=}\langle\cdot\overset{R}{|}\cdot\rangle\overset{\mathtt{VS}}{=}z\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle\overset{1.2}{=}z\cap((\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{dom}\,R)\cup(\mathsf{ran}\,R)=z\cap((\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)).$

□

74-7. Nun wird Hinreichendes für “ $[a \overset{R}{|} b] = z \cap [a \overset{M}{|} b]$” etc. angegeben, wobei R die M_induzierte Relation in z ist:

74-7(Satz)

Aus “R ist M_induzierte Relation in z” und...

a) *... und* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$” *folgt* “$[a \overset{R}{|} b] = z \cap [a \overset{M}{|} b]$”.

b) *... und* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$” *folgt* “$]a \overset{R}{|} b[= z \cap]a \overset{M}{|} b[$”.

c) *... und* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$” *folgt* “$]a \overset{R}{|} b] = z \cap]a \overset{M}{|} b]$”.

d) *... und* “$(a \in z) \wedge (b \in z)$” *folgt* “$[a \overset{R}{|} b[= z \cap [a \overset{M}{|} b[$”.

e) *... und* “$a \in z$” *folgt* “$[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”.

f) *... und* “$a \in z$” *folgt* “$]a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”.

g) *... und* “$b \in z$” *folgt* “$\langle\cdot \overset{R}{|} b] = z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”.

h) *... und* “$b \in z$” *folgt* “$\langle\cdot \overset{R}{|} b[= z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”.

i) *... und* “$(\mathsf{dom}\, R) \cup (\mathsf{ran}\, R) = z \cap ((\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M))$”
folgt “$\langle\cdot \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$”.

<u>Beweis **74-7**</u> `a)` `VS` gleich $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”

folgt via **74-5**: $\boxed{\texttt{A1} \Big| \text{“}[a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b]\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in [a \overset{M}{|} b])$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \gamma \in [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_M\_b)$.

`4.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”,
aus `3`“$a\_M\_\gamma \ldots$”,
aus `VS` gleich “$a \in z \ldots$” und
aus `2`“$\gamma \in z \ldots$”
folgt via **64-4**: a_R_γ.

`4.2:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”,
aus `3`“$\ldots \gamma\_M\_b$”,
aus `2`“$\gamma \in z \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots b \in z$”
folgt via **64-4**: γ_R_b.

`5:` Aus `4.1`“a_R_γ” und
aus `4.2`“γ_R_b”

folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{R}{|} b]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{R}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \Big| \text{“}z \cap [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{R}{|} b]\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$[a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b]$” und

aus `A2` gleich “$z \cap [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{R}{|} b]$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{R}{|} b] = z \cap [a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **74-7**</u> `b)` `VS` gleich $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z"

folgt via **74-5**: $\boxed{\texttt{A1} \big|\ \text{“}]a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap]a \overset{M}{|} b[\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in z \cap]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in z \cap]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in]a \overset{M}{|} b[)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \gamma \in]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma) \wedge (\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)$.

`4.1:` Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z",
aus `3`"$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma \ldots$",
aus `VS` gleich "$a \in z \ldots$" und
aus `2`"$\gamma \in z \ldots$"

folgt via **74-4**: $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ \gamma$.

`4.2:` Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z",
aus `3`"$\ldots \gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$",
aus `2`"$\gamma \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"

folgt via **74-4**: $\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ b$.

`5:` Aus `4.1`"$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ \gamma$" und
aus `4.2`"$\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_ b$"

folgt via **41-25**: $\gamma \in]a \overset{R}{|} b[$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in]a \overset{R}{|} b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \big|\ \text{“} z \cap]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{R}{|} b[\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$]a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap]a \overset{M}{|} b[$" und
aus `A2` gleich "$z \cap]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{R}{|} b[$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $]a \overset{R}{|} b[= z \cap]a \overset{M}{|} b[$.

<u>Beweis **74-7**</u> `c)` `VS` gleich $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) “ R ist M_induzierte Relation in z ”

folgt via **74-5**: `A1` | “ $]a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap]a \overset{M}{|} b]$ ”

`Thema1.2` $\gamma \in z \cap]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1.2` “ $\gamma \in z \cap]a \overset{M}{|} b]$ ”

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in]a \overset{M}{|} b])$.

`3:` Aus `2` “ $\ldots \gamma \in]a \overset{M}{|} b]$ ”

folgt via **41-25**: $(a{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}\gamma) \wedge (\gamma{\_}M{\_}b)$.

`4.1:` Aus $\rightarrow$) “ R ist M_induzierte Relation in z ”,
aus `3` “ $a{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}\gamma \ldots$ ”,
aus `VS` gleich “ $a \in z \ldots$ ” und
aus `2` “ $\gamma \in z \ldots$ ”

folgt via **74-4**: $a{\_}\overset{\mathbf{ir}}{R}{\_}\gamma$.

`4.2:` Aus $\rightarrow$) “ R ist M_induzierte Relation in z ”,
aus `3` “ $\ldots \gamma{\_}M{\_}b$ ”,
aus `2` “ $\gamma \in z \ldots$ ” und
aus `VS` gleich “ $\ldots b \in z$ ”
folgt via **64-4**: $\gamma{\_}R{\_}b$.

`5:` Aus `4.1` “ $a{\_}\overset{\mathbf{ir}}{R}{\_}\gamma$ ” und
aus `4.2` “ $\gamma{\_}R{\_}b$ ”

folgt via **41-25**: $\gamma \in]a \overset{R}{|} b]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in]a \overset{R}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “ $z \cap]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{R}{|} b]$ ”

`1.3:` Aus `A1` gleich “ $]a \overset{R}{|} b] \subseteq z \cap]a \overset{M}{|} b]$ ” und
aus `A2` gleich “ $z \cap]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{R}{|} b]$ ”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $]a \overset{R}{|} b] = z \cap]a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **74-7**</u> `d) VS` gleich $(a \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z"

folgt via **74-5**: `A1` | "$[a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b[$"

`Thema1.2` $\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)$.

`4.1:` Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z",
aus `3`"$a\_M\_\gamma \ldots$",
aus `VS` gleich "$a \in z \ldots$" und
aus `2`"$\gamma \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: a_R_γ.

`4.2:` Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z",
aus `3`"$\ldots \gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$",
aus `2`"$\gamma \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **74-4**: $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b$.

`5:` Aus `4.1`"a_R_γ" und
aus `4.2`"$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{R}\_b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{R}{|} b[$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{R}{|} b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$z \cap [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{R}{|} b[$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$[a \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap [a \overset{M}{|} b[$" und
aus `A2` gleich "$z \cap [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{R}{|} b[$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{R}{|} b[= z \cap [a \overset{M}{|} b[$.

Beweis **74-7** `e)` `VS` gleich $a \in z$.

`1.1:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z"

folgt via **74-5**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} [a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{"}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`3:` Aus 2"$\ldots \gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_M_γ.

`4:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z",
aus 3"a_M_γ",
aus `VS` gleich "$a \in z$" und
aus 2"$\gamma \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: a_R_γ.

`5:` Aus 4"a_R_γ"

folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{R}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"} z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{R}{|} \cdot\rangle \text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$[a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus `A2` gleich "$z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{R}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **74-7**</u> `f)` `VS` gleich $a \in z$.

`1.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”

folgt via **74-5**: `A1` | “$\mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

`Thema1.2` $\gamma \in z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \gamma \in \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **41-25**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$.

`4:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”,
aus `3`“$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$”,
aus `VS` gleich “$a \in z$” und
aus `2`“$\gamma \in z \ldots$”

folgt via **74-4**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_\gamma$.

`5:` Aus `4`“$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_\gamma$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in \mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle \subseteq z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `A2` gleich “$z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbf{]}a \overset{R}{|} \cdot\rangle = z \cap \mathbf{]}a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **74-7**</u> `g)` `VS` gleich $b \in z$.

`1.1:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”

folgt via **74-5**: `A1` | “$\langle\cdot \overset{R}{|}\, b] \subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$”

`Thema1.2` $\gamma \in z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$”

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b])$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$”
folgt via **41-25**: γ_M_b.

`4:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in z”,
aus `3`“γ_M_b”,
aus `2`“$\gamma \in z \ldots$” und
aus `VS` gleich “$b \in z$”
folgt via **64-4**: γ_R_b.

`5:` Aus `4`“γ_R_b”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{R}{|}\, b]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{R}{|}\, b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b] \subseteq \langle\cdot \overset{R}{|}\, b]$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\langle\cdot \overset{R}{|}\, b] \subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$” und
aus `A2` gleich “$z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, b] \subseteq \langle\cdot \overset{R}{|}\, b]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\langle\cdot \overset{R}{|}\, b] = z \cap \langle\cdot \overset{M}{|}\, a]$.

Beweis **74-7** `h)` `VS` gleich $b \in z$.

`1.1:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z"

folgt via **74-5**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\langle\cdot \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\gamma \in z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"

folgt via **2-2**: $(\gamma \in z) \wedge (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-25**: $\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$.

`4:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z",
aus `3` "$\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$",
aus `2` "$\gamma \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$b \in z$"

folgt via **74-4**: $\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_b$.

`5:` Aus `4` "$\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{R} \_b$"

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{R}{|} b[$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{R}{|} b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{R}{|} b[\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\langle\cdot \overset{R}{|} b[\subseteq z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" und
aus `A2` gleich "$z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{R}{|} b[$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\langle\cdot \overset{R}{|} b[= z \cap \langle\cdot \overset{M}{|} a[$.

<u>Beweis **74-7**</u> `i)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\,R) \cup (\mathsf{ran}\,R) = z \cap ((\mathsf{dom}\,M) \cup (\mathsf{ran}\,M))$.

`1.1:` Es gilt: $\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle = (\mathsf{dom}\,R) \cup (\mathsf{ran}\,R)$.

`1.2:` Es gilt: $\langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle = (\mathsf{dom}\,M) \cup (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` $\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle \overset{1.1}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup (\mathsf{ran}\,R) \overset{\mathtt{VS}}{=} z \cap ((\mathsf{dom}\,M) \cup (\mathsf{ran}\,M)) \overset{1.2}{=} z \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`3:` Aus 2 folgt: $\langle \cdot \overset{R}{|} \cdot \rangle = z \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

□

74-8. Wie sich bald herausstellt, handelt es sich bei hier definierten, namenlosen Klasse sub um $\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$:

74-8(Definition)

sub

$$= \mathsf{74.0}() = \{(\lambda, \mu) : \lambda \subset \mu\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

74-9. Bei sub handelt es sich um eine Relation und es wird Hinreichendes für $w \in \mathsf{sub}$ angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

74-9(Satz)

a) sub *Relation.*

b) *Aus* "$w \in \mathsf{sub}$"
folgt "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Psi$ *Menge*$) \wedge (\Omega \subset \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$".

<u>Beweis **74-9**</u> `b)` `VS` gleich $w \in \mathsf{sub}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{sub}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{sub}$" und
aus "$\mathsf{sub} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `4`"Ω Menge$\ldots$",
aus `4`"$\ldots \Psi$ Menge",
aus `2`"$\ldots \Omega \subset \Psi \ldots$" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$) \wedge (\Omega \subset \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{sub}$.
Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{sub}$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{sub}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : p = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: sub Relation.

□

sub-Notation. Anstelle von "p_sub_q" wird "p sub q" geschrieben. Eine Verwechslung mit einer KlassenVariablen ist nicht möglich:

<u>sub-Notation</u>

Sind " $\&$ " und " $\overline{\&}$ " Klassen, so schreiben wir

$\boxed{\text{“ } \& \ \mathsf{sub}\ \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn gilt: " $\&\_\mathsf{sub}\_\overline{\&}$ " .

74-10. Unter Verwendung der <u>sub-**Notation**</u> wird ein Kriterium für $p \,\mathsf{sub}\, q$ bewiesen, das die Ahnung bestärkt, dass $\mathsf{sub} = \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$ gilt. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - iii) - ii) - iv) - i)`:

<u>**74-10(Satz)**</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \,\mathsf{sub}\, q$.

`ii)` $p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} {}_{-}q$.

`iii)` *"p Menge" und "q Menge" und "$p \subset q$".*

`iv)` *"q Menge" und "$p \subset q$".*

<u>sub-**Notation**</u>.

<u>Beweis **74-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $p \,\mathsf{sub}\, q$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \,\mathsf{sub}\, q$"
folgt via **30-2**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \,\mathsf{sub}\, q$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{sub}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$(p, q) \in \mathsf{sub}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$(p, q) \in \mathsf{sub}$"
folgt via **74-9**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `2.1`"(p, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi)$.

`4:` Aus `3`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots \Omega \subset \Psi \ldots$"
folgt: $p \subset \Psi$.

`5:` Aus `4`"$p \subset \Psi$" und
aus `3`"$\ldots q = \Psi$"
folgt: $p \subset q$.

`6:` Aus `1.1`"p Menge$\ldots$",
aus `1.1`"$\ldots q$ Menge" und
aus `5`"$p \subset q$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

Aus `VS` gleich "$(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q$"
folgt via **61-6**: $p_- \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} {}_- q$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $p_- \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} {}_- q$.

Aus `VS` gleich "$p_- \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} {}_- q$"
folgt via **61-6**: $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

<u>Beweis **74-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \subset q$"
folgt via **57-1(Def)**: $p \subseteq q$.

`2:` Aus `1`"$p \subseteq q$" und
aus `VS` gleich "q Menge$\ldots$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: p Menge.

`3.1:` Aus `2`"p Menge" und
aus `VS` gleich "q Menge$\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`3.2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`3.3:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`4.1:` Aus `3.2`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \subset q$"
folgt: $\Omega \subset q$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `3.3`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\Omega \subset q$" und
aus `3.3`"$\ldots \Psi = q$"
folgt: $\Omega \subset \Psi$.

`5.2:` Aus `4.2`
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Psi)$.

`6:` Aus `3.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.3`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `5.1`"$\ldots \Omega \subset \Psi$" und
aus `5.2`"$(p, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`7:` Aus `6`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$" und
aus `3.1`"(p, q) Menge"
folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`8:` Aus `7`"$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subset \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\} = \mathsf{sub}$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{sub}$.

...

<u>Beweis **74-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

...

$\texttt{9:}$ Aus $\texttt{8}$ “$(p,q) \in \mathsf{sub}$”
folgt: $p \,\mathsf{sub}\, q$.

$\square$

74-11. Durch Negation ergibt sich aus **74-10** ein Kriterium für “$\neg(p\ \mathsf{sub}\_q)$” :

74-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p\ \mathsf{sub}\ q)$.

`ii)` $\neg(p\_\ \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ \_q)$.

`iii)` *“p Unmenge” oder “q Unmenge” oder “$p \not\subseteq q$”.*

`iv)` *“q Unmenge” oder “$p \not\subseteq q$”.*

`sub`-**Notation**.

<u>Beweis **74-11**</u>

1: Via **74-10** gilt:

$$\begin{aligned} & p \;\mathsf{sub}\; q \\ \Leftrightarrow\; & (p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q) \\ \Leftrightarrow\; & ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)) \\ \Leftrightarrow\; & ((q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)). \end{aligned}$$

2: Aus 1
folgt:

$$\begin{aligned} & \neg(p \;\mathsf{sub}\; q) \\ \Leftrightarrow\; & (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q)) \\ \Leftrightarrow\; & (\neg((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q))) \\ \Leftrightarrow\; & (\neg((q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q))). \end{aligned}$$

3: Aus 2
folgt:

$$\begin{aligned} & \neg(p \;\mathsf{sub}\; q) \\ \Leftrightarrow\; & (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q)) \\ \Leftrightarrow\; & ((\neg(p \text{ Menge})) \vee (\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(p \subset q))) \\ \Leftrightarrow\; & ((\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(p \subset q))). \end{aligned}$$

4: Aus 3
folgt:

$$\begin{aligned} & \neg(p \;\mathsf{sub}\; q) \\ \Leftrightarrow\; & (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q)) \\ \Leftrightarrow\; & ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(p \subset q))) \\ \Leftrightarrow\; & ((q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(p \subset q))). \end{aligned}$$

5: Aus 4
folgt via **57-6**:

$$\begin{aligned} & \neg(p \;\mathsf{sub}\; q) \\ \Leftrightarrow\; & (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q)) \\ \Leftrightarrow\; & ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee (p \not\subset q)) \\ \Leftrightarrow\; & ((q \text{ Unmenge}) \vee (p \not\subset q)). \end{aligned}$$

$\square$

74-12. Es gilt $\mathsf{sub} = \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$:

74-12(Satz)

$$\mathsf{sub} = \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} .$$

Beweis **74-12**

`sse.sub`-**Notation**.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{sub}$.

2: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{sub}$”
folgt via **74-9**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\Omega \subset \Psi) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

3: Aus 2“$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$” und
aus 2“$\ldots \Omega \subset \Psi \ldots$”
folgt via **74-10**: $\Omega_{-} \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} {}_{-}\Psi$.

4: Aus 3“$\Omega_{-} \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} {}_{-}\Psi$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$.

5: Aus 2“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus 4“$(\Omega, \Psi) \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$”
folgt: $\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{sub}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{sub} \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$”

<u>Beweis **74-12**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$”
folgt via **41-2**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge (\Omega \ \mathsf{sse}\ \Psi) \wedge (\Omega \neq \Psi).$$

`3:` Aus 2“$\ldots \Omega \ \mathsf{sse}\ \Psi \ldots$”
folgt via **61-4**: $(\Psi \text{ Menge}) \wedge (\Omega \subseteq \Psi)$.

`4:` Aus 3“$\ldots \Omega \subseteq \Psi$” und
aus 2“$\ldots \Omega \neq \Psi$”
folgt via **57-1(Def)**: $\Omega \subset \Psi$.

`5:` Aus 3“Ψ Menge$\ldots$ ” und
aus 4“$\Omega \subset \Psi$”
folgt via **74-10**: $\Omega \ \mathsf{sub}\ \Psi$.

`6:` Aus 5“$\Omega \ \mathsf{sub}\ \Psi$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{sub}$.

`7:` Aus 2“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$” und
aus 6“$(\Omega, \Psi) \in \mathsf{sub}$”
folgt: $\alpha \in \mathsf{sub}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{sub})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} \subseteq \mathsf{sub}$.

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{sub} \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$” und
aus `A2` gleich “$\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}} \subseteq \mathsf{sub}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{sub} = \overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}$.

$\square$

sskt InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist eine } M\_\text{Kette}\}$: $\rbrack a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.
$\subseteq$maximale M_Ketten.

Ersterstellung: 03/07/07 **Letzte Änderung: 11/06/11**

75-1. Es wird ein Kriterium dafür gegeben, dass $k \in \,]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ gilt, wobei *sskt* die InklusionsRelation in der Klasse aller M_Ketten ist:

75-1(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega$ *ist M_Kette*$\}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $k \in \,]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`ii)` *"k ist M_Kette" und "k Menge" und "*$a \subset k$*" und "a ist M_Kette" und "a Menge".*

`iii)` *"k ist M_Kette" und "k Menge" und "*$a \subset k$*".*

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist M_Kette*$\}$.

<u>Beweis **75-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $k \in \,]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`1.1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$k \in \,]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{sskt}\ \_k$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$k \in \,]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$" und
aus `1.1`"$]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-4**: $k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `1.2`"$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{sskt}\ \_k$"
folgt via **41-3**: $a \neq k$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$" und
aus `2.1`"$k \in [a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **73-6**:
$(k$ ist M_Kette$) \wedge (k$ Menge$) \wedge (a \subseteq k) \wedge (a$ ist M_Kette$) \wedge (a$ Menge$)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots a \subseteq k \ldots$" und
aus `2.2`"$a \neq k$"
folgt via **57-1(Def)**: $a \subset k$.

`5:` Aus `3`"$(k$ ist M_Kette$) \wedge (k$ Menge$) \ldots$",
aus `4`"$a \subset k$" und
aus `3`"$\ldots (a$ ist M_Kette$) \wedge (a$ Menge$)$"
folgt:
$(k$ ist M_Kette$) \wedge (k$ Menge$) \wedge (a \subset k) \wedge (a$ ist M_Kette$) \wedge (a$ Menge$)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $(k$ ist M_Kette$) \wedge (k$ Menge$) \wedge (a \subset k) \wedge (a$ ist M_Kette$) \wedge (a$ Menge$)$.

Aus `VS`
folgt: $(k$ ist M_Kette$) \wedge (k$ Menge$) \wedge (a \subset k)$.

<u>Beweis **75-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(k \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (k \text{ Menge}) \wedge (a \subset k)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \subset k$"
folgt via **57-1(Def)**: $a \subseteq k$.

`2:` Aus →) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$",
aus `VS` gleich "$(k \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (k \text{ Menge}) \ldots$" und
aus `1`"$a \subseteq k$"
folgt via **73-6**: $(a \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (a \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots k$ Menge…" und
aus `VS` gleich "k ist $M_$Kette…"
folgt via **73-2**: $k \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots a$ Menge" und
aus `2`"a ist $M_$Kette…"
folgt via **73-2**: $a \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$.

`4:` Aus →) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \subset k$",
aus `3.2`"$a \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$" und
aus `3.1`"$k \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$"
folgt via **68-5**: $a\_ \overset{\textbf{ir}}{sskt}\ \_k$.

`5:` Aus `4`"$a\_ \overset{\textbf{ir}}{sskt}\ \_k$"
folgt via **41-25**: $k \in]a \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$.

□

75-2. Falls *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$ ist und falls K eine $\subseteq$maximale M_Kette ist, dann gilt erwarteter Weise $]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$:

<u>75-2(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

$\rightarrow)$ K *ist* $\subseteq$*maximale* M*_Kette.*

Dann folgt "$]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$".

73-1(Def) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

<u>Beweis **75-2**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \rbrack K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus $\rightarrow$)"*sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$" und
aus `Thema1`"$\alpha \in \rbrack K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **75-1**: $(\alpha$ ist M_Kette$) \wedge (K \subset \alpha)$.

`3:` Aus `2`"α ist M_Kette…" und
aus `2`"…$K \subset \alpha$"
folgt via **71-10**: K keine $\subseteq$maximale M_Kette.

`4:` Aus `3`"K keine $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: $\neg(K$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$.

`5:` Es gilt `4`"$\neg(K$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$".
Es gilt $\rightarrow$)"K ist $\subseteq$maximale M_Kette".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \rbrack K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \rbrack K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \notin \rbrack K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-19**: $\rbrack K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0.$

$\square$

75-3. Falls *sskt* die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$ ist und falls $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge ist, dann ist jede M_Kette K mit $]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$ eine $\subseteq$maximale M_Kette:

75-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *sskt InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

$\rightarrow)$ K *ist* M*_Kette.*

$\rightarrow)$ $]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$.

Dann folgt "K ist $\subseteq$maximale M_Kette".

73-1(Def) $\{\omega : \omega \textit{ ist } M\_\textit{Kette}\}$.

Beweis **75-3**

1: Es gilt: $\neg(K \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette}) \vee K \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette}.$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\neg(K \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette}).$

2: Aus `1.1.Fall` "$\neg(K \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette})$"
folgt via **71-1(Def)**: $K \text{ keine } \subseteq\text{maximale } M\text{\_Kette}.$

3: Aus →) "K ist M_Kette" und
aus 2 "K keine $\subseteq$maximale M_Kette" "
folgt via **71-9**: $\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (K \subset \Omega).$

4: Aus 3 "$\ldots \Omega$ ist M_Kette$\ldots$" und
aus →) "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge"
folgt via **30-70**: Ω Menge.

5: Aus →) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\text{\_Kette}\}$",
aus 4 "Ω Menge",
aus 3 "$\ldots \Omega$ ist M_Kette$\ldots$" und
aus 3 "$\ldots K \subset \Omega$"
folgt via **75-1**: $\Omega \in \,]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

6: Aus 5 "$\Omega \in \,]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \,]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

7: Es gilt 6 "$0 \neq \,]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$".
Es gilt →) "$]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: K ist $\subseteq$maximale M_Kette.

`1.2.Fall` K ist $\subseteq$maximale M_Kette.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
K ist $\subseteq$maximale M_Kette.

□

r Relation in x *und* $sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist eine r_Kette$\}$:

$sskt$_Intervalle.

$\subseteq$maximale r_Ketten.

Ersterstellung: 03/07/07 **Letzte Änderung: 11/06/11**

76-1. Falls $sskt$ die InklusionsRelation in der Klasse aller r_Ketten ist, wobei r Relation in x ist, und falls I ein $sskt$_Intervall ist, dann ist I eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$:

76-1(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist r_Kette$\}$.*

→) *I ist $sskt$_Intervall.*

Dann folgt "$I \subseteq \mathcal{P}(x)$".

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist r_Kette*$\}$.

Beweis **76-1**

1.1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

1.2: Aus →) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist r_Kette$\}$" und
aus →) "I ist $sskt$_Intervall"
folgt via **73-4**: $I \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r))$.

2: $(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) \overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} \mathsf{dom}\, r \overset{1.1}{\subseteq} x$.

3: Aus 2
folgt via **0-6**: $(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x$.

4: Aus 3 "$(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x$"
folgt via **0-28**: $\mathcal{P}((\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

5: Aus 1.2 "$I \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r))$" und
aus 4 "$\mathcal{P}((\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq \mathcal{P}(x)$.

□

76-2. Ist r eine Relation in x und ist x eine Menge, dann ist, wenn $sskt$ die InklusionsRelation in der Klasse aller r_Ketten ist, jedes $sskt$_Intervall eine Menge:

76-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist r_Kette$\}$.*

$\rightarrow$) *I ist $sskt$_Intervall.*

$\rightarrow$) *x Menge.*

Dann folgt "I Menge".

73-1(Def) $\{\omega : \omega$ *ist* r_*Kette*$\}$.

Beweis **76-2**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist r_Kette$\}$" und
aus $\rightarrow$) "I ist $sskt$_Intervall"
folgt via **76-1**: $I \subseteq \mathcal{P}(x)$.

2: Aus $\rightarrow$) "x Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(x)$ Menge.

3: Aus 1"$I \subseteq \mathcal{P}(x)$" und
aus 2"$\mathcal{P}(x)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: I Menge.

□

76-3. Falls r eine Relation in einer Menge x ist und falls $sskt$ die InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } r\_\text{Kette}\}$ ist, dann ist jede r_Kette K mit $]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$ eine $\subseteq$maximale r_Kette:

76-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ r *Relation in* x.

$\rightarrow)$ $sskt$ *InklusionsRelation in* $\{\omega : \omega \text{ ist } r\_\text{Kette}\}$.

$\rightarrow)$ x *Menge.*

$\rightarrow)$ K *ist* r_*Kette.*

$\rightarrow)$ $]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$.

Dann folgt "K *ist* $\subseteq$*maximale* r_*Kette".*

73-1(Def) $\{\omega : \omega \text{ ist } r\_\text{Kette}\}$.

Beweis **76-3**

1: Aus $\rightarrow)$ "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\text{dom}\, r \subseteq x$.

2: Aus 1 "$\text{dom}\, r \subseteq x$" und
aus $\rightarrow)$ "x Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\text{dom}\, r$ Menge.

3: Aus 2 "$\text{dom}\, r$ Menge"
folgt via **2-24**: $(\text{dom}\, r) \cap (\text{ran}\, r)$ Menge.

4: Aus $\rightarrow)$ "$sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } r\_\text{Kette}\}$",
aus 3 "$(\text{dom}\, r) \cap (\text{ran}\, r)$ Menge",
aus $\rightarrow)$ "K ist r_Kette" und
aus $\rightarrow)$ "$]K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$"
folgt via **75-3**: K ist $\subseteq$maximale r_Kette.

□

$$\mathtt{77.0}(z, M) \;:\; \mathtt{77.1}(z, M) \;\to\; \mathtt{77.2}(z, M)\,.$$

Die Funktion $\mathtt{77.0}(z, M)$ ordnet jedem $p \in z$, für das $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ eine Menge ist, das Intervall $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ zu.

Ersterstellung: 03/07/07 **Letzte Änderung: 13/06/11**

77-1. Mit den folgenden, durch KlassenTerme definierten Klassen wird die Beschreibung jener Funktion, die jedem $\lambda \in z$ das M_Intervall $]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle$ zuordnet, vorbereitet:

77-1(Definition)

1) $77.0(z, M) = \{(\lambda,]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle) : \lambda \in z\}$

$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$

2) $77.1(z, M) = \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}.$

3) $77.2(z, M) = \{]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in z\}$

$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle))\}.$

77-2. Bei $\mathtt{77.0}(z,M)$ handelt es sich um eine Relation und es wird Hinreichendes für $w\in\mathtt{77.0}(z,M)$ angegeben:

77-2(Satz)

a) $\mathtt{77.0}(z,M)$ *Relation.*

b) *Aus* "$w\in\mathtt{77.0}(z,M)$"

folgt "$\exists\Omega:(\Omega\in z)\wedge(\rbrack\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle\ \mathit{Menge})\wedge(w=(\Omega,\rbrack\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle))$".

$$\mathtt{77.0}(z,M)=\{(\lambda,\rbrack\lambda\overset{M}{|}\cdot\rangle):\lambda\in z\}.$$

Beweis **77-2** a)

$\boxed{\mathtt{Thema1}}$ $\alpha\in\mathtt{77.0}(z,M)$.

2: Aus Thema1 "$\alpha\in\mathtt{77.0}(z,M)$" und aus "$\mathtt{77.0}(z,M)$

$=\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in z)\wedge(\Psi=\rbrack\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$"

folgt:

$\alpha\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in z)\wedge(\Psi=\rbrack\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

3: Aus 2 "$\alpha\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in z)\wedge(\Psi=\rbrack\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$"

folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in z)\wedge(\Psi=\rbrack\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)\wedge(\alpha=(\Omega,\Psi))$.

4: Aus 3

folgt: $\exists\Omega,\Psi:\alpha=(\Omega,\Psi)$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathtt{77.0}(z,M))\Rightarrow(\exists\Omega,\Psi:\alpha=(\Omega,\Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\mathtt{77.0}(z,M)$ Relation.

<u>Beweis **77-2**</u> `b)` `VS` gleich $w \in \mathtt{77.0}(z, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathtt{77.0}(z, M)$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathtt{77.0}(z, M)$" und
aus "$\mathtt{77.0}(z, M) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3.1:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega,]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`4.1:` Aus `3.1`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ψ Menge.

`4.2:` Aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$" und
aus `3.2`"$(\Omega, \Psi) = (\Omega,]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"
folgt: $w = (\Omega,]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$" und
aus `4.1`"$\ldots \Psi$ Menge"
folgt: $]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge.

`6:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in z \ldots$",
aus `5`"$]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge" und
aus `4.2`"$\ldots w = (\Omega,]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (w = (\Omega,]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle))$.

$\square$

77-3. Nun folgt ein Kriterium für $(p,q) \in 77.0(z,M)$:

77-3(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $(p,q) \in 77.0(z,M)$.

ii) "p *Menge*" *und* "$p \in z$" *und* "$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*"
und "q *Menge*" *und* "$q =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

iii) "$p \in z$" *und* "$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*" *und* "$q =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

$$77.0(z,M) = \{(\lambda,]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle) : \lambda \in z\}.$$

<u>Beweis **77-3**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p,q) \in \mathtt{77.0}(z,M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in \mathtt{77.0}(z,M)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in \mathtt{77.0}(z,M)$ ”
folgt via **77-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge ((p,q) = (\Omega, \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle))$.

`2:` Aus `1.2`“$\ldots (p,q) = (\Omega, \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$” und
`1.1`“(p,q) Menge”
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus `2`“$p = \Omega \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \Omega \in z \ldots$”
folgt: $p \in z$.

`3.2:` Aus `2`“$p = \Omega \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$ Menge... ”
folgt: $\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$ Menge.

`3.3:` Aus `2`“$\ldots q = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \ldots$” und
aus `2`“$p = \Omega \ldots$”
folgt: $q = \rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `2`“$\ldots p$ Menge... ” ,
aus `3.1`“$p \in z$” ,
aus `3.2`“$\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$ Menge” ,
aus `2`“$\ldots q$ Menge” und
aus `3.3`“$q = \rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$”
folgt:

$$(p \text{ Menge}) \wedge (p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (q = \rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle).$$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$

`VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (q = \rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$.

Aus `VS`
folgt: $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (q = \rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$.

Beweis **77-3** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(p \in z) \wedge (]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (q =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

1.1: Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = p$.

1.2: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = q$.

1.3: Aus VS gleich "$p \in z \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.4: Aus VS gleich "$\ldots q =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus VS gleich "$\ldots]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge$\ldots$"
folgt: q Menge.

2.1: Aus 1.1"$\ldots \Omega = p$" und
aus 1.2"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

2.2: Aus 1.3"p Menge" und
aus 1.4"q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

2.3: Aus 1.1"$\ldots \Omega = p$" und
aus VS gleich "$p \in z$"
folgt: $\Omega \in z$.

2.4: Aus 1.1"$\ldots \Omega = p$" und
aus VS gleich "$\ldots q =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $q =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3.1: Aus 2.1"$(\Omega, \Psi) = (p, q)$"
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Psi)$.

3.2: Aus 1.2"$\ldots \Psi = q$" und
aus 2.4"$q =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

4: Aus 1.1"$\exists\Omega \ldots$",
aus 1.2"$\exists\Psi \ldots$",
aus 2.3"$\Omega \in z$",
aus 3.2"$\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 3.1"$(p, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

...

<u>Beweis</u> **77-3** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (q = \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

...

`5:` Aus `4`“ $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$ ” und
aus `2.2`“ (p, q) Menge ”

folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`6:` Aus `5`“ (p, q)

$\in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$” und

aus “ $\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\} = \mathtt{77.0}(z, M)$ ”
folgt: $(p, q) \in \mathtt{77.0}(z, M)$.

$\square$

77-4. Es folgt ein Kriterium für $p \in \mathtt{77.1}(z, M)$:

<u>77-4(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathtt{77.1}(z, M)$.

`ii)` "$p \in z$" *und* "$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*".

$$\mathtt{77.1}(z, M) = \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \textit{ Menge})\}.$$

<u>Beweis **77-4**</u> $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathtt{77.1}(z, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{77.1}(z, M)$" und
aus "$\mathtt{77.1}(z, M) = \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}$"
folgt: $(p \in z) \wedge (]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\mathtt{ii)} \Rightarrow \mathtt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in z) \wedge (]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in z \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge

`2:` Aus `VS` gleich "$(p \in z) \wedge (]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\} = \mathtt{77.1}(z, M)$"
folgt: $p \in \mathtt{77.1}(z, M)$.

□

77-5. TeilKlassen-Eigenschaften von $\mathtt{77.1}(z,M)$.

77-5(Satz)

a) $\mathtt{77.1}(z,M) \subseteq z$.

b) *Aus* “$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\rceil\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \mathit{Menge})$” *folgt* “$E \cap z \subseteq \mathtt{77.1}(z,M)$”.

c) *Aus* “$z \subseteq E$” *und* “$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\rceil\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \mathit{Menge})$”
folgt “$\mathtt{77.1}(z,M) = z$”.

d) *Aus* “$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\rceil\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \mathit{Menge})$” *folgt* “$\mathtt{77.1}(z,M) = z$”.

$$\mathtt{77.1}(z,M) = \{\omega : (\omega \in z) \wedge (\rceil\omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \mathit{Menge})\}.$$

Beweis **77-5** a)

`Thema1` $\beta \in \mathtt{77.1}(z,M)$.

Aus `Thema1`“$\beta \in \mathtt{77.1}(z,M)$”
folgt via **77-4**: $\beta \in z$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in \mathtt{77.1}(z,M)) \Rightarrow (\beta \in z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathtt{77.1}(z,M) \subseteq z$.

<u>Beweis **77-5**</u> `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\rbrack\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \text{Menge}).$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in E \cap z.$

`2:` Aus `Thema1`"$\beta \in E \cap z$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in E) \wedge (\beta \in z).$

`3:` Aus `2`"$\beta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\rbrack\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \text{Menge})$"
folgt: $\rbrack\beta \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \text{Menge}.$

`4:` Aus `2`"$\ldots \beta \in z$" und
aus `3`"$\rbrack\beta \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \text{Menge}$"
folgt via **77-4**: $\beta \in \mathtt{77.1}(z, M)\,.$

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in E \cap z) \Rightarrow (\beta \in \mathtt{77.1}(z, M)\,).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \cap z \subseteq \mathtt{77.1}(z, M)\,.$

`c)` `VS` gleich $(z \subseteq E) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\rbrack\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \text{Menge})).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\rbrack\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\ \text{Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $z \cap E \subseteq \mathtt{77.1}(z, M)\,.$

`2:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq E \ldots$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = z.$

`3:` Aus `1`"$z \cap E \subseteq \mathtt{77.1}(z, M)$" und
aus `2`"$z \cap E = z$"
folgt: $z \subseteq \mathtt{77.1}(z, M)\,.$

`4:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{77.1}(z, M) \subseteq z.$

`5:` Aus `4`"$\mathtt{77.1}(z, M) \subseteq z$" und
aus `3`"$z \subseteq \mathtt{77.1}(z, M)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathtt{77.1}(z, M) = z.$

<u>Beweis **77-5**</u> `d)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\rceil\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge}).$

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z.$

`2:` Aus `1`"$z \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\rceil\alpha \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathtt{77.1}(z, M) = z.$

$\square$

77-6. Der folgende Satz ist Ergebnis der Auseinandersetzung mit den Elementen von $\mathsf{77.2}(z, M)$:

<u>77-6(Satz)</u>

a) *Aus* “$q \in \mathsf{77.2}(z, M)$ ”

folgt “$\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*$) \wedge (q = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$”.

b) *Aus* “$p \in z$” *und* “$\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*” *folgt* “$\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in \mathsf{77.2}(z, M)$ ”.

$$\mathsf{77.2}(z, M) = \{\rbrack \lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in z\}.$$

<u>Beweis **77-6**</u> `a)` `VS` gleich $q \in \mathsf{77.2}(z, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$q \in \mathsf{77.2}(z, M)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$q \in \mathsf{77.2}(z, M)$ ” und
aus “$\mathsf{77.2}(z, M) = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle))\}$”
folgt: $q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle))\}$.

`2:` Aus `1.2`“$q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle))\}$ ”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (q = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`3:` Aus `1.1`“q Menge” und
aus `2`“$\ldots q = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt: $\rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge.

`4:` Aus `2`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `2`“$\ldots \Omega \in z \ldots$”,
aus `3`“$\rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge” und
aus `2`“$\ldots q = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (q = \rbrack \Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

<u>Beweis</u> **77-6** `b)` `VS` gleich $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \text{ Menge})$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2.1:` Aus `1`“$\ldots \Omega = p$” und
aus `VS` gleich “$p \in z \ldots$”
folgt: $\Omega \in z$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots \Omega = p$”
folgt: $\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `2.1`“$\Omega \in z$” und
aus `2.2`“$\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$.

`4:` Aus `3`“$\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$ Menge”
folgt: $\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle))\}$.

`5:` Aus `4`“$\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = \rbrack \Omega \overset{M}{\mid} \cdot\rangle))\} = \mathsf{77.2}(z, M)$”
folgt: $\rbrack p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \in \mathsf{77.2}(z, M)$.

□

77-7. Im folgenden Satz werden wechselseitige Beziehungen von $\mathsf{77.0}(z,M)$, $\mathsf{77.1}(z,M)$ und $\mathsf{77.2}(z,M)$ angegeben. Gerne würde in `iv)` auf die Aussage "$p \in z$" verzichtet werden, doch das kann nicht geschehen, wenn $\mathsf{77.2}(z,M)$ beispielsweise die leere Menge enthält, die mitunter gleich $]P \overset{M}{|} \cdot\rangle$ mit $P \notin z$ ist:

77-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` "$p \in z$" *und* "$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*".

`ii)` $(p,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in \mathsf{77.0}(z,M)$.

`iii)` $p \in \mathsf{77.1}(z,M)$.

`iv)` "$p \in z$" *und* "$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in \mathsf{77.2}(z,M)$ ".

$$\mathsf{77.0}(z,M) = \{(\lambda,]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle) : \lambda \in z\}.$$
$$\mathsf{77.1}(z,M) = \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle\ \mathit{Menge})\}.$$
$$\mathsf{77.2}(z,M) = \{]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in z\}.$$

<u>Beweis</u> **77-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}).$

Aus VS gleich “$p \in z \ldots$”,

aus VS gleich “$\ldots \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge” und

aus “$\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **77-3**: $(p, \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in 77.0(z, M)\,.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(p, \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in 77.0(z, M)\,.$

1: Aus VS gleich “$(p, \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in 77.0(z, M)$”

folgt via **77-3**: $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}).$

2: Aus 1“$p \in z \ldots$” und

aus 1“$\ldots \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge”

folgt via **77-4**: $p \in 77.1(z, M)\,.$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $p \in 77.1(z, M)\,.$

1: Aus VS gleich “$p \in 77.1(z, M)$”

folgt via **77-4**: $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}).$

2: Aus 1“$p \in z \ldots$” und

aus 1“$\ldots \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge”

folgt via **77-6**: $\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z, M)\,.$

3: Aus 1“$p \in z \ldots$” und

aus 2“$\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z, M)$”

folgt: $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z, M)).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z, M)).$

1: Aus VS gleich “$\ldots \rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z, M))$”

folgt via **ElementAxiom**: $\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge.

2: Aus VS gleich “$p \in z \ldots$” und

aus 1“$\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge”

folgt: $(p \in z) \wedge (\rbrack p \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}).$

$\square$

77-8. Die Klasse $\mathtt{77.0}(z, M)$ ist eine Funktion mit Definitions-Bereich $\mathtt{77.1}(z, M)$ und Bild-Bereich $\mathtt{77.2}(z, M)$. Für alle $p \in \mathtt{77.1}(z, M)$ gilt $\mathtt{77.0}(z, M)\,(p) =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - d) - a) - e)`:

77-8(Satz)

a) $\mathtt{77.0}(z, M) : \mathtt{77.1}(z, M) \to \mathtt{77.2}(z, M)$.

b) $\mathtt{77.0}(z, M)$ *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{77.0}(z, M)) = \mathtt{77.1}(z, M)$.

d) $\mathsf{ran}\,(\mathtt{77.0}(z, M)) = \mathtt{77.2}(z, M)$.

e) *Aus* "$p \in \mathtt{77.1}(z, M)$" *folgt* "$\mathtt{77.0}(z, M)\,(p) =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

$$\mathtt{77.0}(z, M) = \{(\lambda,]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle) : \lambda \in z\}.$$
$$\mathtt{77.1}(z, M) = \{\omega : (\omega \in z) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \textit{ Menge})\}.$$
$$\mathtt{77.2}(z, M) = \{]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in z\}.$$

<u>Beweis **77-8**</u> `b)`

`1.1:` Via **77-2** gilt: | `A1` | “$77.0(z,M)$ Relation” |

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $((\alpha,\beta)\in 77.0(z,M))\wedge((\alpha,\gamma)\in 77.0(z,M))$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha,\beta)\in 77.0(z,M)\ \ldots$”

folgt via **77-3**: $\beta =]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots(\alpha,\gamma)\in 77.0(z,M)$”

folgt via **77-3**: $\gamma =]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2.1`“$\beta =]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und

aus `2.2`“$\gamma =]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

| `A2` | “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in 77.0(z,M))\wedge((\alpha,\gamma)\in 77.0(z,M)))\Rightarrow(\beta=\gamma)$” |

`1.3:` Aus `A1` gleich “$77.0(z,M)$ Relation” und
aus `A2` gleich “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in 77.0(z,M))\wedge((\alpha,\gamma)\in 77.0(z,M)))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $77.0(z,M)$ Funktion.

Beweis **77-8** c)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,)$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in 77.0(z, M)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in 77.0(z, M)$"
folgt via **77-3**: $(\alpha \in z) \wedge (\rbrack \alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})$.

4: Aus 3 "$\alpha \in z \ldots$" und
aus 3 "$\ldots \rbrack \alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge"
folgt via **77-7**: $\alpha \in 77.1(z, M)$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,)) \Rightarrow (\alpha \in 77.1(z, M)\,)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,) \subseteq 77.1(z, M)$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in 77.1(z, M)$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in 77.1(z, M)$"
folgt via **77-7**: $(\alpha, \rbrack \alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in 77.0(z, M)$.

3: Aus 2 "$(\alpha, \rbrack \alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in 77.0(z, M)$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,)$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in 77.1(z, M)\,) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$77.1(z, M) \subseteq \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,)$"

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,) \subseteq 77.1(z, M)$" und
aus A2 gleich "$77.1(z, M) \subseteq \mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)\,) = 77.1(z, M)$.

<u>Beweis **77-8**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(77.0(z,M)\,)$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(77.0(z,M)\,)$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega,\alpha) \in 77.0(z,M)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots(\Omega,\alpha) \in 77.0(z,M)$ ”
folgt via **77-3**:
$$(\Omega \in z) \wedge (]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (\alpha =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

`4:` Aus `3`“$\Omega \in z\ldots$” und
aus `3`“$\ldots]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge...”
folgt via **77-7**: $]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z,M)$.

`5:` Aus `3`“$\ldots\alpha =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `4`“$]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \in 77.2(z,M)$ ”
folgt: $\alpha \in 77.2(z,M)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(77.0(z,M)\,)) \Rightarrow (\alpha \in 77.2(z,M)\,)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathsf{ran}\,(77.0(z,M)\,) \subseteq 77.2(z,M)\text{”}}$

...

<u>Beweis **77-8**</u> d) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in 77.2(z, M)$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in 77.2(z, M)$"
folgt via **77-6**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge}) \wedge (\alpha =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in z \ldots$",
aus 2 "$\ldots]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge$\ldots$" und
aus 2 "$\ldots \alpha =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **77-3**: $(\Omega, \alpha) \in 77.0(z, M)$.

4: Aus 3 "$(\Omega, \alpha) \in 77.0(z, M)$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathrm{ran}\,(77.0(z, M))$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in 77.2(z, M)) \Rightarrow (\alpha \in \mathrm{ran}\,(77.0(z, M)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,|\, \text{"} 77.2(z, M) \subseteq \mathrm{ran}\,(77.0(z, M)) \text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\mathrm{ran}\,(77.0(z, M)) \subseteq 77.2(z, M)$" und
aus A2 gleich "$77.2(z, M) \subseteq \mathrm{ran}\,(77.0(z, M))$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathrm{ran}\,(77.0(z, M)) = 77.2(z, M)$.

a)

1.1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $77.0(z, M)$ Funktion.

1.2: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\mathrm{dom}\,(77.0(z, M)) = 77.1(z, M)$.

1.3: Via des bereits bewiesenen d) gilt: $\mathrm{ran}\,(77.0(z, M)) = 77.2(z, M)$.

2: Aus 1.1 "$77.0(z, M)$ Funktion",
aus 1.2 "$\mathrm{dom}\,(77.0(z, M)) = 77.1(z, M)$" und
aus 1.3 "$\mathrm{ran}\,(77.0(z, M)) = 77.2(z, M)$"
folgt via **21-2**: $77.0(z, M) : 77.1(z, M) \to 77.2(z, M)$.

<u>Beweis **77-8**</u> `e)` `VS` gleich $p \in \mathtt{77.1}(z, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{77.1}(z, M)$"
folgt via **77-7**: $(p,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in \mathtt{77.0}(z, M)$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathtt{77.0}(z, M)$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\mathtt{77.0}(z, M)$ Funktion" und
aus `1`"$(p,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \in \mathtt{77.0}(z, M)$"
folgt via **18-20**: $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \mathtt{77.0}(z, M)(p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathtt{77.0}(z, M)(p) =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

77-9. Falls $]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$ für jedes $\alpha \in z$ eine Menge ist, dann $77.0(z, M) : z \to 77.2(z, M)$:

77-9(Satz)

Es gelte:

$\to)$ $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *Menge*$)$.

Dann folgt:

a) $77.0(z, M) : z \to 77.2(z, M)$.

b) $\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)) = z$.

c) $\forall\gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (77.0(z, M)\,(\gamma) =]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

$$77.0(z, M) = \{(\lambda,]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle) : \lambda \in \alpha\}.$$
$$77.2(z, M) = \{]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in \alpha\}.$$

Beweis **77-9**

$$77.1(z, M) = \{\omega : (\omega \in \alpha) \wedge (]\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})\}.$$

---

ab)

1.1: Aus $\to)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (]\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$ Menge$)$"
folgt via **77-5**: $77.1(z, M) = z$.

1.2: Via **77-8** gilt: $77.0(z, M) : 77.1(z, M) \to 77.2(z, M)$.

1.3: Via **77-8** gilt: $\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)) = 77.1(z, M)$.

2.a): Aus 1.2 "$77.0(z, M) : 77.1(z, M) \to 77.2(z, M)$" und
aus 1.1 "$77.1(z, M) = z$"
folgt: $77.0(z, M) : z \to 77.2(z, M)$.

2.b): Aus 1.3 "$\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)) = 77.1(z, M)$" und
aus 1.1 "$77.1(z, M) = z$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(77.0(z, M)) = z$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in z.$

`2:` Aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\rbrack \alpha \overset{M}{|} \cdot \rangle \text{ Menge})$”
folgt via **77-5**: $\mathsf{77.1}(z, M) = z.$

`3:` Aus `Thema1`“$\gamma \in z$” und
aus `2`“$\mathsf{77.1}(z, M) = z$”
folgt: $\gamma \in \mathsf{77.1}(z, M).$

`4:` Aus `3`“$\gamma \in \mathsf{77.1}(z, M)$”
folgt via **77-8**: $\mathsf{77.0}(z, M)(\gamma) = \rbrack \gamma \overset{M}{|} \cdot \rangle.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (\mathsf{77.0}(z, M)(\gamma) = \rbrack \gamma \overset{M}{|} \cdot \rangle).$

□

Ein auf dem AuswahlAxiom basierender Hilfssatz über die Existenz einer Funktion f aus $[a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ in $[a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ - hier ist sse die InklusionsRelation in einer Menge -, so dass $\gamma \subset f(\gamma)$ für alle $\gamma \in \mathsf{dom}\, f$ gilt, wird bewiesen.

Ersterstellung: 10/07/07 **Letzte Änderung: 13/06/11**

78-1. Falls M transitiv ist und falls $z \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$, dann gilt $\mathtt{77.2}(z, M) \subseteq \mathcal{P}([a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$ und demnach $\bigcup \mathtt{77.2}(z, M) \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

78-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *transitiv.*

$\rightarrow$) $z \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt:

a) $\mathtt{77.2}(z, M) \subseteq \mathcal{P}([a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

b) $\bigcup \mathtt{77.2}(z, M) \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$$\mathtt{77.2}(z, M) = \{]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in z\}.$$

Beweis **78-1**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in 77.2(z, M)$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\gamma \in \beta$.

`3:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in 77.2(z, M)$ ”
folgt via **77-6**: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\beta =]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in z \ldots$” und
aus →) “$z \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot \rangle$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`4.2:` Aus `Thema2`“$\gamma \in \beta$” und
aus `3`“$\ldots \beta =]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$”
folgt: $\gamma \in]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`5.1:` Aus `4.1`“$\Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot \rangle$”
folgt via **41-25**: a_M_Ω.

`5.2:` Aus `4.2`“$\gamma \in]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$”
folgt via **41-25**: $\Omega\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$.

`6:` Aus `VS` gleich “M transitiv”,
aus `5.1`“a_M_Ω” und
aus `5.2`“$\Omega\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$”
folgt via **44-1**: a_M_γ.

`7:` Aus `6`“a_M_γ”
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

Ergo `Thema2`: $\forall \gamma : (\gamma \in \beta) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot \rangle)$.

Konsequenz via **0-2**: $\beta \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

...

Beweis **78-1** ...

...

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in 77.2(z,M)) \Rightarrow (\beta \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-29**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“} 77.2(z,M) \subseteq \mathcal{P}([a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \text{”}}$

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $77.2(z,M) \subseteq \mathcal{P}([a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`2.b):` Aus `1.a)` “$77.2(z,M) \subseteq \mathcal{P}([a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$”
folgt via **1-19**: $\bigcup 77.2(z,M) \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

78-2. Falls M transitiv ist und falls jedes Element β von z, wobei z eine TeilKlasse von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, die Eigenschaft hat, dass $]\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle$ eine nicht leere Menge ist, dann gibt es eine Funktion von z in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$, so dass für alle $\gamma \in f$ die Aussage $f(\gamma) \in]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle$ gilt:

78-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *M transitiv.*

$\rightarrow\!)$ $z \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow\!)$ $\forall\beta : (\beta \in z) \Rightarrow (0 \neq]\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \textit{ Menge})$.

Dann gibt es f, so dass gilt:

`e.1)` $f : z \to [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`e.2)` $\forall\gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (f(\gamma) \in]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Beweis **78-2**

$$\mathsf{77.0}(z, M) = \{(\lambda,]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle) : \lambda \in z\}.$$
$$\mathsf{77.2}(z, M) = \{]\lambda \overset{M}{|} \cdot\rangle : \lambda \in z\}.$$

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\beta : (\beta \in z) \Rightarrow (\ldots]\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})$"
folgt via **77-9**: $\mathsf{77.0}(z, M) : z \to \mathsf{77.2}(z, M)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\beta : (\beta \in z) \Rightarrow (\ldots]\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ Menge})$"
folgt via **77-9**: $\forall\delta : (\delta \in z) \Rightarrow (\mathsf{77.0}(z, M)(\delta) =]\delta \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

...

Beweis **78-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\qquad \epsilon \in z.$

`3.1:` Aus `Thema2.1`“$\epsilon \in z$” und
aus $\rightarrow\!)$“$\forall \beta : (\beta \in z) \Rightarrow (0 \neq]\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots)$”
folgt: $\qquad 0 \neq]\epsilon \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`3.2:` Aus `Thema2.1`“$\epsilon \in z$” und
aus `1.2`“$\forall \delta : (\delta \in z) \Rightarrow (\mathsf{77.0}(z, M)\,(\delta) =]\delta \overset{M}{|} \cdot\rangle)$”
folgt: $\qquad \mathsf{77.0}(z, M)\,(\epsilon) =]\epsilon \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`4:` Aus `3.1`“$0 \neq]\epsilon \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `3.2`“$\mathsf{77.0}(z, M)\,(\epsilon) =]\epsilon \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt: $\qquad 0 \neq \mathsf{77.0}(z, M)\,(\epsilon).$

Ergo `Thema2.1`: $\qquad \boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\forall \epsilon : (\epsilon \in z) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{77.0}(z, M)\,(\epsilon))\text{”}}$

`2.2:` Aus `1.1`“$\mathsf{77.0}(z, M) : z \to \mathsf{77.2}(z, M)$” und
aus `A1` gleich “$\forall \epsilon : (\epsilon \in z) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{77.0}(z, M)\,(\epsilon))$”
folgt via **21-38**:
$$\exists f : (f : z \to \bigcup \mathsf{77.2}(z, M)) \wedge (\forall \varepsilon : (\varepsilon \in z) \Rightarrow (f(\varepsilon) \in \mathsf{77.0}(z, M)\,(\varepsilon))).$$

`3:` Aus $\rightarrow\!)$“M transitiv” und
aus $\rightarrow\!)$“$z \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **78-1**: $\qquad \bigcup \mathsf{77.2}(z, M) \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`4:` Aus `2.2`“$\ldots f : z \to \bigcup \mathsf{77.2}(z, M) \ldots$” und
aus `3`“$\bigcup \mathsf{77.2}(z, M) \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **21-5**: $\qquad f : z \to [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

. . .

Beweis **78-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema5.1}}$ $\gamma \in z.$

`6.1`: Aus `2.2`“$\ldots \forall \varepsilon : (\varepsilon \in z) \Rightarrow (f(\varepsilon) \in \mathsf{77.0}(z, M)\,(\varepsilon))$” und
aus `Thema5.1`“$\gamma \in z$”
folgt: $f(\gamma) \in \mathsf{77.0}(z, M)\,(\gamma).$

`6.2`: Aus `1.2`“$\forall \delta : (\delta \in z) \Rightarrow (\mathsf{77.0}(z, M)\,(\delta) =]\delta \overset{M}{|} \cdot\rangle)$” und
aus `Thema5.1`“$\gamma \in z$”
folgt: $\mathsf{77.0}(z, M)\,(\gamma) =]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`7`: Aus `6.1`“$f(\gamma) \in \mathsf{77.0}(z, M)\,(\gamma)$” und
aus `6.2`“$\mathsf{77.0}(z, M)\,(\gamma) =]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt: $f(\gamma) \in]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema5.1`: `A2` | “$\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (f(\gamma) \in]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle)$”

`5.2`: Aus `2.2`“$\exists f \ldots$”,
aus `4`“$f : z \to [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `A2` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (f(\gamma) \in]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle)$”
folgt:

$$\exists f : (f : z \to [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (f(\gamma) \in]\gamma \overset{M}{|} \cdot\rangle)).$$

□

78-3. Durch Spezialisierung von **78-2** auf die InklusionsRelation in einer Menge E ergibt sich folgender Satz, der ein wichtiges Hilfsresultat beim Beweis der Hausdorffschen MaximalitätsSätze darstellt:

78-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in E.*

$\rightarrow$) *E Menge.*

$\rightarrow$) $z \subseteq [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow$) $\forall \beta : (\beta \in z) \Rightarrow (0 \neq]\beta \overset{sse}{|} \cdot\rangle)$.

Dann gibt es f, so dass gilt:

e.1) $f : z \to [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

e.2) $\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (\gamma \subset f(\gamma))$.

Beweis **78-3**

1.1: Aus $\rightarrow$)"*sse* InklusionsRelation in E"
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordnung in E.

2: Aus 1.1"*sse* antiSymmetrische Halbordnung in E"
folgt via **34-13**: A1 | "(*sse* Relation in E) $\wedge$ (*sse* transitiv)"

<u>Beweis</u> **<u>78-3</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\delta \in z$.

`3.1:` Aus `Thema2.1`“$\delta \in z$” und
aus →)“$\forall \beta : (\beta \in z) \Rightarrow (0 \neq]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle)$”
folgt: $0 \neq]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

`3.2:` Aus `A1` gleich “*sse* Relation in E ...”
folgt via **42-1**: $]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle \subseteq E$.

`4:` Aus `3.2`“$]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle \subseteq E$” und
aus →)“E Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ Menge.

`5:` Aus `3.1`“$0 \neq]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$” und
aus `4`“$]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ Menge”
folgt: $0 \neq]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ Menge).

Ergo `Thema2.1`: `A2` | “$\forall \beta : (\beta \in z) \Rightarrow (0 \neq]\beta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ Menge)”

`2.2:` Aus `A1` gleich “... *sse* transitiv”,
aus →)“$z \subseteq [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$” und
aus `A2` gleich “$\forall \delta : (\delta \in z) \Rightarrow (0 \neq]\delta \overset{sse}{|} \cdot\rangle$ Menge)”
folgt via **78-2**:

$$\exists f : (f : z \to [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle) \wedge (\forall \epsilon : (\epsilon \in z) \Rightarrow (f(\epsilon) \in]\epsilon \overset{sse}{|} \cdot\rangle)).$$

...

Beweis **78-3** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\gamma \in z$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\gamma \in z$" und
aus `2.2`"$\ldots \forall \epsilon : (\epsilon \in z) \Rightarrow (f(\epsilon) \in]\epsilon \overset{sse}{|} \cdot\rangle)$"
folgt: $f(\gamma) \in]\gamma \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in E" und
aus `4`"$f(\gamma) \in]\gamma \overset{sse}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **68-49**: $\gamma \subset f(\gamma)$.

Ergo `Thema3.1`: `A3` | "$\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (\gamma \subset f(\gamma))$"

`3.2:` Aus `2.2`"$\exists f \ldots$",
aus `2.2`"$\ldots f : z \to [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle \ldots$" und
aus `A3` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (\gamma \subset f(\gamma))$"
folgt: $\exists f : (f : z \to [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle) \wedge (\forall \gamma : (\gamma \in z) \Rightarrow (\gamma \subset f(\gamma)))$.

□

Hausdorffscher MaximalitätsSatz I.
Hausdorffscher MaximalitätsSatz I, RelationsVersion.
Hausdorffscher MaximalitätsSatz II.
Hausdorffscher MaximalitätsSatz II, RelationsVersion.

Ersterstellung: 10/07/07 **Letzte Änderung: 13/06/11**

79-1. Falls $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge ist, dann hat jede M_Kette eine $\subseteq$maximale M_Kette:

79-1(Satz) (Hausdorffscher MaximalitätsSatz I)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

$\rightarrow)$ K *ist* M_*Kette.*

Dann folgt "K hat $\subseteq$maximale M_Kette".

Beweis **79-1**

73-1(Def) $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$.

1.1: Aus →) “$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge”
folgt via **73-3**: $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$ Menge.

1.2: Via **68-2** gilt: $\mathsf{sse} \cap (\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\} \times \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\})$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$.

2: Aus 1.2
folgt: $\exists sskt$: $sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$.

3: Es gilt: $\exists \Omega : (\Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (]\Omega \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0)$
$\vee$
$\neg(\exists \Omega : (\Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (]\Omega \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0))$.

Fallunterscheidung

3.1.Fall $\exists \Omega : (\Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (]\Omega \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0)$

4: Aus 2“$\ldots sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$” und
aus 3.1.Fall“$\ldots \Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \ldots$”
folgt via **68-49**: $(K \subseteq \Omega) \wedge (\Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\})$.

5: Aus 4“$\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$”
folgt: Ω ist M_Kette.

6: Aus 2“$\ldots sskt$ InklusionsRelation in $\{\omega : \omega \text{ ist } M\_\text{Kette}\}$”,
aus →) “$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge”,
aus →) “Ω ist M_Kette” und
aus 3.1.Fall“$\ldots]\Omega \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0$”
folgt via **75-3**: Ω ist $\subseteq$maximale M_Kette.

7: Aus 3.1.Fall“$\exists \Omega \ldots$”,
aus 3“$K \subseteq \Omega \ldots$” und
aus 6“Ω ist $\subseteq$maximale M_Kette”:
$\exists \Omega : (K \subseteq \Omega) \wedge (\Omega \text{ ist } \subseteq\text{maximale } M\_\text{Kette})$.

8: Aus 7
folgt via **71-1(Def)**: K hat $\subseteq$maximale M_Kette.

...

<u>Beweis **79-1**</u> ...

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : (\Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \wedge (]\Omega \overset{sskt}{|} \cdot\rangle = 0)).$

`4.1:` Aus `3.2.Fall`
folgt: $\forall\beta : (\beta \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (0 \neq]\beta \overset{sskt}{|} \cdot\rangle).$

`4.2:` Via **0-6** gilt: $[K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle.$

`5:` Aus 2"... *sse* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$",
aus `1.1`"$\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$ Menge",
aus `4.2`"$[K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \subseteq [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2.2.Fall`"$\forall\beta : (\beta \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (0 \neq]\beta \overset{sse}{|} \cdot\rangle)$"
folgt via **78-3**: $\exists f : (f : [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \to [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle)$
$\wedge(\forall\gamma : (\gamma \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \subset f(\gamma))).$

`6:` Aus `5`"...$\forall\gamma : (\gamma \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \subset f(\gamma))$"
folgt via **57-1(Def)**:
$$\forall\gamma : (\gamma \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow ((\gamma \subseteq f(\gamma)) \wedge (\gamma \neq f(\gamma))).$$

`7:` Aus `6`
folgt: $\forall\gamma : (\gamma \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \subseteq f(\gamma)).$

`8:` Aus 2"... *sskt* InklusionsRelation in $\{\omega : \omega$ ist M_Kette$\}$",
aus →) "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge",
aus →) "K ist M_Kette",
aus `5`"...$f : [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle \to [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$ ..." und
aus `7`"$\forall\gamma : (\gamma \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \subseteq f(\gamma))$"
folgt via **Tarski IV**: $\exists\Omega : (\Omega$ Fixpunkt von $f) \wedge (\Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle).$

`9.1:` Aus `8`"...Ω Fixpunkt von f ..."
folgt via **53-1(Def)**: $f(\Omega) = \Omega.$

`9.2:` Aus `8`"...$\Omega \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle$" und
aus `6`"...$\forall\gamma : (\gamma \in [K \overset{sskt}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow ((\gamma \subseteq f(\gamma)) \wedge (\gamma \neq f(\gamma)))$"
folgt: $(\Omega \subseteq f(\Omega)) \wedge (\Omega \neq f(\Omega)).$

`10:` Es gilt `9.1`"$f(\Omega) = \Omega$".
Es gilt `9.2`"...$\Omega \neq f(\Omega)$".
Ex falso quodlibet folgt: K hat $\subseteq$maximale M_Kette.

...

<u>Beweis</u> **79-1** ...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

K hat $\subseteq$maximale M_Kette.

$\square$

79-2. Wenn an Stelle von M im **Hausdorffschen MaximalitätsSatz I** eine Relation in einer Menge x tritt, dann ergibt sich die **RelationsVersion des Hausdorffschen MaximalitätsSatzes I**:

79-2(Satz) (Hausdorffscher MaximalitätsSatz I, RelationsVersion)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *x Menge.*

$\rightarrow$) *K ist r_Kette.*

Dann folgt "K hat $\subseteq$maximale r_Kette".

Beweis **79-2**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "x Menge"
folgt via **10-19**: r Menge.

2: Aus 1 "r Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\, r$ Menge.

3: Aus 2 "$\mathsf{dom}\, r$ Menge"
folgt via **2-24**: $(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$ Menge.

4: Aus 3 "$(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$ Menge" und
aus $\rightarrow$) "K ist r_Kette"
folgt via **Hausdorffscher MaximalitätsSatz I**:
K hat $\subseteq$maximale r_Kette.

$\square$

79-3. Falls $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge ist, dann gibt es eine $\subseteq$maximale M_Kette:

> **79-3(Satz) (Hausdorffscher MaximalitätsSatz II)**
>
> *Aus "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge"*
> *folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette".*

Beweis **79-3** `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge.

`1`: Via **30-72** gilt: 0 ist M_Kette.

`2`: Aus `VS` gleich "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ Menge" und
aus `1` "0 ist M_Kette"
folgt via **Hausdorffscher MaximalitätsSatz I**:
0 hat $\subseteq$maximale M_Kette.

`3`: Aus `2` "0 hat $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: $\exists \Omega : (0 \subseteq \Omega) \wedge (\Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette$)$.

`4`: Aus `3`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\subseteq$maximale M_Kette.

$\square$

79-4. Wenn an Stelle von M im **Hausdorffschen MaximalitätsSatz II** eine Relation in einer Menge x tritt, dann ergibt sich die **RelationsVersion des Hausdorffschen MaximalitätsSatzes II**:

79-4(Satz) (Hausdorffscher MaximalitätsSatz II, RelationsVersion)

Aus "r Relation in x" und "x Menge" folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $\subseteq$maximale r_Kette".

Beweis **79-4** `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1`: Via **30-72** gilt: 0 ist r_Kette.

`2`: Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge" und
aus `1` "0 ist r_Kette"
folgt via **Hausdorffscher MaximalitätsSatz I, RelationsVersion**:
0 hat $\subseteq$maximale r_Kette.

`3`: Aus `2` "0 hat $\subseteq$maximale M_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: $\exists \Omega : (0 \subseteq \Omega) \wedge (\Omega \text{ ist } \subseteq\text{maximale } r\text{\_Kette})$.

`4`: Aus `3`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\subseteq$maximale r_Kette.

□

Lemma von Zorn I.
Lemma von Zorn I, TeilMengenVersion.
Lemma von Zorn II.
Lemma von Zorn II, TeilMengenVersion.

Ersterstellung: 12/07/07 **Letzte Änderung: 14/06/11**

80-1. Wenn jede $\preceq$ _Kette einer Halbordnung in einer Menge x eine obere $\preceq$ _Schranke hat, dann hat x ein $\preceq$ _maximales Element:

80-1(Satz) (Lemma von Zorn I)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow\!)$ x *Menge.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha : (\alpha$ *ist* $\preceq$ *_Kette*$) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ *obere* $\preceq$ *_Schranke von* $\alpha)$.

Dann folgt "$\exists\Psi : \Psi$ *ist* $\preceq$ *_maximales Element von* x*".*

Beweis **80-1**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

2: Aus 1 "$\preceq$ Relation in x" und
aus $\rightarrow\!)$ "x Menge"
folgt via **79-4(Hausdorffscher MaximalitätsSatz II, RelationsVersion)**:
$\exists\Upsilon : \Upsilon$ ist $\subseteq$maximale $\preceq$ _Kette.

3: Aus 2 "$\ldots\Upsilon$ ist $\subseteq$maximale $\preceq$ _Kette"
folgt via **71-1(Def)**: Υ ist $\preceq$ _Kette.

4: Aus 3 "Υ ist $\preceq$ _Kette" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha : (\alpha$ ist $\preceq$ _Kette$) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von $\alpha)$"
folgt: $\exists\Psi : \Psi$ obere $\preceq$ _Schranke von Υ.

5: Aus $\rightarrow\!)$ "$\preceq$ Halbordnung in x",
aus 2 "$\ldots\Upsilon$ ist $\subseteq$maximale $\preceq$ _Kette" und
aus 4 "$\ldots\Psi$ obere $\preceq$ _Schranke von Υ"
folgt via **71-8**: Ψ ist $\preceq$ _maximales Element von x.

6: Aus 4 "$\exists\Psi\ldots$" und
aus 5 "Ψ ist $\preceq$ _maximales Element von x"
folgt: $\exists\Psi : \Psi$ ist $\preceq$ _maximales Element von x.

$\square$

80-2. Falls *sse* die InklusionsRelatoin in einer Menge z ist und falls die Vereinigung jeder *sse*_Kette in z ist, dann hat z ein *sse*_maximales Element:

80-2(Satz) (Lemma von Zorn I, TeilMengenVersion)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in* z.

$\rightarrow$) z *Menge.*

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha$ *ist sse_Kette*$) \Rightarrow (\bigcup\alpha \in z)$.

Dann folgt "$\exists\Psi : \Psi$ *ist sse_maximales Element von* z*".*

<u>Beweis **80-2**</u>

`1:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in z"
folgt via **68-8**: *sse* Halbordnung in z.

`2.1:` Aus `1` "*sse* Halbordnung in z"
folgt via **34-12**: `A1` | "*sse* Relation in z"

`Thema2.2` β ist *sse*_Kette.

`3.1:` Aus `A1` gleich "*sse* Relation in z" und
aus `Thema2.2` "β ist *sse*_Kette"
folgt via **34-4**: $\beta \subseteq z$.

`3.2:` Aus `Thema2.1` "β ist *sse*_Kette" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha$ ist *sse*_Kette$) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in z)$"
folgt: $\bigcup \beta \in z$.

`4.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcup \beta$.

`4.2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in z",
`3.2` "$\bigcup \beta \in z$" und
aus `3.1` "$\beta \subseteq z$"
folgt via **68-15**: $\bigcup \beta$ obere *sse*_Schranke von β.

`5:` Aus `4.1` "$\ldots \Omega = \bigcup \beta$" und
aus `4.2` "$\bigcup \beta$ obere $\preceq$ _Schranke von β"
folgt: Ω obere $\preceq$ _Schranke von β.

`6:` Aus `4.1` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `5` "Ω obere $\preceq$ _Schranke von β"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von β.

Ergo `Thema2.1`:
`A2` | "$\forall \beta : (\beta$ ist *sse*_Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ obere *sse*_Schranke von $\beta)$"

`2.3:` Aus `1` "*sse* Halbordung in z",
aus →) "z Menge" und
aus `A2` gleich
"$\forall \beta : (\beta$ ist *sse*_Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ obere *sse*_Schranke von $\beta)$"
folgt via **Lemma von Zorn I**: $\exists \Psi : \Psi$ ist *sse*_maximales Element von z.

□

80-3. Wenn jede $\preceq$ _Kette einer Halbordnung in einer Menge x eine untere $\preceq$ _Schranke hat, dann hat x ein $\preceq$ _minimales Element:

80-3(Satz) (Lemma von Zorn II)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) x *Menge.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha$ *ist* $\preceq$ *_Kette*$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ *untere* $\preceq$ *_Schranke von* $\alpha)$.

Dann folgt "$\exists \Psi : \Psi$ *ist* $\preceq$ *_minimales Element von* x*".*

Beweis **80-3**

1: Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

2: Aus 1 "$\preceq$ Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "x Menge"
folgt via **79-4(Hausdorffscher MaximalitätsSatz II, RelationsVersion)**:
$\exists \Upsilon : \Upsilon$ ist $\subseteq$maximale $\preceq$ _Kette.

3: Aus 2 "$\ldots \Upsilon$ ist $\subseteq$maximale $\preceq$ _Kette"
folgt via **71-1(Def)**: Υ ist $\preceq$ _Kette.

4: Aus 3 "Υ ist $\preceq$ _Kette" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (\alpha$ ist $\preceq$ _Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ untere $\preceq$ _Schranke von $\alpha)$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi$ untere $\preceq$ _Schranke von Υ.

5: Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x",
aus 2 "$\ldots \Upsilon$ ist $\subseteq$maximale $\preceq$ _Kette" und
aus 4 "$\ldots \Psi$ untere $\preceq$ _Schranke von Υ"
folgt via **71-7**: Ψ ist $\preceq$ _minimales Element von x.

6: Aus 4 "$\exists \Psi \ldots$" und
aus 5 "Ψ ist $\preceq$ _minimales Element von x"
folgt: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\preceq$ _minimales Element von x.

$\square$

80-4. Bei der **TeilMengenVersion Lemma von Zorn II** muss wegen $\bigcap 0 \notin x$ der Fall $x = 0$ explizit ausgeschlossen werden. Dafür kann bei der Existenz unterer Schranken auf die leere Menge als Kette verzichtet werden:

80-4(Satz) (Lemma von Zorn II, TeilMengenVersion)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

$\rightarrow$) *z Menge.*

$\rightarrow$) $0 \neq z$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (0 \neq \alpha$ *ist sse_Kette*$) \Rightarrow (\bigcap \alpha \in z)$.

Dann folgt "$\exists \Psi : \Psi$ *ist sse_minimales Element von z*".

Beweis **80-4**

1: Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in z"
folgt via **68-8**: *sse* Halbordnung in z.

2: Aus 1 "*sse* Halbordnung in z"
folgt via **34-12**: $(sse$ Relation in $z) \wedge (sse$ reflexiv in $z)$.

3: Aus 2 "*sse* Relation in z ..." und
aus $\rightarrow$) "z Menge"
folgt via **Hausdorffscher MaximalitätsSatz II, RelationsVersion**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist $\subseteq$maximale *sse*_Kette.

4.1: Aus 2 "... *sse* reflexiv in z",
aus $\rightarrow$) "$0 \neq z$" und
aus 3 "... Ω ist $\subseteq$maximale *sse*_Kette"
folgt via **71-12**: $0 \neq \Omega$.

4.2: Aus 3 "... Ω ist $\subseteq$maximale *sse*_Kette"
folgt via **71-1(Def)**: Ω ist *sse*_Kette.

5: Aus 4.1 "$0 \neq \Omega$",
aus 4.2 "Ω ist *sse*_Kette" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (0 \neq \alpha$ ist *sse*_Kette$) \Rightarrow (\bigcap \alpha \in z)$"
folgt: $\bigcap \Omega \in z$.

...

Beweis **80-4** . . .

6.1: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = \bigcap\Omega.$

6.2: Aus 2"*sse* Relation in z . . ." und
aus 4.2"Ω ist *sse*_Kette"
folgt via **34-4**: $\Omega \subseteq z.$

7: Aus →)"*sse* InklusionsRelation in z",
aus 5"$\bigcap\Omega \in z$" und
aus 6.2"$\Omega \subseteq z$"
folgt via **68-14**: $\bigcap\Omega$ untere *sse*_Schranke von Ω.

8: Aus 1"*sse* Halbordnung in z",
aus 3". . . Ω ist $\subseteq$maximale *sse*_Kette" und
aus 7"$\bigcap\Omega$ untere *sse*_Schranke von Ω"
folgt via **71-7**: $\bigcap\Omega$ ist *sse*_minimales Element von z.

9: Aus 6.1". . . $\Psi = \bigcap\Omega$" und
aus 8"$\bigcap\Omega$ ist *sse*_minimales Element von z"
folgt: Ψ ist *sse*_minimales Element von z.

10: Aus 6.1"$\exists\Psi$ . . ." und
aus 9"Ψ ist *sse*_minimales Element von z"
folgt: $\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element von z.

□

isoton.
antiton.

Ersterstellung: 12/07/07 **Letzte Änderung: 16/06/11**

81-1. Es werden "E ist M_isoton auf z" und "E ist M_antiton in z" auf Anlehnung an "M_vermehrend auf z" und "M_verringernd auf z" definiert:

81-1(Definition)

1) "E **ist** M**_isoton auf** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in E).$$

$$\wedge$$

$$\forall\alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta).$$

2) "E **ist** M**_antiton auf** z" genau dann, wenn gilt:

$$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in E).$$

$$\wedge$$

$$\forall\alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma).$$

81-2. Das folgende Kriterium liefert eine alternative Definition von
" E ist M_isoton auf z" :

81-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *E ist M_isoton auf z.*

`ii)` *"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$".*

Beweis **81-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich E ist M_isoton auf z.

`Thema1.1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich " E ist M_isoton auf z " und
aus `Thema1.1`" $\alpha \in z$ "
folgt via **81-1(Def)**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in E$.

`3:` Aus 2"... $(\alpha, \Omega) \in E$ "
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | " $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$ "

`1.2:` Aus `VS` gleich " E ist M_isoton auf z "
folgt via **81-1(Def)**:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta).$$

`2:` Aus `A1` gleich " $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$ " und
aus `1.2` folgt:

$$(z \subseteq \mathsf{dom}\, E) \wedge (\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)).$$

Beweis **81-2** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(z \subseteq \mathsf{dom}\, E)$

$\wedge(\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha,\gamma) \in E) \wedge ((\beta,\delta) \in E))$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_\delta))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in z$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in z$” und
aus `VS` gleich “$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, E$.

`3:` Aus 2“$\alpha \in \mathsf{dom}\, E$”
folgt via **7-2**: $\exists\Omega : (\alpha,\Omega) \in E$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\alpha,\Omega) \in E)$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\alpha,\Omega) \in E)$” und
aus `VS` gleich
“$\ldots\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta : ((\alpha \in z)\wedge(\beta \in z)\wedge(\alpha\_M\_\beta)\wedge((\alpha,\gamma) \in E)\wedge((\beta,\delta) \in E))$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$”
folgt via **81-1(Def)**: E ist M_isoton auf z.

□

81-3. Das folgende Kriterium liefert eine alternative Definition von "E ist M_antiton auf z" :

81-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *E ist M_antiton auf z.*

`ii)` "$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" *und* "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$".

Beweis **81-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich E ist M_antiton auf z.

`Thema1.1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich "E ist M_antiton auf z" und aus `Thema1.1` "$\alpha \in z$" folgt via **81-1(Def)**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in E$.

`3:` Aus 2"$\ldots (\alpha, \Omega) \in E$" folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "E ist M_antiton auf z" folgt via **81-1(Def)**:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma).$$

`2:` Aus `A1` gleich "$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und aus `1.2` folgt:

$$(z \subseteq \mathsf{dom}\, E) \wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)).$$

Beweis **81-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(z \subseteq \mathsf{dom}\, E)$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E))$
$\Rightarrow (\delta\_M\_\gamma))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in z$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in z$” und
aus `VS` gleich “$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, E$.

`3:` Aus 2“$\alpha \in \mathsf{dom}\, E$”
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in E$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in E)$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in E)$” und
aus `VS` gleich
“$\ldots \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E))$
$\Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$”
folgt via **81-1(Def)**: E ist M_antiton auf z.

$\square$

81-4. Auf der leeren Menge ist jede Klasse isoton und antition:

81-4(Satz)

a) E *ist* M_*isoton auf* 0.

b) E *ist* M_*antiton auf* 0.

Beweis **81-4** a)

`Thema1.1`
$(\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E).$

2: Via **0-19** gilt: $\alpha \notin 0.$

3: Es gilt 2"$\alpha \notin 0$" .
Es gilt Thema1.1"$\alpha \in 0 \ldots$" .
Ex falso quodlibet folgt: $\gamma\_M\_\delta.$

Ergo Thema1.1:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

1.2: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, E.$

2: Aus 1.2"$0 \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus A1 gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: E ist M_isoton auf 0.

<u>Beweis</u> **81-4** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$
$(\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)$.

`2:` Via **0-19** gilt: $\alpha \notin 0$.

`3:` Es gilt `2`"$\alpha \notin 0$" .
Es gilt `Thema1.1`"$\alpha \in 0 \ldots$" .
Ex falso quodlibet folgt: δ_M_γ.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus `A1` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"
folgt via **81-3**: E ist M_antiton auf 0.

□

81-5. Die Eigenschaft, auf z eine M_isotone Klasse zu sein, vererbt sich auf TeilKlassen von z. Analoges gilt für M_antitone Klassen:

81-5(Satz)

a) *Aus* "$y \subseteq z$" *und* "E *ist* M_*isoton auf* z"
folgt "E *ist* M_*isoton auf* y".

b) *Aus* "$y \subseteq z$" *und* "E *ist* M_*antiton auf* z"
folgt "E *ist* M_*antiton auf* y".

c) *Aus* "$e \subseteq E$" *und* "E *ist* M_*isoton auf* z"
folgt "e *ist* M_*isoton auf* $z \cap \mathsf{dom}\, e$".

d) *Aus* "$e \subseteq E$" *und* "E *ist* M_*antiton auf* z"
folgt "e *ist* M_*antiton auf* $z \cap \mathsf{dom}\, e$".

e) *Aus* "$e \subseteq E$" *und* "$y \subseteq z$" *und* "E *ist* M_*isoton auf* z"
folgt "e *ist* M_*isoton auf* $y \cap \mathsf{dom}\, e$".

f) *Aus* "$e \subseteq E$" *und* "$y \subseteq z$" *und* "E *ist* M_*antiton auf* z"
folgt "e *ist* M_*antiton auf* $y \cap \mathsf{dom}\, e$".

Beweis **81-5** `a)` `VS` gleich $(y \subseteq z) \wedge (E \text{ ist } M\_\text{isoton auf } z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist M_isoton auf z"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$" und
aus `1.1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$y \subseteq \mathsf{dom}\, E$"

`Thema1.2`
$(\alpha \in y) \wedge (\beta \in y) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist M_isoton auf z",
aus `2.1`"$\alpha \in z$",
aus `2.2`"$\beta \in z$",
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (\alpha, \gamma) \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (\beta, \delta) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y) \wedge (\beta \in y) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$y \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus `A2` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y) \wedge (\beta \in y) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: E ist M_isoton auf y.

<u>Beweis **81-5**</u> `b)` `VS` gleich $(y \subseteq z) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_antiton auf } z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist M_antiton auf z"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$" und
aus `1.1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$y \subseteq \mathsf{dom}\, E$"

`Thema1.2`
$(\alpha \in y) \wedge (\beta \in y) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist M_antiton auf z",
aus `2.1`"$\alpha \in z$",
aus `2.2`"$\beta \in z$",
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (\alpha, \gamma) \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (\beta, \delta) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: δ_M_γ.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y) \wedge (\beta \in y) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$y \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus `A2` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y) \wedge (\beta \in y) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in E) \wedge ((\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"
folgt via **81-3**: E ist M_antiton auf y.

Beweis **81-5** `c)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_isoton auf } z)$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: `A1` | "$z \cap \mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, e$"

`Thema1.2` $(\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in e) \wedge ((\beta, \delta) \in e)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e \ldots$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e \ldots$"
folgt via **2-2**: $\beta \in z$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, \gamma) \in E$.

`2.4:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in e$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $(\beta, \delta) \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist M_isoton auf z",
aus `2.1`"$\alpha \in z$",
aus `2.2`"$\beta \in z$",
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$",
aus `2.3`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in E \ldots$" und
aus `2.4`"$\ldots (\beta, \delta) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in e) \wedge ((\beta, \delta) \in e))$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$z \cap \mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, e$" und
aus `A2` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in e) \wedge ((\beta, \delta) \in e))$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: e ist M_isoton auf $z \cap \mathsf{dom}\, e$.

<u>Beweis **81-5**</u> `d)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_antiton auf } z)$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: `A1` | "$z \cap \mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, e$"

`Thema1.2` $(\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in e) \wedge ((\beta, \delta) \in e)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e \ldots$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e \ldots$"
folgt via **2-2**: $\beta \in z$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, \gamma) \in E$.

`2.4:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in e$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $(\beta, \delta) \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist M_antiton auf z",
aus `2.1`"$\alpha \in z$",
aus `2.2`"$\beta \in z$",
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$",
aus `2.3`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in E \ldots$" und
aus `2.4`"$\ldots (\beta, \delta) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: δ_M_γ.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in e) \wedge ((\beta, \delta) \in e))$
$\Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$."

`1.3:` Aus `A1` gleich "$z \cap \mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, e$" und
aus `A2` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\beta \in z \cap \mathsf{dom}\, e) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in e) \wedge ((\beta, \delta) \in e))$
$\Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"
folgt via **81-3**: e ist M_antiton auf $z \cap \mathsf{dom}\, e$.

<u>Beweis **81-5**</u> `e)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (y \subseteq z) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_isoton auf } z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots y \subseteq z \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots E$ ist M_isoton auf z"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: E ist M_isoton auf y.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \dots$" und
aus `1`"E ist M_isoton auf y"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: e ist M_isoton auf $y \cap \mathsf{dom}\, e$.

`f)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (y \subseteq z) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_antiton auf } z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots y \subseteq z \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots E$ ist M_antiton auf z"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: E ist M_antiton auf y.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \dots$" und
aus `1`"E ist M_antiton auf y"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: e ist M_antiton auf $y \cap \mathsf{dom}\, e$.

$\square$

81-6. Für Funktionen stellt sich die Eigenschaft, M_isoton auf z zu sein, vereinfacht dar:

81-6(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *f ist M_isoton auf z.*

`ii)` *"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"*
und "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\beta))$".

Beweis **81-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f ist M_isoton auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f ist M_isoton auf z"
folgt via **81-2**: `A1` "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

> `Thema1.2` $(\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in z \ldots$" und
> aus `1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \ldots$" und
> aus `1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **0-4**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `3.1:` Aus →)"f Funktion" und
> aus `2.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)) \in f$.
>
> `3.2:` Aus →)"f Funktion" und
> aus `2.2`"$\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **18-22**: $(\beta, f(\beta)) \in f$.
>
> `4:` Aus `VS` gleich "f ist M_isoton auf z",
> aus `Thema1.2`"$\alpha \in z \ldots$",
> aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \ldots$",
> aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_\beta$",
> aus `3.1`"$(\alpha, f(\alpha)) \in f$" und
> aus `3.2`"$(\beta, f(\beta)) \in f$"
> folgt via **81-1(Def)**: $f(\alpha)\_M\_f(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\beta))$"

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt:
$(z \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\beta)))$.

Beweis **81-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(z \subseteq \mathsf{dom}\, f)$
$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\beta)))$

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\epsilon \in z) \wedge (\varepsilon \in z) \wedge (\epsilon\_M\_\varepsilon) \wedge ((\epsilon, \gamma) \in f) \wedge ((\varepsilon, \delta) \in f)$.

`2.1:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1` "$\ldots (\epsilon, \gamma) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\epsilon)$.

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1` "$\ldots (\varepsilon, \delta) \in f$"
folgt via **18-20**: $\delta = f(\varepsilon)$.

`2.3:` Aus `Thema1.1` "$\epsilon \in z \ldots$",
aus `Thema1.1` "$\ldots \varepsilon \in z \ldots$",
aus `Thema1.1` "$\ldots \epsilon\_M\_\varepsilon \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta))$
$\Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\beta))$"
folgt: $f(\epsilon)\_M\_f(\varepsilon)$.

`3:` Aus `2.1` "$\gamma = f(\epsilon)$" und
aus `2.3` "$f(\epsilon)\_M\_f(\varepsilon)$"
folgt: $\gamma\_M\_f(\varepsilon)$.

`4:` Aus `3` "$\gamma\_M\_f(\varepsilon)$" und
aus `2.2` "$\delta = f(\varepsilon)$"
folgt: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	"$\forall \epsilon, \varepsilon, \gamma, \delta : ((\epsilon \in z) \wedge (\varepsilon \in z) \wedge (\epsilon\_M\_\varepsilon) \wedge ((\epsilon, \gamma) \in f) \wedge ((\varepsilon, \delta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `A1` gleich
"$\forall \epsilon, \varepsilon, \gamma, \delta : ((\epsilon \in z) \wedge (\varepsilon \in z) \wedge (\epsilon\_M\_\varepsilon) \wedge ((\epsilon, \gamma) \in f) \wedge ((\varepsilon, \delta) \in f))$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: f ist M_isoton auf z.

□

81-7. Für Funktionen stellt sich die Eigenschaft, M_antiton auf z zu sein, vereinfacht dar:

81-7(Satz)

Unter der Voraussetzung . . .

→) f *Funktion.*

. . . sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *ist* M*_antiton auf* z.

`ii)` "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
und "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\beta)\_M\_f(\alpha))$".

Beweis **81-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f ist M_antiton auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f ist M_antiton auf z"
folgt via **81-2**: `A1` | "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in z \ldots$" und
> aus `1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \ldots$" und
> aus `1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **0-4**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `3.1:` Aus →) "f Funktion" und
> aus `2.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)) \in f$.
>
> `3.2:` Aus →) "f Funktion" und
> aus `2.2`"$\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
> folgt via **18-22**: $(\beta, f(\beta)) \in f$.
>
> `4:` Aus `VS` gleich "f ist M_antiton auf z",
> aus `Thema1.2`"$\alpha \in z \ldots$",
> aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \ldots$",
> aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_\beta$",
> aus `3.1`"$(\alpha, f(\alpha)) \in f$" und
> aus `3.2`"$(\beta, f(\beta)) \in f$"
> folgt via **81-1(Def)**: $f(\beta)\_M\_f(\alpha)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\beta)\_M\_f(\alpha))$"

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt:

$$(z \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\beta)\_M\_f(\alpha))).$$

<u>Beweis **81-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(z \subseteq \mathsf{dom}\, f)$

$$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)) \Rightarrow (f(\beta)\_M\_f(\alpha)))$$

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\epsilon \in z) \wedge (\varepsilon \in z) \wedge (\epsilon\_M\_\varepsilon) \wedge ((\epsilon, \gamma) \in f) \wedge ((\varepsilon, \delta) \in f)$.

`2.1:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus `Thema1.1` “ $\ldots (\epsilon, \gamma) \in f \ldots$ ”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\epsilon)$.

`2.2:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus `Thema1.1` “ $\ldots (\varepsilon, \delta) \in f$ ”
folgt via **18-20**: $\delta = f(\varepsilon)$.

`2.3:` Aus `Thema1.1` “ $\epsilon \in z \ldots$ ” ,
aus `Thema1.1` “ $\ldots \varepsilon \in z \ldots$ ” ,
aus `Thema1.1` “ $\ldots \epsilon\_M\_\varepsilon \ldots$ ” und
aus `VS` gleich “ $\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta))$
$\Rightarrow (f(\beta)\_M\_f(\alpha))$ ”
folgt: $f(\varepsilon)\_M\_f(\epsilon)$.

`3:` Aus `2.2` “ $\delta = f(\varepsilon)$ ” und
aus `2.3` “ $f(\varepsilon)\_M\_f(\epsilon)$ ”
folgt: $\delta\_M\_f(\epsilon)$.

`4:` Aus `3` “ $\delta\_M\_f(\epsilon)$ ” und
aus `2.1` “ $\gamma = f(\epsilon)$ ”
folgt: δ_M_γ.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	“ $\forall \epsilon, \varepsilon, \gamma, \delta : ((\epsilon \in z) \wedge (\varepsilon \in z) \wedge (\epsilon\_M\_\varepsilon) \wedge ((\epsilon, \gamma) \in f) \wedge ((\varepsilon, \delta) \in f)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$ ”

`1.2:` Aus `VS` gleich “ $z \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” und
aus `A1` gleich
“ $\forall \epsilon, \varepsilon, \gamma, \delta : ((\epsilon \in z) \wedge (\varepsilon \in z) \wedge (\epsilon\_M\_\varepsilon) \wedge ((\epsilon, \gamma) \in f) \wedge ((\varepsilon, \delta) \in f))$
$\Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$ ”
folgt via **81-3**: f ist M_antiton auf z.

□

81-8. Falls E eine M_isotone Klasse auf z ist und falls e die Einschränkung von E auf y ist, dann ist e eine M_isotone Klasse auf $y \cap z$. Falls E eine M_antitone Klasse auf z ist und falls e die Einschränkung von E auf y ist, dann ist e eine M_antitone Klasse auf $y \cap z$.

81-8(Satz)

a) *Aus "E ist M_isoton auf z" und "e Einschränkung von E auf y" folgt "e ist M_isoton auf $z \cap y$".*

b) *Aus "E ist M_antiton auf z" und "e Einschränkung von E auf y" folgt "e ist M_antiton auf $z \cap y$".*

Beweis **81-8** a)

VS gleich $(E \text{ ist } M\text{\_isoton auf } z) \wedge (e \text{ Einschränkung von } E \text{ auf } y)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots e$ Einschränkung von E auf y"
folgt via **15-3**: $e \subseteq E$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots e$ Einschränkung von E auf y"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e = y \cap \mathsf{dom}\, E$.

2: Aus VS gleich "E ist M_isoton auf $z \ldots$" und
aus 1.1"$e \subseteq E$"
folgt via **81-5**: e ist M_isoton auf $z \cap \mathsf{dom}\, e$.

3: Aus VS gleich "E ist M_isoton auf $z \ldots$"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

4: Aus 3"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **2-10**: $z \cap \mathsf{dom}\, E = z$.

5: $$z \cap \mathsf{dom}\, e \stackrel{1.2}{=} z \cap (y \cap \mathsf{dom}\, E) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} z \cap (\mathsf{dom}\, E \cap y) \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (z \cap \mathsf{dom}\, E) \cap y \stackrel{4}{=} z \cap y.$$

6: Aus 2"e ist M_isoton auf $z \cap \mathsf{dom}\, e$" und
aus 5"$z \cap \mathsf{dom}\, e = \ldots = z \cap y$"
folgt: e ist M_isoton auf $z \cap y$.

<u>Beweis **81-8** `b)`</u>

`VS` gleich $(E \text{ ist } M\text{\_antiton auf } z) \wedge (e \text{ Einschränkung von } E \text{ auf } y)$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots e$ Einschränkung von E auf y"
folgt via **15-3**: $e \subseteq E$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots e$ Einschränkung von E auf y"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e = y \cap \mathsf{dom}\, E$.

`2`: Aus `VS` gleich "E ist M_antiton auf $z \ldots$" und
aus `1.1`"$e \subseteq E$"
folgt via **81-5**: e ist M_antiton auf $z \cap \mathsf{dom}\, e$.

`3`: Aus `VS` gleich "E ist M_antiton auf $z \ldots$"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`4`: Aus `3`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **2-10**: $z \cap \mathsf{dom}\, E = z$.

`5`: $$z \cap \mathsf{dom}\, e \stackrel{1.2}{=} z \cap (y \cap \mathsf{dom}\, E) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} z \cap (\mathsf{dom}\, E \cap y) \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (z \cap \mathsf{dom}\, E) \cap y \stackrel{4}{=} z \cap y.$$

`6`: Aus `2`"e ist M_antiton auf $z \cap \mathsf{dom}\, e$" und
aus `5`"$z \cap \mathsf{dom}\, e = \ldots = z \cap y$"
folgt: e ist M_antiton auf $z \cap y$.

□

81-9. Falls E auf z eine R_isotone Klasse ist, die die Einschränkung von w auf y ist und falls R die M_induzierte Relation in y ist, dann ist w eine M_isotone Klasse auf $y \cap z$:

81-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *E Einschränkung von w auf y.*

$\rightarrow$) *R ist M_induzierte Relation in y.*

$\rightarrow$) *E ist R_isoton auf z.*

Dann folgt "w ist M_isoton auf $y \cap z$".

Beweis **81-8**

1.1: Aus $\rightarrow$)"E ist R_isoton auf z"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

2: Via **2-7** gilt: $y \cap z \subseteq z$.

3: Aus 2"$y \cap z \subseteq z$" und
aus 1.1"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **0-6**: $y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

4: Aus $\rightarrow$)"E Einschränkung von w auf y"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, E \subseteq \mathsf{dom}\, w$.

5: Aus 3"$y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus 4"$\mathsf{dom}\, E \subseteq \mathsf{dom}\, w$"
folgt via **0-6**: A1 | "$y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, w$"

...

<u>Beweis</u> **81-9** ...

`Thema1.2` $(\alpha \in y \cap z) \wedge (\beta \in y \cap z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in w) \wedge ((\beta, \delta) \in w)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in y \cap z \ldots$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots \beta \in y \cap z \ldots$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in y) \wedge (\beta \in z)$.

`3.1:` Aus →) “E Einschränkung von w auf y”,
aus `2.1`“$\alpha \in y \ldots$” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in w \ldots$”
folgt via **15-5**: $(\alpha, \gamma) \in E$.

`3.2:` Aus →) “E Einschränkung von w auf y”,
aus `2.2`“$\beta \in y \ldots$” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta, \delta) \in w$”
folgt via **15-5**: $(\beta, \delta) \in E$.

`3.3:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in y”,
aus `Thema1.2`“$\ldots \alpha\_M\_\beta$”,
aus `2.1`“$\alpha \in y \ldots$” und
aus `2.2`“$\beta \in y \ldots$”
folgt via **64-4**: α_R_β.

`4:` Aus `VS` gleich “E ist R_isoton auf z”,
aus `2.1`“$\ldots \alpha \in z$”,
aus `2.2`“$\ldots \beta \in z$”,
aus `3.3`“α_R_β”,
aus `3.1`“$(\alpha, \gamma) \in E$” und
aus `3.2`“$(\beta, \delta) \in E$”
folgt via **81-1(Def)**: γ_R_δ.

`5:` Aus →) “R ist M_induzierte Relation in y” und
aus `4`“γ_R_δ”
folgt via **64-4**: γ_M_δ.

...

<u>Beweis</u> **81-9** . . .

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y \cap z) \wedge (\beta \in y \cap z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in w) \wedge ((\beta, \delta) \in w)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, w$" und
aus `A2` "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y \cap z) \wedge (\beta \in y \cap z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in w) \wedge ((\beta, \delta) \in w)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: w ist M_isoton auf $y \cap z$.

□

81-10. Falls E auf z eine R_antitone Klasse ist, die die Einschränkung von w auf y ist und falls R die M_induzierte Relation in y ist, dann ist w eine M_antitone Klasse auf $y \cap z$:

> **81-10(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) *E Einschränkung von w auf y.*
>
> $\rightarrow$) *R ist M_induzierte Relation in y.*
>
> $\rightarrow$) *E ist R_antiton auf z.*
>
> *Dann folgt "w ist M_antiton auf $y \cap z$".*

Beweis **81-10**

1.1: Aus $\rightarrow$) "E ist R_antiton auf z"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

2: Via **2-7** gilt: $y \cap z \subseteq z$.

3: Aus 2"$y \cap z \subseteq z$" und
aus 1.1"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **0-6**: $y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

4: Aus $\rightarrow$) "E Einschränkung von w auf y"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, E \subseteq \mathsf{dom}\, w$.

5: Aus 3"$y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus 4"$\mathsf{dom}\, E \subseteq \mathsf{dom}\, w$"
folgt via **0-6**: $\boxed{\text{A1} \mid \text{"}y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, w\text{"}}$

...

Beweis **81-10** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in y \cap z) \wedge (\beta \in y \cap z) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in w) \wedge ((\beta, \delta) \in w).$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in y \cap z \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \in z).$

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in y \cap z \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in y) \wedge (\beta \in z).$

`3.1:` Aus →)"E Einschränkung von w auf y",
aus `2.1`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in w \ldots$"
folgt via **15-5**: $(\alpha, \gamma) \in E.$

`3.2:` Aus →)"E Einschränkung von w auf y",
aus `2.2`"$\beta \in y \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in w$"
folgt via **15-5**: $(\beta, \delta) \in E.$

`3.3:` Aus →)"R ist M_induzierte Relation in y",
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_\beta$",
aus `2.1`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `2.2`"$\beta \in y \ldots$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\beta.$

`4:` Aus `VS` gleich "E ist R_antiton auf z",
aus `2.1`"$\ldots \alpha \in z$",
aus `2.2`"$\ldots \beta \in z$",
aus `3.3`"α_R_β",
aus `3.1`"$(\alpha, \gamma) \in E$" und
aus `3.2`"$(\beta, \delta) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: $\delta\_R\_\gamma.$

`5:` Aus →)"R ist M_induzierte Relation in y" und
aus `4`"δ_R_γ"
folgt via **64-4**: $\delta\_M\_\gamma.$

...

<u>Beweis</u> **81-10** ...

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y \cap z) \wedge (\beta \in y \cap z) \wedge (\alpha \_M\_ \beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in w) \wedge ((\beta, \delta) \in w)) \Rightarrow (\delta \_M\_ \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$y \cap z \subseteq \mathsf{dom}\, w$" und
aus `A2` "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in y \cap z) \wedge (\beta \in y \cap z) \wedge (\alpha \_M\_ \beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in w) \wedge ((\beta, \delta) \in w)) \Rightarrow (\delta \_M\_ \gamma)$"
folgt via **81-3**: w ist M_antiton auf $y \cap z$.

□

81-11. Falls E eine M_isotone *oder* eine M_antitone Klasse auf z ist und falls M reflexiv in z ist, dann gilt für alle p, q, w mit $p \in z$ und $(p, q) \in E$ und $(p, w) \in E$ sowohl q_M_w als auch w_M_q:

81-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) *E ist M_isoton auf z.* *oder* *E ist M_antiton auf z.*

$\rightarrow$) $p \in z$.

$\rightarrow$) *"$(p, q) \in E$" und "$(p, w) \in E$".*

Dann folgt "q_M_w" und "w_M_q".

Beweis **81-11**

1: Aus $\rightarrow$) "M reflexiv in z" und
aus $\rightarrow$) "$p \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: p_M_p.

2: Es gilt: (E ist M_isoton auf z) $\vee$ (E ist M_antiton auf z).

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **81-11** ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.Fall` E ist M_isoton auf z.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"E ist M_isoton auf z",
aus →) "$p \in z$",
aus →) "$p \in z$",
aus `1`"p_M_p",
aus →) "$(p, q) \in E \ldots$" und
aus →) "$\ldots (p, w) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: q_M_w.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"E ist M_isoton auf z",
aus →) "$p \in z$",
aus →) "$p \in z$",
aus `1`"p_M_p",
aus →) "$\ldots (p, w) \in E \ldots$" und
aus →) "$(p, q) \in E \ldots$"
folgt via **81-1(Def)**: w_M_q.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(q\_M\_w) \wedge (w\_M\_q)$.

...

<u>Beweis **81-11**</u> ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` E ist M_antiton auf z.

`3.1:` Aus `2.2.Fall` "E ist M_antiton auf z",
aus →) "$p \in z$",
aus →) "$p \in z$",
aus `1` "p_M_p",
aus →) "$(p, q) \in E \ldots$" und
aus →) "$\ldots (p, w) \in E$"
folgt via **81-1(Def)**: w_M_q.

`3.2:` Aus `2.2.Fall` "E ist M_antiton auf z",
aus →) "$p \in z$",
aus →) "$p \in z$",
aus `1` "p_M_p",
aus →) "$\ldots (p, w) \in E \ldots$" und
aus →) "$(p, q) \in E \ldots$"
folgt via **81-1(Def)**: q_M_w.

`4:` Aus `3.2` und
aus `3.1`
folgt: $(q\_M\_w) \wedge (w\_M\_q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(q\_M\_w) \wedge (w\_M\_q)$.

□

81-12. Falls f eine M_isotone *oder* eine M_antitone Funktion auf z ist und falls M reflexiv in z ist, dann gilt für alle $p \in z$ die Aussage "$f(p)$_M_$f(p)$" - und zwar unabhängig davon, ob $f(p) \in z$ oder nicht:

81-12(Satz)

Es gelte:

→) M *reflexiv in* z.

→) f *Funktion.*

→) f *ist* M_*isoton auf* z. *oder* f *ist* M_*antiton auf* z.

→) $p \in z$.

Dann folgt "$f(p)$_M_$f(p)$".

Beweis **81-12**

`1.1:` Es gilt: $(f \text{ ist } M\text{\_isoton auf } z) \vee (f \text{ ist } M\text{\_antiton auf } z)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` f ist M_isoton auf z.

Aus `1.1.1.Fall`"f ist M_isoton auf z"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.1.2.Fall` f ist M_antiton auf z.

Aus `1.1.2.Fall`"f ist M_antiton auf z"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

`1.2:` Aus →) "$p \in z$" und
aus `A1` gleich "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `1.2`"$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`3:` Aus →) "M reflexiv in z",
aus "→) *oder*" "$(f \text{ ist } M\text{\_isoton auf } z) \vee (f \text{ ist } M\text{\_antiton auf } z)$",
aus →) "$p \in z$",
aus `2`"$(p, f(p)) \in f$" und
aus `2`"$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **81-11**: $(f(p)\_M\_f(p)) \wedge (f(p)\_M\_f(p))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $f(p)\_M\_f(p)$.

□

$$\begin{aligned} \mathsf{82.0}(M,E) &= \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}. \\ \mathsf{82.1}(M,E) &= \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}. \end{aligned}$$

isoton.

antiton.

Ersterstellung: 30/08/07 **Letzte Änderung: 16/06/11**

82-1. Es werden per KlassenKlammern $\mathtt{82.0}(M, E)$ und $\mathtt{82.1}(M, E)$ eingeführt:

82-1(Definition)

1) $\mathtt{82.0}(M, E) = \{\omega : \omega \_ M \_ E(\omega)\}$.

2) $\mathtt{82.1}(M, E) = \{\omega : E(\omega) \_ M \_ \omega\}$.

82-2. Kriterium für $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$:

82-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

`ii)` $p\_M\_E(p)$.

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

Beweis **82-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

Aus `VS`
folgt: $p\_M\_E(p)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $p\_M\_E(p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_E(p)$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_E(p)$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

□

82-3. Die Klasse $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$ ist eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, M$ und von $\mathsf{dom}\, E$:

82-3(Satz)

a) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

b) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

Beweis **82-3** a)

`Thema1` $\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$” folgt: $\alpha\_M\_E(\alpha)$.

3: Aus 2“$\alpha\_M\_E(\alpha)$” folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

b)

`Thema1` $\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$” folgt: $\alpha\_M\_E(\alpha)$.

3: Aus 2“$\alpha\_M\_E(\alpha)$” folgt via **30-6**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, E$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

□

82-4. Jede Funktion f ist auf $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$ eine M_vermehrende Funktion und die Klasse $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$ ist die größte Klasse, auf der f eine M_vermehrende Funktion ist:

82-4(Satz)

a) *Aus "f Funktion"*
folgt "f ist M_vermehrend auf $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$*".*

b) *Aus "f Funktion" und "f ist M_vermehrend auf z"*
folgt "$z \subseteq \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\})$*".*

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis</u> **82-4** `a)` `VS` gleich f Funktion.

`Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$"
folgt: $\alpha\_M\_f(\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}) \Rightarrow (\alpha\_M\_f(\alpha))$"
folgt via **30-15**: f ist M_vermehrend auf $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } M\text{\_vermehrend auf } z)$.

`Thema1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion...",
aus `VS` gleich "...f ist M_vermehrend auf z" und
aus `Thema1` "$\alpha \in z$"
folgt via **30-15**: $\alpha\_M\_f(\alpha)$.

`3:` Aus 2 "$\alpha\_M\_f(\alpha)$"
folgt via **82-2**: $\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $z \subseteq \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

□

82-5. Ein technisches Resultat zur späteren Verwendung:

82-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ f *ist* M*_isoton auf* z.

$\rightarrow)$ $f[z \cap \mathsf{dom}\, M] \subseteq z$.

$\rightarrow)$ $p \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

Dann folgt "$f(p) \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis **82-5**</u>

`1:` Aus →) “$p \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$”
folgt via **2-2**: $(p \in z) \wedge (p \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\})$.

`2:` Aus `1`“$\ldots p \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$”
folgt: $p\_M\_f(p)$.

`3.1:` Aus `2`“$p\_M\_f(p)$”
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

`3.2:` Aus `2`“$p\_M\_f(p)$”
folgt via **30-2**: $f(p)$ Menge.

`4:` Aus `1`“$p \in z \ldots$” und
aus `3.1`“$p \in \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **2-2**: $p \in z \cap \mathsf{dom}\, M$.

`5:` Aus →) “f Funktion”,
aus `4`“$p \in z \cap \mathsf{dom}\, M$” und
aus `3.2`“$f(p)$ Menge”
folgt via **18-27**: $f(p) \in f[z \cap \mathsf{dom}\, M]$.

`6:` Aus `5`“$f(p) \in f[z \cap \mathsf{dom}\, M]$” und
aus →) “$f[z \cap \mathsf{dom}\, M] \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $f(p) \in z$.

`7:` Aus →) “f Funktion”,
aus →) “f ist M_isoton auf z”,
aus `1`“$p \in z \ldots$”,
aus `6`“$f(p) \in z$” und
aus `2`“$p\_M\_f(p)$”
folgt via **81-6**: $f(p)\_M\_f(f(p))$.

`8:` Aus `7`“$f(p)\_M\_f(f(p))$”
folgt via **82-2**: $f(p) \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

`9:` Aus `6`“$f(p) \in z$” und
aus `8`“$f(p) \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$”
folgt via **2-2**: $f(p) \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

□

82-6. Das folgende Resultat bereitet Aussagen über Einschränkungen auf $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ vor:

82-6(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

ii) *"$p\_M\_E(p)$" und "a_M_p".*

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

<u>Beweis **82-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **2-2**: $(p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}) \wedge (p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

`2.1:` Aus `1`"$p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \ldots$"
folgt: $p\_M\_E(p).$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a\_M\_p.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p\_M\_E(p)) \wedge (a\_M\_p).$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p\_M\_E(p)) \wedge (a\_M\_p).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_E(p) \ldots$"
folgt via **82-2**: $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a\_M\_p$"
folgt via **41-25**: $p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `1.1`"$p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$" und
aus `1.2`"$p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **2-2**: $p \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

$\square$

82-7. Die Klasse $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist eine TeilKlassse von $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ und von $\mathsf{dom}\, E$:

82-7(Satz)

a) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

b) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

Beweis **82-7**

1.1: Via **2-7** gilt: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

1.2: Via **2-7** gilt: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2.1: Via **82-3** gilt: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2.2: Via **82-3** gilt: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

2.3: Via **41-26** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

3.a): Aus 2.1 "$\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus 2.3 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-13**: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

3.b): Aus 1.1 "$\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$" und
aus 2.2 "$\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

□

82-8. Falls e die Einschränkung von E auf z ist und falls R die M_induzierte Relation in z ist, dann ist $\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}$ eine TeilKlasse von $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}\cap z$:

82-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von E auf z.*

$\rightarrow$) *R ist M_induzierte Relation in z.*

Dann folgt "$\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\} \subseteq \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap z$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}$ *und* $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

Beweis **82-8**

`Thema1` $\beta \in \{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}$.

2: Aus `Thema1` "$\beta \in \{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}$"
folgt: $\beta\_R\_e(\beta)$.

3.1: Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus 2 "$\beta\_R\_e(\beta)$"
folgt via **64-4**: $\beta \in z$.

3.2: Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von E auf z",
aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus 2 "$\beta\_R\_e(\beta)$"
folgt via **64-19**: $\beta\_M\_E(\beta)$.

4: Aus 3.2 "$\beta\_M\_E(\beta)$"
folgt via **82-2**: $\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

5: Aus 4 "$\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$" und
aus 3.1 "$\beta \in z$"
folgt via **2-2**: $\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap z$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}) \Rightarrow (\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap z)$.

Konsequenz via **0-2**: $\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\} \subseteq \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap z$.

□

82-9. Falls M transitiv ist, falls e die Einschränkung von E auf $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist und falls R die M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, dann gilt $\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\} = \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

<u>82-9(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *e Einschränkung von E auf $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

$\rightarrow)$ *R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "$\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\} = \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}$ *und* $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

<u>Beweis **82-9**</u>

1: Aus $\rightarrow)$ "e Einschränkung von E auf $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus $\rightarrow)$ "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **82-8**: $\{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\} \subseteq \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **82-9** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus Thema2.1 "$\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **82-6**: $(\beta\_M\_E(\beta)) \wedge (a\_M\_\beta)$.

4: Aus Thema2.1 "$\beta \in \{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **2-2**: $\beta \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

5: Aus →) "e Einschränkung von E auf $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 4 "$\beta \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **ES**: $e(\beta) = E(\beta)$.

6: Aus 3 "$\beta\_M\_E(\beta)\ldots$" und
aus 5 "$e(\beta) = E(\beta)$"
folgt: $\beta\_M\_e(\beta)$.

7: Aus →) "M transitiv",
aus 3 "$\ldots a\_M\_\beta$" und
aus 6 "$\beta\_M\_e(\beta)$"
folgt via **30-38**: $a\_M\_e(\beta)$.

8: Aus 6 "$a\_M\_e(\beta)$"
folgt via **41-25**: $e(\beta) \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

9: Aus →) "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$",
aus 6 "$\beta\_M\_e(\beta)$",
aus 4 "$\beta \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 8 "$e(\beta) \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **64-4**: $\beta\_R\_e(\beta)$.

10: Aus 9 "$\beta\_R\_e(\beta)$"
folgt via **82-2**: $\beta \in \{\omega : \omega\_R\_e(\omega)\}$.

...

<u>Beweis</u> **82-9** ...

Ergo `Thema2.1`:

$$\forall\beta:(\beta\in\{\omega:\omega\_M\_E(\omega)\}\cap[a\overset{M}{|}\cdot\rangle)\Rightarrow(\beta\in\{\omega:\omega\_R\_e(\omega)\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1`	"$\{\omega:\omega\_M\_E(\omega)\}\cap[a\overset{M}{|}\cdot\rangle\subseteq\{\omega:\omega\_R\_e(\omega)\}$"

`2.2:` Aus `1` "$\{\omega:\omega\_R\_e(\omega)\}\subseteq\{\omega:\omega\_M\_E(\omega)\}\cap[a\overset{M}{|}\cdot\rangle$" und
aus `A1` gleich "$\{\omega:\omega\_M\_E(\omega)\}\cap[a\overset{M}{|}\cdot\rangle\subseteq\{\omega:\omega\_R\_e(\omega)\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{\omega:\omega\_R\_e(\omega)\}=\{\omega:\omega\_M\_E(\omega)\}\cap[a\overset{M}{|}\cdot\rangle.$$

□

82-10. Kriterium für $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$:

<u>82-10(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

`ii)` $E(p)\_M\_p$.

82-1(Def) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

<u>Beweis</u> **<u>82-10</u>** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

Aus `VS`
folgt: $E(p)\_M\_p$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $E(p)\_M\_p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E(p)\_M\_p$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$E(p)\_M\_p$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

□

82-11. Die Klasse $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$ ist eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, M$ und von $\mathsf{dom}\, E$:

82-11(Satz)

a) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

b) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

82-1(Def) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

Beweis **82-11** a)

`Thema1` $\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$" folgt: $E(\alpha)\_M\_\alpha$.

3: Aus 2 "$E(\alpha)\_M\_\alpha$" folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

b)

`Thema1` $\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$" folgt: $E(\alpha)\_M\_\alpha$.

3: Aus 2 "$E(\alpha)\_M\_\alpha$" folgt via **30-6**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, E$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

$\square$

82-12. Jede Funktion f ist auf $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$ eine M_verringernde Funktion und $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$ ist die größte Klasse, auf der f eine M_verringernde Funktion ist:

82-12(Satz)

a) *Aus "f Funktion"*
folgt "f ist M_verringernd auf $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$".

b) *Aus "f Funktion" und "f ist M_verringernd auf z"*
folgt "$z \subseteq \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\})$".

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

<u>Beweis **82-12**</u> `a)` `VS` gleich f Funktion.

> `Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.
>
> Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$"
> folgt: $f(\alpha)\_M\_\alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_\alpha)$"
folgt via **30-16**: f ist M_verringernd auf $\{\omega : \omega\_M\_E(\omega)\}$.

`b)` `VS` gleich (f Funktion) $\wedge$ (f ist M_verringernd auf z).

> `Thema1` $\alpha \in z$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
> aus `VS` gleich "… f ist M_verringernd auf z" und
> aus `Thema1` "$\alpha \in z$"
> folgt via **30-16**: $f(\alpha)\_M\_\alpha$.
>
> `3:` Aus 2 "$f(\alpha)\_M\_\alpha$"
> folgt via **82-10**: $\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $z \subseteq \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

$\square$

82-13. Ein technisches Resultat zur späteren Verwendung:

82-13(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) f *ist* M*_antiton auf* z.

→) $f[z \cap \mathsf{ran}\, M] \subseteq z$.

→) $p \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

Dann folgt "$f(p) \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$ *und* $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

<u>Beweis **82-13**</u>

1: Aus →) “ $p \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$ ”
folgt via **2-2**: $(p \in z) \wedge (p \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\})$.

2: Aus 1 “ $\ldots p \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$ ”
folgt: $f(p)\_M\_p$.

3.1: Aus 2 “ $f(p)\_M\_p$ ”
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{ran}\, M$.

3.2: Aus 2 “ $f(p)\_M\_p$ ”
folgt via **30-2**: $f(p)$ Menge.

4: Aus 1 “ $p \in z \ldots$ ” und
aus 3.1 “ $p \in \mathsf{ran}\, M$ ”
folgt via **2-2**: $p \in z \cap \mathsf{ran}\, M$.

5: Aus →) “ f Funktion ” ,
aus 4 “ $p \in z \cap \mathsf{ran}\, M$ ” und
aus 3.2 “ $f(p)$ Menge ”
folgt via **18-27**: $f(p) \in f[z \cap \mathsf{ran}\, M]$.

6: Aus 5 “ $f(p) \in f[z \cap \mathsf{ran}\, M]$ ” und
aus →) “ $f[z \cap \mathsf{ran}\, M] \subseteq z$ ”
folgt via **0-4**: $f(p) \in z$.

7: Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ f ist M_antiton auf z ” ,
aus 6 “ $f(p) \in z$ ” ,
aus 1 “ $p \in z \ldots$ ” und
aus 2 “ $f(p)\_M\_p$ ”
folgt via **81-7**: $f(p)\_M\_f(f(p))$.

8: Aus 7 “ $f(p)\_M\_f(f(p))$ ”
folgt via **82-10**: $f(p) \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

9: Aus 6 “ $f(p) \in z$ ” und
aus 8 “ $f(p) \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$ ”
folgt via **2-2**: $f(p) \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

□

82-14. Das folgende Resultat bereitet Aussagen über Einschränkungen auf $\langle\cdot\overset{M}{|}b]$ vor:

82-14(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot\overset{M}{|}b]$.

ii) *"$E(p)\_M\_p$" und "p_M_b".*

82-1(Def) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

<u>Beweis **82-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

1: Aus VS gleich "$p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **2-2**: $(p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}) \wedge (p \in \langle \cdot \overset{M}{|} b])$.

2.1: Aus 1"$p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \ldots$"
folgt: $E(p)\_M\_p$.

2.2: Aus 1"$\ldots p \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: p_M_b.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(E(p)\_M\_p) \wedge (p\_M\_b)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(E(p)\_M\_p) \wedge (p\_M\_b)$.

1.1: Aus VS gleich "$E(p)\_M\_p \ldots$"
folgt via **82-10**: $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots p\_M\_b$"
folgt via **41-25**: $p \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1.1"$p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$" und
aus 1.2"$p \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **2-2**: $p \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

□

82-15. Die Klasse $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist eine TeilKlassse von $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ und von $\mathsf{dom}\, E$. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

82-15(Satz)

a) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

b) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

82-1(Def) $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

Beweis **82-15**

`1.1:` Via **2-7** gilt: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`2.1:` Via **82-11** gilt: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2.2:` Via **82-11** gilt: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`2.3:` Via **41-26** gilt: $\langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{ran}\, M$” und
aus `2.3`“$\langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **2-13**: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$.

`3.b):` Aus `1.1`“$\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$” und
aus `2.2`“$\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$”
folgt via **0-6**: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`4:` Via **KG**$\cap$ gilt: $(\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M) = (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`5.a):` Aus `3.1`“$\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M)$” und
aus `4`“$(\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, M) = (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt: $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

82-16. Falls e die Einschränkung von E auf z ist und falls R die M_induzierte Relation in z ist, dann ist $\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$ eine TeilKlasse von $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}\cap z$:

82-16(Satz)

Es gelte:

→) *e Einschränkung von E auf z.*

→) *R ist M_induzierte Relation in z.*

Dann folgt "$\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} \subseteq \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap z$".

82-1(Def) $\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$ *und* $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

Beweis **82-16**

`Thema1` $\beta \in \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$"
folgt: $e(\beta)\_R\_\beta$.

`3.1:` Aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `2` "$e(\beta)\_R\_\beta$"
folgt via **64-4**: $\beta \in z$.

`3.2:` Aus →) "e Einschränkung von E auf z",
aus →) "R ist M_induzierte Relation in z" und
aus `2` "$e(\beta)\_R\_\beta$"
folgt via **64-19**: $E(\beta)\_M\_\beta$.

`4:` Aus `3.2` "$E(\beta)\_M\_\beta$"
folgt via **82-10**: $\beta \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

`5:` Aus `4` "$\beta \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$" und
aus `3.1` "$\beta \in z$"
folgt via **2-2**: $\beta \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap z$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}) \Rightarrow (\beta \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap z)$.

Konsequenz via **0-2**: $\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} \subseteq \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap z$.

□

82-17. Falls M transitiv ist, falls e die Einschränkung von E auf $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist und falls R die M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist, dann gilt $\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} = \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$:

82-17(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\rangle$ *M transitiv.*

$\rightarrow\rangle$ *e Einschränkung von E auf $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

$\rightarrow\rangle$ *R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "$\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} = \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

82-1(Def) $\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$ *und* $\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

Beweis **82-17**

1: Aus $\rightarrow\rangle$"e Einschränkung von E auf $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus $\rightarrow\rangle$"R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **82-15**: $\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} \subseteq \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **82-17**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\qquad \alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `Thema2.1`“$\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **82-14**: $(E(\alpha)\_M\_\alpha) \wedge (\alpha\_M\_b)$.

`4:` Aus `Thema2.1`“$\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`5:` Aus →)“e Einschränkung von E auf $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$” und
aus `4`“$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **ES**: $e(\alpha) = E(\alpha)$.

`6:` Aus `3`“$E(\alpha)\_M\_\alpha \ldots$” und
aus `5`“$e(\alpha) = E(\alpha)$”
folgt: $e(\alpha)\_M\_\alpha$.

`7:` Aus →)“M transitiv”,
aus `6`“$e(\alpha)\_M\_\alpha$” und
aus `3`“$\ldots \alpha\_M\_b$”
folgt via **30-38**: $e(\alpha)\_M\_b$.

`8:` Aus `6`“$e(\alpha)\_M\_b$”
folgt via **41-25**: $e(\alpha) \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`9:` Aus →)“R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$”,
aus `6`“$e(\alpha)\_M\_\alpha$”,
aus `8`“$e(\alpha) \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$” und
aus `4`“$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **64-4**: $e(\alpha)\_R\_\alpha$.

`10:` Aus `9`“$e(\alpha)\_R\_\alpha$”
folgt via **82-10**: $\alpha \in \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$.

...

<u>Beweis</u> **<u>82-17</u>** ...

Ergo `Thema2.1`:

$$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1`	"$\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$"

`2.2:` Aus `1` "$\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} \subseteq \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus `A1` gleich "$\{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{\omega : e(\omega)\_R\_\omega\} = \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b].$$

□

82-18. Ein technisches Resultat zur späteren Verwendung:

82-18(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) f *ist* M_*isoton auf* z.

→) $f[z \cap \mathsf{ran}\, M] \subseteq z$.

→) $p \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

Dann folgt "$f(p) \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$".

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

<u>Beweis **82-18**</u>

`1:` Aus →) “ $p\in z\cap\{\omega: f(\omega)\_M\_\omega\}$ ”
folgt via **2-2**: $(p\in z)\wedge(p\in\{\omega: f(\omega)\_M\_\omega\})$.

`2:` Aus `1`“ $\ldots p\in\{\omega: f(\omega)\_M\_\omega\}$ ”
folgt: $f(p)\_M\_p$.

`3.1:` Aus `2`“ $f(p)\_M\_p$ ”
folgt via **30-2**: $p\in\mathsf{ran}\,M$.

`3.2:` Aus `2`“ $f(p)\_M\_p$ ”
folgt via **30-2**: $f(p)$ Menge.

`4:` Aus `1`“ $p\in z\ldots$ ” und
aus `3.1`“ $p\in\mathsf{ran}\,M$ ”
folgt via **2-2**: $p\in z\cap\mathsf{ran}\,M$.

`5:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus `4`“ $p\in z\cap\mathsf{ran}\,M$ ” und
aus `3.2`“ $f(p)$ Menge ”
folgt via **18-27**: $f(p)\in f[z\cap\mathsf{ran}\,M]$.

`6:` Aus `5`“ $f(p)\in f[z\cap\mathsf{ran}\,M]$ ” und
aus →) “ $f[z\cap\mathsf{ran}\,M]\subseteq z$ ”
folgt via **0-4**: $f(p)\in z$.

`7:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ f ist M_isoton auf z ” ,
aus `1`“ $p\in z\ldots$ ” ,
aus `6`“ $f(p)\in z$ ” und
aus `2`“ $f(p)\_M\_p$ ”
folgt via **81-6**: $f(f(p))\_M\_f(p)$.

`8:` Aus `7`“ $f(f(p))\_M\_f(p)$ ”
folgt via **82-10**: $f(p)\in\{\omega: f(\omega)\_M\_\omega\}$.

`9:` Aus `6`“ $f(p)\in z$ ” und
aus `8`“ $f(p)\in\{\omega: f(\omega)\_M\_\omega\}$ ”
folgt via **2-2**: $f(p)\in z\cap\{\omega: f(\omega)\_M\_\omega\}$.

□

82-19. Ein technisches Resultat zur späteren Verwendung:

82-19(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* M_*antiton auf* z.

$\rightarrow$) $f[z \cap \mathsf{dom}\, M] \subseteq z$.

$\rightarrow$) $p \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$.

Dann folgt "$f(p) \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$*".*

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$ *und* $\{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

<u>Beweis **82-19**</u>

1: Aus →) "$p \in z \cap \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$"
folgt via **2-2**: $(p \in z) \wedge (p \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\})$.

2: Aus 1 "$\ldots p \in \{\omega : \omega\_M\_f(\omega)\}$"
folgt: $p\_M\_f(p)$.

3.1: Aus 2 "$p\_M\_f(p)$"
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

3.2: Aus 2 "$p\_M\_f(p)$"
folgt via **30-2**: $f(p)$ Menge.

4: Aus 1 "$p \in z \ldots$" und
aus 3.1 "$p \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **2-2**: $p \in z \cap \mathsf{dom}\, M$.

5: Aus →) "f Funktion",
aus 4 "$p \in z \cap \mathsf{dom}\, M$" und
aus 3.2 "$f(p)$ Menge"
folgt via **18-27**: $f(p) \in f[z \cap \mathsf{dom}\, M]$.

6: Aus 5 "$f(p) \in f[z \cap \mathsf{dom}\, M]$" und
aus →) "$f[z \cap \mathsf{dom}\, M] \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $f(p) \in z$.

7: Aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist M_antiton auf z",
aus 6 "$f(p) \in z$",
aus 1 "$p \in z \ldots$" und
aus 2 "$p\_M\_f(p)$"
folgt via **81-7**: $f(f(p))\_M\_f(p)$.

8: Aus 7 "$f(f(p))\_M\_f(p)$"
folgt via **82-10**: $f(p) \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

9: Aus 6 "$f(p) \in z$" und
aus 8 "$f(p) \in \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$"
folgt via **2-2**: $f(p) \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_M\_\omega\}$.

□

r Relation in x: $\mathsf{82.0}(r,E)$. $\mathsf{82.1}(r,E)$.

r Relation in x und f Funktion und f ist r_isoton.

r Relation in x und r transitiv: $\mathsf{82.0}(r,E)$ oben r_versiegelt.

$\mathsf{82.1}(r,E)$ unten r_versiegelt.

r Relation in x und r transitiv und f Funktion und f ist r_isoton:

$\mathsf{82.0}(r,E)\cap[a\overset{r}{|}\cdot\rangle$.

$\mathsf{82.1}(r,E)\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$.

Ersterstellung: 02/03/06 **Letzte Änderung: 17/06/11**

83-1. Falls r eine Relation in x ist, dann sind $\mathsf{82.0}(r,E)$ und $\mathsf{82.1}(r,E)$ Teil-Klassen von x:

<u>**83-1(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

Dann folgt:

a) $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq x$.

b) $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x$.

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\}$ *und* $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\}$.

<u>Beweis **83-1**</u> ab)

1.1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

1.2: Via **82-3** gilt: $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

1.3: Via **82-11** gilt: $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

2.a): Aus 1.2 "$\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq x$.

2.b): Aus 1.3 "$\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus 1.1 "$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x$.

□

83-2. Falls r eine Relation in x ist und falls $x \cap \mathsf{dom}\, E$ eine Menge ist, dann sind $\mathsf{82.0}(r, E)$ und $\mathsf{82.1}(r, E)$ Mengen:

83-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) $x \cap \mathsf{dom}\, E$ *Menge.*

Dann folgt:

a) $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\}$ *Menge.*

b) $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\}$ *Menge.*

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\}$ *und* $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\}$.

<u>Beweis **83-2**</u>

1.1: Via **82-3** gilt: $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

1.2: Via **82-11** gilt: $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

1.3: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq x$.

1.4: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x$.

2.1: Aus 1.3 "$\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq x$" und
aus 1.1 "$\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **2-12**: $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, E$.

2.2: Aus 1.4 "$\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x$" und
aus 1.2 "$\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq \mathsf{dom}\, E$"
folgt via **2-12**: $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, E$.

3.a): Aus 2.1 "$\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, E$" und
aus →) "$x \cap \mathsf{dom}\, E$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\}$ Menge.

3.b): Aus 2.2 "$\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, E$" und
aus →) "$x \cap \mathsf{dom}\, E$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\omega : E(\omega)\_r\_\omega\}$ Menge.

□

83-3. Falls r eine Relation in x ist, dann vereinfacht sich **82-5** etwas:

83-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* r_*isoton auf* z.

$\rightarrow$) $f[z \cap x] \subseteq z$.

$\rightarrow$) $p \in z \cap \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Dann folgt "$f(p) \in z \cap \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$*".*

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis **83-3**</u>

1: Aus →) “ r Relation in x ”
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

2: Aus 1 “ $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$ ”
folgt via **2-15**: $(\mathsf{dom}\, r) \cap z \subseteq x \cap z$.

3: $z \cap (\mathsf{dom}\, r) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, r) \cap z \stackrel{2}{\subseteq} x \cap z \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} z \cap x$.

4: Aus 3 “ $z \cap \mathsf{dom}\, r \ldots \subseteq \ldots z \cap x$ ”
folgt via **8-9**: $f[z \cap \mathsf{dom}\, r] \subseteq f[z \cap x]$.

5: Aus 4 “ $f[z \cap \mathsf{dom}\, r] \subseteq f[z \cap x]$ ” und
aus →) “ $f[z \cap x] \subseteq z$ ”
folgt via **0-6**: $f[z \cap \mathsf{dom}\, r] \subseteq z$.

6: Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ f ist r_isoton auf z ” ,
aus 4 “ $f[z \cap \mathsf{dom}\, r] \subseteq z$ ” und
aus →) “ $p \in z \cap \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ ”
folgt via **82-5**: $f(p) \in z \cap \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

□

83-4. Falls r eine Relation in x ist, falls f eine Funktion ist, die r_isoton auf x ist und falls $p \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$, dann $f(p) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$:

83-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* r*_isoton auf* x.

$\rightarrow$) $p \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Dann folgt "$f(p) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Beweis **83-4**

1: Aus $\rightarrow$)"$p \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$"
folgt: $p\_r\_f(p)$.

2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus 1"$p\_r\_f(p)$"
folgt via **34-1**: $(p \in x) \wedge (f(p) \in x)$.

3: Aus $\rightarrow$)"f Funktion",
aus $\rightarrow$)"f ist r_isoton auf x",
aus 2"$p \in x \ldots$",
aus 2"$\ldots f(p) \in x$" und
aus 1"$p\_r\_f(p)$"
folgt via **81-6**: $f(p)\_r\_f(f(p))$.

4: Aus 3"$f(p)\_r\_f(f(p))$"
folgt via **82-2**: $f(p) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

□

83-5. Falls r eine Relation in x ist, falls f eine Funktion ist, die r_isoton auf x ist und falls R die r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ ist, dann ist f auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ eine R_vermehrende Klasse:

<u>83-5(Satz)</u>

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *f Funktion.*

→) *f ist r_isoton auf x.*

→) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.*

Dann folgt "f ist R_vermehrend auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Beweis **83-5**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` " $\alpha \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ "
folgt: $\alpha\_r\_f(\alpha)$.

`2.2:` Aus →) " r Relation in x ",
aus →) " f Funktion ",
aus →) " f ist r_isoton in x " und
aus `Thema1.1` " $\alpha \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ "
folgt via **83-4**: $f(\alpha) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

`3:` Aus →) " R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ ",
aus `2.1` " $\alpha\_r\_f(\alpha)$ " und
aus `Thema1.1` " $\alpha \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ " und
aus `2.2` " $f(\alpha) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ "
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_f(\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: | `A1` | " $\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \Rightarrow (\alpha\_R\_f(\alpha))$ " |

`1.2:` Aus →) " f Funktion " und
aus `A1` gleich " $\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \Rightarrow (\alpha\_R\_f(\alpha))$ "
folgt via **30-15**: f ist R_vermehrend auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

□

83-6. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt:

83-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

Dann folgt "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Beweis **83-6**

`1:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \subseteq x$.

`Thema2.1` $(0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \wedge (\beta$ ist r_Supremum von $\alpha)$.

`Thema3.1` $\gamma \in \alpha$.

`4.1:` Aus `Thema3.1`"$\gamma \in \alpha$" und
aus `Thema2.1`"$\ldots \alpha \subseteq \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

`4.2:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ ist r_Supremum von α"
folgt via **36-1(Def)**:
β obere r_Schranke von α.

`4.3:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ ist r_Supremum von α" und
aus `Thema3.1`"$\gamma \in \alpha$"
folgt via **36-4**: γ_r_β.

...

...

...

<u>Beweis **83-6**</u> ...

`Thema2.1`
$(0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \wedge (\beta$ ist r_Supremum von $\alpha)$.

`Thema3.1` $\gamma \in \alpha$.

...

`5.1:` Aus `4.1`"$\gamma \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$"
folgt: $\gamma\_r\_f(\gamma)$.

`5.2:` Aus `4.1`"$\gamma \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$" und
aus `1`"$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in x$.

`5.3:` Aus →)"r Relation in x" und
aus `4.2`"β obere r_Schranke von α"
folgt via **37-1**: $\beta \in x$.

`6:` Aus →)"f Funktion",
aus →)"f ist r_isoton auf x",
aus `5.2`"$\gamma \in x$",
aus `5.3`"$\beta \in x$" und
aus `4.3`"γ_r_β"
folgt via **81-6**: $f(\gamma)\_r\_f(\beta)$.

`7:` Aus →)"r transitiv",
aus `5.1`"$\gamma\_r\_f(\gamma)$" und
aus `6`"$f(\gamma)\_r\_f(\beta)$"
folgt via **30-38**: $\gamma\_r\_f(\beta)$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in \alpha) \Rightarrow (\gamma\_r\_f(\beta))$"

...

...

Beweis **83-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$

$$(0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \wedge (\beta \text{ ist } r\text{\_Supremum von } \alpha).$$

...

`3.2:` Aus `Thema2.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \alpha) \Rightarrow (\gamma\_r\_f(\beta))$"
folgt via **35-3**: $f(\beta)$ obere r_Schranke von α.

`4:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ ist r_Supremum von α" und
aus `3.2`"$f(\beta)$ obere r_Schranke von α"
folgt via **36-1(Def)**: $\beta\_r\_f(\beta)$.

`5:` Aus `4`"$\beta\_r\_f(\beta)$"
folgt via **82-2**: $\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Ergo `Thema2.1`:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \wedge (\beta \text{ ist } r\text{\_Supremum von } \alpha)) \Rightarrow (\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

□

83-7. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist f auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$ eine R_vermehrende Funktion, wobei hier R die r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$ ist:

83-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "f ist R_vermehrend auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis **83-7**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}) \wedge (\beta \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle)$.

`3.1:` Aus `2`“$\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \ldots$”
folgt: $\beta\_r\_f(\beta)$.

`3.2:` Aus →)“r Relation in x”,
aus →)“f Funktion”,
aus →)“f ist r_isoton auf x” und
aus `2`“$\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \ldots$”
folgt via **83-4**: $f(\beta) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

`3.3:` Aus `2`“$\ldots \beta \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: a_r_β.

`4:` Aus →)“r transitiv”,
aus `3.3`“a_r_β” und
aus `3.1`“$\beta\_r\_f(\beta)$”
folgt via **30-38**: $a\_r\_f(\beta)$.

`5:` Aus `4`“$a\_r\_f(\beta)$”
folgt via **41-25**: $f(\beta) \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`6:` Aus `3.2`“$f(\beta) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$” und
aus `5`“$f(\beta) \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **2-2**: $f(\beta) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`7:` Aus →)“R ist r_induzierte Relation in
$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$”,
aus `3.1`“$\beta\_r\_f(\beta)$”,
aus `Thema1`“$\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$” und
aus `6`“$f(\beta) \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **64-4**: $\beta\_R\_f(\beta)$.

...

<u>Beweis</u> **83-7** ...

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall\beta : (\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\beta\_R\_f(\beta))\text{”}}$

`1.2:` Aus →) “f Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\beta\_R\_f(\beta))$”
folgt via **30-15**: f ist R_vermehrend auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

□

83-8. Falls r eine Relation in x ist, dann vereinfacht sich **82-18** etwas:

83-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* r*_isoton auf* z.

$\rightarrow$) $f[z \cap x] \subseteq z$.

$\rightarrow$) $p \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

Dann folgt "$f(p) \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$*".*

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

<u>Beweis **83-8**</u>

1: Aus →) " r Relation in x "
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$.

2: Aus 1 " $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$ "
folgt via **2-15**: $(\mathsf{ran}\, r) \cap z \subseteq x \cap z$.

3: $z \cap \mathsf{ran}\, r \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{ran}\, r) \cap z \stackrel{2}{\subseteq} x \cap z \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} z \cap x$.

4: Aus 3 " $z \cap \mathsf{ran}\, r \ldots \subseteq \ldots z \cap x$ "
folgt via **8-9**: $f[z \cap \mathsf{ran}\, r] \subseteq f[z \cap x]$.

5: Aus 4 " $f[z \cap \mathsf{ran}\, r] \subseteq f[z \cap x]$ " und
aus →) " $f[z \cap x] \subseteq z$ "
folgt via **0-6**: $f[z \cap \mathsf{ran}\, r] \subseteq z$.

6: Aus →) " f Funktion " ,
aus →) " f ist r_isoton auf z " ,
aus 4 " $f[z \cap \mathsf{ran}\, r] \subseteq z$ " und
aus →) " $p \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$ "
folgt via **82-18**: $f(p) \in z \cap \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

□

83-9. Falls r eine Relation in x ist, falls f eine Funktion ist, die r_isoton auf x ist und falls $p \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$, dann $f(p) \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$:

83-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *r Relation in x.*

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

$\rightarrow\!)$ *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow\!)$ *$p \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.*

Dann folgt "$f(p) \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$".

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

Beweis **83-9**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$"
folgt: $f(p)\_r\_p$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "r Relation in x" und
aus 1 "$f(p)\_r\_p$"
folgt via **34-1**: $(f(p) \in x) \wedge (p \in x)$.

3: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "f ist r_isoton auf x",
aus 2 "$f(p) \in x \ldots$",
aus 2 "$\ldots p \in x$" und
aus 1 "$f(p)\_r\_p$"
folgt via **81-6**: $f(f(p))\_r\_f(p)$.

4: Aus 3 "$f(f(p))\_r\_f(p)$"
folgt via **82-10**: $f(p) \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

□

83-10. Falls r eine Relation in x ist, falls f eine Funktion ist, die r_isoton auf x ist und falls R die r_induzierte Relation in $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$ ist, dann ist f auf $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$ eine R_verringernde Klasse:

83-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.*

Dann folgt "f ist R_verringernd auf $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$".

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

<u>Beweis **83-10**</u>

`Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

`2.1`: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$"
folgt: $f(\alpha)\_r\_\alpha$.

`2.2`: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist r_isoton auf x" und
aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$"
folgt via **83-9**: $f(\alpha) \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

`3`: Aus →) "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$",
aus `2.1` "$f(\alpha)\_r\_\alpha$" und
aus `2.2` "$f(\alpha) \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$" und
aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$"
folgt via **64-4**: $f(\alpha)\_R\_\alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}) \Rightarrow (f(\alpha)\_R\_\alpha)$"

`1.2`: Aus →) "f Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}) \Rightarrow (f(\alpha)\_R\_\alpha)$"
folgt via **30-16**: f ist R_verringernd auf $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

□

83-11. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$ unten r_versiegelt:

83-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

Dann folgt "$\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$ unten r_versiegelt".

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

Beweis **83-11**

`1:` Aus $\rightarrow$)"r Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $(0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}) \wedge (\beta \text{ ist } r\text{\_Infimum von } \alpha)$.

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\gamma \in \alpha$.

`4.1:` Aus `Thema3.1`"$\gamma \in \alpha$" und
aus `Thema2.1`"$\ldots \alpha \subseteq \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

`4.2:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ ist r_Infimum von α"
folgt via **36-1(Def)**:
β untere r_Schranke von α.

`4.3:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ ist r_Infimum von α" und
aus `Thema3.1`"$\gamma \in \alpha$"
folgt via **36-3**: β_r_γ.

...

...

...

Beweis **83-11** ...

`Thema2.1` $(0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}) \wedge (\beta$ ist r_Infimum von $\alpha)$.

`Thema3.1` $\gamma \in \alpha$.

...

`5.1`: Aus `4.1` "$\gamma \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$"
folgt: $f(\gamma)\_r\_\gamma$.

`5.2`: Aus `4.1` "$\gamma \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$" und
aus `1` "$\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in x$.

`5.3`: Aus →) "r Relation in x" und
aus `4.2` "β untere r_Schranke von α"
folgt via **37-1**: $\beta \in x$.

`6`: Aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist r_isoton auf x",
aus `5.3` "$\beta \in x$",
aus `5.2` "$\gamma \in x$" und
aus `4.3` "β_r_γ"
folgt via **81-6**: $f(\beta)\_r\_f(\gamma)$.

`7`: Aus →) "r transitiv",
aus `6` "$f(\beta)\_r\_f(\gamma)$" und
aus `5.1` "$f(\gamma)\_r\_\gamma$"
folgt via **30-38**: $f(\beta)\_r\_\gamma$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in \alpha) \Rightarrow (f(\beta)\_r\_\gamma)$"

...

...

<u>Beweis **83-11**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$

$$(0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}) \wedge (\beta \text{ ist } r\text{\_Infimum von } \alpha).$$

...

`3.2:` Aus `Thema2.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \alpha) \Rightarrow (f(\beta)\_r\_\gamma)$"
folgt via **35-3**: $f(\beta)$ untere r_Schranke von α.

`4:` Aus `Thema2.1`"$\ldots \beta$ ist r_Infimum von α" und
aus `3.2`"$f(\beta)$ untere r_Schranke von α"
folgt via **36-1(Def)**: $f(\beta)\_r\_\beta$.

`5:` Aus `4`"$f(\beta)\_r\_\beta$"
folgt via **82-10**: $\beta \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

Ergo `Thema2.1`:

$$\forall \alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}) \wedge (\beta \text{ ist } r\text{\_Infimum von } \alpha))$$
$$\Rightarrow (\beta \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}).$$

Konsequenz via **54-1(Def)**: $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$ unten r_versiegelt.

□

83-12. Falls r eine transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist f auf $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$ eine R_verringernde Funktion, wobei hier R die r_induzierte Relation in $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$ ist:

83-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$.*

Dann folgt "f ist R_verringernd auf $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$".

82-1(Def) $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\}$.

<u>Beweis **83-12**</u>

`Thema1.1` $\alpha\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$.

`2:` Aus `Thema1.1` “$\alpha\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$”
folgt via **2-2**: $(\alpha\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\})\wedge(\alpha\in\langle\cdot\overset{r}{|}b])$.

`3.1:` Aus `2` “$\alpha\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\ldots$”
folgt: $f(\alpha)\_r\_\alpha$.

`3.2:` Aus →) “r Relation in x”,
aus →) “f Funktion”,
aus →) “f ist r_isoton auf x” und
aus `2` “$\alpha\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\ldots$”
folgt via **83-9**: $f(\alpha)\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}$.

`3.3:` Aus `2` “$\ldots\alpha\in\langle\cdot\overset{r}{|}b]$”
folgt via **41-25**: α_r_b.

`4:` Aus →) “r transitiv”,
aus `3.1` “$f(\alpha)\_r\_\alpha$” und
aus `3.3` “α_r_b”
folgt via **30-38**: $f(\alpha)\_r\_b$.

`5:` Aus `4` “$f(\alpha)\_r\_b$”
folgt via **41-25**: $f(\alpha)\in\langle\cdot\overset{r}{|}b]$.

`6:` Aus `3.2` “$f(\alpha)\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}$” und
aus `5` “$f(\alpha)\in\langle\cdot\overset{r}{|}b]$”
folgt via **2-2**: $f(\alpha)\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$.

`7:` Aus →) “R ist r_induzierte Relation in
$\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$”,
aus `3.1` “$f(\alpha)\_r\_\alpha$”,
aus `6` “$f(\alpha)\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$” und
aus `Thema1` “$\alpha\in\{\omega:f(\omega)\_r\_\omega\}\cap\langle\cdot\overset{r}{|}b]$”
folgt via **64-4**: $f(\alpha)\_R\_\alpha$.

...

<u>Beweis</u> **83-12** . . .

Ergo Thema1.1: $\boxed{\texttt{A1}\,\Big|\ \text{“}\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{r}{|} b]) \Rightarrow (f(\alpha)\_R\_\alpha)\text{”}}$

1.2: Aus →) “f Funktion” und
aus A1 gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{r}{|} b]) \Rightarrow (f(\alpha)\_R\_\alpha)$”
folgt via **30-16**: f ist R_verringernd auf $\{\omega : f(\omega)\_r\_\omega\} \cap \langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

□

r Relation in x und f Funktion und f ist r_isoton.
r Relation in x und f Funktion und f ist r_antiton.

Ersterstellung: 02/03/06 **Letzte Änderung: 17/06/11**

84-1. Falls r Relation in x ist und falls f eine r_isotone (oder r_antitone) Funktion auf z ist, dann gilt $f(p), f(q) \in x$ für alle $p, q \in z$ mit p_r_q:

84-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf z.* / *oder* / *f ist r_antiton auf z.*

$\rightarrow$) *"$p \in z$" und "$q \in z$".*

$\rightarrow$) *p_r_q.*

Dann folgt:

a) $f(p) \in x$.

b) $f(q) \in x$.

Beweis **84-1** ...

1.1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: f ist r_isoton auf z $\vee$ f ist r_antiton auf z.

Fallunterscheidung

1.1.1.Fall f ist r_isoton auf z.

2: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus 1.1.1.Fall "f ist r_isoton auf z",
aus $\rightarrow$) "$p \in z \dots$",
aus $\rightarrow$) "$\dots q \in z$" und
aus $\rightarrow$) "p_r_q"
folgt via **81-6**: $f(p)\_r\_f(q)$.

3: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus 2 "$f(p)\_r\_f(q)$"
folgt via **34-1**: $(f(p) \in x) \wedge (f(q) \in x)$.

1.1.2.Fall f ist r_antiton auf z.

2: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus 1.1.2.Fall "f ist r_antiton auf z",
aus $\rightarrow$) "$p \in z \dots$",
aus $\rightarrow$) "$\dots q \in z$" und
aus $\rightarrow$) "p_r_q"
folgt via **81-7**: $f(q)\_r\_f(p)$.

3: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus 2 "$f(q)\_r\_f(p)$"
folgt via **34-1**: $(f(p) \in x) \wedge (f(q) \in x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

A1 | "$(f(p) \in x) \wedge (f(q) \in x)$"

1.a): Aus A1
folgt: $f(p) \in x$.

1.b): Aus A1
folgt: $f(q) \in x$.

$\square$

84-2. Falls f eine r_isotone Funktion auf x mit einer in x reflexiven Relation r ist, dann gilt für jede untere r_Schranke u von x die Aussage $u\_r\_f(u)$:

84-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *u untere r_Schranke von x.*

Dann folgt "$u\_r\_f(u)$".

Beweis **84-2**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "u untere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $u \in x$.

2: Aus $\rightarrow$) "u untere r_Schranke von x" und
aus 1 "$u \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: u_r_u.

3: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus $\rightarrow$) "f ist r_isoton auf x",
aus 1 "$u \in x$",
aus 1 "$u \in x$" und
aus 2 "u_r_u"
folgt via **84-1**: $f(u) \in x$.

4: Aus $\rightarrow$) "u untere r_Schranke von x" und
aus 3 "$f(u) \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $u\_r\_f(u)$.

□

84-3. Falls f eine r_isotone Funktion auf x mit einer in x reflexiven Relation r ist, dann gilt für jede obere r_Schranke o von x die Aussage $f(o)\_r\_o$:

84-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* r*_isoton auf* x.

$\rightarrow$) o *obere* r*_Schranke von* x.

Dann folgt "$f(o)\_r\_o$".

Beweis **84-3**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "o obere r_Schranke von x"
folgt via **37-1**: $o \in x$.

2: Aus $\rightarrow$) "o obere r_Schranke von x" und
aus 1 "$o \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: o_r_o.

3: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus $\rightarrow$) "f ist r_isoton auf x",
aus 1 "$o \in x$",
aus 1 "$o \in x$" und
aus 2 "o_r_o"
folgt via **84-1**: $f(o) \in x$.

4: Aus $\rightarrow$) "o obere r_Schranke von x" und
aus 3 "$f(o) \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $f(o)\_r\_o$.

$\square$

r Relation in x und r reflexiv in x und f Funktion und f ist r_isoton.

untere r_Schranke von x.

r Relation in x und r reflexiv in x und f Funktion und f ist r_antiton.

obere r_Schranke von x.

Ersterstellung: 06/09/07 **Letzte Änderung: 18/06/11**

85-1. Falls f eine r_isotone (oder r_antitone) Funktion auf x ist und falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt $f(p) \in x$ für alle $x \in p$:

<u>**85-1(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ r *Relation in* x.

$\rightarrow)$ r *reflexiv in* x.

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ | f *ist* r*_isoton auf* x. — *oder* — f *ist* r*_antiton auf* x. |

$\rightarrow)$ $p \in x$.

Dann folgt "$f(p) \in x$".

<u>Beweis **85-1**</u>

1: Aus $\rightarrow)$"r reflexiv in x",
aus $\rightarrow)$"f Funktion",
aus "$\rightarrow)$ *oder*" "(f ist r_isoton auf x) $\vee$ (f ist r_antiton auf x)" und
aus $\rightarrow)$"$p \in x$"
folgt via **81-12**: $f(p)\_r\_f(p)$.

2: Aus $\rightarrow)$"r Relation in x" und
aus 1"$f(p)\_r\_f(p)$"
folgt via **34-1**: $f(p) \in x$.

□

85-2. Falls f eine r_isotone Funktion auf x mit einer in x reflexiven Relation r ist und falls u untere r_Schranke von x ist, dann gilt $u\_r\_f(p)$ für jedes $p \in x$:

85-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* r_*isoton auf* x.

$\rightarrow$) u *untere* r_*Schranke von* x.

$\rightarrow$) $p \in x$.

Dann folgt "$u\_r\_f(p)$".

Beweis **85-2**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x",
aus $\rightarrow$) "f ist r_isoton auf x" und
aus $\rightarrow$) "$p \in x$"
folgt via **85-1**: $f(p) \in x$.

2: Aus $\rightarrow$) "u untere r_Schranke von x" und
aus 1 "$f(p) \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $u\_r\_f(p)$.

□

85-3. Falls f eine r_isotone Funktion auf x mit einer in x reflexiven Relation r ist und falls o obere r_Schranke von x ist, dann gilt $f(p)$_r_o für jedes $p \in x$:

85-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *o obere r_Schranke von x.*

$\rightarrow$) *$p \in x$.*

Dann folgt "$f(p)$_r_o".

Beweis **85-3**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x",
aus $\rightarrow$) "f ist r_isoton auf x" und
aus $\rightarrow$) "$p \in x$"
folgt via **85-1**: $f(p) \in x$.

2: Aus $\rightarrow$) "o obere r_Schranke von x" und
aus 1 "$f(p) \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $f(p)$_r_o.

$\square$

M Stark Vollständig und y ist M_versiegelt: M_induzierte Relation in y.

M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

M Stark KettenVollständig und y ist M_KettenVersiegelt:

M_induzierte Relation in y.

M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

Ersterstellung: 07/09/07 **Letzte Änderung: 17/06/11**

86-1. Falls M unten Stark Vollständig ist und falls y unten M_versiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in y unten Stark Vollständig:

86-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M unten Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) *y unten M_versiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in y.*

Dann folgt "r unten Stark Vollständig".

Beweis **86-1**

`Thema1` $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r.$

`2:` Aus $\rightarrow$) "r ist M_induzierte Relation in y"
folgt via **64-9**: $(\mathsf{ran}\, r \subseteq y) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq \mathsf{ran}\, M).$

`3.1:` Aus `Thema1`"$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\, r \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq y.$

`3.2:` Aus `Thema1`"$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M.$

`4.1:` Aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3.1`"$\alpha \subseteq y$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq y.$

`4.2:` Aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3.2`"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M.$

...

...

<u>Beweis</u> **<u>86-1</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

...

`5`: Aus →) “M unten Stark Vollständig” und
aus `4.2`“$0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M-Infimum von α.

`6`: Aus →) “y unten M-versiegelt”,
aus `4.1`“$0 \neq \alpha \subseteq y$” und
aus `5`“$\ldots \Omega$ ist M-Infimum von α”
folgt via **54-1(Def)**: $\Omega \in y$.

`7`: Aus →) “r ist M-induzierte Relation in y”,
aus `5`“$\ldots \Omega$ ist M-Infimum von α”,
aus `6`“$\Omega \in y$” und
aus `4.1`“$0 \neq \alpha \subseteq y$”
folgt via **64-28**: Ω ist r-Infimum von α.

`8`: Aus `5`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `7`“Ω ist r-Infimum von α”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist r-Infimum von α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, r) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist r-Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **50-1(Def)**: r unten Stark Vollständig.

□

86-2. Falls M unten Stark Vollständig ist und falls y unten M_versiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten Stark Vollständig:

86-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M unten Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) *y unten M_versiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "r unten Stark Vollständig".

Beweis **86-2**

1: Via **54-9** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

2: Aus $\rightarrow$) "y unten M_versiegelt" und
aus 1 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt"
folgt via **54-4**: $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

3: Aus $\rightarrow$) "M unten Stark Vollständig",
aus 2 "$y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt" und
aus $\rightarrow$) "r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **86-1**: r unten Stark Vollständig.

□

86-3. Falls M unten Stark Vollständig *und* falls M transitiv ist und falls y unten M_versiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten Stark Vollständig:

86-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *M unten Stark Vollständig.*

$\rightarrow)$ *y unten M_versiegelt.*

$\rightarrow)$ *r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "r unten Stark Vollständig".

Beweis **86-3**

1: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv"
folgt via **54-11**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt.

3: Aus $\rightarrow)$ "y unten M_versiegelt" und
aus 2 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt"
folgt via **54-4**: $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt.

3: Aus $\rightarrow)$ "M unten Stark Vollständig",
aus 2 "$y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt" und
aus $\rightarrow)$ "r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **86-1**: r unten Stark Vollständig.

□

86-4. Falls M oben Stark Vollständig ist und falls y oben M_versiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in y oben Stark Vollständig:

86-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M oben Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) *y oben M_versiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in y.*

Dann folgt "r oben Stark Vollständig".

Beweis **86-4**

`Thema1` $\qquad 0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r.$

`2:` Aus $\rightarrow$) "r ist M_induzierte Relation in y"
folgt via **64-9**: $\qquad (\mathsf{dom}\, r \subseteq y) \wedge (\mathsf{dom}\, r \subseteq \mathsf{dom}\, M).$

`3.1:` Aus `Thema1` "$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus 2 "$\mathsf{dom}\, r \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-6**: $\qquad \alpha \subseteq y.$

`3.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus 2 "$\ldots \mathsf{dom}\, r \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-6**: $\qquad \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M.$

`4.1:` Aus `Thema1` "$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3.1` "$\alpha \subseteq y$"
folgt: $\qquad 0 \neq \alpha \subseteq y.$

`4.2:` Aus `Thema1` "$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3.2` "$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $\qquad 0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M.$

...

...

Beweis **86-4** ...

`Thema1` $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

...

5: Aus →) "M oben Stark Vollständig" und
aus 4.2 "$0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

6: Aus →) "y oben M_versiegelt",
aus 4.1 "$0 \neq \alpha \subseteq y$" und
aus 5 "... Ω ist M_Supremum von α"
folgt via **54-1(Def)**: $\Omega \in y$.

7: Aus →) "r ist M_induzierte Relation in y",
aus 5 "... Ω ist M_Supremum von α",
aus 6 "$\Omega \in y$" und
aus 4.1 "$0 \neq \alpha \subseteq y$"
folgt via **64-29**: Ω ist r_Supremum von α.

8: Aus 5 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 7 "Ω ist r_Supremum von α"
folgt: via **36-2**: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Supremum von α.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, r) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist r_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **50-1(Def)**: r oben Stark Vollständig.

□

86-5. Falls M oben Stark Vollständig ist und falls y oben M_versiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$ oben Stark Vollständig:

<u>**86-5(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M oben Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) *y oben M_versiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "r oben Stark Vollständig".

<u>Beweis **86-5**</u>

1: Via **54-9** gilt: $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

2: Aus $\rightarrow$) "y oben M_versiegelt" und
aus 1 "$\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-5**: $y \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

3: Aus $\rightarrow$) "M oben Stark Vollständig",
aus 2 "$y \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt" und
aus $\rightarrow$) "r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **86-4**: r oben Stark Vollständig.

$\square$

86-6. Falls M oben Stark Vollständig *und* falls M transitiv ist und falls y oben M_versiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben Stark Vollständig:

> **86-6(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow)$ *M transitiv.*
>
> $\rightarrow)$ *M oben Stark Vollständig.*
>
> $\rightarrow)$ *y oben M_versiegelt.*
>
> $\rightarrow)$ *r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*
>
> *Dann folgt "r oben Stark Vollständig".*

Beweis **86-6**

1: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv"
folgt via **54-11**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt.

3: Aus $\rightarrow)$ "y oben M_versiegelt" und
aus 2 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-5**: $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt.

3: Aus $\rightarrow)$ "M oben Stark Vollständig",
aus 2 "$y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt" und
aus $\rightarrow)$ "r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **86-4**: r oben Stark Vollständig.

$\square$

86-7. Falls M unten Stark KettenVollständig ist und
falls y unten M_KettenVersiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in y unten Stark KettenVollständig:

86-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M unten Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) *y unten M_KettenVersiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in y.*

Dann folgt "r unten Stark KettenVollständig".

Beweis **86-7**

`Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist r_Kette$)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "r ist M_induzierte Relation in y" und
aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist r_Kette"
folgt via **64-15**: α ist M_Kette.

`2.2:` Aus `VS` gleich "r ist M_induzierte Relation in y" und
aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist r_Kette"
folgt via **64-18**: $\alpha \subseteq y$.

`3:` Aus $\rightarrow$)"M unten Stark KettenVollständig",
aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `2.1`"α ist M_Kette"
folgt via **55-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

`4:` Aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `2.2`"$\alpha \subseteq y$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq y$.

...

...

<u>Beweis **86-7**</u> ...

`Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist r_Kette$)$.

...

`5:` Aus →) “y unten M_KettenVersiegelt” ,
aus `4` “$0 \neq \alpha \subseteq y$” ,
aus `2.1` “α ist M_Kette” und
aus `3` “$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von α”
folgt via **54-13(Def)**: $\Omega \in y$.

`6:` Aus `VS` gleich “r ist M_induzierte Relation in y” ,
aus `3` “$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von α” ,
aus `5` “$\Omega \in y$” und
aus `4` “$0 \neq \alpha \subseteq y$”
folgt via **64-28**: Ω ist r_Infimum von α.

`7:` Aus `3` “$\exists \Omega \ldots$” und
aus `6` “Ω ist r_Infimum von α”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Infimum von α.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } r\text{\_Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } r\text{\_Infimum von } \alpha).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: r unten Stark KettenVollständig.

□

86-8. Falls M unten Stark KettenVollständig ist und
falls y unten M_KettenVersiegelt ist,
dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten Stark KettenVollständig:

> **86-8(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow\!)$ *M unten Stark KettenVollständig.*
>
> $\rightarrow\!)$ *y unten M_KettenVersiegelt.*
>
> $\rightarrow\!)$ *r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*
>
> *Dann folgt "r unten Stark KettenVollständig".*

Beweis **86-8**

1: Via **54-9** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

2: Aus 1"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_KettenVersiegelt.

3: Aus $\rightarrow\!)$"y unten M_KettenVersiegelt" und
aus 2"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-15**: $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_KettenVersiegelt.

4: Aus $\rightarrow\!)$"M unten Stark KettenVollständig",
aus 2"$y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_KettenVersiegelt" und
aus $\rightarrow\!)$"r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **86-7**: r unten Stark KettenVollständig.

□

86-9. Falls M transitiv unten Stark KettenVollständig ist und
falls y unten M_KettenVersiegelt ist,
dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten Stark KettenVollständig:

86-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *M unten Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow)$ *y unten M_KettenVersiegelt.*

$\rightarrow)$ *r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "r unten Stark KettenVollständig".

Beweis **86-9**

1: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv"
folgt via **54-11**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt.

3: Aus 2 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_KettenVersiegelt.

4: Aus $\rightarrow)$ "y unten M_KettenVersiegelt" und
aus 3 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-15**: $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_KettenVersiegelt.

5: Aus $\rightarrow)$ "M unten Stark KettenVollständig",
aus 4 "$y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_KettenVersiegelt" und
aus $\rightarrow)$ "r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **86-7**: r unten Stark KettenVollständig.

$\square$

86-10. Falls M oben Stark KettenVollständig ist und
falls y oben M_KettenVersiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in y oben Stark KettenVollständig:

86-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) *y oben M_KettenVersiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in y.*

Dann folgt "r oben Stark KettenVollständig".

Beweis **86-10**

`Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha$ ist r_Kette$)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "r ist M_induzierte Relation in y" und
aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist r_Kette"
folgt via **64-15**: α ist M_Kette.

`2.2:` Aus `VS` gleich "r ist M_induzierte Relation in y" und
aus `Thema1`"$\ldots \alpha$ ist r_Kette"
folgt via **64-18**: $\alpha \subseteq y$.

`3:` Aus $\rightarrow$)"M oben StarkKettenVollständig",
aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `2.1`"α ist M_Kette"
folgt via **55-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

`4:` Aus `Thema1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `2.2`"$\alpha \subseteq y$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq y$.

...

...

<u>Beweis</u> **86-10** ...

`Thema1` $(0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } r\text{\_Kette}).$

...

`5:` Aus →) "y oben M_KettenVersiegelt",
aus `4` "$0 \neq \alpha \subseteq y$",
aus `2.1` "α ist M_Kette" und
aus `3` "... Ω ist M_Supremum von α"
folgt via **54-13(Def)**: $\Omega \in y.$

`6:` Aus `VS` gleich "r ist M_induzierte Relation in y",
aus `3` "... Ω ist M_Supremum von α",
aus `5` "$\Omega \in y$" und
aus `4` "$0 \neq \alpha \subseteq y$"
folgt via **64-29**: Ω ist r_Supremum von α.

`7:` Aus `3` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `6` "Ω ist r_Supremum von α"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist r_Supremum von α.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha) \wedge (\alpha \text{ ist } r\text{\_Kette})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } r\text{\_Supremum von } \alpha).$$

Konsequenz via **55-5(Def)**: r oben Stark KettenVollständig.

□

86-11. Falls M oben Stark KettenVollständig ist und
falls y oben M_KettenVersiegelt ist,
dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben Stark KettenVollständig:

86-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) *y oben M_KettenVersiegelt.*

$\rightarrow$) *r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "r oben Stark KettenVollständig".

Beweis **86-11**

1: Via **54-9** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

2: Aus 1"$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_KettenVersiegelt.

3: Aus $\rightarrow$)"y oben M_KettenVersiegelt" und
aus 2"$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-16**: $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_KettenVersiegelt.

4: Aus $\rightarrow$)"M oben Stark KettenVollständig",
aus 2"$y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_KettenVersiegelt" und
aus $\rightarrow$)"r ist M_induzierte Relation in $y \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **86-10**: r oben Stark KettenVollständig.

□

86-12. Falls M transitiv oben Stark KettenVollständig ist und falls y oben M_KettenVersiegelt ist, dann ist die M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben Stark KettenVollständig:

<u>**86-12(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *M transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *M oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow\!)$ *y oben M_KettenVersiegelt.*

$\rightarrow\!)$ *r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "r oben Stark KettenVollständig".

<u>Beweis **86-12**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "M transitiv"
folgt via **54-11**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt.

2: Aus 1 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt.

3: Aus 2 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_KettenVersiegelt.

4: Aus $\rightarrow\!)$ "y oben M_KettenVersiegelt" und
aus 3 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_KettenVersiegelt"
folgt via **54-16**: $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_KettenVersiegelt.

5: Aus $\rightarrow\!)$ "M oben Stark KettenVollständig",
aus 4 "$y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_KettenVersiegelt" und
aus $\rightarrow\!)$ "r ist M_induzierte Relation in $y \cap [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **86-10**: r oben Stark KettenVollständig.

□

$\preceq$ Halbordnung in x: $\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$.

$\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$.

$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x:

$\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$.

$\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$.

r Relation in x und r transitiv und r oben Stark Vollständig
und f Funktion und f ist r_isoton auf x:

Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$.

r Relation in x und r transitiv und r oben Stark KettenVollständig
und f Funktion und f ist r_isoton auf x:

Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$.

Ersterstellung: 08/09/07 **Letzte Änderung: 17/06/11**

87-1. Falls $\preceq$ eine Halbordnung in x ist, dann ist die $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$ und die $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$ eine Halbordnung in der jeweiligen Klasse:

87-1(Satz)

Aus "$\preceq$ Halbordnung in x" und ...

a) ... *und "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$"*
folgt "r Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$".

b) ... *und "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$"*
folgt "r Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$".

c) ... *und "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$"*
folgt "r Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$".

d) ... *und "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$"*
folgt "r Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$".

`HO`-**Notation**.

82-1(Def) $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$ *und* $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

<u>Beweis **87-1**</u> `a)` `VS` gleich r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

`2:` Aus `1`"$\preceq$ Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \subseteq x$.

`3:` Aus `1.2`"$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$" und
aus `1.1`"$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq x$.

`4:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x",
aus `VS` gleich "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$" und
aus `3`"$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq x$"
folgt via **67-2**: r Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$.

`b)` `VS` gleich r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

`1:` Via **2-17** gilt: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$" und
aus `1`"$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$"
folgt: r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x" und
aus `2`"r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
r Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"r Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$" und
aus `1`"$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$"
folgt: r Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

<u>Beweis **87-1**</u> `c)` `VS` gleich $\qquad r$ ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

`2:` Aus `1`"$\preceq$ Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \subseteq x$.

`3:` Aus `1.2`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$" und
aus `1.1`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq x$.

`4:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x",
aus `VS` gleich "r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$" und
aus `3`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq x$"
folgt via **67-2**: r Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$.

`d)` `VS` gleich $\qquad r$ ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

`1:` Via **2-17** gilt: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$" und
aus `1`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$"
folgt: r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ Halbordnung in x" und
aus `2`"r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
r Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"r Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$" und
aus `1`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$"
folgt: r Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

$\square$

87-2. Falls $\preceq$ eine antiSymmetrische Halbordnung in x ist,
dann ist die $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$ und die $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$ eine antiSymmetrische Halbordnung in der jeweiligen Klasse:

87-2(Satz)

Aus "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x" und ...

a) *... und "r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$"*
folgt "r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$".

b) *... und "r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$"*
folgt "r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$".

c) *... und "r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$"*
folgt "r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$".

d) *... und "r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$"*
folgt "r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$".

HO-Notation.

82-1(Def) $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$ *und* $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

<u>Beweis **87-2**</u> `a)` `VS` gleich $\qquad r$ ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x”
folgt via **34-13**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

`2:` Aus `1`“$\preceq$ Relation in x”
folgt via **83-1**: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \subseteq x$.

`3:` Aus `1.2`“$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$” und
aus `1.1`“$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \subseteq x$”
folgt via **0-6**: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq x$.

`4:` Aus $\rightarrow$) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x”,
aus `VS` gleich “r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$” und
aus `3`“$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z \subseteq x$”
folgt via **67-4**: r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap z$.

`b)` `VS` gleich $\qquad r$ ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

`1:` Via **2-17** gilt: $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

`2:` Aus `VS` gleich “r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$” und
aus `1`“$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$”
folgt: r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$.

`3:` Aus $\rightarrow$) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x” und
aus `2`“r ist $\preceq$ -induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`“r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U}$” und
aus `1`“$\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$”
folgt: r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq E(\omega)\}$.

Beweis **87-2** `c)` `VS` gleich r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: $\preceq$ Relation in x.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

`2:` Aus `1`"$\preceq$ Relation in x"
folgt via **83-1**: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \subseteq x$.

`3:` Aus `1.2`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$" und
aus `1.1`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq x$.

`4:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x",
aus `VS` gleich "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$" und
aus `3`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z \subseteq x$"
folgt via **67-4**: r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap z$.

`d)` `VS` gleich r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

`1:` Via **2-17** gilt: $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$" und
aus `1`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$"
folgt: r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x" und
aus `2`"r ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U}$" und
aus `1`"$\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\} \cap \mathcal{U} = \{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$"
folgt: r antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : E(\omega) \preceq \omega\}$.

$\square$

87-3. Falls r eine oben Stark Vollständige, transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist die Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\}$ oben Stark Vollständig:

87-3(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r transitiv.*

→) *f Funktion.*

→) *f ist r_isoton auf x.*

→) *r oben Stark Vollständig.*

→) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.*

Dann folgt "R oben Stark Vollständig".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Beweis **87-3**

1: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r transitiv",
aus →) "f Funktion" und
aus →) "f ist r_isoton auf x"
folgt via **83-6**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

2: Aus →) "r oben Stark Vollständig",
aus 1 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt" und
aus VS gleich "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$"
folgt via **86-4**: R oben Stark Vollständig.

□

87-4. Falls r eine oben Stark Vollständige, transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist die Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$ oben Stark Vollständig:

<u>**87-4(Satz)**</u>

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r transitiv.*

→) *f Funktion.*

→) *f ist r_isoton auf x.*

→) *r oben Stark Vollständig.*

→) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "R oben Stark Vollständig".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis **87-4**</u>

1: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r transitiv",
aus →) "f Funktion" und
aus →) "f ist r_isoton auf x"
folgt via **83-6**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

2: Aus →) "r transitiv",
aus →) "r oben Stark Vollständig",
aus 1 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt" und
aus VS gleich "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **86-6**: R oben Stark Vollständig.

□

87-5. Falls r eine oben Stark Vollständige, transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist die Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$ oben Stark Vollständig:

<u>**87-5(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *transitiv.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* r_*isoton auf* x.

$\rightarrow$) r *oben Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) R *ist* r_*induzierte Relation in* $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$.

Dann folgt "R oben Stark Vollständig".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis **87-5**</u>

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r transitiv",
aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus $\rightarrow$) "f ist r_isoton auf x"
folgt via **83-6**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

2: Aus $\rightarrow$) "r oben Stark Vollständig",
aus 1 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt" und
aus VS gleich "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|} b]$"
folgt via **86-5**: R oben Stark Vollständig.

□

87-6. Falls r eine oben Stark KettenVollständige, transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist die Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\}$ oben Stark KettenVollständig:

87-6(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r transitiv.*

→) *f Funktion.*

→) *f ist r_isoton auf x.*

→) *r oben Stark KettenVollständig.*

→) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.*

Dann folgt "R oben Stark KettenVollständig".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Beweis **87-6**

1: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r transitiv",
aus →) "f Funktion" und
aus →) "f ist r_isoton auf x"
folgt via **83-6**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

2: Aus 1 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_KettenVersiegelt.

3: Aus →) "r oben Stark KettenVollständig",
aus 2 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_KettenVersiegelt" und
aus VS gleich "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$"
folgt via **86-10**: R oben Stark KettenVollständig.

□

87-7. Falls r eine oben Stark KettenVollständige, transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist die Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$ oben Stark KettenVollständig:

87-7(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) r *transitiv.*

→) f *Funktion.*

→) f *ist* r*_isoton auf* x.

→) r *oben Stark KettenVollständig.*

→) R *ist* r*_induzierte Relation in* $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt "R *oben Stark KettenVollständig".*

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

Beweis **87-7**

1: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r transitiv",
aus →) "f Funktion" und
aus →) "f ist r_isoton auf x"
folgt via **83-6**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

2: Aus 1 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_KettenVersiegelt.

3: Aus →) "r transitiv",
aus →) "r oben Stark KettenVollständig",
aus 2 "$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_KettenVersiegelt" und
aus VS gleich "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **86-12**: R oben Stark KettenVollständig.

□

87-8. Falls r eine oben Stark KettenVollständige, transitive Relation in x ist und falls f eine r_isotone Funktion auf x ist, dann ist die Einschränkung von r auf $\{\omega : \omega\_r\_E(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|}\, b]$ oben Stark KettenVollständig:

<u>**87-8(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r transitiv.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *r oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) *R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|}\, b]$.*

Dann folgt "R oben Stark KettenVollständig".

82-1(Def) $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$.

<u>Beweis **87-8**</u>

1: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x",
aus $\rightarrow$)"r transitiv",
aus $\rightarrow$)"f Funktion" und
aus $\rightarrow$)"f ist r_isoton auf x"
folgt via **83-6**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt.

2: Aus 1"$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_KettenVersiegelt.

3: Aus $\rightarrow$)"r oben Stark KettenVollständig",
aus 2"$\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\}$ oben r_KettenVersiegelt" und
aus `VS` gleich "R ist r_induzierte Relation in $\{\omega : \omega\_r\_f(\omega)\} \cap \langle\cdot \overset{r}{|}\, b]$"
folgt via **86-11**: R oben Stark KettenVollständig.

□

r Relation in x und f ist Funktion und f ist r_isoton x:

untere Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

obere Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

Infimum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

Ersterstellung: 09/09/07 **Letzte Änderung: 18/06/11**

88-1. Falls r eine Relation in x ist und falls die auf x r_isotone Funktion f einen Fixpunkt in x hat, dann ist mit jedem u, das untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$ ist, auch $f(u)$ eine untere r_Schranke der Klasse $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$:

88-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *"$p \in x$" und "p Fixpunkt von f".*

$\rightarrow$) *u untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.*

Dann folgt "$f(u)$ untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$".

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

Beweis **88-1**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$p \in x \ldots$" und
aus $\rightarrow$) "$\ldots p$ Fixpunkt von f"
folgt via **53-12**: $p \in x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

`2:` Aus `1.1` "$p \in x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **0-20**: | `A1` | "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$" |

<u>Beweis</u> **88-1** . . .

`Thema1.2`	$\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.
`2.1:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$" folgt via **53-12**:	$(\alpha \in x) \wedge (f(\alpha) = \alpha)$.
`2.2:` Aus →)"u untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$" und aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$" folgt via **35-1(Def)**:	u_r_α.
`3:` Aus →)"r Relation in x" und aus `2.2`"u_r_α" folgt via **34-1**:	$u \in x$.
`4:` Aus →)"f Funktion", aus →)"f ist r_isoton auf x", aus `3`"$u \in x$", aus `2.1`"$\alpha \in x \ldots$" und aus `2.2`"u_r_α" folgt via **81-6**:	$f(u)\_r\_f(\alpha)$.
`5:` Aus `4`"$f(u)\_r\_f(\alpha)$" und aus `2.1`"$\ldots f(\alpha) = \alpha$" folgt:	$f(u)\_r\_\alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}) \Rightarrow (f(u)\_r\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}) \Rightarrow (f(u)\_r\_\alpha)$"
folgt via **35-3**: $f(u)$ untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

□

88-2. Falls r eine Relation in x ist und falls die auf x r_isotone Funktion f einen Fixpunkt in x hat, dann ist mit jedem o, das obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$ ist, auch $f(o)$ eine obere r_Schranke der Klasse $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$:

88-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *r Relation in x.*

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow)$ *"$p \in x$" und "p Fixpunkt von f".*

$\rightarrow)$ *o obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.*

Dann folgt "$f(o)$ obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$".

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

Beweis **88-2**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$p \in x \ldots$" und
aus $\rightarrow)$ "$\ldots p$ Fixpunkt von f"
folgt via **53-12**: $p \in x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

`2:` Aus `1.1` "$p \in x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **0-20**: `A1` | "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"

Beweis **88-2** ...

`Thema1.2` $\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

`2.1:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$"
folgt via **53-12**: $(\alpha \in x) \wedge (f(\alpha) = \alpha)$.

`2.2:` Aus →)"o obere r_Schranke von
$x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$" und
aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$"
folgt via **35-1(Def)**: α_r_o.

`3:` Aus →)"r Relation in x" und
aus `2.2`"α_r_o"
folgt via **34-1**: $o \in x$.

`4:` Aus →)"f Funktion",
aus →)"f ist r_isoton auf x",
aus `2.1`"$\alpha \in x \ldots$",
aus `3`"$o \in x$" und
aus `2.2`"α_r_o"
folgt via **81-6**: $f(\alpha)\_r\_f(o)$.

`5:` Aus `2.1`"$\ldots f(\alpha) = \alpha$" und
aus `4`"$f(\alpha)\_r\_f(o)$"
folgt: $\alpha\_r\_f(o)$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall \alpha : (\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}) \Rightarrow (\alpha\_r\_f(o))$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}) \Rightarrow (\alpha\_r\_f(o))$"
folgt via **35-3**: $f(o)$ obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

□

88-3. Falls r eine Relation in x ist und falls die auf x r_isotone Funktion f einen Fixpunkt in x hat, dann gilt $f(inf)$_r_inf für jedes r_Infimum inf von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$:

<u>**88-3(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f ist r_isoton auf x.*

$\rightarrow$) *"$p \in x$" und "p Fixpunkt von f".*

$\rightarrow$) *inf ist r_Infimum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.*

Dann folgt "$f(inf)$_r_inf".

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

<u>Beweis **88-3**</u>

1: Aus $\rightarrow$)"inf ist r_Infimum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **36-1(Def)**:
inf untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x",
aus $\rightarrow$)"f Funktion",
aus $\rightarrow$)"f ist r_isoton auf x",
aus $\rightarrow$)"$p \in x \ldots$",
aus $\rightarrow$)"$\ldots p$ Fixpunkt von f" und
aus 1"inf untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **88-1**:
$f(inf)$ untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

3: Aus $\rightarrow$)"inf ist r_Infimum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$" und
aus 2"$f(inf)$ untere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **36-1(Def)**: $f(inf)$_r_inf.

□

88-4. Falls r eine Relation in x ist und falls die auf x r_isotone Funktion f einen Fixpunkt in x hat, dann gilt $sup\_r\_f(sup)$ für jedes r_Supremum sup von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$:

88-4(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) f *Funktion.*

→) f *ist* r*_isoton auf* x.

→) "$p \in x$" *und* "p *Fixpunkt von* f".

→) sup *ist* r*_Supremum von* $x \cap \{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

Dann folgt "$sup\_r\_f(sup)$".

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

Beweis **88-4**

1: Aus →) "sup ist r_Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **36-1(Def)**:
sup obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

2: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist r_isoton auf x",
aus →) "$p \in x \ldots$",
aus →) "$\ldots p$ Fixpunkt von f" und
aus 1 "sup obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **88-2**:
$f(sup)$ obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$.

3: Aus →) "sup ist r_Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$" und
aus 2 "$f(sup)$ obere r_Schranke von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **36-1(Def)**: $f(sup)\_r\_sup$.

□

M transitiv und R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

obere Schranke von $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

M transitiv und R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$:

untere Schranke von $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

M unten Stark (Ketten)Vollständig: M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

M transitiv und M unten Stark (Ketten)Vollständig:

M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

M oben Stark (Ketten)Vollständig: M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

M transitiv und M oben Stark (Ketten)Vollständig:

M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ersterstellung: 09/09/07 **Letzte Änderung: 18/06/11**

89-1. Falls M transitiv ist und falls R die M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, dann gilt für jede nicht leere TeilKlasse E von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$, dass jede obere M_Schranke von E auch obere R_Schranke von E ist:

89-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *o obere M_Schranke von E.*

$\rightarrow)$ $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow)$ *R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "o obere R_Schranke von E".

Beweis **89-1**

1: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv",
aus $\rightarrow)$ "o obere M_Schranke von E" und
aus $\rightarrow)$ "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **44-14**: $o \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus $\rightarrow)$ "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$",
aus VS gleich "o obere M_Schranke von E",
aus 1 "$o \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus $\rightarrow)$ "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **64-23**: o obere R_Schranke von E.

□

89-2. Falls M transitiv ist und falls R die M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist, dann gilt für jede nicht leere TeilKlasse E von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$, dass jede untere M_Schranke von E auch untere R_Schranke von E ist:

89-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *u untere M_Schranke von E.*

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

$\rightarrow$) *R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "u untere R_Schranke von E".

Beweis **89-2**

1: Aus $\rightarrow$) "M transitiv",
aus $\rightarrow$) "u untere M_Schranke von E" und
aus $\rightarrow$) "$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **44-22**: $u \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus $\rightarrow$) "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$",
aus VS gleich "u untere M_Schranke von E",
aus 1 "$u \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus $\rightarrow$) "$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **64-22**: u untere R_Schranke von E.

□

89-3. Falls M transitiv ist und falls R die M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, dann gilt für jede nicht leere TeilKlasse E von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$, dass jedes M_Supremum von E auch R_Supremum von E ist:

89-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *M transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *sup ist M_Supremum von E.*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow\!)$ *R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "sup ist R_Supremum von E".

Beweis **89-3**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "*sup* ist M_Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: *sup* obere M_Schranke von E.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "M transitiv",
aus 1 "*sup* obere M_Schranke von E" und
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **44-14**: $sup \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$",
aus $\rightarrow\!)$ "*sup* ist M_Supremum von E",
aus 2 "$sup \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **64-29**: *sup* ist R_Supremum von E.

□

89-4. Falls M transitiv ist und falls R die M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist, dann gilt für jede nicht leere TeilKlasse E von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$, dass jedes M_Infimum von E auch R_Infimum von E ist:

<u>**89-4(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *inf ist M_Infimum von E.*

$\rightarrow)$ $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

$\rightarrow)$ *R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.*

Dann folgt "inf ist R_Infimum von E".

<u>Beweis **89-4**</u>

1: Aus $\rightarrow)$ "inf ist M_Infimum von E"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von E.

2: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv",
aus 1 "inf untere M_Schranke von E" und
aus $\rightarrow)$ "$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **44-22**: $inf \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

3: Aus $\rightarrow)$ "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$",
aus $\rightarrow)$ "inf ist M_Infimum von E",
aus 2 "$inf \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus $\rightarrow)$ "$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **64-28**: inf ist R_Infimum von E.

$\square$

89-5. Falls M transitiv ist und falls R die M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ mit $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, dann ist jede obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ein R_Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

89-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\rightarrow)$ *o obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

$\rightarrow)$ *R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.*

Dann folgt "o ist R_Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

Beweis **89-5**

1: Aus $\rightarrow)$"M transitiv",
aus $\rightarrow)$"$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 1"o obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **44-19**: o ist M_Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Via **0-6** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus $\rightarrow)$"R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$",
aus 1"o ist M_Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 2"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **64-35**: o ist R_Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

89-6. Falls M transitiv ist und falls R die M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$ mit $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$ ist, dann ist jede untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$ ein R_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$:

<u>**89-6(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

$\rightarrow)$ *u untere M_Schranke von* $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

$\rightarrow)$ *R ist M_induzierte Relation in* $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

Dann folgt "u ist R_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$*".*

<u>Beweis **89-6**</u>

1: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv",
aus $\rightarrow)$ "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$" und
aus 1 "u untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$"
folgt via **44-27**: u ist M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

2: Via **0-6** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

3: Aus $\rightarrow)$ "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$",
aus 1 "u ist M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$" und
aus 2 "$\langle\cdot \overset{M}{|}\ b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$"
folgt via **64-34**: u ist R_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

□

89-7. Falls M unten Stark (Ketten)Vollständig ist, dann ist die M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten Stark (Ketten)Vollständig:

89-7(Satz)

Aus "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und ...

a) *... und "M unten Stark Vollständig"*
folgt "R unten Stark Vollständig".

b) *... und "M unten Stark KettenVollständig"*
folgt "R unten Stark KettenVollständig".

Beweis **89-7** a) VS gleich $(R$ ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$
$\wedge(M$ unten Stark Vollständig$)$

1: Via **54-9** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

2: Aus VS gleich "... M unten Stark Vollständig",
aus 1 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt" und
aus VS gleich "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$..."
folgt via **86-1**: R unten Stark Vollständig.

b) VS gleich $(R$ ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$
$\wedge(M$ unten Stark KettenVollständig$)$

1: Via **54-9** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt.

2: Aus 1 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_KettenVersiegelt.

3: Aus VS gleich "... M unten Stark KettenVollständig",
aus 1 "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ unten M_KettenVersiegelt" und
aus VS gleich "R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$..."
folgt via **86-7**: R unten Stark KettenVollständig.

□

89-8. Falls M oben Stark (Ketten)Vollständig ist, dann ist die M_inducierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben Stark (Ketten)Vollständig:

<u>89-8(Satz)</u>

Aus "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und ...

a) *... und "M oben Stark Vollständig"*
folgt "R oben Stark Vollständig".

b) *... und "M oben Stark KettenVollständig"*
folgt "R oben Stark KettenVollständig".

<u>Beweis **89-8**</u> a) VS gleich $(R$ ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b])$
$\wedge(M$ oben Stark Vollständig$)$

1: Via **54-9** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

2: Aus VS gleich "...M oben Stark Vollständig",
aus 1 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt" und
aus VS gleich "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$..."
folgt via **86-4**: R oben Stark Vollständig.

b) VS gleich $(R$ ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b])$
$\wedge(M$ oben Stark KettenVollständig$)$

1: Via **54-9** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt.

2: Aus 1 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_versiegelt"
folgt via **54-14**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_KettenVersiegelt.

3: Aus VS gleich "...M oben Stark KettenVollständig",
aus 1 "$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ oben M_KettenVersiegelt" und
aus VS gleich "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$..."
folgt via **86-10**: R oben Stark KettenVollständig.

$\square$

89-9. Falls M transitiv und unten Stark (Ketten)Vollständig ist, dann ist die M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ unten Stark (Ketten)Vollständig:

89-9(Satz)

Aus "M transitiv" und "R ist M_induzierte Relation in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und ...

a) *... und "M unten Stark Vollständig" folgt "R unten Stark Vollständig".*

b) *... und "M unten Stark KettenVollständig" folgt "R unten Stark KettenVollständig".*

<u>Beweis</u> **89-9** `a)`

`VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (R \text{ ist } M\text{\_induzierte Relation in } \langle \cdot \overset{M}{|} b])$
$\wedge(M \text{ unten Stark Vollständig})$

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv ... "
folgt via **54-11**: $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt.

`2:` Aus `1`"$\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt.

`3:` Aus `VS` gleich "...M unten Stark Vollständig",
aus `2`"$\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt" und
aus `VS` gleich "...R ist M_induzierte Relation in $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$... "
folgt via **86-1**: R unten Stark Vollständig.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (R \text{ ist } M\text{\_induzierte Relation in } \langle \cdot \overset{M}{|} b])$
$\wedge(M \text{ unten Stark KettenVollständig})$

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv ... "
folgt via **54-11**: $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt.

`2:` Aus `1`"$\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt.

`3:` Aus `2`"$\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_versiegelt"
foglt via **54-14**: $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ unten KettenVersiegelt.

`4:` Aus `VS` gleich "...M unten Stark KettenVollständig",
aus `3`"$\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ unten M_KettenVersiegelt" und
aus `VS` gleich "...R ist M_induzierte Relation in $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$... "
folgt via **86-7**: R unten Stark KettenVollständig.

□

89-10. Falls M transitiv und oben Stark (Ketten)Vollständig ist, dann ist die M_induzierte Relation in $[a \stackrel{M}{|} \cdot\rangle$ oben Stark (Ketten)Vollständig:

89-10(Satz)

Aus "M transitiv" und "R ist M_induzierte Relation in $[a \stackrel{M}{|} \cdot\rangle$" und ...

a) *... und "M oben Stark Vollständig"*
folgt "R oben Stark Vollständig".

b) *... und "M oben Stark KettenVollständig"*
folgt "R oben Stark KettenVollständig".

<u>Beweis **89-10**</u> `a)`

`VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (R \text{ ist } M\text{\_induzierte Relation in } [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$
$\wedge(M \text{ oben Stark Vollständig})$

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv ... "
folgt via **54-11**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt.

`2:` Aus `1`"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt.

`3:` Aus `VS` gleich "... M oben Stark Vollständig",
aus `2`"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt" und
aus `VS` gleich "... R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$... "
folgt via **86-4**: R oben Stark Vollständig.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (R \text{ ist } M\text{\_induzierte Relation in } [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$
$\wedge(M \text{ oben Stark KettenVollständig})$

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv ... "
folgt via **54-11**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt.

`2:` Aus `1`"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_versiegelt"
folgt via **54-1(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt.

`3:` Aus `2`"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_versiegelt"
foglt via **54-14**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben KettenVersiegelt.

`4:` Aus `VS` gleich "... M oben Stark KettenVollständig",
aus `3`"$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ oben M_KettenVersiegelt" und
aus `VS` gleich "... R ist M_induzierte Relation in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$... "
folgt via **86-10**: R oben Stark KettenVollständig.

□

Tarski V.
Tarski VI.
Tarski VII.
Tarski VIII.
Tarski IX.

Ersterstellung: 08/09/07 **Letzte Änderung: 20/06/11**

90-1. Falls $\preceq$ eine oben Stark KettenVollständige, antiSymmetrische Halbordnung in einer Menge x ist und falls f eine auf x $\preceq$ _isotone Funktion ist, so dass für wenigstens ein p die Aussage $p \preceq f(p)$ gilt, dann hat f einen Fixpunkt in x:

90-1(Satz) (Tarski V)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) $\preceq$ *oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) x *Menge.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* $\preceq$ _*isoton auf* x.

$\rightarrow$) $p \preceq f(p)$.

Dann gibt es Ω, *so dass gilt:*

`e.1)` Ω *Fixpunkt von* f.

`e.2)` $\Omega \in x$.

`HO`-**Notation**.

Beweis **90-1**

82-1(Def) $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

`1.1:` Es gilt: $\exists R : R = \preceq \cap (\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \times \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\})$.

`2:` Aus `1.1`“$\ldots R = \preceq \cap (\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \times \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\})$”
folgt via **64-1(Def)**:

`A1`	“R ist $\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$”

`1.2:` Aus →) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x”
folgt via **34-13**: ($\preceq$ Relation in x) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv).

`1.3:` Aus →) “$p \preceq f(p)$”
folgt via **82-2**: $p \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

`2.1:` Aus `1.2`“$\preceq$ Relation in $x \ldots$”
folgt via **83-1**: $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\preceq$ Relation in $x \ldots$”,
aus →) “f Funktion”,
aus →) “f ist $\preceq$_isoton auf x” und
aus `A1` gleich “R ist $\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$”
folgt via **83-5**: f ist R_vermehrend auf $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

`2.3:` Aus `1.2`“$\preceq$ Relation in $x \ldots$”,
aus `1.2`“$\ldots \preceq$ transitiv”,
aus →) “f Funktion”,
aus →) “f ist $\preceq$_isoton auf x”,
aus →) “$\preceq$ oben Stark KettenVollständig” und
aus `A1` gleich “R ist $\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$”
folgt via **87-6**: R oben Stark KettenVollständig.

`2.4:` Aus `1.3`“$p \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

...

Beweis **90-1** . . .

`3.1:` Aus →) “ $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x ” ,
aus `A1` gleich “ R ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ ” und
aus `2.1` “ $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$ ”
folgt via **67-4**: R antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

`3.2:` Aus `2.1` “ $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$ ” und
aus →) “ x Menge ”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ Menge.

`4:` Aus `3.1` “ R antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ ” ,
aus `2.3` “ R oben Stark KettenVollständig ” ,
aus `2.4` “ $0 \neq \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ ” ,
aus `3.2` “ $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ Menge ” ,
aus →) “ f Funktion ” und
aus `2.2` “ f ist R_vermehrend auf $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ ”
folgt via **Tarski II**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\})$.

`5:` Aus `4` “ $\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ ” und
aus `2.1` “ $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$ ”
folgt via **0-4**: $\Omega \in x$.

`6:` Aus `4` “ $\exists \Omega \ldots$ ” ,
aus `4` “ $\ldots \Omega$ Fixpunkt von $f \ldots$ ” und
aus `5` “ $\Omega \in x$ ”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \in x)$.

□

90-2. Bei der Anwendung von **Tarski V** auf reelle Funktionen, die kompakte Intervalle in sich abbilden, fällt auf:

90-2.Bemerkung

Offenbar ist keine “ f ist $\preceq$ _antiton” -Version von **Tarski V** verfügbar.

90-3. Ohne große Mühe kann in **Tarksi V** die Voraussetzung "$p \preceq f(p)$" durch die Forderung nach einer Existenz einer unteren $\preceq$ -Schranke von x ersetzt werden:

<u>**90-3(Satz)**</u> **(Tarski VI)**

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) $\preceq$ *oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) x *Menge.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* $\preceq$ *-isoton auf* x.

$\rightarrow$) u *untere* $\preceq$ *-Schranke von* x.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` Ω *Fixpunkt von* f.

`e.2)` $\Omega \in x$.

Beweis **90-3**

`HO`-**Notation**.

`1:` Aus →) “ $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x ”
folgt via **34-13**: $\preceq$ Relation in x.

`2:` Aus `1` “ $\preceq$ Relation in x ”,
aus →) “ f Funktion ”,
aus →) “ f ist $\preceq$ _isoton auf x ” und
aus →) “ u untere $\preceq$ _Schranke von x ”
folgt via **84-2**: $u \preceq f(u)$.

`3:` Aus →) “ $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x ”,
aus →) “ $\preceq$ oben Stark KettenVollständig ”,
aus →) “ x Menge ”,
aus →) “ f Funktion ”,
aus →) “ f ist $\preceq$ _isoton auf x ” und
aus `2` “ $u \preceq f(u)$ ”
folgt via **Tarski V**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \in x)$.

□

90-4. Bei der Anwendung von **Tarski VI** auf reelle Funktionen, die kompakte Intervalle in sich abbilden, fällt auf:

90-4.Bemerkung

Offenbar ist keine “f ist $\preceq$ _antiton”-Version von **Tarski VI** verfügbar.

90-5. Nun geht es darum, $\preceq$ _Suprema der Klasse aller Fixpunkte von f in x auf ihre "Fixpunkt-Eigenschaft" zu überprüfen:

90-5(Satz) (Tarski VII)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) $\preceq$ *oben Stark KettenVollständig.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* $\preceq$ *_isoton auf* x.

$\rightarrow$) *"$p \in x$" und "p Fixpunkt von f".*

$\rightarrow$) *sup ist* $\preceq$ *_Supremum von* $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

$\rightarrow$) $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap \lbrack sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ *Menge.*

Dann folgt:

a) *"sup $\in x$" und "sup Fixpunkt von f".*

b) *sup ist* $\preceq$ *_Maximum von* $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

HO-Notation.
53-9(Def) $\{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.
82-1(Def) $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

Beweis **90-5**

1.1: Es gilt:

$$\exists \trianglelefteq : \trianglelefteq = \preceq \cap (\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap \lbrack sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \times \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap \lbrack sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle).$$

2: Aus 1.1"$\ldots \trianglelefteq =$

$$\preceq \cap (\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap \lbrack sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \times \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap \lbrack sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle)"$$

folgt via **64-1(Def)**:

A1	"$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap \lbrack sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$"

...

<u>Beweis **90-5**</u> ...

`1.2:` Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**:
$$(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ transitiv}) \wedge (\preceq \text{ antiSymmetrisch}).$$

`1.3:` Via **2-7** gilt: $$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}.$$

`1.4:` Aus →) "sup ist $\preceq$ -Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **36-1(Def)**:
$$sup \text{ obere } \preceq\text{-Schranke von } x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}.$$

`1.5:` Aus →) "sup ist $\preceq$ -Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **36-4**: $$sup \preceq sup.$$

`2.1:` Aus `1.2` "$\preceq$ Relation in x ..."
folgt via **83-1**: $$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x.$$

`2.2:` Aus `1.2` "$\preceq$ Relation in x ...",
aus `1.2` "... $\preceq$ transitiv... ",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist $\preceq$ -isoton auf x" und
aus `A1` gleich
$$\text{"}\ldots \trianglelefteq \text{ ist } \preceq\text{-induzierte Relation in } \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle\text{"}$$
folgt via **83-7**: $$f \text{ ist } \trianglelefteq\text{-vermehrend auf } \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle.$$

`2.3:` Aus `1.2` "$\preceq$ Relation in x ...",
aus `1.2` "... $\preceq$ transitiv... ",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist $\preceq$ -isoton auf x",
aus →) "$\preceq$ oben Stark KettenVollständig" und
aus `A1` gleich
$$\text{"}\ldots \trianglelefteq \text{ ist } \preceq\text{-induzierte Relation in } \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [sup \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle\text{"}$$
folgt via **87-7**: $$\trianglelefteq \text{ oben Stark KettenVollständig.}$$

`2.4:` Aus `1.2` "$\preceq$ Relation in x ...",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist $\preceq$ -isoton auf x",
aus →) "$p \in x$ ...",
aus →) "... p Fixpunkt von f" und
aus →) "sup ist $\preceq$ -Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **88-4**: $$sup \preceq f(sup).$$

...

<u>Beweis **90-5**</u> ...

`3.1:` Aus `1.3`“$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$” und
aus `2.1`“$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$”

folgt via **0-6**: $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq x.$

`3.2:` Aus `2.4`“$\mathit{sup} \preceq f(\mathit{sup})$” und
aus `1.5`“$\mathit{sup} \preceq \mathit{sup}$”

folgt via **82-6**: $\mathit{sup} \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle.$

`4.1:` Aus →) “$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x”,
aus `A1` gleich

“... $\trianglelefteq$ ist $\preceq$_induzierte Relation in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$” und

aus `3.1`“$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq x$”
folgt via **67-4**:

$\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\mathit{sup} \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle.$

`5:` Aus `4.1`“$\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”,
aus `2.3`“$\trianglelefteq$ oben Stark KettenVollständig”,

aus `4.2`“$0 \neq \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”,

aus →) “$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ Menge”,
aus →) “f Funktion” und

aus `2.2`“f ist $\trianglelefteq$_vermehrend auf $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **Tarski II**:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle).$$

...

<u>Beweis **90-5**</u> ...

6.1: Aus 5“ $\ldots \Omega$ Fixpunkt von $f \ldots$ ”
folgt via **53-10**: $\Omega \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

6.2: Aus 5“ $\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus 3.1“ $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle \subseteq x$ ”
folgt via **0-4**: $\Omega \in x$.

6.3: Aus 5“ $\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\mathit{sup} \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt via **82-6**: $\mathit{sup} \preceq \Omega$.

7: Aus 6.2“ $\Omega \in x$ ” und
aus 6.1“ $\Omega \in \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$ ”
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

8: Aus $\rightarrow$)“ sup ist $\preceq$ -Supremum von $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$ ” und
aus 7“ $\Omega \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$ ”
folgt via **36-4**: $\Omega \preceq \mathit{sup}$.

9: Aus 1.2“ ... $\preceq$ antiSymmetrisch ”,
aus 6.3“ $\mathit{sup} \preceq \Omega$ ” und
aus 8“ $\Omega \preceq \mathit{sup}$ ”
folgt via **30-47**: $\mathit{sup} = \Omega$.

10.1: Aus 9“ $\mathit{sup} = \Omega$ ” und
aus 6.2“ $\Omega \in x$ ”
folgt: $\mathit{sup} \in x$.

10.2: Aus 9“ $\mathit{sup} = \Omega$ ” und
aus 5“ $\ldots \Omega$ Fixpunkt von $f \ldots$ ”
folgt: sup Fixpunkt von f.

10.3: Aus 9“ $\mathit{sup} = \Omega$ ” und
aus 7“ $\Omega \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$ ”
folgt: $\mathit{sup} \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

11.a): Aus 10.1 und
aus 10.2
folgt: $(\mathit{sup} \in x) \wedge (\mathit{sup} \text{ Fixpunkt von } f)$.

11.b): Aus 10.3“ $\mathit{sup} \in x \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$ ” und
aus $\rightarrow$)“ sup ist $\preceq$ -Supremum von $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$ ”
folgt via **38-7**: sup ist $\preceq$ -Maximum von $x \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

□

90-6. Bei der Anwendung von **Tarski VII** auf reelle Funktionen, die kompakte Intervalle in sich abbilden, fällt auf:

90-6.Bemerkung

Offenbar ist keine "f ist $\preceq$ -antiton" -Version von **Tarski VII** verfügbar.

90-7. Ähnlich wie **Tarski V** und **Tarski VII**, jedoch auf oben Stark Vollständigen, antiSymmetrischen Halbordnungen in Mengen x aufbauend, ergibt sich **Tarski VIII**:

90-7(Satz) (Tarski VIII)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow)$ $\preceq$ *oben Stark Vollständig.*

$\rightarrow)$ x *Menge.*

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ f *ist* $\preceq$ *_isoton auf* x.

$\rightarrow)$ $p \preceq f(p)$.

Dann gibt es Ω, *so dass gilt:*

e.1) "$\Omega \in x$" *und* "Ω *Fixpunkt von* f".

e.2) Ω *ist* $\preceq$ *_Maximum von* $x \cap \{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

HO-**Notation**.

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

Beweis **90-7**

82-1(Def) $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$.

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ oben Stark Vollständig"
folgt via **55-6**: $\preceq$ oben Stark KettenVollständig.

`1.2:` Via **53-11** gilt: $\{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\} \subseteq \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

`1.4:` Via **2-7** gilt: $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\} \subseteq x$.

`1.5:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`1.6:` Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: $(\preceq \text{ Relation in } x) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } x)$.

`2.1:` Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x",
aus `1.1` "$\preceq$ oben Stark KettenVollständig",
aus $\rightarrow)$ "x Menge",
aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow)$ "f ist $\preceq$ _isoton auf x" und
aus $\rightarrow)$ "$p \preceq f(p)$"
folgt via **Tarski V**: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Psi \in x)$.

`2.2:` Aus `1.5` "$x \subseteq x$" und
aus `1.2` "$\{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-13**: $x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\} \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2.3:` Aus `1.6` "$\preceq$ Relation in $x \ldots$"
folgt via **83-1**: $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\ldots \Psi \in x$" und
aus `2.1` "$\ldots \Psi$ Fixpunkt von $f \ldots$"
folgt via **53-12**: $\Psi \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

`3.2:` Aus `2.3` "$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \subseteq x$" und
aus $\rightarrow)$ "x Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ Menge.

`4:` Aus `3.1` "$\Psi \in x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}$.

...

Beweis **90-7**...

5: Aus 1.6"$\preceq$ Relation in x ...",
aus 1.6"... $\preceq$ reflexiv in x",
aus →) "$\preceq$ oben Stark Vollständig",
aus 4"$0 \neq x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$" und
aus 1.4"$x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\} \subseteq x$"
folgt via **52-2**:

$$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \preceq\text{-Supremum von } x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}.$$

6: Aus 3.2"$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\}$ Menge"
folgt via **2-24**: $\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\Omega \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ Menge.

7: Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x",
aus 1.1"$\preceq$ oben Stark KettenVollständig",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist $\preceq$-isoton auf x",
aus 2.1"... $\Psi \in x$",
aus 2.1"... Ψ Fixpunkt von f ...",
aus 5"... Ω ist $\preceq$-Supremum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\}$" und
aus 6"$\{\omega : \omega \preceq f(\omega)\} \cap [\Omega \overset{\preceq}{|} \cdot\rangle$ Menge"
folgt via **Tarski VII**: $(\Omega \in x) \wedge (\Omega$ Fixpunkt von $f)$
$\wedge(\Omega$ ist $\preceq$-Maximum von $x \cap \{\omega : \omega$ Fixpunkt von $f\})$.

8: Aus 5"$\exists \Omega$ ..." und
aus 7
folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \text{ Fixpunkt von } f) \wedge (\Omega \text{ ist } \preceq\text{-Maximum von } x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\}).$$

□

90-8. Bei der Anwendung von **Tarski VIII** auf reelle Funktionen, die kompakte Intervalle in sich abbilden, fällt auf:

90-8.Bemerkung

Offenbar ist keine "f ist $\preceq$ _antiton"-Version von **Tarski VIII** verfügbar.

90-9. Ähnlich wie **Tarski VI**, jedoch auf oben Stark Vollständigen, antiSymmetrischen Halbordnungen in Mengen x aufbauend, ergibt sich aus
Tarski VIII die Aussage **Tarski IX**:

90-9(Satz) (Tarski IX)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* x.

$\rightarrow$) $\preceq$ *oben Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) x *Menge.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* $\preceq$ *_isoton auf* x.

$\rightarrow$) u *untere* $\preceq$ *_Schranke von* x.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` "$\Omega \in x$" *und* "Ω *Fixpunkt von* f".

`e.2)` Ω *ist* $\preceq$ *_Maximum von* $x \cap \{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

53-9(Def) $\{\omega : \omega$ *Fixpunkt von* $f\}$.

Beweis **90-9**

HO-Notation.

1: Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x"
folgt via **34-13**: $\preceq$ Relation in x.

2: Aus 1 "$\preceq$ Relation in x",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist $\preceq$ _isoton auf x" und
aus →) "u untere $\preceq$ _Schranke von x"
folgt via **84-2**: $u \preceq f(u)$.

3: Aus →) "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in x",
aus →) "$\preceq$ oben Stark Vollständig",
aus →) "x Menge",
aus →) "f Funktion",
aus →) "f ist $\preceq$ _isoton auf x" und
aus 2 "$u \preceq f(u)$"
folgt via **Tarski VIII**: $\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \text{ Fixpunkt von } f)$
$\wedge(\Omega \text{ ist } \preceq \text{ \_Maximum von } x \cap \{\omega : \omega \text{ Fixpunkt von } f\})$.

□

90-10. Bei der Anwendung von **Tarski IX** auf reelle Funktionen, die kompakte Intervalle in sich abbilden, fällt auf:

90-10.Bemerkung

Offenbar ist keine “ f ist $\preceq$ _antiton” -Version von **Tarski IX** verfügbar.

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.