Suite II - Die Arithmetische

Teil 2: Essays 100-108

FundamentalSatz $--$. $\cup\cap\vee\wedge\subseteq\in$Satz Zahlen. FundamentalSatz $-$. Additive KürzungsRegel. Additive VerschiebungsRegel. FundamentalSatz $-+$. $+$Satz Zahlen. FundamentalSatz $-\cdot$ in $\mathbb{R}$. NullTeilerFreiheit in $\mathbb{R}$. ParameterAxiom III. $\leq$. KleinerGleich-Relation. Kleiner-Relation. $\leq$-`Notation`. Arithmetisches Axiom VII. FundamentalSatz $\leq\cdot$. KommutativGesetz Multiplikation. $\cdot$Satz Zahlen.

Andreas Unterreiter

25. April 2012

FS−−: FundamentalSatz −−.

Ersterstellung: 01/10/05 **Letzte Änderung: 25/01/12**

100-1. Via **FundamentalSatz** $--$ gilt "$-(-x) = x$" genau dann, wenn die nicht zum ersten Mal auftretende Alternative x Zahl oder $x = \mathcal{U}$ gilt:

100-1(Satz) (FS−−: FundamentalSatz −−)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-(-x) = x$.

`ii)` "*x Zahl*" *oder* "$x = \mathcal{U}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **100-1**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $-(-x) = x$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall` folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`3:` $x \overset{\texttt{VS}}{=} -(-x) \overset{2}{=} -\mathcal{U} \overset{\textbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$x = \ldots = \mathcal{U}$" folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

Beweis **100-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $\alpha - \alpha = 0$.

`3:` Aus 2
folgt: $\alpha + (-\alpha) = 0$.

`4:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{R}$” und
aus 3“$\alpha + (-\alpha) = 0$”
folgt via **98-14**: $\alpha = -(-\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha = \mathsf{nan}$.

`2:` $-(-\alpha) \overset{\texttt{Thema1.2.}}{=} -(-\mathsf{nan}) \overset{\textbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan} \overset{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \overset{\texttt{Thema1.2}}{=} \alpha$.

`3:` Aus 2
folgt: $-(-\alpha) = \alpha$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha = \mathsf{nan}) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)\text{”}}$

...

Beweis **100-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha = +\infty$.

`2:` $$-(-\alpha) \overset{\texttt{Thema1.3.}}{=} -(-(+\infty)) \overset{\textbf{AAVI}}{=} -(-\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} +\infty \overset{\texttt{Thema1.3}}{=} \alpha.$$

`3:` Aus `2` folgt: $-(-\alpha) = \alpha$.

Ergo `Thema1.3`: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“}\forall\alpha : (\alpha = +\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $\alpha = -\infty$.

`2:` $$-(-\alpha) \overset{\texttt{Thema1.4.}}{=} -(-(-\infty)) \overset{\textbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} -\infty \overset{\texttt{Thema1.4}}{=} \alpha.$$

`3:` Aus `2` folgt: $-(-\alpha) = \alpha$.

Ergo `Thema1.4`: $\boxed{\texttt{A4} \mid \text{“}\forall\alpha : (\alpha = -\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)\text{”}}$

...

Beweis **100-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$ $\beta \in \mathbb{T}$.

2: Aus `Thema1.5`"$\beta \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**:
$$(\beta \in \mathbb{R}) \vee (\beta = \mathsf{nan}) \vee (\beta = +\infty) \vee (\beta = -\infty).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\beta \in \mathbb{R}$.

Aus `2.1.Fall`"$\beta \in \mathbb{R}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)$"
folgt: $-(-\beta) = \beta$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\beta = \mathsf{nan}$.

Aus `2.2.Fall`"$\beta = \mathsf{nan}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha = \mathsf{nan}) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)$"
folgt: $-(-\beta) = \beta$.

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $\beta = +\infty$.

Aus `2.3.Fall`"$\beta = +\infty$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha = +\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)$"
folgt: $-(-\beta) = \beta$.

...

...

Beweis **100-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$ $\beta \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $\beta = -\infty$.

Aus `2.4.Fall` "$\beta = -\infty$" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : (\alpha = -\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha)$"
folgt: $-(-\beta) = \beta$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $-(-\beta) = \beta$.

Ergo `Thema1.5`: $\boxed{\texttt{A5} \,\big|\, \text{"}\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (-(-\beta) = \beta)\text{"}}$

...

<u>Beweis **100-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

`1.6:` Nach `VS` gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.6.1.Fall` x Zahl.

`2.1:` Aus `1.6.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-11**: $-x$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.6.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`2.3:` Aus `1.6.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus `2.1`“$-x$ Zahl”
folgt via **96-11**: $-(-x)$ Zahl.

`3.2:` Aus `2.3`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `A5` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (-(-\beta) = \beta)$”
folgt: $-(-\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

`3.3:` Aus `2.3`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `A5` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (-(-\beta) = \beta)$”
folgt: $-(-\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

`4:` Aus `3.1`“$-(-x)$ Zahl”
folgt via **96-24**: $-(-x) = \mathsf{Re}(-(-x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-(-x))$.

...

...

Beweis **100-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.6.1.Fall}}$ x Zahl.

...

`5:`
$$-(-x)$$
$$\stackrel{4}{=} \mathsf{Re}(-(-x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-(-x))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}(-x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-(-x))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}(-x)) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}(-x))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-(-\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}(-x))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-(-\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot (-(-\mathsf{Im}x))$$
$$\stackrel{3.2}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-(-\mathsf{Im}x))$$
$$\stackrel{3.3}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{2.2}{=} x.$$

`6:` Aus `5` folgt: $-(-x) = x$.

$\boxed{\texttt{1.6.2.Fall}}$ $x = \mathcal{U}$.

`2:` $-(-x) \stackrel{\texttt{1.6.2.Fall}}{=} -(-\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\texttt{1.6.2.Fall}}{=} x.$

`3:` Aus `2` folgt: $-(-x) = x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $-(-x) = x$.

$\square$

100-2. Da $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \mathsf{i}$ Zahlen sind, folgen aus **FS**$--$ ohne allzu viel Mühe die vorliegenden Gleichungen:

100-2(Satz)

a) $-(-0) = 0$.

b) $-(-1) = 1$.

c) $-(-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

d) $-(-(+\infty)) = +\infty$.

e) $-(-(-\infty)) = -\infty$.

f) $-(-\mathsf{i}) = \mathsf{i}$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **100-2** `a)`

Aus **95-5**"0 Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-0) = 0.$

`b)`

Aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-1) = 1.$

`c)`

Aus **95-5**"nan Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}.$

`d)`

Aus **95-5**"$+\infty$ Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-(+\infty)) = +\infty.$

`e)`

Aus **95-5**"$-\infty$ Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-(-\infty)) = -\infty.$

`f)`

Aus **95-5**"i Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-\mathsf{i}) = \mathsf{i}.$

□

100-3. Via **FS**$--$ lässt der doppelte Vorzeichenwechsel Terme, die stets entweder gleich einer Zahl oder gleich $\mathcal{U}$ sind, unverändert. Dies ist Grund genug, die Liste der Terme, bei denen diese Alternative der Fall ist, zu erweitern:

100-3(Satz)

a) *"*$\mathsf{Re}x$ *Zahl" oder "*$\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$*".*

b) *"*$\mathsf{Im}x$ *Zahl" oder "*$\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$*".*

c) *"*$-x$ *Zahl" oder "*$-x = \mathcal{U}$*".*

d) *"*$\mathsf{rez}(x)$*" Zahl" oder "*$\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$*".*

e) *"*$x + y$ *Zahl" oder "*$x + y = \mathcal{U}$*".*

f) *"*$x \cdot y$ *Zahl" oder "*$x \cdot y = \mathcal{U}$*".*

g) *"*$x : y$ *Zahl" oder "*$x : y = \mathcal{U}$*".*

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **100-3** a)

1: Via **95-6** gilt: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}x$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A}$.

2: Aus `1.2.Fall` "$\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

3: Aus 2
folgt: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$.

Beweis **100-3** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}x$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$.

`c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(-x \text{ Zahl}) \vee (-x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $-x$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(-x \text{ Zahl}) \vee (-x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $-x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$-x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(-x \text{ Zahl}) \vee (-x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(-x \text{ Zahl}) \vee (-x = \mathcal{U})$.

Beweis **100-3** `d)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$.

`e)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x + y \text{ Zahl}) \vee (x + y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x + y$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(x + y \text{ Zahl}) \vee (x + y = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x + y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x + y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x + y \text{ Zahl}) \vee (x + y = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x + y \text{ Zahl}) \vee (x + y = \mathcal{U})$.

Beweis **100-3** `f)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \cdot y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \cdot y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$.

`g)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x : y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x : y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

□

100-4. Die hier angeführte Gleichungen folgen via **100-3** - bei $\mathsf{ab2}$ via **96-22** - aus **FS**$--$:

100-4(Satz)

a) $-(-\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

b) $-(-\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

c) $-(-(-x)) = -x$.

d) $-(-\mathsf{rez}(x)) = \mathsf{rez}(x)$.

e) $-(-\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x)$.

f) $-(-(x+y)) = x+y$.

g) $-(-(x\cdot y)) = x\cdot y$.

h) $-(-(x:y)) = x:y$.

REIM.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **100-4**</u> `a)`

Aus **100-3**“ $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x.$$

`b)`

Aus **100-3**“ $(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x.$$

`c)`

Aus **100-3**“ $(-x \text{ Zahl}) \vee (-x = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-(-x)) = -x.$$

`d)`

Aus **100-3**“ $(\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-\mathsf{rez}(x)) = \mathsf{rez}(x).$$

`e)`

Aus **96-22**“ $(\mathsf{ab2}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x).$$

`f)`

Aus **100-3**“ $(x + y \text{ Zahl}) \vee (x + y = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-(x + y)) = x + y.$$

`g)`

Aus **100-3**“ $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-x \cdot y) = x \cdot y.$$

`h)`

Aus **100-3**“ $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$”
folgt via **FS**$--$: $$-(-x : y) = x : y.$$

$\square$

100-5. Die nunmehrige Aussage ist ein *Hilfs*-Satz für den Beweis von **100-6**:

100-5(Satz)

a) *Aus* “$a \in \mathbb{S}$” *folgt* “$-a \in \mathbb{S}$”.

b) *Aus* “$a \in \mathbb{T}$” *folgt* “$-a \in \mathbb{T}$”.

RECH-**Notation**.

Beweis **100-5** a) VS gleich $a \in \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich “$a \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-15**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty) \vee (a = -\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $a \in \mathbb{R}$.

Aus 1.1.Fall“$a \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $-a \in \mathbb{R}$.

1.2.Fall $a = +\infty$.

2: $-a \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} -(+\infty) \stackrel{\text{AAVI}}{=} -\infty$.

3: Aus 2“$-a = \ldots = -\infty$” und
aus **95-11**“$-\infty \in \mathbb{S}$”
folgt: $-a \in \mathbb{S}$.

1.3.Fall $a = -\infty$.

2: $-a \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} -(-\infty) \stackrel{\text{AAVI}}{=} +\infty$.

3: Aus 2“$-a = \ldots = +\infty$” und
aus **95-11**“$+\infty \in \mathbb{S}$”
folgt: $-a \in \mathbb{S}$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $-a \in \mathbb{S}$.

Beweis **100-5** `b)` `VS` gleich $a \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(a \in \mathbb{S}) \vee (a = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$a \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-a \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus 2"$-a \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-16**: $-a \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $a = \mathsf{nan}$.

`2:` $-a \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

`3:` Aus 2"$-a = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $-a \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-a \in \mathbb{T}$.

□

100-6. Es gilt $p \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $-p \in \mathbb{R}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(-p) \in \mathbb{R}$. Analoges gilt für $p \in \mathbb{S}$, $p \in \mathbb{T}$, p Zahl. Korrespondierende Aussagen für $p \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{B}$ werden später bewiesen:

100-6(Satz)

a) $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (-(-p) \in \mathbb{R})$.

b) $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow (-(-p) \in \mathbb{S})$.

c) $(p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-(-p) \in \mathbb{T})$.

d) $(p\ \mathit{Zahl}) \Leftrightarrow (-p\ \mathit{Zahl}) \Leftrightarrow (-(-p)\ \mathit{Zahl})$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **100-6**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $-p \in \mathbb{R}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-p \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$-p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $-(-p) \in \mathbb{R}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p) \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{R}$"
folgt via **99-1**: $-(-p)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$-(-p)$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-p$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$-p$ Zahl"
folgt via **96-11**: p Zahl.

`4:` Aus `3`"p Zahl"
folgt via **FS−−**: $-(-p) = p$.

`5:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{R}$" und
aus `4`"$-(-p) = p$"
folgt: $p \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **100-6**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-5**: $-p \in \mathbb{S}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-p \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich "$-p \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-5**: $-(-p) \in \mathbb{S}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p) \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{S}$"
folgt via **99-1**: $-(-p)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$-(-p)$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-p$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$-p$ Zahl"
folgt via **96-11**: p Zahl.

`4:` Aus `3`"p Zahl"
folgt via **FS−−**: $-(-p) = p$.

`5:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{S}$" und
aus `4`"$-(-p) = p$"
folgt: $p \in \mathbb{S}$.

Beweis **100-6** `c)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{T}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{T}$"
folgt via **100-5**: $-p \in \mathbb{T}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-p \in \mathbb{T}$.

Aus `VS` gleich "$-p \in \mathbb{T}$"
folgt via **100-5**: $-(-p) \in \mathbb{T}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p) \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-1**: $-(-p)$ Zahl.

`2:` Aus `1` "$-(-p)$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-p$ Zahl.

`3:` Aus `2` "$-p$ Zahl"
folgt via **96-11**: p Zahl.

`4:` Aus `3` "p Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-p) = p$.

`5:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{T}$" und
aus `4` "$-(-p) = p$"
folgt: $p \in \mathbb{T}$.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich p Zahl.

Aus `VS` gleich "p Zahl"
folgt via **96-11**: $-p$ Zahl.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-p$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$-p$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-(-p)$ Zahl.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p)$ Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-p)$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-p$ Zahl.

`2:` Aus `1` "$-p$ Zahl"
folgt via **96-11**: p Zahl.

□

100-7. Da 1 eine reelle Zahl ist, ist auch -1 via **100-6** eine reelle Zahl:

100-7(Satz)

$$-1 \in \mathbb{R}.$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **100-7**

Aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$”
folgt via **100-6**: $-1 \in \mathbb{R}$.

□

100-8. Durch Kombination von **FSA**0 und **FS**−− wird das nunmehrige Kriterium erhalten:

100-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0-(-x)=x$.

`ii)` $-(-x)+0=x$.

`iii)` *"x Zahl" oder "$x=\mathcal{U}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **100-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0-(-x)=x$.

`1:` Aus `VS` folgt: $0+(-(-x))=x$.

`2:` Via **FSA** gilt: $(-(-x))+0=0+(-(-x))$.

`3:` Aus `2`"$(-(-x))+0=0+(-(-x))$" und
aus `1`"$0+(-(-x))=x$"
folgt: $(-(-x))+0=x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $-(-x)+0=x$.

<u>Beweis **100-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-(-x)+0=x.$

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}.$

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}.$

`3:` $x \stackrel{\texttt{VS}}{=} -(-x)+0 \stackrel{2}{=} -\mathcal{U}+0 \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}+0 \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}.$

`4:` Aus `3` "$x = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$"
folgt via **FSA**0: $0+x=x.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$"
folgt via **FS**$--$: $-(-x)=x.$

`2:` Aus `1.1` "$0+x=x$" und
aus `1.2` "$-(-x)=x$"
folgt: $0+(-(-x))=x.$

`3:` Aus `2`
folgt: $0-(-x)=x.$

□

100-9. Nun geht es um die Gleichungen $x = y$, $-x = -y$, $-(-x) = -(-y)$:

100-9(Satz)

a) *Aus* "$x = y$" *folgt* "$-x = -y$".

b) *Aus* "$x = y$" *folgt* "$-(-x) = -(-y)$".

c) *Aus* "$-x = -y$" *folgt* "$-(-x) = -(-y)$".

d) *Aus* "$-x = -y$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$x = y$" *und* "y *Zahl*".

e) *Aus* "$-x = -y$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x = y$" *und* "x *Zahl*".

f) *Aus* "$-(-x) = -(-y)$" *folgt* "$-x = -y$".

g) *Aus* "$-(-x) = -(-y)$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$x = y$" *und* "y *Zahl*".

h) *Aus* "$-(-x) = -(-y)$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x = y$" *und* "x *Zahl*".

RECH-**Notation**.

Beweis **100-9** ab) VS gleich $x = y$.

1.a): Aus "$-x = -x$" und
aus VS gleich "$x = y$"
folgt: $-x = -y$.

2.b): Aus "$-(-x) = -(-x)$" und
aus 1.a) "$-x = -y$"
folgt: $-(-x) = -(-y)$.

c) VS gleich $-x = -y$.

Aus VS gleich "$-x = -y$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $-(-x) = -(-y)$.

<u>Beweis **100-9**</u> `d)` `VS` gleich $(-x=-y)\wedge(x \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-x=-y\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-(-x)=-(-y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-x$ Zahl.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x)=x$.

`2.1:` Aus `1.2`"$-x$ Zahl" und
aus `VS` gleich "$-x=-y\ldots$"
folgt: $-y$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.1`"$-(-x)=-(-y)$" und
aus `1.3`"$-(-x)=x$"
folgt: $x=-(-y)$.

`3:` Aus `2.1`"$-y$ Zahl"
folgt via **96-11**: y Zahl.

`4:` Aus `3`"y Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-y)=y$.

`5:` Aus `2.2`"$x=-(-y)$" und
aus `4`"$-(-y)=y$"
folgt: $x=y$.

`6:` Aus `5`"$x=y$" und
aus `3`"y Zahl"
folgt: $(x=y)\wedge(y \text{ Zahl})$.

`e)` `VS` gleich $(-x=-y)\wedge(y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x=-y\ldots$"
folgt: $-y=-x$.

`2:` Aus `1`"$-y=-x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(y=x)\wedge(x \text{ Zahl})$.

`3:` Aus `2`"$y=x\ldots$"
folgt: $x=y$.

`4:` Aus `3`"$x=y$" und
aus `2`"$\ldots x$ Zahl"
folgt: $(x=y)\wedge(x \text{ Zahl})$.

<u>Beweis</u> **100-9** `f)` `VS` gleich $-(-x) = -(-y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-x) = -(-y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-(-(-x)) = -(-(-y))$.

`2:` $-x \overset{\mathbf{100-4}}{=} -(-(-x)) \overset{\mathbf{1}}{=} -(-(-y)) \overset{\mathbf{100-4}}{=} -y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-x = -y$.

`g)` `VS` gleich $(-(-x) = -(-y)) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-x) = -(-y) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $-x = -y$.

`2:` Aus `1`"$-x = -y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(x = y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`h)` `VS` gleich $(-(-x) = -(-y)) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-x) = -(-y) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $-x = -y$.

`2:` Aus `1`"$-x = -y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(x = y) \wedge (x \text{ Zahl})$.

□

100-10. Nun geht es um die Ungleichungen $x \neq y$, $-x \neq -y$, $-(-x) \neq -(-y)$:

100-10(Satz)

a) *Aus* "$x \neq y$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$-x \neq -y$".

b) *Aus* "$x \neq y$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$-x \neq -y$".

c) *Aus* "$x \neq y$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$-(-x) \neq -(-y)$".

d) *Aus* "$x \neq y$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$-(-x) \neq -(-y)$".

e) *Aus* "$-x \neq -y$" *folgt* "$x \neq y$".

f) *Aus* "$-x \neq -y$" *folgt* "$-(-x) \neq -(-y)$".

g) *Aus* "$-(-x) \neq -(-y)$" *folgt* "$x \neq y$".

h) *Aus* "$-(-x) \neq -(-y)$" *folgt* "$-x \neq -y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **100-10** a)

1: Via **100-9** gilt: $((-x = -y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = y)$.

2: Aus 1 folgt: $((\neg(x = y)) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-x = -y))$.

3: Aus 2 folgt: $((x \neq y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq -y)$.

b)

1: Via **100-9** gilt: $((-x = -y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = y)$.

2: Aus 1 folgt: $((\neg(x = y)) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-x = -y))$.

3: Aus 2 folgt: $((x \neq y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq -y)$.

<u>Beweis **100-10**</u> `c)`

`1:` Via **100-9** gilt: $((-(-x) = -(-y)) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((\neg(x = y)) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-(-x) = -(-y))).$

`3:` Aus `2`
folgt: $((x \neq y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-(-x) \neq -(-y)).$

`d)`

`1:` Via **100-9** gilt: $((-(-x) = -(-y)) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((\neg(x = y)) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-(-x) = -(-y))).$

`3:` Aus `2`
folgt: $((x \neq y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-(-x) \neq -(-y)).$

`e)`

`1:` Via **100-9** gilt: $(x = y) \Rightarrow (-x = -y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(-x = -y)) \Rightarrow (\neg(x = y)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(-x \neq -y) \Rightarrow (x \neq y).$

`f)`

`1:` Via **100-9** gilt: $(-(-x) = -(-y)) \Rightarrow (-x = -y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(-x = -y)) \Rightarrow (\neg(-(-x) = -(-y))).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(-x \neq -y) \Rightarrow (-(-x) \neq -(-y)).$

Beweis **100-10** `g)`

`1:` Via **100-9** gilt: $$(x = y) \Rightarrow (-(-x) = -(-y)).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(\neg(-(-x) = -(-y))) \Rightarrow (\neg(x = y)).$$

`3:` Aus `2` folgt: $$(-(-x) \neq -(-y)) \Rightarrow (x \neq y).$$

`h)`

`1:` Via **100-9** gilt: $$(-x = -y) \Rightarrow (-(-x) = -(-y)).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(\neg(-(-x) = -(-y))) \Rightarrow (\neg(-x = -y)).$$

`3:` Aus `2` folgt: $$(-(-x) \neq -(-y)) \Rightarrow (-x \neq -y).$$

$\square$

100-11. Nun geht es um die Gleichungen $x = -y$, $-x = y$, $x = -(-y)$, $-x = -(-y)$:

100-11(Satz)

a) *Aus* "$x = -y$" *folgt* "$-x = -(-y)$".

b) *Aus* "$x = -y$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$-x = y$" *und* "y *Zahl*".

c) *Aus* "$x = -y$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$-x = y$" *und* "x *Zahl*".

d) *Aus* "$-x = y$" *folgt* "$-(-x) = -y$".

e) *Aus* "$-x = y$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$x = -y$" *und* "y *Zahl*".

f) *Aus* "$-x = y$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x = -y$" *und* "x *Zahl*".

g) *Aus* "$x = -(-y)$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$x = y$" *und* "y *Zahl*".

h) *Aus* "$x = -(-y)$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x = y$" *und* "x *Zahl*".

i) *Aus* "$x = -(-y)$" *folgt* "$-x = -y$".

j) *Aus* "$-x = -(-y)$" *und* "x *Zahl*" *folgt* "$x = -y$" *und* "y *Zahl*".

k) *Aus* "$-x = -(-y)$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x = -y$" *und* "x *Zahl*".

l) *Aus* "$-x = -(-y)$" *folgt* "$-(-x) = -y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **100-11** a) VS gleich $x = -y$.

Aus VS gleich "$x = -y$"
folgt: $-x = -(-y)$.

<u>Beweis **100-11**</u> `b)` `VS` gleich $(x = -y) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x = -y \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-x = -(-y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x = -y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x$ Zahl”
folgt: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `1.2`“$-y$ Zahl”
folgt via **96-11**: y Zahl.

`3:` Aus `2`“y Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`4:` Aus `1.1`“$-x = -(-y)$” und
aus `3`“$-(-y) = y$”
folgt: $-x = y$.

`5:` Aus `4`“$-x = y$” und
aus `2`“y Zahl”
folgt: $(-x = y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`c)` `VS` gleich $(x = -y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x = -y \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-x = -(-y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt via **96-11**: $-y$ Zahl.

`2.1:` Aus `1.1`“$-x = -(-y)$” und
aus `1.2`“$-(-y) = y$”
folgt: $-x = y$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$x = -y \ldots$” und
aus `1.3`“$-y$ Zahl”
folgt: x Zahl.

`3:` Aus `2.1`“$-x = y$” und
aus `2.2`“x Zahl”
folgt: $(-x = y) \wedge (x \text{ Zahl})$.

<u>Beweis</u> **100-11** `d)` `VS` gleich $-x=y.$

Aus `VS` gleich "$-x=y$"
folgt: $-(-x)=-y.$

`e)` `VS` gleich $(-x=y)\wedge(x \text{ Zahl}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$-x=y\ldots$"
folgt: $y=-x.$

`2:` Aus `1`"$y=-x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \text{ Zahl}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(-y=x)\wedge(y \text{ Zahl}).$

`3:` Aus `2`"$-y=x\ldots$"
folgt: $x=-y.$

`4:` Aus `3`"$x=-y$" und
aus `2`"$\ldots y \text{ Zahl}$"
folgt: $(x=-y)\wedge(y \text{ Zahl}).$

`f)` `VS` gleich $(-x=y)\wedge(y \text{ Zahl}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$-x=y\ldots$"
folgt: $y=-x.$

`2:` Aus `1`"$y=-x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \text{ Zahl}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(-y=x)\wedge(x \text{ Zahl}).$

`3:` Aus `2`"$-y=x\ldots$"
folgt: $x=-y.$

`4:` Aus `3`"$x=-y$" und
aus `2`"$\ldots x \text{ Zahl}$"
folgt: $(x=-y)\wedge(x \text{ Zahl}).$

<u>Beweis **100-11**</u> `g)` `VS` gleich $(x = -(-y)) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x = -(-y) \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x$ Zahl”
folgt: $-(-y)$ Zahl.

`2:` Aus `1`“$-(-y)$ Zahl”
folgt via **100-6**: y Zahl.

`3:` Aus `2`“y Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`4:` Aus `VS` gleich “$x = -(-y) \ldots$” und
aus `3`“$-(-y) = y$”
folgt: $x = y$.

`5:` Aus `4`“$x = y$” und
aus `2`“y Zahl”
folgt: $(x = y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`h)` `VS` gleich $(x = -(-y)) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x = -(-y) \ldots$” und
aus `1`“$-(-y) = y$”
folgt: $x = y$.

`3:` Aus `2`“$x = y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt: x Zahl.

`4:` Aus `2`“$x = y$” und
aus `3`“x Zahl”
folgt: $(x = y) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`i)` `VS` gleich $x = -(-y)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x = -(-y)$”
folgt via **100-9**: $-x = -(-(-y))$.

`2:` Via **100-4** gilt: $-(-(-y)) = -y$.

`3:` Aus `1`“$-x = -(-(-y))$” und
aus `2`“$-(-(-y)) = -y$”
folgt: $-x = -y$.

Beweis **100-11** `j)` `VS` gleich $(-x = -(-y)) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl"
folgt via **96-11**: $-x$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$-x = -(-y) \ldots$" und
aus `1` "$-x$ Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(-x = y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`3:` Aus `2` "$-x = y \ldots$" und
aus `2` "$\ldots y$ Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $x = -y$.

`4:` Aus `3` "$x = -y$" und
aus `2` "$\ldots y$ Zahl"
folgt: $(x = -y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`k)` `VS` gleich $(-x = -(-y)) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-x = -(-y) \ldots$" und
aus `1` "$-(-y) = y$"
folgt: $-x = y$.

`3:` Aus `2` "$-x = y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(x = -y) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`l)` `VS` gleich $-x = -(-y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x = -(-y)$"
folgt via **100-9**: $-(-x) = -(-(-y))$.

`2:` Via **100-4** gilt: $-(-(-y)) = -y$.

`3:` Aus `1` "$-(-x) = -(-(-y))$" und
aus `2` "$-(-(-y)) = -y$"
folgt: $-(-x) = -y$.

□

100-12. Nun geht es um die Ungleichungen $x \neq -y$, $-x \neq y$, $x \neq -(-y)$, $-x \neq -(-y)$:

100-12(Satz)

a) *Aus "$x \neq -y$" und "x Zahl" folgt "$-x \neq y$".*

b) *Aus "$x \neq -y$" und "y Zahl" folgt "$-x \neq y$".*

c) *Aus "$-x \neq y$" und "x Zahl" folgt "$x \neq -y$".*

d) *Aus "$-x \neq y$" und "y Zahl" folgt "$x \neq -y$".*

e) *Aus "$x \neq -(-y)$" und "x Zahl" folgt "$x \neq y$".*

f) *Aus "$x \neq -(-y)$" und "y Zahl" folgt "$x \neq y$".*

g) *Aus "$-x \neq -(-y)$" folgt "$x \neq -y$".*

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **100-12**</u> `a)`

`1:` Via **100-11** gilt: $((-x = y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = -y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((\neg(x = -y)) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-x = y)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $((x \neq -y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq y).$

`b)`

`1:` Via **100-11** gilt: $((-x = y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = -y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((\neg(x = -y)) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-x = y)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $((x \neq -y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq y).$

`c)`

`1:` Via **100-11** gilt: $((x = -y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x = y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((\neg(-x = y)) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(x = -y)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $((-x \neq y) \wedge (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x \neq -y).$

`d)`

`1:` Via **100-11** gilt: $((x = -y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x = y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((\neg(-x = y)) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(x = -y)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $((-x \neq y) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x \neq -y).$

<u>Beweis **100-12**</u> `e)` `VS` gleich $(x \neq -(-y)) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`1:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl" und aus `1.1.Fall` "$x = y$" folgt: y Zahl.

`3:` Aus `2` "y Zahl" folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x \neq -(-y) \ldots$" und aus `3` "$-(-y) = y$" folgt: $x \neq y$.

`5:` Es gilt `4` "$x \neq y$". Es gilt `1.1.Fall` "$x = y$". Ex falso quodlibet folgt: $x \neq y$.

`1.2.Fall` $x \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

`f)` `VS` gleich $(x \neq -(-y)) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl" folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \neq -(-y) \ldots$" und aus `1` "$-(-y) = y$" folgt: $x \neq y$.

`g)`

`1:` Via **100-11** gilt: $(x = -y) \Rightarrow (-x = -(-y))$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(-x = -(-y))) \Rightarrow (\neg(x = -y))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(-x \neq -(-y)) \Rightarrow (x \neq -y)$.

$\square$

100-13. Da $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \mathsf{i}$ Zahlen sind ergeben sich die nunmehrigen Kriterien ohne allzu viel Mühe aus Bisherigem:

100-13(Satz)

a) *“$x = 0$” genau dann, wenn “$-x = 0$”.*

b) *“$0 \neq x$” genau dann, wenn “$0 \neq -x$”.*

c) *“$x = 1$” genau dann, wenn “$-x = -1$”.*

d) *“$x \neq 1$” genau dann, wenn “$-x \neq -1$”.*

e) *“$x = -1$” genau dann, wenn “$-x = 1$”.*

f) *“$x \neq -1$” genau dann, wenn “$-x \neq 1$”.*

g) *“$x = \mathsf{nan}$” genau dann, wenn “$-x = \mathsf{nan}$”.*

h) *“$x \neq \mathsf{nan}$” genau dann, wenn “$-x \neq \mathsf{nan}$”.*

i) *“$x = +\infty$” genau dann, wenn “$-x = -\infty$”.*

j) *“$x \neq +\infty$” genau dann, wenn “$-x \neq -\infty$”.*

k) *“$x = -\infty$” genau dann, wenn “$-x = +\infty$”.*

l) *“$x \neq -\infty$” genau dann, wenn “$-x \neq +\infty$”.*

m) *“$x = \mathsf{i}$” genau dann, wenn “$-x = -\mathsf{i}$”.*

n) *“$x \neq \mathsf{i}$” genau dann, wenn “$-x \neq -\mathsf{i}$”.*

o) *“$x = -\mathsf{i}$” genau dann, wenn “$-x = \mathsf{i}$”.*

p) *“$x \neq -\mathsf{i}$” genau dann, wenn “$-x \neq \mathsf{i}$”.*

RECH-**Notation**.

Beweis **100-13** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x = 0.$

`1:` $-x \stackrel{\texttt{VS}}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$

`2:` Aus `1`
folgt: $-x = 0.$

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-x = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$-x = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt via **100-11**: $x = -0.$

`2:` Aus `1`"$x = -0$" und
aus **98-15**"$-0 = 0$"
folgt: $x = 0.$

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x = 0) \Leftrightarrow (-x = 0).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \neq 0) \Leftrightarrow (-x \neq 0).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(0 \neq x) \Leftrightarrow (0 \neq -x).$

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x = 1.$

Aus `VS` gleich "$x = 1$"
folgt via **100-9**: $-x = -1.$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-x = -1.$

Aus `VS` gleich "$-x = -1$" und
aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **100-9**: $x = 1.$

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x = 1) \Leftrightarrow (-x = -1).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x = 1)) \Leftrightarrow (\neg(-x = -1)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \neq 1) \Leftrightarrow (-x \neq -1).$

<u>Beweis **100-13**</u> `e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x = -1.$

Aus `VS` gleich "$x = -1$" und
aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **100-11**: $-x = 1.$

`e)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x = 1.$

Aus `VS` gleich "$-x = 1$" und
aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **100-11**: $x = -1.$

`f)`

1: Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $(x = -1) \Leftrightarrow (-x = 1).$

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x = -1)) \Leftrightarrow (\neg(-x = 1)).$

3: Aus 2
folgt: $(x \neq -1) \Leftrightarrow (-x \neq 1).$

`g)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x = \mathsf{nan}.$

1: Aus `VS` gleich "$x = \mathsf{nan}$"
folgt via **100-9**: $-x = -\mathsf{nan}.$

2: Aus 1"$-x = -\mathsf{nan}$" und
aus **AAVI**"$-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $-x = \mathsf{nan}.$

`g)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x = \mathsf{nan}.$

1: Aus `VS` gleich "$-x = \mathsf{nan}$" und
aus **95-5**"nan Zahl"
folgt via **100-9**: $x = -\mathsf{nan}.$

2: Aus 1"$x = -\mathsf{nan}$" und
aus **AAVI**"$-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $x = \mathsf{nan}.$

`h)`

1: Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $(x = \mathsf{nan}) \Leftrightarrow (-x = \mathsf{nan}).$

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x = \mathsf{nan})) \Leftrightarrow (\neg(-x = \mathsf{nan})).$

3: Aus 2
folgt: $(x \neq \mathsf{nan}) \Leftrightarrow (-x \neq \mathsf{nan}).$

Beweis **100-13** `i)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = +\infty$"
folgt via **100-9**: $-x = -(+\infty)$.

`2:` Aus `1`"$-x = -(+\infty)$" und
aus **AAVI**"$-(+\infty) = -\infty$"
folgt: $-x = -\infty$.

`i)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x = -\infty$" und
aus **95-5**"$-\infty$ Zahl"
folgt via **100-11**: $x = -(-\infty)$.

`2:` Aus `1`"$x = -(-\infty)$" und
aus **AAVI**"$-(-\infty) = +\infty$"
folgt: $x = +\infty$.

`j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: $(x = +\infty) \Leftrightarrow (-x = -\infty)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x = +\infty)) \Leftrightarrow (\neg(-x = -\infty))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \neq +\infty) \Leftrightarrow (-x \neq -\infty)$.

`k)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = -\infty$"
folgt via **100-9**: $-x = -(-\infty)$.

`2:` Aus `1`"$-x = -(-\infty)$" und
aus **AAVI**"$-(-\infty) = +\infty$"
folgt: $-x = +\infty$.

`k)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x = +\infty$" und
aus **95-5**"$+\infty$ Zahl"
folgt via **100-11**: $x = -(+\infty)$.

`2:` Aus `1`"$x = -(+\infty)$" und
aus **AAVI**"$-(+\infty) = -\infty$"
folgt: $x = -\infty$.

Beweis **100-13** `l)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `k)` gilt: $(x = -\infty) \Leftrightarrow (-x = +\infty)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x = -\infty)) \Leftrightarrow (\neg(-x = +\infty))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \neq -\infty) \Leftrightarrow (-x \neq +\infty)$.

`m)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x = \mathsf{i}$.

Aus `VS` gleich "$x = \mathsf{i}$"
folgt via **100-9**: $-x = -\mathsf{i}$.

`m)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x = -\mathsf{i}$.

Aus `VS` gleich "$-x = -\mathsf{i}$" und
aus **95-5**"i Zahl"
folgt via **100-9**: $x = \mathsf{i}$.

`n)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `m)` gilt: $(x = \mathsf{i}) \Leftrightarrow (-x = -\mathsf{i})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x = \mathsf{i})) \Leftrightarrow (\neg(-x = -\mathsf{i}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \neq \mathsf{i}) \Leftrightarrow (-x \neq -\mathsf{i})$.

`o)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x = -\mathsf{i}$.

Aus `VS` gleich "$x = -\mathsf{i}$" und
aus **95-5**"i Zahl"
folgt via **100-11**: $-x = \mathsf{i}$.

`o)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x = \mathsf{i}$.

Aus `VS` gleich "$-x = \mathsf{i}$" und
aus **95-5**"i Zahl"
folgt via **100-11**: $x = -\mathsf{i}$.

Beweis **100-13** `p)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `o)` gilt: $(x = -\mathsf{i}) \Leftrightarrow (-x = \mathsf{i})$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(x = -\mathsf{i})) \Leftrightarrow (\neg(-x = \mathsf{i}))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(x \neq -\mathsf{i}) \Leftrightarrow (-x \neq \mathsf{i})$.

□

100-14. Gemäß vorliegenden Satzes gelten auch die “Minus-Versionen” für das Rechnen mit nan:

100-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $p \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{nan} - p = -\mathsf{nan} + p = -\mathsf{nan} - p = \mathsf{nan}$.

b) $p - \mathsf{nan} = -p + \mathsf{nan} = -p - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **100-14**

1.1: Aus →) “$p \in \mathbb{T}$”
folgt via **100-6**: $-p \in \mathbb{T}$.

1.2: Aus →) “$p \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + p = p + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

2.1: Aus 1.1 “$-p \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + (-p) = (-p) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

2.2: Aus 1.2 “$\mathsf{nan} + p = p + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$” und
aus **AAVI** “$-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $-\mathsf{nan} + p = p + (-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

3: Aus 2.1 “$\mathsf{nan} + (-p) = (-p) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$” und
aus **AAVI** “$-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $-\mathsf{nan} + (-p) = (-p) + (-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

4.1: Aus 2.1 “$\mathsf{nan} + (-p) = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $\mathsf{nan} - p = \mathsf{nan}$.

4.2: Aus 2.2 “$-\mathsf{nan} + p = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $-\mathsf{nan} + p = \mathsf{nan}$.

4.3: Aus 3 “$-\mathsf{nan} + (-p) = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $-\mathsf{nan} - p = \mathsf{nan}$.

4.4: Aus 2.2 “$\ldots p + (-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$”
folgt: $p - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

4.5: Aus 2.1 “$\ldots (-p) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $-p + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

4.6: Aus 3 “$\ldots (-p) + (-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$”
folgt: $-p - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

5.a): Aus 4.1,
aus 4.2 und
aus 4.3
folgt: $\mathsf{nan} - p = -\mathsf{nan} + p = -\mathsf{nan} - p = \mathsf{nan}$.

5.b): Aus 4.4,
aus 4.5 und
aus 4.6
folgt: $p - \mathsf{nan} = -p + \mathsf{nan} = -p - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

□

$\cup$SZ: $\cup$Satz Zahlen.
$\cap$SZ: $\cap$Satz Zahlen.
$\vee$SZ: $\vee$Satz Zahlen.
$\wedge$SZ: $\wedge$Satz Zahlen.
$\subseteq$SZ: $\subseteq$Satz Zahlen.
$\in$SZ: $\in$Satz Zahlen.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 28/01/12**

101-1. Wie erwartet gilt $x \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x$ reelle Zahlen sind:

101-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{C}$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" *und* "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **101-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$" und
aus "$\mathbb{C} = \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{x : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$"
folgt: $(\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Re}x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x$ Menge"
folgt via **96-9**: x Zahl.

`3.1:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **95-6**: x Menge.

`3.2:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3.2`"$x \in \mathbb{A}$",
aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`5:` Aus `4`"$(x \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$" und
aus `3.1`"x Menge"
folgt: $x \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\} = \mathbb{C}$"
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

$\square$

101-2. Via Negation folgt aus **101-1** vorliegendes Kriterium für $x \notin \mathbb{C}$:

101-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \notin \mathbb{C}$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **101-2**

`1:` Via **101-1** gilt:
$$x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})).$$

`2:` Aus `1` folgt:
$$(\neg(x \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow (\neg((\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}))).$$

`3:` Aus `2` folgt:
$$(\neg(x \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow ((\neg(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})) \vee (\neg(\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}))).$$

`4:` Aus `3` folgt:
$$x \notin \mathbb{C} \Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R})).$$

$\square$

101-3. Wie erwartet gilt $x \in \mathbb{B}$ genau dann, wenn $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x$ sreelle Zahlen sind:

101-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{B}$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$" *und* "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **101-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$" und
aus "$\mathbb{B} = \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{x : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$"
folgt: $(\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Re}x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x$ Menge"
folgt via **96-9**: x Zahl.

`3.1:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **95-6**: x Menge.

`3.2:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3.2`"$x \in \mathbb{A}$",
aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`5:` Aus `4`"$(x \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$" und
aus `3.1`"x Menge"
folgt: $x \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\} = \mathbb{B}$"
folgt: $x \in \mathbb{B}$.

□

101-4. Via Negation folgt aus **101-3** vorliegendes Kriterium für $x \notin \mathbb{B}$:

101-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \notin \mathbb{B}$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x \notin \mathbb{S}$" *oder* "$\mathsf{Im}x \notin \mathbb{S}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **101-4**

`1:` Via **101-3** gilt:
$$x \in \mathbb{B}$$
$$\Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\neg(x \in \mathbb{B}))$$
$$\Leftrightarrow (\neg((\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(\neg(x \in \mathbb{B}))$$
$$\Leftrightarrow ((\neg(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S})) \vee (\neg(\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}))).$$

`4:` Aus `3`
folgt:
$$x \notin \mathbb{B}$$
$$\Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x \notin \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{S})).$$

$\square$

101-5. Es werden nun einige Elemente von $\mathbb{C}$ und einige Klassen, die *kein* Element von $\mathbb{C}$ sind, angegeben. Hier werden auch einige " TeilKlassen- und Ungleichheits-Aussagen" rund um $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `f) - g) - h) - a) - b) - c) - d) - e) - i) - j) - k) - l)`:

101-5(Satz)

`a)` $0 \in \mathbb{C}$.

`b)` $1 \in \mathbb{C}$.

`c)` $\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$.

`d)` $+\infty \notin \mathbb{C}$.

`e)` $-\infty \notin \mathbb{C}$.

`f)` $\infty \notin \mathbb{C}$.

`g)` $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$.

`h)` "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$" *und* "$\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$".

`i)` "$\mathbb{S} \not\subseteq \mathbb{C}$" *und* "$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{S}$".

`j)` "$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{C}$" *und* "$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{T}$".

`k)` "$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$" *und* "$\mathbb{C} \neq \mathbb{B}$".

`l)` "$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$" *und* "$\mathbb{C} \neq \mathbb{A}$".

Beweis **101-5**

`REIM`-**Notation**.

`f)`

Aus **AAI**"$\infty \notin \mathbb{A}$" und
aus **96-6**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\infty \notin \mathbb{C}$.

Beweis **101-5** g)

`1.1:` Aus **AAIII**“$\mathsf{Re}\,\mathsf{i} = 0$” und
aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$
folgt: $\mathsf{Re}\,\mathsf{i} \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus **AAIII**“$\mathsf{Im}\,\mathsf{i} = 1$” und
aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Im}\,\mathsf{i} \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}\,\mathsf{i} \in \mathbb{R}$” und
aus `1.2`“$\mathsf{Im}\,\mathsf{i} \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$.

Beweis **101-5** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-16**: $\alpha \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(\alpha = \mathsf{Re}\alpha) \wedge (\mathsf{Im}\alpha = 0)$.

`4.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$\alpha = \mathsf{Re}\alpha \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \mathsf{Im}\alpha = 0$" und
aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.1`"$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}$" und
aus `4.2`"$\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{C})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$.

`2:` Via **AAI** gilt: $\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$.

`3:` Aus `1.2`"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$" und
aus `2`"$\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\mathbb{R} \neq \mathbb{C}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$"
folgt: $(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}) \wedge (\mathbb{R} \neq \mathbb{C})$.

<u>Beweis **101-5**</u> `ab)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

`2.a):` Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **0-4**: $0 \in \mathbb{C}$.

`2.b):` Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **0-4**: $1 \in \mathbb{C}$.

`c)`

`1:` Aus **99-15**"$\mathsf{Re}\,\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und
aus **AAI**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}\,\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}\,\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$"
folgt via **101-2**: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$.

`d)`

`1:` Aus **99-15**"$\mathsf{Re}(+\infty) = +\infty$" und
aus **AAI**"$+\infty \notin \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}(+\infty) \notin \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}(+\infty) \notin \mathbb{R}$"
folgt via **101-2**: $+\infty \notin \mathbb{C}$.

`e)`

`1:` Aus **99-15**"$\mathsf{Re}(-\infty) = -\infty$" und
aus **AAI**"$-\infty \notin \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}(-\infty) \notin \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}(-\infty) \notin \mathbb{R}$"
folgt via **101-2**: $-\infty \notin \mathbb{C}$.

Beweis **101-5** `i)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $+\infty \notin \mathbb{C}$.

`2:` Aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `1.1`"$+\infty \notin \mathbb{C}$"
folgt via **0-5**: `A1` | "$\mathbb{S} \not\subseteq \mathbb{C}$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$" und
aus **99-9**"$\mathsf{i} \notin \mathbb{S}$"
folgt via **0-5**: `A2` | "$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{S}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{S} \not\subseteq \mathbb{C}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $(\mathbb{S} \not\subseteq \mathbb{C}) \wedge (\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{S})$.

`j)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `1.1`"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$"
folgt via **0-5**: `A1` | "$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{C}$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$" und
aus **99-9**"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$"
folgt via **0-5**: `A2` | "$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{T}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{C}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{T}$"
folgt: $(\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{C}) \wedge (\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{T})$.

<u>Beweis</u> **101-5** `k)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus 2"$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **95-15**: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus 2"$\ldots \mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-15**: $\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{S}$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $\alpha \in \mathbb{B}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{B})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $+\infty \notin \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus **99-15**"$\mathsf{Re}(+\infty) = +\infty$" und
aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Re}(+\infty) \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus **99-15**"$\mathsf{Im}(+\infty) = 0$" und
aus **95-11**"$0 \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Im}(+\infty) \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}(+\infty) \in \mathbb{S}$" und
aus `2.2`"$\mathsf{Im}(+\infty) \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $+\infty \in \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`"$+\infty \in \mathbb{B}$" und
aus `1.2`"$+\infty \notin \mathbb{C}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{B} \neq \mathbb{C}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\mathbb{C} \neq \mathbb{B}$.

`6:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$" und
aus `5`"$\mathbb{C} \neq \mathbb{B}$"
folgt: $(\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{C} \neq \mathbb{B})$.

<u>Beweis **101-5** `l)`</u>

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$.

`2:` Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$" und
aus `1`"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathbb{C} \neq \mathbb{A}$.

`4:` Aus **96-6**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus `3`"$\mathbb{C} \neq \mathbb{A}$"
folgt: $(\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}) \wedge (\mathbb{C} \neq \mathbb{A})$.

$\square$

101-6. Nun wird Einiges über komplexe Zahlen und über $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ ausgesagt:

101-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \neq \mathsf{nan}$.

b) $x \neq +\infty$.

c) $x \neq -\infty$.

d) $x \neq \infty$.

e) $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan}$.

f) $\mathsf{Re}x \neq +\infty$.

g) $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

h) $\mathsf{Re}x \neq \infty$.

i) $\mathsf{Im}x \neq \mathsf{nan}$.

j) $\mathsf{Im}x \neq +\infty$.

k) $\mathsf{Im}x \neq -\infty$.

l) $\mathsf{Im}x \neq \infty$.

REIM-**Notation**.

Beweis **101-6** `abcd)`

`1:` Via **101-5** gilt: $(\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}) \wedge (+\infty \notin \mathbb{C}) \wedge (-\infty \notin \mathbb{C}) \wedge (\infty \notin \mathbb{C})$.

`2.a):` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$” und
aus 1 “$\mathsf{nan} \notin \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **0-1**: $x \neq \mathsf{nan}$.

`2.b):` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$” und
aus 1 “$\ldots + \infty \notin \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **0-1**: $x \neq +\infty$.

`2.c):` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$” und
aus 1 “$\ldots - \infty \notin \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **0-1**: $x \neq -\infty$.

`2.d):` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$” und
aus 1 “$\ldots \infty \notin \mathbb{C}$”
folgt via **0-1**: $x \neq \infty$.

`efgh)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re} x \in \mathbb{R}$.

`2:` Via **AAI** gilt: $(\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}) \wedge (+\infty \notin \mathbb{R}) \wedge (-\infty \notin \mathbb{R}) \wedge (\infty \notin \mathbb{R})$.

`3.e):` Aus →) “$\mathsf{Re} x \in \mathbb{R}$” und
aus 2 “$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Re} x \neq \mathsf{nan}$.

`3.f):` Aus →) “$\mathsf{Re} x \in \mathbb{R}$” und
aus 2 “$\ldots + \infty \notin \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Re} x \neq +\infty$.

`3.g):` Aus →) “$\mathsf{Re} x \in \mathbb{R}$” und
aus 2 “$\ldots - \infty \notin \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Re} x \neq -\infty$.

`3.h):` Aus →) “$\mathsf{Re} x \in \mathbb{R}$” und
aus 2 “$\ldots \infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Re} x \neq \infty$.

<u>Beweis **101-6**</u> `ijkl)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`2:` Via **AAI** gilt: $(\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}) \wedge (+\infty \notin \mathbb{R}) \wedge (-\infty \notin \mathbb{R}) \wedge (\infty \notin \mathbb{R})$.

`3.i):` Aus →) "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus 2"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **0-1**: $\mathsf{Im}x \neq \mathsf{nan}$.

`3.j):` Aus →) "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus 2"$\ldots + \infty \notin \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **0-1**: $\mathsf{Im}x \neq +\infty$.

`3.k):` Aus →) "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus 2"$\ldots - \infty \notin \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **0-1**: $\mathsf{Im}x \neq -\infty$.

`3.l):` Aus →) "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus 2"$\ldots \infty \notin \mathbb{R}$"
folgt via **0-1**: $\mathsf{Im}x \neq \infty$.

□

101-7. Es werden nun einige Elemente von $\mathbb{B}$ und einige Klassen, die *kein* Element von $\mathbb{B}$ sind, angegeben. Hier werden auch einige "TeilKlassen- und Ungleichheits-Aussagen" rund um $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `f) - c) - g) - h) - i) - a) - b) - d) - e) - j) - k) - l)`:

101-7(Satz)

a) $0 \in \mathbb{B}$.

b) $1 \in \mathbb{B}$.

c) $\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$.

d) $+\infty \in \mathbb{B}$.

e) $-\infty \in \mathbb{B}$.

f) $\infty \notin \mathbb{B}$.

g) $\mathsf{i} \in \mathbb{B}$.

h) "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$" *und* "$\mathbb{R} \neq \mathbb{B}$".

i) "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$" *und* "$\mathbb{S} \neq \mathbb{B}$".

j) "$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{B}$" *und* "$\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{T}$".

k) "$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$" *und* "$\mathbb{C} \neq \mathbb{B}$".

l) "$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$" *und* "$\mathbb{B} \neq \mathbb{A}$".

Beweis **101-7**

`REIM`-**Notation**.

---

f)

Aus **AAI**"$\infty \notin \mathbb{A}$" und
aus **96-6**"$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\infty \notin \mathbb{B}$.

Beweis **101-7** c)

1: Aus **99-15**"$\mathsf{Renan} = \mathsf{nan}$" und
aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Renan} \notin \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$\mathsf{Renan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via **101-4**: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$.

g)

Aus **101-5**"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$" und
aus **101-5**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $\mathsf{i} \in \mathbb{B}$.

h)

1.1: Aus **101-5**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$" und
aus **101-5**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$.

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{B}$.

2: Aus 1.2"$\mathsf{i} \in \mathbb{B}$" und
aus **AAI**"$\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{B} \neq \mathbb{R}$.

3: Aus 2
folgt: $\mathbb{R} \neq \mathbb{B}$.

4: Aus 1.1"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$" und
aus 3"$\mathbb{R} \neq \mathbb{B}$"
folgt: $(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{R} \neq \mathbb{B})$.

Beweis **101-7** `i)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-16**: $\alpha \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2` "$\alpha \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(\alpha = \mathsf{Re}\alpha) \wedge (\mathsf{Im}\alpha = 0)$.

`4.1:` Aus `3` "$\alpha = \mathsf{Re}\alpha \ldots$" und
aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \mathsf{Im}\alpha = 0$" und
aus **95-11** "$0 \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.1` "$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{S}$" und
aus `4.2` "$\mathsf{Im}\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $\alpha \in \mathbb{B}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{B})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}\text{"}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1.2` "$\mathsf{i} \in \mathbb{B}$" und
aus **99-9** "$\mathsf{i} \notin \mathbb{S}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{B} \neq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\mathbb{S} \neq \mathbb{B}\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{S} \neq \mathbb{B}$"
folgt: $(\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{S} \neq \mathbb{B})$.

Beweis **101-7** `ab)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$.

`2.a):` Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $0 \in \mathbb{B}$.

`2.b):` Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $1 \in \mathbb{B}$.

`de)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$.

`2.d):` Aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `1`"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{B}$.

`2.e):` Aus **95-11**"$-\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `1`"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $-\infty \in \mathbb{B}$.

`j)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `1.1`"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$"
folgt via **0-5**: `A1` | "$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{B}$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{i} \in \mathbb{B}$" und
aus **99-9**"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$"
folgt via **0-5**: `A2` | "$\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{T}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{B}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{T}$"
folgt: $(\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{T})$.

Beweis **101-7**

`k)`

Via **101-5** gilt: $(\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{C} \neq \mathbb{B})$.

`l)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$.

`2:` Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$" und
aus `1`"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathbb{B} \neq \mathbb{A}$.

`4:` Aus **96-6**"$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus `3`"$\mathbb{B} \neq \mathbb{A}$"
folgt: $(\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}) \wedge (\mathbb{B} \neq \mathbb{A})$.

$\square$

101-8. Nun wird Einiges über bkomplexe Zahlen und über $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ ausgesagt:

101-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{B}$.

Dann folgt:

a) $x \neq \mathsf{nan}$.

b) $x \neq \infty$.

c) $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan}$.

d) $\mathsf{Re}x \neq \infty$.

e) $\mathsf{Im}x \neq \mathsf{nan}$.

f) $\mathsf{Im}x \neq \infty$.

`REIM`-**Notation**.

<u>Beweis **101-8**</u> `ab)`

`1:` Via **101-7** gilt: $(\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}) \wedge (\infty \notin \mathbb{B})$.

`2.a):` Aus →) “$x \in \mathbb{B}$” und
aus `1`“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{B} \ldots$”
folgt via **0-1**: $x \neq \mathsf{nan}$.

`2.b):` Aus →) “$x \in \mathbb{B}$” und
aus `1`“$\ldots \infty \notin \mathbb{B}$”
folgt via **0-1**: $x \neq \infty$.

`cd)`

`1:` Via **95-11** gilt: $(\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}) \wedge (\infty \notin \mathbb{S})$.

`2:` Aus →) “$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`3.c):` Aus `2`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$” und
aus `1`“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan}$.

`3.d):` Aus `2`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$” und
aus `1`“$\ldots \infty \notin \mathbb{S}$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Re}x \neq \infty$.

`ef)`

`1:` Via **95-11** gilt: $(\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}) \wedge (\infty \notin \mathbb{S})$.

`2:` Aus →) “$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`3.c):` Aus `2`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$” und
aus `1`“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Im}x \neq \mathsf{nan}$.

`3.d):` Aus `2`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$” und
aus `1`“$\ldots \infty \notin \mathbb{S}$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{Im}x \neq \infty$.

□

101-9. Es gilt $p \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $-p \in \mathbb{C}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(-p) \in \mathbb{C}$. Analoges gilt für $\mathbb{B}$ an Stelle von $\mathbb{C}$:

101-9(Satz)

a) $(p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (-(-p) \in \mathbb{C})$.

b) $(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow (-(-p) \in \mathbb{B})$.

RECH-**Notation**.

Beweis **101-9**

REIM.-**Notation**

---

a) $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich $p \in \mathbb{C}$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}p \in \mathbb{R})$.

2.1: Aus 1"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}$.

2.2: Aus 1"$\ldots \mathsf{Im}p \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Im}p \in \mathbb{R}$.

3: Via **96-27** gilt: $(\mathsf{Re}(-p) = -\mathsf{Re}p) \wedge (\mathsf{Im}(-p) = -\mathsf{Im}p)$.

4.1: Aus 3"$\mathsf{Re}(-p) = -\mathsf{Re}p \ldots$" und
aus 2.1"$-\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{R}$.

4.2: Aus 3"$\ldots \mathsf{Im}(-p) = -\mathsf{Im}p$" und
aus 2.2"$-\mathsf{Im}p \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{R}$.

5: Aus 4.1"$\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{R}$" und
aus 4.2"$\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $-p \in \mathbb{C}$.

Beweis **101-9** a) $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $-p \in \mathbb{C}$.

1: Aus VS gleich "$-p \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{R})$.

2.1: Aus 1"$\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{R}$.

2.2: Aus 1"$\ldots \mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{R}$.

3: Via **96-27** gilt: $(\mathsf{Re}(-(-p)) = -\mathsf{Re}(-p)) \wedge (\mathsf{Im}(-(-p)) = -\mathsf{Im}(-p))$.

4.1: Aus 3"$\mathsf{Re}(-(-p)) = -\mathsf{Re}(-p) \ldots$" und
aus 2.1"$-\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}(-(-p)) \in \mathbb{R}$.

4.2: Aus 3"$\ldots \mathsf{Im}(-(-p)) = -\mathsf{Im}(-p)$" und
aus 2.2"$-\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Im}(-(-p)) \in \mathbb{R}$.

5: Aus 4.1"$\mathsf{Re}(-(-p)) \in \mathbb{R}$" und
aus 4.2"$\mathsf{Im}(-(-p)) \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $-(-p) \in \mathbb{C}$.

a) $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $-(-p) \in \mathbb{C}$.

1: Aus VS gleich "$-(-p) \in \mathbb{C}$"
folgt via **99-1**: $-(-p)$ Zahl.

2: Aus 1"$-(-p)$ Zahl"
folgt via **100-6**: p Zahl.

3: Aus 2"p Zahl"
folgt via **FS−−**: $-(-p) = p$.

4: Aus VS gleich "$-(-p) \in \mathbb{C}$" und
aus 3"$-(-p) = p$"
folgt: $p \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **101-9**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}p \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1`"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$.

`3:` Via **96-27** gilt: $(\mathsf{Re}(-p) = -\mathsf{Re}p) \wedge (\mathsf{Im}(-p) = -\mathsf{Im}p)$.

`4.1:` Aus `3`"$\mathsf{Re}(-p) = -\mathsf{Re}p \ldots$" und
aus `2.1`"$-\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \mathsf{Im}(-p) = -\mathsf{Im}p$" und
aus `2.2`"$-\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.1`"$\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{S}$" und
aus `4.2`"$\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $-p \in \mathbb{B}$.

Beweis **101-9** `b)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-p \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-p \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1`"$\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{S}$.

`3:` Via **96-27** gilt: $(\mathsf{Re}(-(-p)) = -\mathsf{Re}(-p)) \wedge (\mathsf{Im}(-(-p)) = -\mathsf{Im}(-p))$.

`4.1:` Aus `3`"$\mathsf{Re}(-(-p)) = -\mathsf{Re}(-p) \ldots$" und
aus `2.1`"$-\mathsf{Re}(-p) \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Re}(-(-p)) \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \mathsf{Im}(-(-p)) = -\mathsf{Im}(-p)$" und
aus `2.2`"$-\mathsf{Im}(-p) \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Im}(-(-p)) \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.1`"$\mathsf{Re}(-(-p)) \in \mathbb{S}$" und
aus `4.2`"$\mathsf{Im}(-(-p)) \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $-(-p) \in \mathbb{B}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p) \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{B}$"
folgt via **99-1**: $-(-p)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$-(-p)$ Zahl"
folgt via **100-6**: p Zahl.

`3:` Aus `2`"p Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-p) = p$.

`4:` Aus `VS` gleich "$-(-p) \in \mathbb{B}$" und
aus `3`"$-(-p) = p$"
folgt: $p \in \mathbb{B}$.

$\square$

101-10. Im $\cup$**Satz Zahlen** werden die binären Vereinigungen von $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ beschrieben:

101-10(Satz) (**$\cup$SZ: $\cup$Satz Zahlen**)

a) $\mathbb{R} \cup \mathbb{S} = \mathbb{S}$.

b) $\mathbb{R} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}$.

c) $\mathbb{R} \cup \mathbb{C} = \mathbb{C}$.

d) $\mathbb{R} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

e) $\mathbb{R} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

f) $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}$.

g) $\mathbb{S} \cup \mathbb{C} = \mathbb{S} \cup \mathbb{C}$.

h) $\mathbb{S} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

i) $\mathbb{S} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

j) $\mathbb{T} \cup \mathbb{C} = \mathbb{T} \cup \mathbb{C}$.

k) $\mathbb{T} \cup \mathbb{B} = \mathbb{T} \cup \mathbb{B}$.

l) $\mathbb{T} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

m) $\mathbb{C} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

n) $\mathbb{C} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

o) $\mathbb{B} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Beweis **101-10** a)

Aus **95-11** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cup \mathbb{S} = \mathbb{S}$.

b)

Aus **95-12** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}$.

c)

Aus **101-5** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cup \mathbb{C} = \mathbb{C}$.

<u>Beweis **101-10**</u> `d)`

Aus **101-7**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

`e)`

Aus **AAI**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

`f)`

Aus **95-12**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}$.

`g)`

Es gilt: $\mathbb{S} \cup \mathbb{C} = \mathbb{S} \cup \mathbb{C}$.

`h)`

Aus **101-7**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{S} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

`i)`

Aus **95-11**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{S} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

`j)`

Es gilt: $\mathbb{T} \cup \mathbb{C} = \mathbb{T} \cup \mathbb{C}$.

`k)`

Es gilt: $\mathbb{T} \cup \mathbb{B} = \mathbb{T} \cup \mathbb{B}$.

`l)`

Aus **95-12**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{T} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

`m)`

Aus **101-5**“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{C} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

`n)`

Aus **96-6**“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{C} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

<u>Beweis **101-10** `o)`</u>

Aus **96-6**"$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{B} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

$\square$

101-11. Im $\cap$**Satz Zahlen** werden die binären Durchschnitte von $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ beschrieben:

101-11(Satz) (**$\cap$SZ: $\cap$Satz Zahlen**)

a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{S} = \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{T} = \mathbb{R}$.

c) $\mathbb{R} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

d) $\mathbb{R} \cap \mathbb{B} = \mathbb{R}$.

e) $\mathbb{R} \cap \mathbb{A} = \mathbb{R}$.

f) $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbb{S}$.

g) $\mathbb{S} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

h) $\mathbb{S} \cap \mathbb{B} = \mathbb{S}$.

i) $\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \mathbb{S}$.

j) $\mathbb{T} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

k) $\mathbb{T} \cap \mathbb{B} = \mathbb{S}$.

l) $\mathbb{T} \cap \mathbb{A} = \mathbb{T}$.

m) $\mathbb{C} \cap \mathbb{B} = \mathbb{C}$.

n) $\mathbb{C} \cap \mathbb{A} = \mathbb{C}$.

o) $\mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \mathbb{B}$.

Beweis **101-11**

`REIM`-**Notation**.

`a)`

Aus **95-11**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cap \mathbb{S} = \mathbb{R}$.

`b)`

Aus **95-12**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cap \mathbb{T} = \mathbb{R}$.

`c)`

Aus **101-5**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

`d)`

Aus **101-7**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cap \mathbb{B} = \mathbb{R}$.

`e)`

Aus **AAI**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{R} \cap \mathbb{A} = \mathbb{R}$.

`f)`

Aus **95-12**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbb{S}$.

<u>Beweis **101-11**</u> `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{S} \cap \mathbb{C}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{S} \cap \mathbb{C}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha \in \mathbb{C})$.

`3.1:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus **95-12**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\alpha = \mathsf{Re}\alpha$.

`5:` Aus `4`"$\alpha = \mathsf{Re}\alpha$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S} \cap \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathbb{S} \cap \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}\text{”}}$

`1.2:` Aus **95-11**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **101-5**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **2-12**: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S} \cap \mathbb{C}$.

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{S} \cap \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S} \cap \mathbb{C}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbb{S} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

`h)`

Aus **101-7**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{S} \cap \mathbb{B} = \mathbb{S}$.

`i)`

Aus **95-11**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \mathbb{S}$.

<u>Beweis **101-11**</u> `j)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{T} \cap \mathbb{C}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{T} \cap \mathbb{C}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha \in \mathbb{C})$.

`3.1:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\alpha = \mathsf{Re}\alpha$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha = \mathsf{Re}\alpha$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T} \cap \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathbb{T} \cap \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$"

`1.2:` Aus **95-12**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$" und
aus **101-5**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **2-12**: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T} \cap \mathbb{C}$.

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{T} \cap \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T} \cap \mathbb{C}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbb{T} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

Beweis **101-11** `k)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{T} \cap \mathbb{B}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{T} \cap \mathbb{B}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha \in \mathbb{B})$.

`3.1:` Aus 2"$\alpha \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\alpha = \mathsf{Re}\alpha$.

`3.2:` Aus 2"$\ldots \alpha \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha = \mathsf{Re}\alpha$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{S}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T} \cap \mathbb{B}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{S})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathbb{T} \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{S}$"

`1.2:` Aus **95-12**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$" und
aus **101-7**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **2-12**: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T} \cap \mathbb{B}$.

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{T} \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `1.2`"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T} \cap \mathbb{B}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbb{T} \cap \mathbb{B} = \mathbb{S}$.

`l)`

Aus **95-12**"$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{T} \cap \mathbb{A} = \mathbb{T}$.

`m)`

Aus **101-5**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{C} \cap \mathbb{B} = \mathbb{C}$.

`n)`

Aus **96-6**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{C} \cap \mathbb{A} = \mathbb{C}$.

Beweis **101-11** `o)`

Aus **96-6**"$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \mathbb{B}$.

$\square$

101-12. Im $\vee$**Satz Zahlen** werden die im $\cup$**SZ** getroffenen Aussagen über die binären Vereinigungen von $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ in "oder-Aussagen" übersetzt:

101-12(Satz) ($\vee$**SZ:** $\vee$**Satz Zahlen**)

a) *"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{S})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{S}$".*

b) *"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{T})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{T}$".*

c) *"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{C})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{C}$".*

d) *"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{B}$".*

e) *"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "p Zahl".*

f) *"$(p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{T})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{T}$".*

g) *"$(p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{C})$" genau dann, wenn "$(p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{C})$".*

h) *"$(p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{B}$".*

i) *"$(p \in \mathbb{S}) \vee (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "p Zahl".*

j) *"$(p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{C})$" genau dann, wenn "$(p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{C})$".*

k) *"$(p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$(p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{B})$".*

l) *"$(p \in \mathbb{T}) \vee (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "p Zahl".*

m) *"$(p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{B}$".*

n) *"$(p \in \mathbb{C}) \vee (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "p Zahl".*

o) *"$(p \in \mathbb{B}) \vee (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "p Zahl".*

Beweis **101-12** a)

1: Via **2-2** gilt: $$(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{S})).$$

2: Aus 1 und aus **101-10**"$\mathbb{R} \cup \mathbb{S} = \mathbb{S}$" folgt: $$(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{S})).$$

3: Aus 2 folgt: $$((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{S})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S}).$$

<u>Beweis</u> **101-12** b)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{T}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-10**"$\mathbb{R} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}$"
folgt: $(p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{T}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{T})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{T})$.

c)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{C}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-10**"$\mathbb{R} \cup \mathbb{C} = \mathbb{C}$"
folgt: $(p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{C}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{C})$.

d)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-10**"$\mathbb{R} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$"
folgt: $(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B})$.

e)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-10**"$\mathbb{R} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$"
folgt: $(p \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

4: Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

5: Aus 3"$((p \in \mathbb{R}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$" und
aus 4"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \vee (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \text{ Zahl})$.

<u>Beweis **101-12**</u> `f)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cup \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{T}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**“$\mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}$”
folgt: $(p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{T}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{T})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{T})$.

`g)`

Es gilt: $((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{C}))$.

`h)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cup \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**“$\mathbb{S} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$”
folgt: $(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B})$.

`i)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cup \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**“$\mathbb{S} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$”
folgt: $(p \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`“$((p \in \mathbb{S}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$” und
aus `4`“$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$”
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \vee (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \text{ Zahl})$.

`j)`

Es gilt: $((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{C}))$.

`k)`

Es gilt: $((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

<u>Beweis **101-12**</u> `l)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{T} \cup \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**"$\mathbb{T} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$"
folgt: $(p \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`"$((p \in \mathbb{T}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$" und
aus `4`"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{T}) \vee (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \text{ Zahl})$.

`m)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{C} \cup \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**"$\mathbb{C} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$"
folgt: $(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{B}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B})$.

`n)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{C} \cup \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**"$\mathbb{C} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$"
folgt: $(p \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`"$((p \in \mathbb{C}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$" und
aus `4`"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{C}) \vee (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \text{ Zahl})$.

<u>Beweis **101-12** `o)`</u>

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{B} \cup \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-10**“$\mathbb{B} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$”
folgt: $(p \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`“$((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$” und
aus `4`“$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$”
folgt: $((p \in \mathbb{B}) \vee (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \text{ Zahl})$.

□

101-13. Im $\wedge$**Satz Zahlen** werden die im $\cap$**SZ** getroffenen Aussagen über die binären Durchschnitte von $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ in "und-Aussagen" übersetzt:

101-13(Satz) (**$\wedge$SZ: $\wedge$Satz Zahlen**)

a) *"$(p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{S})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

b) *"$(p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{T})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

c) *"$(p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{C})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

d) *"$(p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

e) *"$(p \in \mathbb{R}) \wedge (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

f) *"$(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{T})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{S}$".*

g) *"$(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{C})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

h) *"$(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{S}$".*

i) *"$(p \in \mathbb{S}) \wedge (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{S}$".*

j) *"$(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{C})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{R}$".*

k) *"$(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{S}$".*

l) *"$(p \in \mathbb{T}) \wedge (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{T}$".*

m) *"$(p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{B})$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{C}$".*

n) *"$(p \in \mathbb{C}) \wedge (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{C}$".*

o) *"$(p \in \mathbb{B}) \wedge (p$ Zahl$)$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{B}$".*

Beweis **101-13** a)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cap \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{S}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-12**"$\mathbb{R} \cap \mathbb{S} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{S}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{S})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

Beweis **101-13** b)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cap \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{T}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-12**"$\mathbb{R} \cap \mathbb{T} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{T}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{T})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

c)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cap \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{C}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-12**"$\mathbb{R} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{C}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

d)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cap \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-12**"$\mathbb{R} \cap \mathbb{B} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

e)

1: Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{R} \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

2: Aus 1 und
aus **101-12**"$\mathbb{R} \cap \mathbb{A} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

3: Aus 2
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

4: Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

5: Aus 3"$((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$" und
aus 4"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{R}) \wedge (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis</u> **101-13** `f)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{T}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbb{S}$"
folgt: $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{T}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{T})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

`g)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cap \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{S} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

`h)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cap \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{S} \cap \mathbb{B} = \mathbb{S}$"
folgt: $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

`i)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{S} \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \mathbb{S}$"
folgt: $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`"$((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$" und
aus `4`"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

Beweis **101-13** `j)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{T} \cap \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{T} \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

`k)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{T} \cap \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{T} \cap \mathbb{B} = \mathbb{S}$"
folgt: $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

`l)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{T} \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{T} \cap \mathbb{A} = \mathbb{T}$"
folgt: $(p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{T})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`"$((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{T})$" und
aus `4`"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{T})$.

`m)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{C} \cap \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{C} \cap \mathbb{B} = \mathbb{C}$"
folgt: $(p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{B}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{C})$.

<u>Beweis **101-13**</u> `n)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{C} \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{C} \cap \mathbb{A} = \mathbb{C}$"
folgt: $(p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{C})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`"$((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{C})$" und
aus `4`"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{C}) \wedge (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{C})$.

`o)`

`1:` Via **2-2** gilt: $(p \in \mathbb{B} \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{B}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **101-12**"$\mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \mathbb{B}$"
folgt: $(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{B}) \wedge (p \in \mathbb{A}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p \in \mathbb{B}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B})$.

`4:` Via **95-4(Def)** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `3`"$((p \in \mathbb{B}) \wedge (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B})$" und
aus `4`"$(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})$"
folgt: $((p \in \mathbb{B}) \wedge (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B})$.

□

101-14. Um etwa “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$” nachzuweisen reicht es, sich von “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$” zu überzeugen:

101-14(Satz)

a) *Aus* “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$” *folgt* “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$”.

b) *Aus* “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$” *folgt* “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$”.

c) *Aus* “$\mathsf{Re}x$ *Zahl*” *folgt* “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”.

d) *Aus* “$\mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$” *folgt* “$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$”.

e) *Aus* “$\mathsf{Im}x \in \mathbb{B}$” *folgt* “$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”.

f) *Aus* “$\mathsf{Im}x$ *Zahl*” *folgt* “$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”.

`REIM`-**Notation**.

Beweis **101-14** a) VS gleich $\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$.

1: Aus VS gleich “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Re}x$ Menge.

2: Aus 1“$\mathsf{Re}x$ Menge”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus VS gleich “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

b) VS gleich $\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$.

1: Aus VS gleich “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Re}x$ Menge.

2: Aus 1“$\mathsf{Re}x$ Menge”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus VS gleich “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

<u>Beweis **101-14**</u> `c)` `VS` gleich $\mathsf{Re}x$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`d)` `VS` gleich $\mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Im}x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x$ Menge"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`e)` `VS` gleich $\mathsf{Im}x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{B}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Im}x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x$ Menge"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{B}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`f)` `VS` gleich $\mathsf{Im}x$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

$\square$

101-15. Nun wird ein Kriterium für "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$" etabliert:

101-15(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

ii) "$(\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})$" *oder* "$(\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})$"
oder "$(\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)$"
oder "$(\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)$".

REIM-**Notation**.

Beweis **101-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $(p \in \mathbb{B}) \wedge (p \notin \mathbb{C})$.

2: Aus 1"$p \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}p \in \mathbb{S})$.

3.1: Aus 2"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-20**: $\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 2"$\ldots \mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}$.

...

Beweis **101-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

...

`4:` Aus `1`"$\ldots p \notin \mathbb{C}$"
folgt via **101-2**: $(\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$.

`5:` Aus `2`"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}p = +\infty) \vee (\mathsf{Re}p = -\infty)$.

`6:` Aus `4.1.Fall`"$\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$" und
aus `5`"$(\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}p = +\infty) \vee (\mathsf{Re}p = -\infty)$"
folgt: $(\mathsf{Re}p = +\infty) \vee (\mathsf{Re}p = -\infty)$.

`7:` Aus `6`"$(\mathsf{Re}p = +\infty) \vee (\mathsf{Re}p = -\infty)$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}$"
folgt:
$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})).$$

`8:` Aus `7`
folgt:
$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

`4.2.Fall` $\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Im}p \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}p = +\infty) \vee (\mathsf{Im}p = -\infty)$.

`6:` Aus `4.2.Fall`"$\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R}$" und
aus `5`"$(\mathsf{Im}p \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}p = +\infty) \vee (\mathsf{Im}p = -\infty)$"
folgt: $(\mathsf{Im}p = +\infty) \vee (\mathsf{Im}p = -\infty)$.

`7:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}$" und
aus `6`"$(\mathsf{Im}p = +\infty) \vee (\mathsf{Im}p = -\infty)$"
folgt:
$$((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

`8:` Aus `7`
folgt:
$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

Beweis **101-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich
$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

`1:` Nach `VS` gilt:
$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Re}p = +\infty \ldots$”
folgt via **95-15**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-16**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}$”
folgt via **95-20**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `2`“$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$” und
aus `5`“$\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$”
folgt via **101-3**: $p \in \mathbb{B}$.

`7:` Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Re}p = +\infty \ldots$”
folgt via **95-18**: $\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7`“$\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$”
folgt via **101-2**: $p \notin \mathbb{C}$.

`9:` Aus `6`“$p \in \mathbb{B}$” und
aus `8`“$p \notin \mathbb{C}$”
folgt via **5-3**: $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **101-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$ $$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{Re}p = -\infty \ldots$"
folgt via **95-15**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-16**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}$"
folgt via **95-20**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `2`"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$" und
aus `5`"$\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $p \in \mathbb{B}$.

`7:` Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{Re}p = -\infty \ldots$"
folgt via **95-18**: $\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7`"$\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$"
folgt via **101-2**: $p \notin \mathbb{C}$.

`9:` Aus `6`"$p \in \mathbb{B}$" und
aus `8`"$p \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

...

Beweis **101-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich

$$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty).$

`2:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}p = +\infty$”
folgt via **95-15**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}.$

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-16**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}.$

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}.$

`5:` Aus `4`“$\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$” und
aus `1.3.Fall`“$\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan} \ldots$”
folgt via **95-20**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}.$

`6:` Aus `5`“$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$” und
aus `2`“$\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$”
folgt via **101-3**: $p \in \mathbb{B}.$

`7:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}p = +\infty$”
folgt via **95-18**: $\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R}.$

`8:` Aus `7`“$\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R}$”
folgt via **101-2**: $p \notin \mathbb{C}.$

`9:` Aus `6`“$p \in \mathbb{B}$” und
aus `8`“$p \notin \mathbb{C}$”
folgt via **5-3**: $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}.$

...

Beweis **101-15** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $$((\mathsf{Re}p = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan})) \vee ((\mathsf{Re}p = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}p \neq \mathsf{nan}))$$ $$\vee((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = +\infty)) \vee ((\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}p = -\infty)$.

2: Aus `1.4.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}p = -\infty$"
folgt via **95-15**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-16**: $\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$.

4: Aus 3"$\mathsf{Im}p \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$.

5: Aus 4"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{T}$" und
aus `1.4.Fall`"$\mathsf{Re}p \neq \mathsf{nan} \ldots$"
folgt via **95-20**: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$.

6: Aus 5"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{S}$" und
aus 2"$\mathsf{Im}p \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $p \in \mathbb{B}$.

7: Aus `1.4.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}p = -\infty$"
folgt via **95-18**: $\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R}$.

8: Aus 7"$\mathsf{Im}p \notin \mathbb{R}$"
folgt via **101-2**: $p \notin \mathbb{C}$.

9: Aus 6"$p \in \mathbb{B}$" und
aus 8"$p \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

□

101-16. Auch um späters Zitieren zu vereinfachen werden nun die Inklusions-Aussagen über $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ im $\subseteq$**Satz Zahlen** zusammengefasst:

101-16(Satz) (**$\subseteq$SZ: $\subseteq$Satz Zahlen**)

a) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$.

b) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$.

c) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

d) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$.

e) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

f) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$.

g) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$.

h) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$.

i) $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$.

j) $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$.

k) $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$.

l) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$.

<u>Beweis **101-16**</u> `a)`

Via **95-11** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$.

`b)`

Via **95-12** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$.

`c)`

Via **101-5** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

`d)`

Via **101-7** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$.

`e)`

Via **AAI** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

`f)`

Via **95-12** gilt: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$.

`g)`

Via **101-7** gilt: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$.

`h)`

Via **95-11** gilt: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$.

`i)`

Via **95-12** gilt: $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$.

`j)`

Via **101-5** gilt: $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$.

`k)`

Via **101-5** gilt: $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$.

`l)`

Via **101-7** gilt: $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$.

$\square$

101-17. Auch um späters Zitieren zu vereinfachen werden nun die Inklusions-Aussagen über $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ vom $\subseteq$**Satz Zahlen** als Implikationen geschrieben und im $\in$**Satz Zahlen** zusammengefasst:

101-17(Satz) (**$\in$SZ: $\in$Satz Zahlen**)

a) *Aus "$p \in \mathbb{R}$" folgt "$p \in \mathbb{S}$".*

b) *Aus "$p \in \mathbb{R}$" folgt "$p \in \mathbb{T}$".*

c) *Aus "$p \in \mathbb{R}$" folgt "$p \in \mathbb{C}$".*

d) *Aus "$p \in \mathbb{R}$" folgt "$p \in \mathbb{B}$".*

e) *Aus "$p \in \mathbb{R}$" folgt "p Zahl".*

f) *Aus "$p \in \mathbb{S}$" folgt "$p \in \mathbb{T}$".*

g) *Aus "$p \in \mathbb{S}$" folgt "$p \in \mathbb{B}$".*

h) *Aus "$p \in \mathbb{S}$" folgt "p Zahl".*

i) *Aus "$p \in \mathbb{T}$" folgt "p Zahl".*

j) *Aus "$p \in \mathbb{C}$" folgt "$p \in \mathbb{B}$".*

k) *Aus "$p \in \mathbb{C}$" folgt "p Zahl".*

l) *Aus "$p \in \mathbb{B}$" folgt "p Zahl".*

Beweis **101-17** a) VS gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus VS gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-15**: $p \in \mathbb{S}$.

b) VS gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus VS gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-16**: $p \in \mathbb{T}$.

c) VS gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus VS gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **101-17**</u> `d)` `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{B}$.

`e)` `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-6**: p Zahl.

`f)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $p \in \mathbb{T}$.

`g)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{B}$.

`h)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **99-1**: p Zahl.

`i)` `VS` gleich $p \in \mathbb{T}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-1**: p Zahl.

`j)` `VS` gleich $p \in \mathbb{C}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{C}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{B}$.

`k)` `VS` gleich $p \in \mathbb{C}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{C}$"
folgt via **99-1**: p Zahl.

`l)` `VS` gleich $p \in \mathbb{B}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{B}$"
folgt via **99-1**: p Zahl.

$\square$

FS$-$: FundamentalSatz $-$.
AKR: Additive KürzungsRegel.
AVR: Additive VerschiebungsRegel.

Ersterstellung: 01/10/05 **Letzte Änderung: 28/01/12**

102-1. Falls die Summe zweier treeller Zahlen eine reelle Zahl ist, dann sind beide an der Summe beteiligten Zahlen reell:

102-1(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{T}$.

→) $y \in \mathbb{T}$.

→) $x + y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{R}$.

b) $y \in \mathbb{R}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **102-1**

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = \mathsf{nan}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`1.3:` Aus →) "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x + y \neq \mathsf{nan}$.

`1.4:` Aus →) "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x + y \neq +\infty$.

`1.5:` Aus →) "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x + y \neq -\infty$.

Beweis **102-1**

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

$$\begin{aligned}&(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})\\ &\vee((x \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{nan}))\\ &\vee((x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty))\\ &\vee((x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty))\\ &\vee((x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{R}))\\ &\vee((x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}))\\ &\vee((x = \mathsf{nan}) \wedge (y = +\infty))\\ &\vee((x = \mathsf{nan}) \wedge (y = -\infty))\\ &\vee((x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}))\\ &\vee((x = +\infty) \wedge (y = \mathsf{nan}))\\ &\vee((x = +\infty) \wedge (y = +\infty))\\ &\vee((x = +\infty) \wedge (y = -\infty))\\ &\vee((x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}))\\ &\vee((x = -\infty) \wedge (y = \mathsf{nan}))\\ &\vee((x = -\infty) \wedge (y = +\infty))\\ &\vee((x = -\infty) \wedge (y = -\infty)).\end{aligned}$$

Fallunterscheidung

2.1.1.Fall $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

2.1.2.Fall $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

3: Aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

4: Aus 3“$x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$” und
aus 2.1.2.Fall“$\ldots y = \mathsf{nan}$”
folgt: $x + y = \mathsf{nan}$.

5: Es gilt 4“$x + y = \mathsf{nan}$”.
Es gilt 1.3“$x + y \neq \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis **102-1**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.3.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus `2.1.3.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3`"$x + (+\infty) = +\infty$" und
aus `2.1.3.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt: $x + y = +\infty$.

`5:` Es gilt `4`"$x + y = +\infty$".
Es gilt `1.4`"$x + y \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`2.1.4.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty)$.

`3:` Aus `2.1.4.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = -\infty$.

`4:` Aus `3`"$x + (-\infty) = -\infty$" und
aus `2.1.4.Fall`"$\ldots y = -\infty$"
folgt: $x + y = -\infty$.

`5:` Es gilt `4`"$x + y = -\infty$".
Es gilt `1.5`"$x + y \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`2.1.5.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$" und
aus `2.1.5.Fall`"$x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $x + y = \mathsf{nan}$.

`5:` Es gilt `4`"$x + y = \mathsf{nan}$".
Es gilt `1.3`"$x + y \neq \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

...

Beweis **102-1**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.1.6.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

3.1: Aus 2.1.6.Fall folgt: $x = \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 2.1.6.Fall folgt: $y = \mathsf{nan}$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

5: Es gilt 4"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$".
Es gilt 1.3"$x + y \neq \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{2.1.7.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = +\infty)$.

3.1: Aus 2.1.7.Fall folgt: $x = \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 2.1.7.Fall folgt: $y = +\infty$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (+\infty) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

5: Es gilt 4"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$".
Es gilt 1.3"$x + y \neq \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{2.1.8.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = -\infty)$.

3.1: Aus 2.1.8.Fall folgt: $x = \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 2.1.8.Fall folgt: $y = -\infty$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (-\infty) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

5: Es gilt 4"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$".
Es gilt 1.3"$x + y \neq \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

...

Beweis **102-1**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.9.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

3: Aus `2.1.9.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + y = +\infty$.

4: Aus 3"$(+\infty) + y = +\infty$" und
aus `2.1.9.Fall`"$x = +\infty \ldots$"
folgt: $x + y = +\infty$.

5: Es gilt 4"$x + y = \ldots = +\infty$".
Es gilt 1.4"$x + y \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`2.1.10.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

3.1: Aus `2.1.10.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus `2.1.10.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

5: Es gilt 4"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$".
Es gilt 1.3"$x + y \neq \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`2.1.11.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

3.1: Aus `2.1.11.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus `2.1.11.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

5: Es gilt 4"$x + y = \ldots = +\infty$".
Es gilt 1.4"$x + y \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

...

Beweis **102-1**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.12.Fall` $(x=+\infty)\wedge(y=-\infty)$.

`3.1:` Aus `2.1.11.Fall` folgt: $x=+\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.11.Fall` folgt: $y=-\infty$.

`4:` $$x+y\stackrel{3.1}{=}(+\infty)+y\stackrel{3.2}{=}(+\infty)+(-\infty)\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}.$$

`5:` Es gilt `4`"$x+y=\ldots=\mathsf{nan}$".
Es gilt `1.3`"$x+y\neq\mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x\in\mathbb{R})\wedge(y\in\mathbb{R})$.

`2.1.13.Fall` $(x=-\infty)\wedge(y\in\mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.1.13.Fall`"$\ldots y\in\mathbb{R}$" folgt via **AAVI**: $(-\infty)+y=-\infty$.

`4:` Aus `3`"$(-\infty)+y=-\infty$" und aus `2.1.13.Fall`"$x=-\infty\ldots$" folgt: $x+y=-\infty$.

`5:` Es gilt `4`"$x+y=\ldots=-\infty$".
Es gilt `1.5`"$x+y\neq-\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x\in\mathbb{R})\wedge(y\in\mathbb{R})$.

`2.1.14.Fall` $(x=-\infty)\wedge(y=\mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.1.14.Fall` folgt: $x=-\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.14.Fall` folgt: $y=\mathsf{nan}$.

`4:` $$x+y\stackrel{3.1}{=}(-\infty)+y\stackrel{3.2}{=}(-\infty)+\mathsf{nan}\stackrel{\textbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`5:` Es gilt `4`"$x+y=\ldots=\mathsf{nan}$".
Es gilt `1.3`"$x+y\neq\mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x\in\mathbb{R})\wedge(y\in\mathbb{R})$.

...

Beweis **102-1**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.15.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.1.15.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.15.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`4:` $x + y \overset{3.1}{=} (-\infty) + y \overset{3.2}{=} (-\infty) + (+\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Es gilt `4`“$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$”.
Es gilt `1.3`“$x + y \neq \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`2.1.16.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.1.16.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.16.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`4:` $x + y \overset{3.1}{=} (-\infty) + y \overset{3.2}{=} (-\infty) + (-\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} -\infty$.

`5:` Es gilt `4`“$x + y = \ldots = -\infty$”.
Es gilt `1.5`“$x + y \neq -\infty$”.
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

$\square$

102-2. Falls für zwei treelle Zahlen x, y die Gleichung $x + y = z$ mit $z \in \mathbb{R}$ gilt, dann sind x, y reell und es gilt $x = z - y$ und $y = z - x$:

102-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $x + y = z$.

$\rightarrow$) $z \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{R}$.

b) $y \in \mathbb{R}$.

c) $x = z - y$.

d) $y = z - x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **102-2**

1: Aus $\rightarrow$) "$x + y = z$" und
aus $\rightarrow$) "$z \in \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{R}$.

2.a): Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{R}$" und
aus 1 "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via **102-1**: $x \in \mathbb{R}$.

2.b): Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{R}$" und
aus 1 "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via **102-1**: $y \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **102-2**</u>

...

`3.1:` Aus `2.a)` "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $$x - x = 0.$$

`3.2:` Aus `2.a)` "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $$x + 0 = x.$$

`3.3:` Aus `2.b)` "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $$y - y = 0.$$

`3.4:` Aus `2.b)` "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $$y + 0 = y.$$

`4.1:`
$$\begin{aligned} & z - y \\ \stackrel{\to)}{=}\ & (x + y) - y \\ =\ & (x + y) + (-y) \\ \stackrel{\textbf{FSA}}{=}\ & x + (y + (-y)) \\ =\ & x + (y - y) \\ \stackrel{3.3}{=}\ & x + 0 \\ \stackrel{3.2}{=}\ & x. \end{aligned}$$

`4.2:`
$$\begin{aligned} & z - x \\ \stackrel{\to)}{=}\ & (x + y) - x \\ =\ & (x + y) + (-x) \\ \stackrel{\textbf{FSA}}{=}\ & (y + x) + (-x) \\ \stackrel{\textbf{FSA}}{=}\ & y + (x + (-x)) \\ =\ & y + (x - x) \\ \stackrel{3.1}{=}\ & y + 0 \\ \stackrel{3.4}{=}\ & y. \end{aligned}$$

...

Beweis **102-2**

...

`5.c):` Aus `4.1`“$z - y = \ldots = x$”
folgt: $$x = z - y.$$

`5.d):` Aus `4.2`“$z - x = \ldots = y$”
folgt: $$y = z - x.$$

□

102-3. Interessanter Weise gilt $x+y \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{C}$. Ein derartiges Resultat ist offenbar nicht verfügbar, wenn "$\mathbb{C}$" durch "$\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{B}$" ersetzt wird. Der Fall $x+y \in \mathbb{A}$ ist in **96-13** behandelt:

102-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x \in \mathbb{C}$" und "$y \in \mathbb{C}$".*

`ii)` $x+y \in \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **102-3**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAV**: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$" folgt via **AAV**: $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`3.2:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

...

<u>Beweis **102-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

...

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$” und
aus `2.1`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Re}(x+y) \in \mathbb{R}$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.2`“$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Im}(x+y) \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.1`“$\mathsf{Re}(x+y) \in \mathbb{R}$” und
aus `4.2`“$\mathsf{Im}(x+y) \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $x+y \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x+y \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x+y \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}(x+y) \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}(x+y) \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x+y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $x+y$ Zahl.

`2.1:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`2.2:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

`2.3:` Aus `1.2`“$x+y$ Zahl”
folgt via **96-13**: $(x$ Zahl$) \wedge (y$ Zahl$)$.

`3.1:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}(x+y) \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `2.1`“$\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `1.1`“$\ldots \mathsf{Im}(x+y) \in \mathbb{R}$” und
aus `2.2`“$\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$”
folgt: $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.3`“x Zahl...”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.4:` Aus `2.3`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

...

<u>Beweis **102-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x + y \in \mathbb{C}$.

...

`4.1:` Aus `3.3`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”,
aus `3.4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `3.1`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$”
folgt via **102-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{R})$.

`4.2:` Aus `3.3`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”,
aus `3.4`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$” und
aus `3.2`“$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt via **102-1**: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`5.1:` Aus `4.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `4.2`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`5.2:` Aus `4.1`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$” und
aus `4.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $y \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

$\square$

102-4. Falls $x + y = z \in \mathbb{C}$, dann sind x, y komplexe Zahlen und es gilt $x = z - y$ und $y = z - x$:

102-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x + y = z$.

$\rightarrow$) $z \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = z - y$.

d) $y = z - x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **102-4**

REIM-**Notation**.

1.1: Aus $\rightarrow$)"$x + y = z$" und
aus $\rightarrow$)"$z \in \mathbb{C}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{C}$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$x + y = z$"
folgt: $z = x + y$.

1.3: Aus $\rightarrow$)"$z \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}z \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}z \in \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis</u> **102-4**...

`2.a)`: Aus `1.1`"$x+y\in\mathbb{C}$"
folgt via **102-3**: $x\in\mathbb{C}$.

`2.b)`: Aus `1.1`"$x+y\in\mathbb{C}$"
folgt via **102-3**: $y\in\mathbb{C}$.

`2.2`: $\mathsf{Re}z \overset{\to)}{=} \mathsf{Re}(x+y) \overset{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

`2.3`: $\mathsf{Im}z \overset{\to)}{=} \mathsf{Im}(x+y) \overset{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)$.

`3.1`: Aus `2.a)`"$x\in\mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3.2`: Aus `2.b)`"$y\in\mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3.3`: Aus `2.2`"$\mathsf{Re}z=\ldots=(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$"
folgt: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)=\mathsf{Re}z$.

`3.4`: Aus `2.3`"$\mathsf{Im}z=\ldots=(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)$"
folgt: $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)=\mathsf{Im}z$.

`4.1`: Aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Im}x\in\mathbb{T})$.

`4.2`: Aus `3.2`"y Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Im}y\in\mathbb{T})$.

`4.3`: Aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **96-24**: $x=(\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$.

`4.4`: Aus `3.2`"y Zahl"
folgt via **96-24**: $y=(\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)$.

...

Beweis **102-4**

...

`5.1:` Aus `4.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”,
aus `4.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$”,
aus `3.3`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{Re}z$” und
aus `1.3`“$\mathsf{Re}z \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **102-2**: $\mathsf{Re}x = (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}y)$.

`5.2:` Aus `4.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”,
aus `4.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$”,
aus `3.3`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{Re}z$” und
aus `1.3`“$\mathsf{Re}z \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **102-2**: $\mathsf{Re}y = (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}x)$.

`5.3:` Aus `4.1`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”,
aus `4.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”,
aus `3.4`“$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = \mathsf{Im}z$” und
aus `1.3`“$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{R}$”
folgt via **102-2**: $\mathsf{Im}x = (\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}y)$.

`5.4:` Aus `4.1`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”,
aus `4.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”,
aus `3.4`“$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = \mathsf{Im}z$” und
aus `1.3`“$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{R}$”
folgt via **102-2**: $\mathsf{Im}y = (\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}x)$.

...

<u>Beweis **102-4**</u>

...

`6.1:`

$$\begin{aligned} & x \\ \stackrel{4.3}{=} & (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x) \\ \stackrel{5.1}{=} & ((\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x) \\ \stackrel{5.3}{=} & ((\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}y)) \\ = & ((\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}y)) \\ = & ((\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) + (-\mathsf{Im}y)) \\ \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} & ((\mathsf{Re}z) + \mathsf{Re}(-y)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) + (-\mathsf{Im}y)) \\ \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} & ((\mathsf{Re}z) + \mathsf{Re}(-y)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) + \mathsf{Im}(-y)) \\ \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} & z + (-y) \\ = & z - y. \end{aligned}$$

`6.2:`

$$\begin{aligned} & y \\ \stackrel{4.4}{=} & (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y) \\ \stackrel{5.2}{=} & ((\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y) \\ \stackrel{5.4}{=} & ((\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}x)) \\ = & ((\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}x)) \\ = & ((\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) + (-\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} & ((\mathsf{Re}z) + \mathsf{Re}(-x)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) + (-\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} & ((\mathsf{Re}z) + \mathsf{Re}(-x)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}z) + \mathsf{Im}(-x)) \\ \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} & z + (-x) \\ = & z - x. \end{aligned}$$

`7.c):` Aus `6.1` folgt: $x = z - y.$

`7.d):` Aus `6.2` folgt: $y = z - x.$

$\square$

102-5. Interessanter Weise gilt $x - x = 0$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{C}$:

102-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x - x = 0$.

`ii)` $x \in \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **102-5**

REIM-Notation.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $x - x = 0.$

1: Aus VS gleich "$x - x = 0$"
folgt: $x + (-x) = 0.$

2: Aus 1.1"$x + (-x) = 0$" und
aus **101-7**"$0 \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-4**: $x \in \mathbb{C}.$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $x \in \mathbb{C}.$

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}).$

2.1: Aus 1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}x) = 0.$

2.2: Aus 1"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}x) = 0.$

3:
$$
\begin{aligned}
& x - x \\
&= x + (-x) \\
&\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}(-x))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}(-x))) \\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (-\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}(-x))) \\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (-\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (-\mathsf{Im}x)) \\
&= ((\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (-\mathsf{Im}x)) \\
&= ((\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}x)) \\
&\stackrel{2.1}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}x)) \\
&\stackrel{2.2}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot 0 \\
&\stackrel{\mathbf{96-35}}{=} 0.
\end{aligned}
$$

4: Aus 3
folgt: $x - x = 0.$

□

102-6. Im **FS−: FundamentalSatz** − werden vier Kriterien für "$x + y = 0$" formuliert. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `v)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `i)`:

102-6(Satz) (FS−: FundamentalSatz −)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x + y = 0$.

`ii)` "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$x = -y$".

`iii)` "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y = -x$".

`iv)` "$y \in \mathbb{C}$" *und* "$x = -y$".

`v)` "$y \in \mathbb{C}$" *und* "$y = -x$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **102-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x + y = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x + y = 0$" und
aus **101-5**"$0 \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-4**: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (x = 0 - y).$

`3:` Via **98-12** gilt: $0 - y = -y.$

`4:` Aus `1`"$\ldots x = 0 - y$" und
aus `3`"$0 - y = -y$"
folgt: $x = -y.$

`5:` Aus `1`"$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `4`"$x = -y$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (x = -y).$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (x = -y).$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = -y$"
folgt: $-y \in \mathbb{C}.$

`2:` Aus `1`"$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-9**: $y \in \mathbb{C}.$

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = -y$"
folgt: $(y \in \mathbb{C}) \wedge (x = -y).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{C}) \wedge (x = -y).$

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x = -y$" und
aus `1`"y Zahl"
folgt via **100-11**: $-x = y.$

`3:` Aus `2`
folgt: $y = -x.$

`4:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{C}$" und
aus `3`"$y = -x$"
folgt: $(y \in \mathbb{C}) \wedge (y = -x).$

<u>Beweis **102-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{C}) \wedge (y = -x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = -x$"
folgt: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-9**: $x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = -x$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y = -x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y = -x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **102-5**: $x - x = 0$.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $y = -x$.

`2:` $$x + y \stackrel{1.2}{=} x + (-x) = x - x \stackrel{1.1}{=} 0.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $x + y = 0$.

□

102-7. In enger Anlehnung an **FS**$-$ werden Kriterien für "$x - y = 0$" angegeben:

102-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x - y = 0$.

`ii)` "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$x = y$".

`iii)` "$y \in \mathbb{C}$" *und* "$x = y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **102-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x - y = 0$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $x + (-y) = 0$.

`2:` Aus `1`"$x + (-y) = 0$"
folgt via **FS**$-$: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (-y \in \mathbb{C}) \wedge (x = -(-y))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots - y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **101-9**: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`5:` Aus `2`"$\ldots x = -(-y)$" und
aus `4`"y Zahl"
folgt via **100-11**: $x = y$.

`6:` Aus `2`"$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `5`"$x = y$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

<u>Beweis</u> **102-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x = y$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt: $y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = y$"
folgt: $(y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **102-5**: $y - y = 0$.

`2:` Aus `1`"$y - y = 0$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = y$"
folgt: $x - y = 0$.

$\square$

102-8. Hier wird eine "$\mathbb{T}$-Version" vom **FS**$-$ formuliert. Interessanter Weise genügt es in `i)`, dass x *oder* y aus $\mathbb{T}$ sind. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `v)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `i)`:

102-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` "$x + y = 0$" *und* "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$".

`ii)` "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$x = -y$".

`iii)` "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y = -x$".

`iv)` "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$x = -y$".

`v)` "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$y = -x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **102-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x+y=0) \wedge ((x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T}))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x+y=0\ldots$"
folgt via **FS**$-$: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x=-y)$.

`2.1:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{T})$
$\vee$
$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

`3:` Aus `2.1.1.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{C}\ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

`2.1.2.Fall` $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`3:` Aus `2.1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}\ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-y \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `1`"$\ldots x=-y$" und
aus `4`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \in \mathbb{R}$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\ldots x=-y$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x=-y)$.

<u>Beweis **102-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x = -y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x = -y$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $-y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = -y$"
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \wedge (x = -y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{R}) \wedge (x = -y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = -y$"
folgt via **FS**$-$: $y = -x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2`"$y = -x$"
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \wedge (y = -x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{R}) \wedge (y = -x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y = -x$" und
aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = -x$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -x)$.

<u>Beweis **102-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.1`
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$.

`2.2:` Aus `1.2`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = -x$"
folgt via **FS**$-$: $x + y = 0$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.1`
folgt: $(x + y = 0) \wedge ((x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T}))$.

$\square$

102-9. Nun wird eine "$\mathbb{T}$-Version" von **102-7** gegeben. In `i)` genügt es, dass x *oder* y aus $\mathbb{T}$ sind:

<u>102-9(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$x - y = 0$" *und* "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$".

`ii)` "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$x = y$".

`iii)` "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$x = y$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **102-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x-y=0) \wedge ((x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T}))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x-y=0\ldots$"
folgt via **102-7**: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x=y)$.

`2.1:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{T})$
$\vee$
$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

Aus `2.1.1.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{C}\ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

`2.1.2.Fall` $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`3:` Aus `2.1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}\ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `1`"$\ldots x=y$" und
aus `3`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \in \mathbb{R}$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\ldots x=y$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x=y)$.

<u>Beweis **102-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x = y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x = y$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = y$"
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \wedge (x = y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{R}) \wedge (x = y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.1`
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = y$"
folgt via **102-7**: $x - y = 0$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.1`
folgt: $(x - y = 0) \wedge ((x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T}))$.

$\square$

102-10. Da $1, \mathsf{i}$ komplexe Zahlen sind, folgt aus **102-5** das vorliegende Resultat. Die Aussage $0 - 0 = 0$ ist bereits seit **98-15** bekannt:

102-10(Satz)

a) $1 - 1 = 0$.

b) $\mathsf{i} - \mathsf{i} = 0$.

RECH-**Notation**.

Beweis **102-10**

1.a): Aus **101-5**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $1 - 1 = 0$.

1.b): Aus **101-5**"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $\mathsf{i} - \mathsf{i} = 0$.

$\square$

102-11. In der **AKR: Additive KürzungsRegel** wird Hinreichendes dafür angegeben, dass aus $x + a = y + a$ die Aussage $x = y$ folgt. Interesanter Weise muss - unter anderem - nur x Zahl *oder* y Zahl gefordert werden:

102-11(Satz) (AKR: Additive KürzungsRegel)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x + a = y + a$.

$\rightarrow$) *oder*: *x Zahl.* / *y Zahl.*

$\rightarrow$) $a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) *x Zahl.*

b) *y Zahl.*

c) $x = y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **102-11**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: | `A1` | "a Zahl" |

`1.2:` Nach $\rightarrow)$ gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (y \text{ Zahl})$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.2.1.Fall`"x Zahl" und
aus `A1` gleich "a Zahl"
folgt via **96-13**: $x+a$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$x+a$ Zahl" und
aus $\rightarrow)$ "$x+a=y+a$"
folgt: $y+a$ Zahl.

`4:` Aus `3`"$y+a$ Zahl"
folgt via **96-13**: y Zahl.

`5:` Aus `1.2.1.Fall`"x Zahl" und
aus `4`"y Zahl"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.2.2.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.2.2.Fall`"y Zahl" und
aus `A1` gleich "a Zahl"
folgt via **96-13**: $y+a$ Zahl.

`3:` Aus $\rightarrow)$ "$x+a=y+a$" und
aus `2`"$y+a$ Zahl"
folgt: $x+a$ Zahl.

`4:` Aus `3`"$x+a$ Zahl"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`5:` Aus `4`"x Zahl" und
aus `1.2.2.Fall`"y Zahl"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
| `A2` | "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$" |

...

<u>Beweis</u> **102-11** ...

`1.a)`: Aus `A2`
folgt: x Zahl.

`1.b)`: Aus `A2`
folgt: y Zahl.

`1.3`: Aus `A2` gleich "x Zahl..."
folgt via **FSA**0: $x = x + 0$.

`1.4`: Aus `A2` gleich "...y Zahl"
folgt via **FSA**0: $y + 0 = y$.

`1.5`: Aus →) "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $a - a = 0$.

`2`:

$$x \stackrel{1.3}{=} x + 0 \stackrel{1.5}{=} x + (a - a) = x + (a + (-a)) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (x + a) + (-a) \stackrel{\rightarrow)}{=} (y + a) + (-a) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} y + (a + (-a)) = y + (a - a) \stackrel{1.5}{=} y + 0 \stackrel{1.4}{=} y.$$

`3.c)`: Aus 2
folgt: $x = y$.

□

102-12. Mit der **AVR: Additive VerschiebungsRegel** steht Hinreichendes zur Verfügung, um aus $x+a=y$ die Aussage $x=y-a$ folgt. Interesanter Weise muss - unter anderem - nur x Zahl *oder* y Zahl gefordert werden:

102-12(Satz) (AVR: Additive VerschiebungsRegel)

Es gelte:

→) $x+a=y$.

→) x *Zahl.* *oder* y *Zahl.*

→) $a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) x *Zahl.*

b) y *Zahl.*

c) $x=y-a$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **102-12**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: `A1` | "a Zahl"

`1.2:` Nach $\rightarrow$) gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (y \text{ Zahl})$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.2.1.Fall` "x Zahl" und
aus `A1` gleich "a Zahl"
folgt via **96-13**: $x + a$ Zahl.

`3:` Aus `2` "$x + a$ Zahl" und
aus $\rightarrow$) "$x + a = y$"
folgt: y Zahl.

`4:` Aus `1.2.1.Fall` "x Zahl" und
aus `3` "y Zahl"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.2.2.Fall` y Zahl.

`2:` Aus $\rightarrow$) "$x + a = y$" und
aus `1.2.2.Fall` "y Zahl"
folgt: $x + a$ Zahl.

`3:` Aus `2` "$x + a$ Zahl"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl" und
aus `1.2.2.Fall` "y Zahl"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$"

...

<u>Beweis **102-12**</u> ...

`1.a)`: Aus `A2`
folgt: x Zahl.

`1.b)`: Aus `A2`
folgt: y Zahl.

`1.3`: Aus `A2` gleich "x Zahl..."
folgt via **FSA**0: $x = x + 0$.

`1.4`: Aus →) "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $a - a = 0$.

`2`:

$$\begin{aligned} & x \\ \stackrel{1.3}{=}\ & x + 0 \\ \stackrel{1.4}{=}\ & x + (a - a) \\ =\ & x + (a + (-a)) \\ \stackrel{\textbf{FSA}}{=}\ & (x + a) + (-a) \\ \stackrel{\rightarrow)}{=}\ & y + (-a) \\ =\ & y - a. \end{aligned}$$

`3.c)`: Aus `2`
folgt: $x = y - a$.

□

102-13. Nun wird eine Folgerung aus **AVR** gezogen:

102-13(Satz)

Es gelte:

→) $x - a = y$.

→) $\boxed{\dfrac{x \text{ Zahl.}}{y \text{ Zahl.}} \quad \textit{oder}}$

→) $a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) x *Zahl.*

b) y *Zahl.*

c) $x = y + a$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **102-13**</u>

`1:` Aus →) “ $a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **101-9**: $-a \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus →) “ $x - a = y$ ”
folgt: $x + (-a) = y$.

`3:` Aus `2` “ $x + (-a) = y$ ” ,
aus →) “ $(x \text{ Zahl}) \vee (y \text{ Zahl})$ ” und
aus `1` “ $-a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **AVR**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \wedge (x = y - (-a))$.

`4.a):` Aus `3`
folgt: x Zahl.

`4.b):` Aus `3`
folgt: y Zahl.

`4.1:` Aus →) “ $a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via $\in$**SZ**: a Zahl.

`5:` Aus `4.1` “ a Zahl ”
folgt via **FS**$--$: $-(-a) = a$.

`6:` Aus `3` “ $\ldots x = y - (-a)$ ”
folgt: $x = y + (-(-a))$.

`7.c):` Aus `6` “ $x = y + (-(-a))$ ” und
aus `5` “ $-(-a) = a$ ”
folgt: $x = y + a$.

□

102-14. Wie im **FS**$-$ und den begleitenden Resultaten angedeutet, kommt der Aussage $x+y=0$ in Bezug auf x, y spezielle Bedeutung zu. Dies wird auch durch das nunmehrigen Resultat bestätigt:

102-14(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $x+y=0$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $x=0$.

`ii)` $y=0$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **102-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 0.$

`1:` Aus →) “$x + y = 0$”
folgt via **FS**−: $y \in \mathbb{C}.$

`2:` Aus `1`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via ∈**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus `2`“y Zahl”
folgt via **FSA**0: $0 + y = y.$

`4:` $y \stackrel{3}{=} 0 + y \stackrel{\mathtt{VS}}{=} x + y \stackrel{\rightarrow)}{=} 0.$

`5:` Aus `4`
folgt: $y = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $y = 0.$

`1:` Aus →) “$x + y = 0$”
folgt via **FS**−: $x \in \mathbb{C}.$

`2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt via ∈**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`“x Zahl”
folgt via **FSA**0: $x + 0 = x.$

`4:` $x \stackrel{3}{=} x + 0 \stackrel{\mathtt{VS}}{=} x + y \stackrel{\rightarrow)}{=} 0.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x = 0.$

□

102-15. Wie im **FS**$-$ und den begleitenden Resultaten angedeutet, kommt der Aussage $x+y=0$ in Bezug auf x, y spezielle Bedeutung zu. Dies wird auch durch das nunmehrige Resultat bestätigt:

102-15(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ $x+y=0$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$.

`ii)` $0 \neq y$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **102-15**

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$x+y=0$"
folgt via **102-14**: $(x=0) \Leftrightarrow (y=0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x=0)) \Leftrightarrow (\neg(y=0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(0 \neq x) \Leftrightarrow (0 \neq y)$.

$\square$

FS−+: FundamentalSatz −+.
+SZ: +Satz Zahlen.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 28/01/12**

103-1. Nun wird der erste von vier Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-+$ bewiesen:

103-1(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-(x+y) = -x-y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **103-1** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $x - x = 0$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $y - y = 0$.

`3:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)+(-x-y)\\
&= (x+y)+((-x)-y)\\
&= (x+y)+((-x)+(-y))\\
&\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (y+x)+((-x)+(-y))\\
&\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} y+(x+((-x)+(-y)))\\
&\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} y+((x+(-x))+(-y))\\
&= y+((x-x)+(-y))\\
&\stackrel{2.1}{=} y+(0+(-y))\\
&= y+(0-y)\\
&\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} y+(-y)\\
&= y-y\\
&\stackrel{2.2}{=} 0.
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`"$(x+y)+(-x-y) = \ldots = 0$"
folgt via **FS**$-$: $-x-y = -(x+y)$.

`5:` Aus `3`
folgt: $-(x+y) = -x-y$.

□

103-2. Hier wird der zweite von vier Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-+$ etabliert:

103-2(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$-(x+y) = -x-y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **103-2** `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \\ \vee\ & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \\ \vee\ & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = -\infty). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **103-1**: $-(x+y) = -x-y$.

...

Beweis **103-2** `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **97-3**: $-x - (+\infty) = -\infty$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -(x+(+\infty)) \stackrel{3.2}{=} -(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty \stackrel{3.3}{=} -x-(+\infty) \stackrel{3.1}{=} -x-y.$

`6:` Aus `5` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`2.3.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **97-3**: $-x - (-\infty) = +\infty$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -(x+(-\infty)) \stackrel{3.2}{=} -(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{3.3}{=} -x-(-\infty) \stackrel{3.1}{=} -x-y.$

`6:` Aus `5` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

...

<u>Beweis **103-2**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $-(+\infty) - y = -\infty$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -((+\infty)+y) \stackrel{3.2}{=} -(+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty \stackrel{3.3}{=} -(+\infty) - y$
$\stackrel{3.1}{=} -x - y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $-(x+y) = -x - y$.

`2.5.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -((+\infty)+y) \stackrel{3.2}{=} -((+\infty)+(+\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -(+\infty)$
$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty)+(-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-(+\infty))+(-(+\infty))$
$\stackrel{3.1}{=} -x + (-(+\infty)) \stackrel{3.2}{=} -x + (-y) = -x - y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $-(x+y) = -x - y$.

...

Beweis **103-2** `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.6.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -((+\infty)+y) \stackrel{3.2}{=} -((+\infty)+(-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-4}}{=} -(+\infty)-(-\infty) \stackrel{3.1}{=} -x-(-\infty) \stackrel{3.2}{=} -x-y$.

`5:` Aus `4` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`2.7.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$” folgt via **AAVI**: $(-\infty)+y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.7.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$” folgt via **97-3**: $-(-\infty)-y = +\infty$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -((-\infty)+y) \stackrel{3.2}{=} -(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{3.3}{=} -(-\infty)-y$
$\stackrel{3.1}{=} -x-y$.

`6:` Aus `5` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

...

Beweis **103-2** `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.8.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`4:` $$-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -((-\infty)+y) \stackrel{3.2}{=} -((-\infty)+(+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-4}}{=} -(-\infty)-(+\infty) \stackrel{3.1}{=} -x-(+\infty) \stackrel{3.2}{=} -x-y.$$

`5:` Aus `4` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`2.9.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`4:` $$-(x+y) \stackrel{3.1}{=} -((-\infty)+y) \stackrel{3.2}{=} -((-\infty)+(-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)+(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-(-\infty))+(-(-\infty)) \stackrel{3.1}{=} (-x)+(-(-\infty)) \stackrel{3.2}{=} (-x)+(-y) = (-x)-y = -x-y.$$

`5:` Aus `4` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $-(x+y) = -x-y$.

□

103-3. Nun wird der dritte von vier Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-+$ bewiesen:

103-3(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$y \in \mathbb{T}$" folgt "$-(x+y) = -x-y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **103-3** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}\dots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee \quad (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

Aus `1.2.Fall`"$x \in \mathbb{S}\dots$" und
aus `1.2.Fall`"$\dots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **103-2**: $-(x+y) = -x-y$.

...

Beweis **103-3** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" folgt via **AAVI**: $x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" folgt via **100-14**: $-x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.3}{=} -(x + \mathsf{nan}) \stackrel{3.1}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} -x + \mathsf{nan}$
$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -x + (-\mathsf{nan}) = -x - \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} -x - y$.

`5:` Aus `4` folgt: $-(x+y) = -x - y$.

`2.3.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$" folgt via **100-14**: $\mathsf{nan} - y = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall` folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{3.3}{=} -(\mathsf{nan} + y) \stackrel{3.1}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} - y$
$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\mathsf{nan}) - y \stackrel{3.3}{=} (-x) - y = -x - y$.

`6:` Aus `5` folgt: $-(x+y) = -x - y$.

...

Beweis **103-3** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall` folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` $$-(x+y) \overset{3.1}{=} -(\mathsf{nan}+y) \overset{3.2}{=} -(\mathsf{nan}+\mathsf{nan}) \overset{\mathbf{97-1}}{=} -\mathsf{nan} \overset{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$$
$$\overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}+\mathsf{nan} \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\mathsf{nan})+(-\mathsf{nan}) \overset{3.1}{=} (-x)+(-\mathsf{nan})$$
$$\overset{3.2}{=} (-x)+(-y) = (-x)-y = -x-y.$$

`5:` Aus `4` folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $-(x+y) = -x-y$.

□

103-4. Hiermit wird der letzte der vier Hilfs-Sätze auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-+$ bewiesen:

103-4(Satz)

Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$-(x+y) = -x-y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **103-4** `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…y Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$…" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$…"
folgt via **103-3**: $-((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) = -(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}y)$.

`2.2:` Aus `1.1`"…$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2`"…$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via **103-3**: $-((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) = -(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y)$.

…

Beweis **103-4** `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

...

3:
$$
\begin{aligned}
&-(x+y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}(x+y)) + \mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Im}(x+y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (-((\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y))) + \mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Im}(x+y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (-((\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y))) + \mathsf{i}\cdot(-((\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)))\\
&\stackrel{2.1}{=} (-(\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(-((\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)))\\
&\stackrel{2.2}{=} (-(\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Im}x)-(\mathsf{Im}y))\\
&= ((-\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Im}x)-(\mathsf{Im}y))\\
&= ((-\mathsf{Re}x)+(-\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Im}x)-(\mathsf{Im}y))\\
&= ((-\mathsf{Re}x)+(-\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)-(\mathsf{Im}y))\\
&= ((-\mathsf{Re}x)+(-\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)+(-\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} ((\mathsf{Re}(-x))+(-\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)+(-\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} ((\mathsf{Re}(-x))+(\mathsf{Re}(-y))) + \mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)+(-\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} ((\mathsf{Re}(-x))+(\mathsf{Re}(-y))) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}(-x))+(-\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} ((\mathsf{Re}(-x))+(\mathsf{Re}(-y))) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}(-x))+(\mathsf{Im}(-y)))\\
&\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (-x)+(-y)\\
&= (-x)-y\\
&= -x-y.
\end{aligned}
$$

4: Aus 3 folgt: $-(x+y) = -x-y$.

□

103-5. Im **FS$-+$: FundamentalSatz** $-+$ sind die - vermutlich vertrauten - Regeln zum Umgang mit mns und der Summe - inklusive Vorzeichenwechsel - gesammelt. Interessanter Weise gelten diese Regeln für alle x, y:

103-5(Satz) (FS$-+$: FundamentalSatz $-+$)

a) $-(x+y) = -x-y = -y-x$.

b) $-(x-y) = -x+y = y-x$.

c) $-(-x+y) = x-y = -y+x$.

d) $-(-x-y) = x+y = y+x$.

e) $x-(-y) = x+y = y+x$.

f) $-x-(-y) = -x+y = y-x$.

g) $-(-x)+y = x+y = y+x$.

h) $-(-x)-y = x-y = -y+x$.

i) $-(-x)-(-y) = x+y = y+x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **103-5** `a)`

`1.1:` Via **95-6** gilt: $(x+y \text{ Zahl}) \vee (x+y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x+y$ Zahl.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$x+y$ Zahl” folgt via **96-13**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`3:` Aus 2“x Zahl…” und aus 2“…y Zahl” folgt via **103-4**: $-(x+y) = -x-y$.

`1.1.2.Fall` $x+y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x+y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-14**: $x+y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x+y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-14**: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{2.1}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + (-y) = \mathcal{U} - y \stackrel{3}{=} (-x) - y = -x-y$.

`5:` Aus 4 folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`2.2.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2.2.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-12**: $-y = \mathcal{U}$.

`4:` $-(x+y) \stackrel{2.1}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (-x) + \mathcal{U} = -x + \mathcal{U} \stackrel{3}{=} -x + (-y) = -x-y$.

`5:` Aus 4 folgt: $-(x+y) = -x-y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-(x+y) = -x-y$.

…

<u>Beweis</u> **103-5** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\; \text{“}-(x+y) = -x-y\text{”}}$

`1.2:` $-x-y = (-x)-y = (-x)+(-y) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-y)+(-x) = (-y)-x = -y-x.$

`2:` Aus `A1` gleich “$-(x+y) = -x-y$” und
aus `1.2`“$-x-y = \ldots = -y-x$”
folgt: $-(x+y) = -x-y = -y-x.$

`b)`

`1.1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.1.Fall}}$ y Zahl.

`2.1:` Aus `1.1.1.Fall`“y Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y.$

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $-(x+(-y)) = -x-(-y).$

`3:` $-(x-y) = -(x+(-y)) \stackrel{2.2}{=} -x-(-y) = -x+(-(-y)) \stackrel{2.1}{=} -x+y.$

`4:` Aus `3`
folgt: $-(x-y) = -x+y.$

$\boxed{\texttt{1.1.2.Fall}}$ $y \notin \mathbb{A}.$

`2.1:` Aus `1.1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$“
folgt via **96-12**: $-y = \mathcal{U}.$

`2.2:` Aus `1.1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-14**: $(-x)+y = \mathcal{U}.$

`3:` $-(x-y) = -(x+(-y)) \stackrel{2}{=} -(x+\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (-x)+y$
$= -x+y.$

`4:` Aus `3`
folgt: $-(x-y) = -x+y.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\; \text{“}-(x-y) = -x+y\text{”}}$

...

Beweis **103-5** `b)`

...

`1.2:` Via **98-8** gilt: $y - x = -x + y.$

`2:` aus `A1` gleich "$-(x-y) = -x+y$" und
aus `1.2`"$y - x = -x + y$"
folgt: $-(x-y) = -x+y = y-x.$

`c)`

`1:` $-(-x+y) = -((-x)+y) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} -(y+(-x)) = -(y-x) \stackrel{\text{b)}}{=} -y+x$
$= (-y)+x \stackrel{\textbf{FSA}}{=} x+(-y) = x-y.$

`2:` Via **98-8** gilt: $x - y = -y + x.$

`3:` Aus `1`"$-(-x+y) = \ldots = x-y$" und
aus `2`"$x - y = -y + x$"
folgt: $-(-x+y) = x-y = -y+x.$

`d)`

`1:` $-(-x-y) \stackrel{\text{a)}}{=} -(-(x+y)) \stackrel{\textbf{100-4}}{=} x+y.$

`2:` Via **FSA** gilt: $x+y = y+x.$

`3:` Aus `1`"$-(-x-y) = \ldots = x+y$" und
aus `2`"$x+y = y+x$"
folgt: $-(-x-y) = x+y = y+x.$

`e)`

`1:` $x-(-y) \stackrel{\text{c)}}{=} -(-x+(-y)) = -(-x-y) \stackrel{\text{a)}}{=} -(-(x+y)) \stackrel{\textbf{100-4}}{=} x+y.$

`2:` Via **FSA** gilt: $x+y = y+x.$

`3:` Aus `1`"$x-(-y) = \ldots = x+y$" und
aus `2`"$x+y = y+x$"
folgt: $x-(-y) = x+y = y+x.$

`f)`

`1:` $-x-(-y) = (-x)-(-y) \stackrel{\text{e)}}{=} (-x)+y = -x+y.$

`2:` Via **98-8** gilt: $y - x = -x + y.$

`3:` Aus `1`"$-x-(-y) = \ldots = -x+y$" und
aus `2`"$y - x = -x + y$"
folgt: $-x-(-y) = -x+y = y-x.$

<u>Beweis</u> **103-5** `g)`

`1:` $-(-x)+y=(-(-x))+y \stackrel{\textbf{FSA}}{=} y+(-(-x))=y-(-x) \stackrel{\texttt{e)}}{=} y+x \stackrel{\textbf{FSA}}{=} x+y.$

`2:` Via **FSA** gilt: $x+y=y+x.$

`3:` Aus `1` "$-(-x)+y=\ldots=x+y$" und
aus `2` "$x+y=y+x$"
folgt: $-(-x)+y=x+y=y+x.$

`h)`

`1:` $-(-x)-y=-(-x)+(-y) \stackrel{\texttt{g)}}{=} x+(-y)=x-y.$

`2:` Via **98-8** gilt: $x-y=-y+x.$

`3:` Aus `1` "$-(-x)-y=\ldots=x-y$" und
aus `2` "$x-y=-y+x$"
folgt: $-(-x)-y=x-y=-y+x.$

`i)`

`1:` $-(-x)-(-y) \stackrel{\texttt{h)}}{=} x-(-y) \stackrel{\texttt{e)}}{=} x+y.$

`2:` Via **FSA** gilt: $x+y=y+x.$

`3:` Aus `1` "$-(-x)-(-y)=\ldots=x+y$" und
aus `2` "$x+y=y+x$"
folgt: $-(-x)-(-y)=x+y=y+x.$

□

103-6. Hier werden "vierstellige" Folgerungen aus **FSA** und aus **FS**$-+$ gezogen:

103-6(Satz)

a) $(x+y)+(z+w)=(x+z)+(y+w)$.

b) $(x+y)+(z+w)=(x+w)+(y+z)$.

c) $(x+y)+(z-w)=(x+z)+(y-w)$.

d) $(x+y)+(z-w)=(x-w)+(y+z)$.

e) $(x+y)-(z+w)=(x-z)+(y-w)$.

f) $(x+y)-(z+w)=(x-w)+(y-z)$.

g) $(x-y)+(z+w)=(x+z)-(y-w)$.

h) $(x-y)+(z+w)=(x+w)-(y-z)$.

i) $(x+y)-(z-w)=(x-z)+(y+w)$.

j) $(x+y)-(z-w)=(x+w)+(y-z)$.

k) $(x-y)+(z-w)=(x+z)-(y+w)$.

l) $(x-y)+(z-w)=(x-w)-(y-z)$.

m) $(x-y)-(z+w)=(x-z)-(y+w)$.

n) $(x-y)-(z+w)=(x-w)-(y+z)$.

o) $(x-y)-(z-w)=(x-z)-(y-w)$.

p) $(x-y)-(z-w)=(x+w)-(y+z)$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis</u> **103-6** `a)`

`1:` $(x+y)+(z+w) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} x+(y+(z+w)) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} x+((y+z)+w)$
$\stackrel{\textbf{FSA}}{=} x+((z+y)+w) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} x+(z+(y+w)) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (x+z)+(y+w).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x+y)+(z+w)=(x+z)+(y+w).$

`b)`

`1:` $(x+y)+(z+w) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (x+y)+(w+z) \stackrel{\text{a)}}{=} (x+w)+(y+z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x+y)+(z+w)=(x+w)+(y+z).$

`c)`

`1:` $(x+y)+(z-w)=(x+y)+(z+(-w)) \stackrel{\text{a)}}{=} (x+z)+(y+(-w))=(x+z)+(y-w).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x+y)+(z-w)=(x+z)+(y-w).$

`d)`

`1:` $(x+y)+(z-w)=(x+y)+(z+(-w)) \stackrel{\text{b)}}{=} (x+(-w))+(y+z)=(x-w)+(y+z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x+y)+(z-w)=(x-w)+(y+z).$

`e)`

`1:` $(x+y)-(z+w)=(x+y)+(-(z+w)) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} (x+y)+(-z-w)$
$=(x+y)+((-z)-w)=(x+y)+((-z)+(-w))$
$\stackrel{\text{a)}}{=} (x+(-z))+(y+(-w))=(x-z)+(y+(-w))=(x-z)+(y-w).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x+y)-(z+w)=(x-z)+(y-w).$

`f)`

`1:` $(x+y)-(z+w)=(x+y)+(-(z+w)) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} (x+y)+(-z-w)$
$=(x+y)+((-z)-w)=(x+y)+((-z)+(-w))$
$\stackrel{\text{b)}}{=} (x+(-w))+(y+(-z))=(x-w)+(y+(-z))=(x-w)+(y-z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x+y)-(z+w)=(x-w)+(y-z).$

Beweis **103-6** g)

1: $(x-y)+(z+w)=(x+(-y))+(z+w)\overset{\texttt{a)}}{=}(x+z)+((-y)+w)$
$=(x+z)+(-y+w)\overset{\mathbf{FS}-+}{=}(x+z)+(-(y-w))=(x+z)-(y-w).$

2: Aus 1
folgt: $(x-y)+(z+w)=(x+z)-(y-w).$

h)

1: $(x-y)+(z+w)=(x+(-y))+(z+w)\overset{\texttt{b)}}{=}(x+w)+((-y)+z)$
$=(x+w)+(-y+z)\overset{\mathbf{FS}-+}{=}(x+w)+(-(y-z))=(x+w)-(y-z).$

2: Aus 1
folgt: $(x-y)+(z+w)=(x+w)-(y-z).$

i)

1: $(x+y)-(z-w)=(x+y)-(z+(-w))\overset{\texttt{e)}}{=}(x-z)+(y-(-w))$
$\overset{\mathbf{FS}-+}{=}(x-z)+(y+w).$

2: Aus 1
folgt: $(x+y)-(z-w)=(x-z)+(y+w).$

j)

1: $(x+y)-(z-w)=(x+y)-(z+(-w))\overset{\texttt{f)}}{=}(x-(-w))+(y-z)$
$\overset{\mathbf{FS}-+}{=}(x+w)+(y-z).$

2: Aus 1
folgt: $(x+y)-(z-w)=(x+w)+(y-z).$

k)

1: $(x-y)+(z-w)=(x+(-y))+(z-w)=(x+(-y))+(z+(-w))$
$\overset{\texttt{a)}}{=}(x+z)+((-y)+(-w))=(x+z)+(-y+(-w))$
$=(x+z)+(-y-w)\overset{\mathbf{FS}-+}{=}(x+z)+(-(y+w))=(x+z)-(y+w).$

2: Aus 1
folgt: $(x-y)+(z-w)=(x+z)-(y+w).$

<u>Beweis</u> **103-6** `l)`

`1:` $(x-y)+(z-w)=(x+(-y))+(z-w)=(x+(-y))+(z+(-w))$
$\stackrel{\text{b)}}{=}(x+(-w))+((-y)+z)=(x-w)+((-y)+z)=(x-w)+(-y+z)$
$\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x-w)+(-(y-z))=(x-w)-(y-z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x-y)+(z-w)=(x-w)-(y-z).$

`m)`

`1:` $(x-y)-(z+w)=(x+(-y))-(z+w)\stackrel{\text{e)}}{=}(x-z)+((-y)-w))$
$=(x-z)+(-y-w)\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x-z)+(-(y+w))=(x-z)-(y+w).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x-y)-(z+w)=(x-z)-(y+w).$

`n)`

`1:` $(x-y)-(z+w)=(x+(-y))-(z+w)\stackrel{\text{f)}}{=}(x-w)+((-y)-z))$
$=(x-w)+(-y-z)\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x-w)+(-(y+z))=(x-w)-(y+z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x-y)-(z+w)=(x-w)-(y+z).$

`o)`

`1:` $(x-y)-(z-w)=(x+(-y))-(z-w)=(x+(-y))-(z+(-w))$
$\stackrel{\text{e)}}{=}(x-z)+((-y)-(-w))=(x-z)+(-y-(-w))$
$\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x-z)+(-y+w)\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x-z)+(-(y-w))=(x-z)-(y-w).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x-y)-(z-w)=(x-z)-(y-w).$

`p)`

`1:` $(x-y)-(z-w)=(x+(-y))-(z-w)=(x+(-y))-(z+(-w))$
$\stackrel{\text{f)}}{=}(x-(-w))+((-y)-z)\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x+w)+((-y)-z)$
$=(x+w)+(-y-z)\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(x+w)+(-(y+z))=(x+w)-(y+z).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x-y)-(z-w)=(x+w)-(y+z).$

$\square$

103-7. Im +**Satz Zahlen** wird angegeben, in welcher der Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ die Summe $x+y$ liegt, wenn x in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ und y in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - g) - l) - p) - q) - d) - e) - f) - h) - i) - j) - k) - m) - n) - o) - r) - s) - t) - u)`:

103-7(Satz) (**+SZ: +Satz Zahlen**)

`a)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{R}$".

`b)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{S}$".

`c)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{T}$".

`d)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{C}$".

`e)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{B}$".

`f)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x+y$ *Zahl*".

`g)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{T}$".

`h)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{T}$".

`i)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{B}$".

`j)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x+y$ *Zahl*".

`k)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x+y$ *Zahl*".

`l)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{T}$".

`m)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x+y$ *Zahl*".

`n)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x+y$ *Zahl*".

`o)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x+y$ *Zahl*".

...

`RECH`-**Notation**.

<u>103-7(Satz)</u> (+SZ: +Satz Zahlen) ...

`p)` *Aus “$x \in \mathbb{C}$” und “$y \in \mathbb{C}$” folgt “$x + y \in \mathbb{C}$”.*

`q)` *Aus “$x \in \mathbb{C}$” und “$y \in \mathbb{B}$” folgt “$x + y \in \mathbb{B}$”.*

`r)` *Aus “$x \in \mathbb{C}$” und “y Zahl” folgt “$x + y$ Zahl”.*

`s)` *Aus “$x \in \mathbb{B}$” und “$y \in \mathbb{B}$” folgt “$x + y$ Zahl”.*

`t)` *Aus “$x \in \mathbb{B}$” und “y Zahl” folgt “$x + y$ Zahl”.*

`u)` *Aus “x Zahl” und “y Zahl” folgt “$x + y$ Zahl”.*

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **103-7**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $x + y \in \mathbb{R}$.

Beweis **103-7** `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x + y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2` "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x + y \in \mathbb{S}$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus `2` "$x + (+\infty) = +\infty$" und
aus `1.2.Fall` "$y = +\infty$"
folgt: $x + y = +\infty$.

`4:` Aus **95-11** "$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `3` "$x + y = +\infty$"
folgt: $x + y \in \mathbb{S}$.

`1.3.Fall` $y = -\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = -\infty$.

`3:` Aus `2` "$x + (-\infty) = -\infty$" und
aus `1.3.Fall` "$y = -\infty$"
folgt: $x + y = -\infty$.

`4:` Aus `3` "$x + y = -\infty$"
folgt via **95-15**: $x + y \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{S}$.

<u>Beweis **103-7**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x + y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x + y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x + y \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $y = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`"$x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`"$x + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2.Fall`"$y = \mathsf{nan}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{T}$.

Beweis **103-7** `g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$
\begin{aligned}
& (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \\
\vee \quad & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \\
\vee \quad & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \\
\vee \quad & (x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \\
\vee \quad & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \\
\vee \quad & (x = -\infty) \wedge (y = -\infty).
\end{aligned}
$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x + y \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`"$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x + y \in \mathbb{T}$.

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3`"$x + (+\infty) = +\infty$"
folgt via **95-16**: $x + (+\infty) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`"$x + (+\infty) \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

...

<u>Beweis **103-7**</u> `g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty)$.

`3:` Aus `2.3.Fall`“$x \in \mathbb{R} \ldots$” folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = -\infty$.

`4:` Aus `3`“$x + (-\infty) = -\infty$” folgt via **95-16**: $x + (-\infty) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$x + (-\infty) \in \mathbb{T}$” und aus `2.3.Fall`“$\ldots y = -\infty$” folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.4.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$” folgt via **AAVI**: $(+\infty) + y = +\infty$.

`4:` Aus `3`“$(+\infty) + y = +\infty$” folgt via **95-16**: $(+\infty) + y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$(+\infty) + y \in \mathbb{T}$” und aus `2.4.Fall`“$x = +\infty \ldots$” folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

$\boxed{\texttt{2.5.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`4:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`3:` Aus `2`“$x + y = \ldots = +\infty$” folgt via **95-16**: $x + y \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **103-7** g) VS gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

Fallunterscheidung

...

2.6.Fall $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)$.

3.1: Aus 2.6.Fall
folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus 2.6.Fall
folgt: $y = -\infty$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

5: Aus 4 "$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x + y \in \mathbb{T}$.

2.7.Fall $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

3: Aus 2.7.Fall "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + y = -\infty$.

4: Aus 3 "$(-\infty) + y = -\infty$"
folgt via **95-16**: $(-\infty) + y \in \mathbb{T}$.

5: Aus 4 "$(-\infty) + y \in \mathbb{T}$" und
aus 2.7.Fall "$x = -\infty \ldots$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

2.8.Fall $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

3.1: Aus 2.8.Fall
folgt: $x = -\infty$.

3.2: Aus 2.8.Fall
folgt: $y = +\infty$.

4: $x + y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

5: Aus 4 "$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x + y \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **103-7** `g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.9.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty$.

`5:` Aus `4`"$x + y = \ldots = -\infty$"
folgt via **95-16**: $x + y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{T}$.

`l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee \quad & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $x + y \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **103-7** `1)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan})$

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3"$x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus 4"$x + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots y = \mathsf{nan}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

`2.3.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S})$

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3"$\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $\mathsf{nan} + y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus 4"$\mathsf{nan} + y \in \mathbb{T}$" und
aus `2.3.Fall`"$x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T}$.

`2.4.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` $x + y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Aus 4"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x + y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **103-7**</u> `p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-3**: $x + y \in \mathbb{C}$.

`q)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \dots$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-4**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \dots$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S} \dots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\dots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\dots \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Re}(x + y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`3.2:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Im}(x + y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}(x + y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$" und
aus `2.1`"$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Re}(x + y) \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\mathsf{Im}(x + y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Im}(x + y) \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.1`"$\mathsf{Re}(x + y) \in \mathbb{S}$" und
aus `4.2`"$\mathsf{Im}(x + y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $x + y \in \mathbb{B}$.

`d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \dots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\dots y \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `p)`: $x + y \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **103-7**</u> `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `q)`: $x + y \in \mathbb{B}$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `l)`: $x + y \in \mathbb{T}$.

`i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `1`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `q)`: $y + x \in \mathbb{B}$.

`3:` Via **FSA** gilt: $x + y = y + x$.

`4:` Aus `3`"$x + y = y + x$" und
aus `2`"$y + x \in \mathbb{B}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{B}$.

<u>Beweis</u> **103-7** `j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`m)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`n)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

<u>Beweis **103-7**</u> `o)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`r)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`s)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`t)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`u)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

Aus `VS` gleich "x Zahl…" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

□

$$\mathbb{T} \setminus \mathbb{R}.$$

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 17/04/12**

104-1. $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ besteht genau aus den Zahlen $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$:

104-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`ii)` *"$x = \mathsf{nan}$" oder "$x = +\infty$" oder "$x = -\infty$".*

Beweis **104-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \notin \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`3:` Aus `2`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `1`"$\ldots x \notin \mathbb{R}$"
folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

Beweis **104-1** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

1: Nach `VS` gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

2: Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

3: Aus `1.1.Fall`“$x = \mathsf{nan}$” und
aus 2“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

2: Aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$” und
aus **AAI**“$+\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

3: Aus `1.2.Fall`“$x = +\infty$” und
aus 2“$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

2: Aus **95-12**“$-\infty \in \mathbb{T}$” und
aus **AAI**“$-\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

3: Aus `1.3.Fall`“$x = -\infty$” und
aus 2“$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

□

104-2. Klarer Weise gilt $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ und $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$ und $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$:

104-2(Satz)

a) $\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

b) $+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

c) $-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

d) $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$.

e) $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **104-2** a)

Aus "$\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt via **104-1**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

b)

Aus "$+\infty = +\infty$"
folgt via **104-1**: $+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

c)

Aus "$-\infty = -\infty$"
folgt via **104-1**: $-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

d)

Via **5-5** gilt: $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$.

e)

Aus d) "$\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

$\square$

104-3. Falls $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$, dann $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$, $\mathsf{Im}x = 0$ und es gilt $\mathsf{rez}(x) \in \{0, \mathsf{nan}\}$. Aussagen über $-x$ folgen in **104-4**:

104-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

b) $\mathsf{Im}x = 0$.

c) "$\mathsf{rez}(x) = 0$" *oder* "$\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **104-3** `ab)`

1: Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1 "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{Im}x = 0) \wedge (x = \mathsf{Re}x)$.

3.a): Aus 2 "$\ldots x = \mathsf{Re}x$" und
aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

3.b): Aus 2
folgt: $\mathsf{Im}x = 0$.

<u>Beweis **104-3** `c)`</u>

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-1**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x = \mathsf{nan}$" und
aus **AAVI** "$\mathsf{rez}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{rez}(x) = 0) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan})$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x = +\infty$" und
aus **AAVI** "$\mathsf{rez}(+\infty) = 0$"
folgt: $\mathsf{rez}(x) = 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{rez}(x) = 0) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan})$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Aus `1.3.Fall` "$x = -\infty$" und
aus **AAVI** "$\mathsf{rez}(-\infty) = 0$"
folgt: $\mathsf{rez}(x) = 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{rez}(x) = 0) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(\mathsf{rez}(x) = 0) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan})$.

□

104-4. Es gilt $p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ genau dann, wenn $-p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(-p) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$:

104-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`ii)` $-p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`iii)` $-(-p) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **104-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \notin \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1`"$p \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-p \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Es gilt: $(-p \in \mathbb{R}) \vee (-p \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $-p \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall`"$-p \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $p \in \mathbb{R}$.

`4:` Es gilt `3`"$p \in \mathbb{R}$".
Es gilt `1`"$\ldots p \notin \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $-p \notin \mathbb{R}$.

`2.2.2.Fall` $-p \notin \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$-p \notin \mathbb{R}$"

`3:` Aus `2.1`"$-p \in \mathbb{T}$" und
aus `A1` gleich "$-p \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $-p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Beweis **104-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $-p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich "$-p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $(-p \in \mathbb{T}) \wedge (-p \notin \mathbb{R})$.

2.1: Aus 1"$-p \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-(-p) \in \mathbb{T}$.

2.2: Es gilt: $(-(-p) \in \mathbb{R}) \vee (-(-p) \notin \mathbb{R})$.

Fallunterscheidung

2.2.1.Fall $-(-p) \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2.2.1.Fall"$-(-p) \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-p \in \mathbb{R}$.

4: Es gilt 3"$-p \in \mathbb{R}$".
Es gilt 1"$\ldots -p \notin \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $-(-p) \notin \mathbb{R}$.

2.2.2.Fall $-(-p) \notin \mathbb{R}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$-(-p) \notin \mathbb{R}$"

3: Aus 2.1"$-(-p) \in \mathbb{T}$" und
aus A1 gleich "$-(-p) \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $-(-p) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Beweis **104-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-(-p) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $(-(-p) \in \mathbb{T}) \wedge (-(-p) \notin \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1`“$-(-p) \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **100-6**: $p \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Es gilt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $p \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall`“$p \in \mathbb{R}$”
folgt via **100-6**: $-(-p) \in \mathbb{R}$.

`4:` Es gilt `3`“$-(-p) \in \mathbb{R}$” .
Es gilt `1`“$\ldots - (-p) \notin \mathbb{R}$” .
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin \mathbb{R}$.

`2.2.2.Fall` $p \notin \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$p \notin \mathbb{R}$”

`3:` Aus `2.1`“$p \in \mathbb{T}$” und
aus `A1` gleich “$p \notin \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

$\square$

104-5. Falls $x, y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$, dann $x + y, x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ und $x : y = 0$ oder $x : y = \mathsf{nan}$:

104-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

b) $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

c) "$x : y = 0$" *oder* "$x : y = \mathsf{nan}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **104-5** `ab)`

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$x \ldots \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-1**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "$\ldots y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-1**: $(y = \mathsf{nan}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\ &(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\ &(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = -\infty)\\
\vee\ &(x = +\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\ &(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\ &(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)\\
\vee\ &(x = -\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\ &(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\ &(x = -\infty) \wedge (y = -\infty).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`5.1:` Aus `4.1`“$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (+\infty) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`5.1:` Aus `4.1`“$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4.1:` $x + y \overset{3.1}{=} \mathsf{nan} + y \overset{3.2}{=} \mathsf{nan} + (-\infty) \overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

`4.2:` $x \cdot y \overset{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot y \overset{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot (-\infty) \overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`"$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis</u> **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`5.1:` Aus `4.1` "$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2` "$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.5.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`5.1:` Aus `4.1`“$x + y = \ldots = +\infty$” und
aus **104-2**“$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$x \cdot y = \ldots = +\infty$” und
aus **104-2**“$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.6.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4.1:` $$x + y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}.$$

`4.2:` $$x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty.$$

`5.1:` Aus `4.1`“$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$x \cdot y = \ldots = -\infty$” und
aus **104-2**“$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.7.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`"$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis **104-5**</u> `ab)` ...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.8.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty$.

`5.1:` Aus `4.1`“$x + y = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$x \cdot y = \ldots = -\infty$” und
aus **104-2**“$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

...

Beweis **104-5** `ab)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.9.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4.1:` $x + y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty$.

`4.2:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`5.1:` Aus `4.1`"$x + y = \ldots = -\infty$" und
aus **104-2**"$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`"$x \cdot y = \ldots = +\infty$" und
aus **104-2**"$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1` | "$(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$"

`3.a):` Aus `A1`
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`3.b):` Aus `A1`
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

<u>Beweis **104-5**</u> `c)`

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`1.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-3**: $(\mathsf{rez}(y) = 0) \vee (\mathsf{rez}(y) = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$\begin{aligned} & (x = 0) \wedge (\mathsf{rez}(y) = 0) \\ \vee \quad & (0 \neq x) \wedge (\mathsf{rez}(y) = 0) \\ \vee \quad & (x = 0) \wedge (\mathsf{rez}(y) = \mathsf{nan}) \\ \vee \quad & (0 \neq x) \wedge (\mathsf{rez}(y) = \mathsf{nan}). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x = 0) \wedge (\mathsf{rez}(y) = 0)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`
folgt: $x = 0$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`
folgt: $\mathsf{rez}(y) = 0$.

`4:` $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{3.1}{=} 0 \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0$.

`5:` Aus `4`"$x : y = \ldots = 0$"
folgt: $(x : y = 0) \vee (x : y = \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $(0 \neq x) \wedge (\mathsf{rez}(y) = 0)$.

`3.1:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $\mathsf{rez}(y) = 0$.

`4:` Aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`5:` $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{3.2}{=} x \cdot 0 \stackrel{4}{=} 0$.

`6:` Aus `5`"$x : y = \ldots = 0$"
folgt: $(x : y = 0) \vee (x : y = \mathsf{nan})$.

...

Beweis **104-5** `c)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x = 0) \wedge (\mathsf{rez}(y) = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall` folgt: $x = 0$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall` folgt: $\mathsf{rez}(y) = \mathsf{nan}$.

`4:` $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{3.1}{=} 0 \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0$.

`5:` Aus 4"$x : y = \ldots = 0$" folgt: $(x : y = 0) \vee (x : y = \mathsf{nan})$.

`2.4.Fall` $(0 \neq x) \wedge (\mathsf{rez}(y) = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$0 \neq x \ldots$" und aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall` folgt: $\mathsf{rez}(y) = 0$.

`4:` $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{3.2}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Aus 4"$x : y = \ldots = \mathsf{nan}$" folgt: $(x : y = 0) \vee (x : y = \mathsf{nan})$.

In allen Fällen gilt: $(x : y = 0) \vee (x : y = \mathsf{nan})$.

□

104-6. Falls $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{T}$, dann $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$:

104-6(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{T}$" folgt "$x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **104-6** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \dots$"
folgt via **104-1**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\dots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$.

`3:` $x + y \overset{\texttt{1.1.Fall}}{=} \mathsf{nan} + y \overset{2}{=} \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`"$x + y = \dots = \mathsf{nan}$" und
aus **104-2**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

...

Beweis **104-6** ...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

2: Es gilt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

3: Aus `2.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + y = +\infty$.

4: $x + y \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (+\infty) + y \stackrel{3}{=} +\infty$.

5: Aus 4 "$x + y = \ldots = +\infty$" und
aus **104-2** "$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2.2.Fall` $y \notin \mathbb{R}$.

3: Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2.Fall` "$y \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

4: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und
aus 3 "$y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-5**: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

...

Beweis **104-6** ...

Fallunterscheidung

...

1.3.Fall $x = -\infty$.

2: Es gilt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y \notin \mathbb{R})$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $y \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2.1.Fall“$y \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + y = -\infty$.

4: $x + y \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (-\infty) + y \stackrel{3}{=} -\infty$.

5: Aus 4“$x + y = \ldots = -\infty$” und
aus **104-2**“$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

2.2.Fall $y \notin \mathbb{R}$.

3: Aus VS gleich “$\ldots y \in \mathbb{T}$” und
aus 2.2.Fall“$y \notin \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

4: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$” und
aus 3“$y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **104-5**: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

$\square$

104-7. Falls $x \in \mathbb{T}$, dann gilt $x - x = \mathsf{nan}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$:

104-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$x - x = \mathsf{nan}$".

`ii)` $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **104-7** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x - x = \mathsf{nan})$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $x - x = 0$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x - x = \mathsf{nan}$" und
aus `3`"$x - x = 0$"
folgt: $\mathsf{nan} = 0$.

`5:` Es gilt `4`"$\mathsf{nan} = 0$".
Via **95-7** gilt "$0 \neq \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

<u>Beweis **104-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **104-1**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Via **97-4** gilt: $\mathsf{nan} - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.1.Fall` “$x = \mathsf{nan}$” und
aus 2 “$\mathsf{nan} - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $x - x = \mathsf{nan}$.

`1.2.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Via **97-4** gilt: $(+\infty) - (+\infty) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.2.Fall` “$x = +\infty$” und
aus 2 “$(+\infty) - (+\infty) = \mathsf{nan}$”
folgt: $x - x = \mathsf{nan}$.

`1.2.3.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Via **97-4** gilt: $(-\infty) - (-\infty) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.2.Fall` “$x = -\infty$” und
aus 2 “$(-\infty) - (-\infty) = \mathsf{nan}$”
folgt: $x - x = \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: `A1` | “$x - x = \mathsf{nan}$”

`2:` Aus `1.1` “$x \in \mathbb{T}$” und
aus `A1` gleich “$x - x = \mathsf{nan}$”
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x - x = \mathsf{nan})$.

□

$\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}.$

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 29/01/12**

105-1. Es gilt $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ oder $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn x eine Zahl ist, die nicht in $\mathbb{C}$ ist:

105-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$".

`iii)` "x *Zahl*" *und* "$x \notin \mathbb{C}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **105-1** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{A} \dots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`3.1:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `1`"$\dots x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **101-2**: $(\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}$.

`5:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus `4.1.Fall`"$\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

`4.2.Fall` $\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R}$.

`5:` Aus `3.2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `4.2.Fall`"$\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

Beweis **105-1** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

1: Nach `VS` gilt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Re}x$ Menge.

2.2: Aus 1.1.Fall "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" folgt via **5-3**: $\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}$.

3.1: Aus 2.1 "$\mathsf{Re}x$ Menge" folgt via **96-9**: x Zahl.

3.2: Aus 2.2 "$\mathsf{Re}x \notin \mathbb{R}$" folgt via **101-2**: $x \notin \mathbb{C}$.

4: Aus 3.1 und aus 3.2 folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Im}x$ Menge.

2.2: Aus 1.2.Fall "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" folgt via **5-3**: $\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R}$.

3.1: Aus 2.1 "$\mathsf{Im}x$ Menge" folgt via **96-9**: x Zahl.

3.2: Aus 2.2 "$\mathsf{Im}x \notin \mathbb{R}$" folgt via **101-2**: $x \notin \mathbb{C}$.

4: Aus 3.1 und aus 3.2 folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

Beweis **105-1** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`1`: Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`2`: Aus `1`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "…$x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\square$

105-2. Es wird eine "einparametrige Liste" von Elementen aus $\mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$ angegeben:

105-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot x \in \mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

b) $(+\infty)+\mathsf{i}\cdot x \in \mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

c) $(-\infty)+\mathsf{i}\cdot x \in \mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

d) $x+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan} \in \mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

e) $x+\mathsf{i}\cdot(+\infty) \in \mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

f) $x+\mathsf{i}\cdot(-\infty) \in \mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **105-2** `abc)`</u>

`1.1:` Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{nan}$.

`1.2:` Aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot x) = +\infty$.

`1.3:` Aus **95-12**“$-\infty \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}((-\infty) + \mathsf{i} \cdot x) = -\infty$.

`2.1:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot x) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot x) = +\infty$” und
aus **104-2**“$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Re}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot x) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1.3`“$\mathsf{Re}((-\infty) + \mathsf{i} \cdot x) = -\infty$” und
aus **104-2**“$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Re}((-\infty) + \mathsf{i} \cdot x) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`3.a):` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot x) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`3.b):` Aus `2.2`“$\mathsf{Re}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot x) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`3.c):` Aus `2.3`“$\mathsf{Re}((-\infty) + \mathsf{i} \cdot x) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

<u>Beweis **105-2**</u> `def)`

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12** “$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

`1.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12** “$+\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) = +\infty$.

`1.3:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12** “$-\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (-\infty)) = -\infty$.

`2.1:` Aus `1.1` “$\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$” und
aus **104-2** “$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2` “$\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) = +\infty$” und
aus **104-2** “$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1.3` “$\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (-\infty)) = -\infty$” und
aus **104-2** “$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (-\infty)) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`3.d):` Aus `2.1` “$\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $x + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`3.e):` Aus `2.2` “$\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $x + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`3.f):` Aus `2.3` “$\mathsf{Im}(x + \mathsf{i} \cdot (-\infty)) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $x + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\square$

105-3. Die folgende Liste resultiert aus **105-2**, indem in **105-2** die Variable x durch $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty \in \mathbb{T}$ ersetzt wird:

105-3(Satz)

a) $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

b) $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

c) $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

d) $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

e) $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

f) $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

g) $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

h) $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

i) $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis</u> **<u>105-3</u>** `a)`

Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`b)`

Aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`c)`

Aus **95-12**“$-\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`d)`

Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`e)`

Aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`f)`

95-12“$-\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`g)`

Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`h)`

Aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`i)`

Aus **95-12**“$-\infty \in \mathbb{T}$”
folgt via **105-2**: $(-\infty) + \mathsf{i} \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\square$

105-4. Es gilt $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ und via **104-2** folgt hieraus $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$:

105-4(Satz)

a) $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

b) $\mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

c) $+\infty \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

d) $-\infty \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

Beweis **105-4**

`REIM`-**Notation**.

---

a)

`Thema1` $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $\alpha \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$\alpha \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\alpha = \mathsf{Re}\alpha$.

4: Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$” und
aus 3“$\alpha = \mathsf{Re}\alpha$”
folgt: $\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

5: Aus 4“$\mathsf{Re}\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via **105-1**: $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

<u>Beweis **105-4** `bcd)`</u>

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`2.b):` Aus **104-2**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$” und
aus `1`“$\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **0-4**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`2.c):` Aus **104-2**“$+\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$” und
aus `1`“$\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`2.d):` Aus **104-2**“$-\infty \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$” und
aus `1`“$\mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **0-4**: $-\infty \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\square$

105-5. Es gilt $p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ genau dann, wenn $-p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(-p) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$:

105-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`ii)` $-p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`iii)` $-(-p) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **105-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **105-1**: $(p \text{ Zahl}) \wedge (p \notin \mathbb{C})$.

`2.1:` Aus `1`"p Zahl…"
folgt via **100-6**: $-p$ Zahl.

`2.2:` Es gilt: $(-p \in \mathbb{C}) \vee (-p \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $-p \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall`"$-p \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-9**: $p \in \mathbb{C}$.

`4:` Es gilt `3`"$p \in \mathbb{C}$".
Es gilt `1`"$\ldots p \notin \mathbb{C}$".
Ex falso quodlibet folgt: $-p \notin \mathbb{C}$.

`2.2.2.Fall` $-p \notin \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$-p \notin \mathbb{C}$"

`3:` Aus `2.1`"$-p$ Zahl" und
aus `A1` gleich "$-p \notin \mathbb{C}$"
folgt via **105-1**: $-p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

<u>Beweis **105-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **105-1**: $(-p \text{ Zahl}) \wedge (-p \notin \mathbb{C})$.

`2.1:` Aus `1` "$-p$ Zahl…"
folgt via **100-6**: $-(-p)$ Zahl.

`2.2:` Es gilt: $(-(-p) \in \mathbb{C}) \vee (-(-p) \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $-(-p) \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall` "$-(-p) \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-9**: $-p \in \mathbb{C}$.

`4:` Es gilt `3` "$-p \in \mathbb{C}$".
Es gilt `1` "$\ldots -p \notin \mathbb{C}$".
Ex falso quodlibet folgt: $-(-p) \notin \mathbb{C}$.

`2.2.2.Fall` $-(-p) \notin \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$-(-p) \notin \mathbb{C}$"

`3:` Aus `2.1` "$-(-p)$ Zahl" und
aus `A1` gleich "$-(-p) \notin \mathbb{C}$"
folgt via **105-1**: $-(-p) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

<u>Beweis **105-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-p) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-(-p) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **105-1**: $(-(-p) \text{ Zahl}) \wedge (-(-p) \notin \mathbb{C})$.

`2.1:` Aus `1`“$-(-p)$ Zahl…”
folgt via **100-6**: p Zahl.

`2.2:` Es gilt: $(p \in \mathbb{C}) \vee (p \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $p \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.2.1.Fall`“$p \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-9**: $-(-p) \in \mathbb{C}$.

`4:` Es gilt `3`“$-(-p) \in \mathbb{C}$”.
Es gilt `1`“$\ldots -(-p) \notin \mathbb{C}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin \mathbb{C}$.

`2.2.2.Fall` $p \notin \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$p \notin \mathbb{C}$”

`3:` Aus `2.1`“p Zahl” und
aus `A1` gleich “$p \notin \mathbb{C}$”
folgt via **105-1**: $p \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

□

105-6. Die Summe von $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ und y Zahl ist stets in $\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$:

105-6(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$" und "$y$ Zahl" folgt "$x + y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **105-6** `VS` gleich $(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`REIM`-**Notation**.

`1`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **105-1**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`2`: Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

`3`: Es gilt: $(x + y \in \mathbb{C}) \vee (x + y \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x + y \in \mathbb{C}$.

`4`: Aus `4.1.Fall`"$x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-3**: $x \in \mathbb{C}$.

`5`: Es gilt `4`"$x \in \mathbb{C}$".
Es gilt `1`"$\ldots x \notin \mathbb{C}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x + y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`3.2.Fall` $x + y \notin \mathbb{C}$.

Aus `2`"$x + y$ Zahl" und
aus `3.2.Fall`"$x + y \notin \mathbb{C}$"
folgt via **105-1**: $x + y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x + y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\square$

105-7. Es gilt $\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}$ *oder* $\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$:

105-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *“*$\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}$*” oder “*$\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}$*”.*

`ii)` $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **105-7**

`REIM`-**Notation**.

<u>Beweis **105-7**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $((\mathsf{Re}(x-x)=\mathsf{nan})\vee(\mathsf{Im}(x-x)=\mathsf{nan}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((\mathsf{Re}(x-x)=\mathsf{nan})\vee(\mathsf{Im}(x-x)=\mathsf{nan}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}(x-x)=\mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Re}(x-x)=\mathsf{nan}$” und aus **95-12**“$\mathsf{nan}\in\mathbb{T}$” folgt: $\mathsf{Re}(x-x)\in\mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Re}(x-x)\in\mathbb{T}$” folgt via **96-9**: $x-x$ Zahl.

`4:` Aus `3` folgt: $x+(-x)$ Zahl.

`5:` Aus `4`“$x+(-x)$ Zahl” folgt via **96-13**: x Zahl.

`6:` Es gilt: $(x\in\mathbb{C})\vee(x\notin\mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $x\in\mathbb{C}$.

`7:` Aus `6.1.Fall`“$x\in\mathbb{C}$” folgt via **102-5**: $x-x=0$.

`8:` Aus `7`“$x-x=0$” und aus **AAIII**“$\mathsf{Re}0=0$” folgt: $\mathsf{Re}(x-x)=0$.

`9:` Aus `8`“$\mathsf{Re}(x-x)=0$” und aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Re}(x-x)=\mathsf{nan}$” folgt: $0=\mathsf{nan}$.

`10:` Es gilt `9`“$0=\mathsf{nan}$”. Es gilt **95-7**“$0\neq\mathsf{nan}$”. Ex falso quodlibet folgt: $x\in\mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

`6.2.Fall` $x\notin\mathbb{C}$.

Aus `5`“x Zahl” und aus `6.2.Fall`“$x\notin\mathbb{C}$” folgt via **105-1**: $x\in\mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x\in\mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$.

...

Beweis **105-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $((\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}$.

2: Aus 1.2.Fall"$\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}$" und aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" folgt: $\mathsf{Im}(x-x) \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}(x-x) \in \mathbb{T}$" folgt via **96-9**: $x - x$ Zahl.

4: Aus 3 folgt: $x + (-x)$ Zahl.

5: Aus 4"$x + (-x)$ Zahl" folgt via **96-13**: x Zahl.

6: Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x \notin \mathbb{C})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{6.1.Fall}}$ $x \in \mathbb{C}$.

7: Aus 6.1.Fall"$x \in \mathbb{C}$" folgt via **102-5**: $x - x = 0$.

8: Aus 7"$x - x = 0$" und aus **AAIII**"$\mathsf{Im}0 = 0$" folgt: $\mathsf{Im}(x-x) = 0$.

9: Aus 8"$\mathsf{Im}(x-x) = 0$" und aus 1.2.Fall"$\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}$" folgt: $0 = \mathsf{nan}$.

10: Es gilt 9"$0 = \mathsf{nan}$". Es gilt **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$". Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\boxed{\texttt{6.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{C}$.

Aus 5"x Zahl" und aus 6.2.Fall"$x \notin \mathbb{C}$" folgt via **105-1**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

...

Beweis **105-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $((\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan}))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **105-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$

2: Aus 1.1.Fall "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-7**: $(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}x) = \mathsf{nan}$.

3: $\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{Re}(x+(-x)) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}(-x)) \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (\mathsf{Re}x)+(-\mathsf{Re}x)$
$= (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}x) \stackrel{2}{=} \mathsf{nan}$.

4: Aus 3 "$\mathsf{Re}(x-x) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $(\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$

2: Aus 1.2.Fall "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-7**: $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}x) = \mathsf{nan}$.

3: $\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{Im}(x+(-x)) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}(-x)) \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (\mathsf{Im}x)+(-\mathsf{Im}x)$
$= (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}x) \stackrel{2}{=} \mathsf{nan}$.

4: Aus 3 "$\mathsf{Im}(x-x) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $(\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}(x-x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(x-x) = \mathsf{nan})$.

□

FundamentalSatz $-\cdot$ in $\mathbb{R}$.

NTF$\mathbb{R}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{R}$.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 29/01/12**

106-1. Mit diesem folgenden Satz wird der erste Schritt in Richtung des später zu beweisenden **FundamentalSatz** $-\cdot$ getan:

106-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

b) $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

c) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **106-1**</u> `a)`

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via ∈**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **100-6**: $-x \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus →) “$y \in \mathbb{R}$”
folgt via ∈**SZ**: y Zahl.

`1.4:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $x \cdot y = y \cdot x$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **102-5**: $x - x = 0$.

`2.2:` Aus `1.3`“y Zahl”
folgt via **FSM**0: $y \cdot 0 = 0$.

`2.3:` Aus →) “$y \in \mathbb{R}$” und
aus `1.2`“$-x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $y \cdot (-x) = (-x) \cdot y$.

`2.4:` Aus →) “$y \in \mathbb{R}$”,
aus →) “$x \in \mathbb{R}$” und
aus `1.2`“$-x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $y \cdot (x + (-x)) = y \cdot x + y \cdot (-x)$.

`3:`
$$0 \stackrel{2.2}{=} y \cdot 0 \stackrel{2.1}{=} y \cdot (x - x) = y \cdot (x + (-x)) \stackrel{2.4}{=} y \cdot x + y \cdot (-x) \stackrel{1.4}{=} x \cdot y + y \cdot (-x) \stackrel{2.3}{=} x \cdot y + (-x) \cdot y.$$

`4:` Aus `3`“$0 = \ldots = x \cdot y + (-x) \cdot y$”
folgt via **FS**−: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

Beweis **106-1** `b)`

`1.1:` Aus →) "$y \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $$y \cdot x = x \cdot y.$$

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $$-y \in \mathbb{R}.$$

`1.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $$(-y) \cdot x = -y \cdot x.$$

`2:` Aus →) "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2` "$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $$x \cdot (-y) = (-y) \cdot x.$$

`3:` $$x \cdot (-y) \stackrel{2}{=} (-y) \cdot x \stackrel{1.3}{=} -y \cdot x = -(y \cdot x) \stackrel{1.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$x \cdot (-y) = -x \cdot y.$$

`c)`

`1:` Aus →) "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $$-y \in \mathbb{R}.$$

`2:` Aus →) "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $$(-x) \cdot (-y) = -x \cdot (-y).$$

`3:` Aus →) "$x \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $$x \cdot (-y) = -x \cdot y.$$

`4:` $$(-x) \cdot (-y) \stackrel{2}{=} -x \cdot (-y) \stackrel{3}{=} -(-x \cdot y) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} x \cdot y.$$

`5:` Aus `4`
folgt: $$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

□

106-2. In $\mathbb{R}$ gibt es NullTeilerFreiheit:

106-2(Satz) (NTF$\mathbb{R}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{R}$)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $x \cdot y = 0$.

`ii)` "$x = 0$" *oder* "$y = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **106-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y = 0.$

`1:` Es gilt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \vee (x = 0) \vee (y = 0).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

`2.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{R}$" folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}.$

`2.2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq x \ldots$" und aus →) "$x \in \mathbb{R}$" folgt via **96-37**: $\mathsf{rez}(x) \cdot x = 1.$

`2.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{R}$" folgt via **AAV**: $1 \cdot y = y.$

`3.1:` Aus `2.1` "$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$" folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

`3.2:` Aus `2.1` "$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$", aus →) "$x \in \mathbb{R}$" und aus →) "$y \in \mathbb{R}$" folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(x) \cdot (x \cdot y) = (\mathsf{rez}(x) \cdot x) \cdot y.$

`4:` Aus `3.1` "$\mathsf{rez}(x)$ Zahl" folgt via **FSM**0: $\mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0.$

`5:` $0 \stackrel{4}{=} \mathsf{rez}(x) \cdot 0 \stackrel{\mathsf{VS}}{=} \mathsf{rez}(x) \cdot (x \cdot y) \stackrel{3.2}{=} (\mathsf{rez}(x) \cdot x) \cdot y \stackrel{2.2}{=} 1 \cdot y \stackrel{2.3}{=} y.$

`6:` Aus `4` folgt: $0 = y.$

`7:` Es gilt `6` "$0 = y$". Es gilt `1.1.Fall` "$\ldots 0 \neq y$". Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \vee (y = 0).$

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(x = 0) \vee (y = 0).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(x = 0) \vee (y = 0).$

<u>Beweis **106-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus →) "$y \in \mathbb{R}$" folgt via **∈SZ**: y Zahl.

`3:` Aus 2"y Zahl" folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`4:` Aus `1.1.Fall`"$x = 0$" und aus 2"$0 \cdot y = 0$" folgt: $x \cdot y = 0$.

`1.2.Fall` $y = 0$.

`2:` Aus →) "$x \in \mathbb{R}$" folgt via **∈SZ**: x Zahl.

`3:` Aus 2"x Zahl" folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`4:` Aus `1.2.Fall`"$y = 0$" und aus 2"$x \cdot 0 = 0$" folgt: $x \cdot y = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot y = 0$.

□

106-3. Via Negation folgt aus **NTF**$\mathbb{R}$ das vorliegende Kriterium:

106-3(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot y$.

`ii)` "$0 \neq x$" *und* "$0 \neq y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **106-3**

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{R}$" und
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **NTF**$\mathbb{R}$:

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(\neg(x \cdot y = 0)) \Leftrightarrow (\neg((x = 0) \vee (y = 0))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$(\neg(x \cdot y = 0)) \Leftrightarrow (\neg(x = 0)) \wedge (\neg(y = 0)).$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$0 \neq x \cdot y \Leftrightarrow (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

$\square$

ParameterAxiom III. $\leq$.
KleinerGleich-Relation. **Kleiner-Relation**.
$\leq$-`Notation`.
FS$\leq\cdot$: FundamentalSatz $\leq\cdot$.
KGM: KommutativGesetz Multiplikation.

Ersterstellung: 20/07/05 **Letzte Änderung: 03/02/12**

ParameterAxiom III. Die klassische KleinerGleich-Relation betritt in axiomatischer Weise die Essays. Im Folgenden wird **ParameterAxiom III** ohne explizite Referenz verwendet, i.e. es wird im Folgenden $\leq$ ohne expliziten Bezug auf **ParameterAxiom III** als Klasse angesehen:

ParameterAxiom III

$$\exists \Omega : \Omega = \leq .$$

107-1. Bei der im **ParameterAxiom III** in die Essays eingebrachten Klasse $\leq$ handelt es sich um die **KleinerGleich-Relation**. Die Klasse $\overset{\mathbf{ir}}{\leq}$ ist die **Kleiner-Relation** und wird mit einem eigenen, an die `HOIR`-Notation angelehnten Symbol bezeichnet:

<u>107-1(Definition)</u>

a) $< = \overset{\mathbf{ir}}{\leq}$.

b) "$\mathfrak{C}$ **KleinerGleich-Relation**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \leq \; .$$

c) "$\mathfrak{C}$ **Kleiner-Relation**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = < \; .$$

107-2. Die vorliegenden Aussagen verstehen sich fast von selbst:

107-2(Satz)

a) $\leq$ *KleinerGleich-Relation.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ KleinerGleich-Relation"*
und "$\mathfrak{D}$ KleinerGleich-Relation"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $<$ *KleinerRelation.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ Kleiner-Relation"*
und "$\mathfrak{D}$ Kleiner-Relation"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **107-2** a)

Aus "$\leq = \leq$" folgt via **107-1(Def)**: $\leq$ KleinerGleichRelation.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ KleinerGleich-Relation) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ KleinerGleich-Relation).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ KleinerGleich-Relation... "
folgt via **107-1**: $\mathfrak{C} = \leq$.

1.2: Aus VS gleich "... $\mathfrak{D}$ KleinerGleich-Relation"
folgt via **107-1**: $\mathfrak{D} = \leq$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

c)

Aus "$< = <$" folgt via **107-1(Def)**: $<$ KleinerRelation.

d) VS gleich ($\mathfrak{C}$ Kleiner-Relation) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Kleiner-Relation).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Kleiner-Relation... "
folgt via **107-1**: $\mathfrak{C} = <$.

1.2: Aus VS gleich "... $\mathfrak{D}$ Kleiner-Relation"
folgt via **107-1**: $\mathfrak{D} = <$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

$\leq$-Notation. Eine der Standard-Notationen der Mathematik wird hiermit in die Essays übernommen:

$\leq$-Notation

1) "$p \leq q$" genau dann, wenn gilt:

$$(p, q) \in \leq .$$

2) "$p < q$" genau dann, wenn gilt:

$$(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{\leq} .$$

Arithmetisches Axiom VII. Hiermit werden die grundlegenden Aussagen über $\leq$ und über die Zusammenhänge elementaren Rechnens mit der Kleiner-Relation getroffen. Mit "$-\infty < x < +\infty$" von `d)` ist die Aussage "$(-\infty < x) \wedge (x < +\infty)$" gemeint:

<u>AAVII: Arithmetisches Axiom VII</u>

`a)` $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`b)` $\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette.

`c)` $\leq$ Total Vollständig.

`d)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$-\infty < x < +\infty$.

`e)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$x < y$" folgt "$0 < y - x$" .

`f)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$0 < y - x$" folgt "$x < y$" .

`g)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$0 < x$" und "$0 < y$"
folgt "$0 < x \cdot y$" .

`h)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$0 < x$" folgt "$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$" .

`i)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$0 < x$" folgt "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$" .

`j)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$x < 0$" folgt "$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$" .

`k)` Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$x < 0$" folgt "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$" .

<u>`RECH.`$\leq$**-Notation**</u>.

107-3. Die unscheinbar wirkende Aussage "$x \leq y$" hat mannigfaltige Konsequenzen, die alle in den axiomatisch fest gelegten Eigenschaften von $\leq$ begründet sind:

107-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \leq y$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{S}$.

b) $y \in \mathbb{S}$.

c) $x \leq x$.

d) $y \leq y$.

e) $x = \mathsf{Re}x$.

f) $y = \mathsf{Re}y$.

g) $\mathsf{Re}x \leq y$.

h) $x \leq \mathsf{Re}y$.

i) $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

`REIM.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **107-3**

1: Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

2: Aus 1 "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq$ Relation in $\mathbb{S}) \wedge (\leq$ reflexiv in $\mathbb{S})$.

...

<u>Beweis **107-3**</u>

...

`3.a)`: Aus 2"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$..." und
aus →)"$x \leq y$"
folgt via **34-1**: $x \in \mathbb{S}$.

`3.b)`: Aus 2"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$..." und
aus →)"$x \leq y$"
folgt via **34-1**: $y \in \mathbb{S}$.

`3.c)`: Aus 2"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$...",
aus 2"... $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus →)"$x \leq y$"
folgt via **34-11**: $x \leq x$.

`3.d)`: Aus 2"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$...",
aus 2"... $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus →)"$x \leq y$"
folgt via **34-11**: $y \leq y$.

`4.1`: Aus `3.a)`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`4.2`: Aus `3.b)`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`5.e)`: Aus `4.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`5.f)`: Aus `4.2`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`6.g)`: Aus `5.e)`"$x = \mathsf{Re}x$" und
aus →)"$x \leq y$"
folgt: $\mathsf{Re}x \leq y$.

`6.h)`: Aus →)"$x \leq y$" und
aus `5.f)`"$y = \mathsf{Re}y$"
folgt: $x \leq \mathsf{Re}y$.

`7.i)`: Aus `6.g)`"$\mathsf{Re}x \leq y$" und
aus `5.f)`"$y = \mathsf{Re}y$"
folgt: $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

□

107-4. Interessanter Weise ist über **AAVII** hinaus gehend $x \in \mathbb{R}$ *äquivalent* zu $-\infty < x < +\infty$:

107-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{R}$.

`ii)` $-\infty < x < +\infty$.

≤-Notation.

Beweis **107-4** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < x < +\infty$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $-\infty < x < +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $-\infty \leq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < +\infty$"
folgt via **41-3**: $x \neq +\infty$.

`2.1:` Aus `1.1`"$-\infty \leq x$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1.2`
folgt: $x \neq -\infty$.

`3:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{S}$",
aus `1.3`"$x \neq +\infty$" und
aus `2.2`"$x \neq -\infty$"
folgt via **95-17**: $x \in \mathbb{R}$.

□

107-5. Die Aussage $x \in \mathbb{S}$ ist - unter anderem - äquivalent zu $x \leq x$:

107-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{S}$.

`ii)` $x \leq x$.

`iii)` $-\infty \leq x$.

`iv)` $x \leq +\infty$.

`v)` $-\infty \leq x \leq +\infty$.

$\leq$-Notation.

Beweis **107-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **30-17(Def)**: $x \leq x$.

Beweis **107-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x \leq x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \leq x$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVII**: $-\infty < x$.

`4:` Aus `3`“$-\infty < x$”
folgt via **41-3**: $-\infty \leq x$.

`2.2.Fall` $x = +\infty$.

`3.1:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`3.2:` Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ transitiv.

`4.2:` Aus `3.2`“$0 \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVII**: $-\infty < 0 < +\infty$.

`5:` Aus `4.1`“$\leq$ transitiv”,
aus `4.2`“$-\infty < 0 \ldots$” und
aus `4.2`“$\ldots 0 < +\infty$”
folgt via **44-1**: $-\infty \leq +\infty$.

`6:` Aus `5`“$-\infty \leq +\infty$” und
aus `2.2.Fall`“$x = +\infty$”
folgt: $-\infty \leq x$.

...

Beweis **107-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \leq x$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $x = -\infty$.

`3.1:` Via **95-11** gilt: $-\infty \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2`“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`“$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$” und
aus `3.2`“$-\infty \in \mathbb{S}$”
folgt via **30-17(Def)**: $-\infty \leq -\infty$.

`6:` Aus `5`“$-\infty \leq -\infty$” und
aus `2.3.Fall`“$x = -\infty$”
folgt: $-\infty \leq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $-\infty \leq x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $-\infty \leq x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-\infty \leq x$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVII**: $x < +\infty$.

`4:` Aus `3`“$x < +\infty$”
folgt via **41-3**: $x \leq +\infty$.

...

Beweis **107-5** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $-\infty \leq x$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x = +\infty$.

`3.1:` Via **95-11** gilt: $+\infty \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2`"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus `3.2`"$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **30-17(Def)**: $+\infty \leq +\infty$.

`6:` Aus `2.2.Fall`"$x = +\infty$" und
aus `5`"$+\infty \leq +\infty$"
folgt: $x \leq +\infty$.

`2.3.Fall` $x = -\infty$.

`3.1:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`3.2:` Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ transitiv.

`4.2:` Aus `3.2`"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < 0 < +\infty$.

`5:` Aus `4.1`"$\leq$ transitiv",
aus `4.2`"$-\infty < 0 \ldots$" und
aus `4.2`"$\ldots 0 < +\infty$"
folgt via **44-1**: $-\infty \leq +\infty$.

`6:` Aus `2.2.Fall`"$x = -\infty$" und
aus `5`"$-\infty \leq +\infty$"
folgt: $x \leq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \leq +\infty$.

<u>Beweis **107-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $x \leq +\infty.$

1: Aus `VS` gleich "$x \leq +\infty$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}.$

2: Aus 1"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}.$

3: Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < x.$

4: Aus 3"$-\infty < x$"
folgt via **41-3**: $-\infty \leq x.$

5: Aus 4"$-\infty \leq x$" und
aus `VS` gleich "$x \leq +\infty$"
folgt: $-\infty \leq x \leq +\infty.$

`2.2.Fall` $x = +\infty.$

3.1: Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

3.2: Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}.$

4.1: Aus 3.1"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ transitiv.

4.2: Aus 3.2"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < 0 < +\infty.$

5: Aus 4.1"$\leq$ transitiv",
aus 4.2"$-\infty < 0 \ldots$" und
aus 4.2"$\ldots 0 < +\infty$"
folgt via **44-1**: $-\infty \leq +\infty.$

6: Aus 5"$-\infty \leq +\infty$" und
aus `2.2.Fall`"$x = +\infty$"
folgt: $-\infty \leq x.$

7: Aus 6"$-\infty \leq x$" und
aus `VS` gleich "$x \leq +\infty$"
folgt: $-\infty \leq x \leq +\infty.$

...

Beweis **107-5** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $x \leq +\infty$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $x = -\infty$.

`3.1:` Via **95-11** gilt: $-\infty \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2`"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus `3.2`"$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **30-17(Def)**: $-\infty \leq -\infty$.

`6:` Aus `5`"$-\infty \leq -\infty$" und
aus `2.3.Fall`"$x = -\infty$"
folgt: $-\infty \leq x$.

`7:` Aus `6`"$-\infty \leq x$" und
aus `VS` gleich "$x \leq +\infty$"
folgt: $-\infty \leq x \leq +\infty$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $-\infty \leq x \leq +\infty$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-\infty \leq x \leq +\infty$.

Aus `VS` gleich "$-\infty \leq x \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

$\square$

107-6. Hier werden einige wenig verblüffende Aussagen über die Kleiner(Gleich)-Relation und $0, 1, +\infty, -\infty$ getroffen:

107-6(Satz)

a) $0 \leq 0$.

b) $1 \leq 1$.

c) $+\infty \leq +\infty$.

d) $-\infty \leq -\infty$.

e) $0 < 1$.

f) $-\infty < 0 < +\infty$.

g) $-\infty < 1 < +\infty$.

h) $-\infty < +\infty$.

i) $-\infty \neq +\infty$.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **107-6**

RECH-**Notation**.

---

abcd)

1: Via **95-11** gilt: $(0 \in \mathbb{S}) \wedge (1 \in \mathbb{S}) \wedge (+\infty \in \mathbb{S}) \wedge (-\infty \in \mathbb{S})$.

2.a): Aus 1 "$0 \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-5**: $0 \leq 0$.

2.b): Aus 1 "$\ldots 1 \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-5**: $1 \leq 1$.

2.c): Aus 1 "$\ldots + \infty \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-5**: $+\infty \leq +\infty$.

2.d): Aus 1 "$\ldots - \infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq -\infty$.

<u>Beweis **107-6** `e)`</u>

`1.1:` Via **AAVII** gilt: $\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette.

`1.2:` Via **95-11** gilt: $0 \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Via **95-11** gilt: $1 \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette",
aus `1.2`"$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `1.3`"$1 \in \mathbb{S}$"
folgt via **41-9**: $(0 < 1) \vee (0 = 1) \vee (1 < 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 < 1$.

`2.2.Fall` $0 = 1$.

Es gilt `2.2.Fall`"$0 = 1$".
Via **95-2** gilt "$0 \neq 1$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 < 1$.

...

Beweis **107-6** `e)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $1 < 0.$

`3:` Via **AAI** gilt: $(0 \in \mathbb{R}) \wedge (1 \in \mathbb{R}).$

`4:` Aus `3`"$\ldots 1 \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$0 \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$1 < 0$"
folgt via **AAVII**: $0 < 0 - 1.$

`5.1:` Via **98-12** gilt: $0 - 1 = -1.$

`5.2:` Via **100-7** gilt: $-1 \in \mathbb{R}.$

`6:` Aus `4`"$0 < 0 - 1$" und
aus `5.1`"$0 - 1 = -1$"
folgt: $0 < -1.$

`7:` Aus `5.2`"$-1 \in \mathbb{R}$",
aus `5.2`"$-1 \in \mathbb{R}$",
aus `6`"$0 < -1$" und
aus `6`"$0 < -1$"
folgt via **AAVII**: $0 < (-1) \cdot (-1).$

`8:` Aus `3`"$\ldots 1 \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$\ldots 1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **106-1**: $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1.$

`9:` Via **98-19** gilt: $1 \cdot 1 = 1.$

`10:` Aus `7`"$0 < (-1) \cdot (-1)$" und
aus `8`"$(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1$"
folgt: $0 < 1 \cdot 1.$

`11:` Aus `10`"$0 < 1 \cdot 1$" und
aus `9`"$1 \cdot 1 = 1$"
folgt: $0 < 1.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 < 1.$

<u>Beweis **107-6** `fghi)`</u>

`1.1:` Via **AAI** gilt: $(0 \in \mathbb{R}) \wedge (1 \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`2.f):` Aus `1.1`"$0 \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < 0 < +\infty$.

`2.g):` Aus `1.1`"$\ldots 1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < 1 < +\infty$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{transitiv}) \wedge (\leq \text{antiSymmetrisch})$.

`3.h):` Aus `2.1`"$\leq$ transitiv..." ,
aus `2.1`"... $\leq$ antiSymmetrisch" ,
aus `2.f)`"$-\infty < 0 \ldots$" und
aus `2.f)`"$\ldots 0 < +\infty$"
folgt via **46-16**: $-\infty < +\infty$.

`4.i):` Aus `3.h)`"$-\infty < +\infty$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq +\infty$.

$\square$

107-7. Keine Klasse ist echt größer als $+\infty$ oder echt kleiner als $-\infty$:

107-7(Satz)

a) *Aus* "$+\infty \leq x$" *folgt* "$x = +\infty$".

b) $\neg(+\infty < x)$.

c) *Aus* "$x \leq -\infty$" *folgt* "$x = -\infty$".

d) $\neg(x < -\infty)$.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **107-7** a) VS gleich $+\infty \leq x$.

1.1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

1.2: Aus VS gleich "$+\infty \leq x$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1.2"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \leq +\infty$.

3: Aus 1.1"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus 2"$x \leq +\infty$" und
aus VS gleich "$+\infty \leq x$"
folgt via **30-47**: $x = +\infty$.

Beweis **107-7** `b)`

`1:` Es gilt: $(+\infty < x) \vee (\neg(+\infty < x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $+\infty < x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$+\infty < x$”
folgt via **41-3**: $(+\infty \leq x) \wedge (+\infty \neq x)$.

`3:` Aus `2`“$+\infty \leq x \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x = +\infty$.

`4:` Es gilt `3`“$x = +\infty$”.
Es gilt `2`“$\ldots + \infty \neq x$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(+\infty < x)$.

`1.2.Fall` $\neg(+\infty < x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(+\infty < x)$.

`c)` `VS` gleich $x \leq -\infty$.

`1.1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \leq -\infty$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $-\infty \leq x$.

`3:` Aus `1.1`“$\leq$ antiSymmetrisch”,
aus `VS` gleich “$x \leq -\infty$” und
aus `2`“$-\infty \leq x$”
folgt via **30-47**: $x = -\infty$.

Beweis **107-7** `d)`

`1:` Es gilt: $(x < -\infty) \vee (\neg(x < -\infty))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < -\infty$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x < -\infty$”
folgt via **41-3**: $(x \leq -\infty) \wedge (x \neq -\infty)$.

`3:` Aus `2`“$x \leq -\infty \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x = -\infty$.

`4:` Es gilt `3`“$x = -\infty$”.
Es gilt `2`“$\ldots x \neq -\infty$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(x < -\infty)$.

`1.2.Fall` $\neg(x < -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(x < -\infty)$.

□

107-8. Für $\leq$ gelten die "starken Versionen" der Transitivität:

107-8(Satz)

a) *Aus "$x \leq y$" und "$y \leq z$" folgt "$x \leq z$".*

b) *Aus "$x < y$" und "$y < z$" folgt "$x < z$".*

c) *Aus "$x < y$" und "$y \leq z$" folgt "$x < z$".*

d) *Aus "$x \leq y$" und "$y < z$" folgt "$x < z$".*

$\leq$-Notation.

<u>Beweis **107-8**</u> `a)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$.

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ transitiv.

`2:` Aus `1`“$\leq$ transitiv”,
aus `VS` gleich “$x \leq y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \leq z$”
folgt via **30-38**: $x \leq z$.

`b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (y < z)$.

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $(\leq$ transitiv$) \wedge (\leq$ antiSymmetrisch$)$.

`2:` Aus `1`“$\leq$ transitiv…”,
aus `1`“… $\leq$ antiSymmetrisch”,
aus `VS` gleich “$x < y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y < z$”
folgt via **46-16**: $x < z$.

`c)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (y \leq z)$.

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $(\leq$ transitiv$) \wedge (\leq$ antiSymmetrisch$)$.

`2:` Aus `1`“$\leq$ transitiv…”,
aus `1`“… $\leq$ antiSymmetrisch”,
aus `VS` gleich “$x < y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \leq z$”
folgt via **46-16**: $x < z$.

`d)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (y < z)$.

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $(\leq$ transitiv$) \wedge (\leq$ antiSymmetrisch$)$.

`2:` Aus `1`“$\leq$ transitiv…”,
aus `1`“… $\leq$ antiSymmetrisch”,
aus `VS` gleich “$x \leq y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y < z$”
folgt via **46-16**: $x < z$.

□

107-9. Zur Vereinfachung späterer Argumentationslinien wird hier eine erweiterte "$<$-Version" von **107-3** angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - f) - g) - h) - k) - l) - d) - i) - m) - e) - j)`:

107-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x < y$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{S}$.

b) $x \leq x$.

c) $x = \mathsf{Re}x$.

d) $x < +\infty$.

e) "$x \in \mathbb{R}$" *oder* "$x = -\infty$".

f) $y \in \mathbb{S}$.

g) $y \leq y$.

h) $y = \mathsf{Re}y$.

i) $-\infty < y$.

j) "$y \in \mathbb{R}$" *oder* "$y = +\infty$".

k) $\mathsf{Re}x < y$.

l) $x < \mathsf{Re}y$.

m) $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

$\leq$-Notation.

Beweis **107-9**

`1:` Aus →) "$x < y$"
folgt via **41-3**: $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$.

`2.a):` Aus 1 "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.b):` Aus 1 "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \leq x$.

`2.c):` Aus 1 "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $x = \mathsf{Re}x$.

`2.f):` Aus 1 "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2.g):` Aus 1 "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \leq y$.

`2.h):` Aus 1 "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y = \mathsf{Re}y$.

`3.1:` Aus 2.a) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`3.2:` Aus 2.a) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq x$.

`3.3:` Aus 2.f) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq +\infty$.

`3.4:` Aus 2.f) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`3.k):` Aus →) "$x < y$" und
aus 2.c) "$x = \mathsf{Re}x$"
folgt: $\mathsf{Re}x < y$.

`3.l):` Aus →) "$x < y$" und
aus 2.h) "$y = \mathsf{Re}y$"
folgt: $x < \mathsf{Re}y$.

...

<u>Beweis **107-9**</u>

...

`4.d):` Aus →) “$x < y$” und
aus `3.3`“$y \leq +\infty$”
folgt via **107-8**: $x < +\infty$.

`4.i):` Aus `3.2`“$-\infty \leq x$” und
aus →) “$x < y$”
folgt via **107-8**: $-\infty < y$.

`4.m):` Aus `3.k)`“$\mathsf{Re}x < y$” und
aus `2.h)`“$y = \mathsf{Re}y$”
folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`5.1:` Aus `4.d)`“$x < +\infty$”
folgt via **41-3**: $x \neq +\infty$.

`5.2:` Aus `4.i)`“$-\infty < y$”
folgt via **41-3**: $-\infty \neq y$.

`6.e):` Aus `3.1`“$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$” und
aus `5.1`“$x \neq +\infty$”
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`6.j):` Aus `3.4`“$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$” und
aus `5.2`“$-\infty \neq y$”
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

$\square$

107-10. Es gilt $-\infty < x$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$ oder $x = +\infty$ - und dies ist äquivalent zu $x \in \mathbb{S}$ und $x \neq -\infty$:

107-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-\infty < x$.

`ii)` "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$x \neq -\infty$".

`iii)` "$x \in \mathbb{R}$" *oder* "$x = +\infty$".

$\leq$-Notation.

<u>Beweis</u> **107-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $-\infty < x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq x$.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $x \neq -\infty$.

`3:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `2`"$x \neq -\infty$"
folgt: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq -\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq -\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \neq -\infty$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < x$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Via **107-6** gilt: $-\infty < +\infty$.

`3:` Aus `2`"$-\infty < +\infty$" und
aus `1.2.Fall`"$x = +\infty$"
folgt: $-\infty < x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-\infty < x$.

$\square$

107-11. Es gilt $x < +\infty$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$ oder $x = -\infty$ und dies ist äquivalent zu $x \in \mathbb{S}$ und $x \neq +\infty$:

107-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x < +\infty$.

`ii)` "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$x \neq +\infty$".

`iii)` "$x \in \mathbb{R}$" *oder* "$x = -\infty$".

$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **107-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x < +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < +\infty$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < +\infty$"
folgt via **41-3**: $x \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \neq +\infty$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $x < +\infty$.

`1.2.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Via **107-6** gilt: $-\infty < +\infty$.

`3:` Aus `1.2.Fall`"$x = -\infty$" und
aus `2`"$-\infty < +\infty$"
folgt: $x < +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x < +\infty$.

□

107-12. Nun wird eine bestechend einfache Aussage präsentiert:

107-12(Satz)

Aus "$u < x < o$" *folgt* "$x \in \mathbb{R}$".

$\leq$-Notation.

Beweis **107-12** `VS` gleich $u < x < o$.

`1:` Aus `VS` gleich "$u < x \dots$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x = +\infty$" und
aus `VS` gleich "$\dots x < o$"
folgt: $+\infty < o$.

`3:` Es gilt 2 "$+\infty < o$".
Via **107-7** gilt "$\neg(+\infty < o)$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{R}$.

□

107-13. Die nunmehrige Liste von Aussagen über $\leq$ und $<$ folgt aus dem Umstand, dass $\leq$ eine antiSymmetrische Halbordnung (in $\mathbb{S}$) ist:

107-13(Satz)

a) *Aus* "$x \leq y$" *und* "$y \leq x$" *folgt* "$x = y$".

b) *Aus* "$x < y$" *folgt* "$\neg(y < x)$".

c) *Aus* "$x \leq y$" *folgt* "$\neg(y < x)$".

d) *Aus* "$x < y$" *folgt* "$\neg(y \leq x)$".

$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **107-13**</u> `a)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \leq x$"
folgt via **30-47**: $x = y$.

`b)` `VS` gleich $x < y$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch" und
aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **46-1**: $\neg(y < x)$.

`c)` `VS` gleich $x \leq y$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch" und
aus `VS` gleich "$x \leq y$"
folgt via **46-1**: $\neg(y < x)$.

`d)` `VS` gleich $x < y$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch" und
aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **46-1**: $\neg(y \leq x)$.

$\square$

107-14. Die vorliegende Liste von Aussagen über $\leq$ und $<$ folgt aus dem Umstand, dass $\mathbb{S}$ eine $\leq$_Kette ist:

107-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) "$x \leq y$" *oder* "$y \leq x$".

b) "$x < y$" *oder* "$x = y$" *oder* "$y < x$".

c) "$x \leq y$" *oder* "$y < x$".

d) "$x < y$" *oder* "$y \leq x$".

$\leq$-Notation.

Beweis **107-14**

`1:` Via **AAVII** gilt: $\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette.

`2.a):` Aus `1`"$\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette",
aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **30-68(Def)**: $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

`2.b):` Aus `1`"$\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette",
aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **41-9**: $(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$.

`2.c):` Aus `1`"$\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette",
aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **41-9**: $(x \leq y) \vee (y < x)$.

`2.1:` Aus `1`"$\mathbb{S}$ ist $\leq$_Kette",
aus →) "$y \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **41-9**: $(y \leq x) \vee (x < y)$.

`3.d):` Aus `2.1`
folgt: $(x < y) \vee (y \leq x)$.

□

107-15. Die nunmehrigen Aussagen sind gut bei einigen "Ex-falso-quodlibet"-Beweisen einsetzbar:

107-15(Satz)

a) $\neg(+\infty \le 0)$.

b) $\neg(+\infty < 0)$.

c) $\neg(0 \le -\infty)$.

d) $\neg(0 < -\infty)$.

e) $\neg(+\infty \le -\infty)$.

f) $\neg(+\infty < -\infty)$.

≤-Notation.

Beweis **107-15**

1.1: Via **107-6** gilt: $0 < +\infty$.

1.2: Via **107-6** gilt: $-\infty < 0$.

1.3: Via **107-6** gilt: $-\infty < +\infty$.

2.a): Aus 1.1 "$0 < +\infty$" folgt via **107-13**: $\neg(+\infty \le 0)$.

2.b): Aus 1.1 "$0 < +\infty$" folgt via **107-13**: $\neg(+\infty < 0)$.

2.c): Aus 1.2 "$-\infty < 0$" folgt via **107-13**: $\neg(0 \le -\infty)$.

2.d): Aus 1.2 "$-\infty < 0$" folgt via **107-13**: $\neg(0 < -\infty)$.

2.e): Aus 1.3 "$-\infty < +\infty$" folgt via **107-13**: $\neg(+\infty \le -\infty)$.

2.f): Aus 1.3 "$-\infty < +\infty$" folgt via **107-13**: $\neg(+\infty < -\infty)$.

□

107-16. Die nunmehrigen Aussagen sind Anwendungen von **107-9**:

107-16(Satz)

a) *Aus* "$0 < x$" *folgt* "$-\infty \neq x$".

b) *Aus* "$0 < x$" *folgt* "$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$".

c) *Aus* "$x < 0$" *folgt* "$x \neq +\infty$".

d) *Aus* "$x < 0$" *folgt* "$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$".

≤-Notation.

Beweis **107-16** a) VS gleich $0 < x$.

1: Aus VS gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $-\infty < x$.

2: Aus 1"$-\infty < x$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq x$.

b)

Aus VS gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

c) VS gleich $x < 0$.

1: Aus VS gleich "$x < 0$"
folgt via **107-9**: $x < +\infty$.

2: Aus 1"$x < +\infty$"
folgt via **41-3**: $x \neq +\infty$.

d) VS gleich $x < 0$.

Aus VS gleich "$x < 0$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

□

107-17. Unter Mitwirkung von **107-16** kann **107-16** zur vorliegenden Aussage verschärft werden:

107-17(Satz)

a) *Aus* “$0 \leq x$” *folgt* “$-\infty \neq x$”.

b) *Aus* “$0 \leq x$” *folgt* “$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$”.

c) *Aus* “$x \leq 0$” *folgt* “$x \neq +\infty$”.

d) *Aus* “$x \leq 0$” *folgt* “$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$”.

$\leq$-Notation.

Beweis **107-17** `ab)` `VS` gleich $0 \leq x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 < x$.

Aus `1.1.1.Fall`"$0 < x$"
folgt via **107-16**: $(-\infty \neq x) \wedge ((x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty))$.

`1.1.2.Fall` $0 = x$.

`2.1:` Aus **95-7**"$0 \neq -\infty$" und
`1.1.2.Fall`"$0 = x$"
folgt: $x \neq -\infty$.

`2.2:` Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$" und
`1.1.2.Fall`"$0 = x$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $-\infty \neq x$.

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(-\infty \neq x) \wedge ((x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(-\infty \neq x) \wedge ((x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty))$"

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $-\infty \neq x$.

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

<u>Beweis **107-17**</u> `cd)` `VS` gleich $x \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \le 0$"
folgt via **41-5**: $(x < 0) \vee (x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x < 0$.

Aus `1.1.1.Fall` "$x < 0$"
folgt via **107-16**: $(x \ne +\infty) \wedge ((x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty))$.

`1.1.2.Fall` $x = 0$.

`2.1:` Aus `1.1.2.Fall` "$x = 0$" und
aus **95-7** "$0 \ne +\infty$"
folgt: $x \ne +\infty$.

`2.2:` Aus `1.1.2.Fall` "$x = 0$" und
aus **AAI** "$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`4:` Aus `2.1` und
aus `3`
folgt: $(x \ne +\infty) \wedge ((x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1`	"$(x \ne +\infty) \wedge ((x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty))$"

`1.c):` Aus `A1`
folgt: $x \ne +\infty$.

`1.d):` Aus `A1`
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

□

107-18. Via $0 \in \mathbb{S}$ ergibt sich ohne viel Mühe auch unter Einbeziehung von **107-14** das vorliegende Kriterium für $x \in \mathbb{S}$:

107-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{S}$.

`ii)` "$x \leq 0$" *oder* "$0 \leq x$".

`iii)` "$x < 0$" *oder* "$x = 0$" *oder* "$0 < x$".

`iv)` "$x \leq 0$" *oder* "$0 < x$".

`v)` "$x < 0$" *oder* "$0 \leq x$".

≤-Notation.

Beweis **107-18** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$" und
aus **95-11** "$0 \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(x \leq 0) \vee (0 \leq x)$.

Beweis **107-18** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \leq 0) \vee (0 \leq x)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \leq 0) \vee (0 \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \leq 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \leq 0$"
folgt via **41-5**: $(x < 0) \vee (x = 0)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`1.2.Fall` $0 \leq x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \leq x$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x = 0) \vee (0 < x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

Beweis **107-18** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x < 0$”
folgt via **41-3**: $x \leq 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x = 0$” und
aus **107-6**“$0 \leq 0$”
folgt: $x \leq 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

`1.3.Fall` $0 < x$.

Aus `1.3.Fall`
folgt: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

Beweis **107-18** $\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}$ `VS` gleich $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \leq 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \leq 0$"
folgt via **41-5**: $(x < 0) \vee (x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < 0$.

Aus `2.1.Fall`
folgt: $(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

`2.2.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus **107-6** "$0 \leq 0$" und
aus `2.2.Fall` "$x = 0$"
folgt: $0 \leq x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

`1.2.Fall` $0 < x$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0 < x$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

Beweis **107-18** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x < 0) \vee (0 \le x)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x < 0) \vee (0 \le x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

Aus `1.1.Fall`“$x < 0$”
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2.Fall` $0 \le x$.

Aus `1.2.Fall`“$0 \le x$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{S}$.

□

107-19. Via **107-18** folgt aus **95-16** die folgende, auch an sich interessante Charakterisierung der Elemente von $\mathbb{T}$:

107-19(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{T}$.

`ii)` "$x < 0$" *oder* "$x = 0$" *oder* "$0 < x$" *oder* "$x = \mathsf{nan}$".

$\leq$**-Notation**.

Beweis **107-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

Aus `2.2.Fall`
folgt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Beweis **107-19** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$"
folgt via **107-18**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus 2"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

Aus `1.2.Fall`"$x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{T}$.

$\square$

107-20. Nun wird fest gestellt, dass keine *reelle* Zahl kleinergleich $-\infty$ oder größergleich $+\infty$ ist:

107-20(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

`a)` $\neg(x \leq -\infty)$.

`b)` $\neg(+\infty \leq x)$.

$\leq$-Notation.

Beweis **107-20** `a)`

`1:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < x$.

`2:` Aus `1` "$-\infty < x$"
folgt via **107-13**: $\neg(x \leq -\infty)$.

`b)`

`1:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $x < +\infty$.

`2:` Aus `1` "$x < +\infty$"
folgt via **107-13**: $\neg(+\infty \leq x)$.

$\square$

107-21. Da $\leq$ eine Relation in $\mathbb{S}$ ist, kann für $x \notin \mathbb{S}$ natürlich weder $x \leq y$ noch $x < y$ noch $y \leq x$ noch $y < x$ gelten. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - d)`:

107-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \notin \mathbb{S}$.

Dann folgt:

`a)` $\neg(x \leq y)$.

`b)` $\neg(x < y)$.

`c)` $\neg(y \leq x)$.

`d)` $\neg(y < x)$.

$\leq$-Notation.

Beweis **107-21**

`1:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$" folgt via **34-13**: $\leq$ Relation in $\mathbb{S}$.

`2.a):` Aus `1` "$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$" und aus $\rightarrow$) "$x \notin \mathbb{S}$" folgt via **34-1**: $\neg(x \leq y)$.

`2.c):` Aus `1` "$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$" und aus $\rightarrow$) "$x \notin \mathbb{S}$" folgt via **34-1**: $\neg(y \leq x)$.

`3.b):` Aus `2.a)` "$\neg(x \leq y)$" folgt via **41-5**: $\neg(x < y)$.

`3.d):` Aus `2.c)` "$\neg(y \leq x)$" folgt via **41-5**: $\neg(y < x)$.

$\square$

107-22. Falls $0 < x$, dann ist x multipliziert mit $\pm\infty$ gleich $\pm\infty$. Falls $x < 0$, dann ist x multipliziert mit $\pm\infty$ gleich $\mp\infty$:

107-22(Satz)

a) *Aus* "$x < 0$" *folgt* "$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$".

b) *Aus* "$0 < x$" *folgt* "$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$".

c) *Aus* "$x < 0$" *folgt* "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$".

d) *Aus* "$0 < x$" *folgt* "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **107-22** `a)` `VS` gleich $x < 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < 0$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x < 0$"
folgt via **AAVII**: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.

`1.2.Fall` $x = -\infty$.

`2.1:` $x \cdot (+\infty) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\text{AAVI}}{=} -\infty$.

`2.2:` $(+\infty) \cdot x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\text{AAVI}}{=} -\infty$.

`3:` Aus `2.1`"$x \cdot (+\infty) = \ldots = -\infty$" und
aus `2.2`"$(+\infty) \cdot x = \ldots = -\infty$"
folgt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.

<u>Beweis **107-22**</u> `b)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **AAVII**: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2.1:` $x \cdot (+\infty) \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`2.2:` $(+\infty) \cdot x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`3:` Aus `2.1` "$x \cdot (+\infty) = \ldots = +\infty$" und
aus `2.2` "$(+\infty) \cdot x = \ldots = +\infty$"
folgt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$.

Beweis **107-22** `c)` `VS` gleich $x < 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < 0$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x < 0$"
folgt via **AAVII**: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$.

`1.2.Fall` $x = -\infty$.

`2.1:` $x \cdot (-\infty) \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`2.2:` $(-\infty) \cdot x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`3:` Aus `2.1` "$x \cdot (-\infty) = \ldots = +\infty$" und
aus `2.2` "$(-\infty) \cdot x = \ldots = +\infty$"
folgt: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$.

Beweis **107-22** `d)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **AAVII**: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2.1:` $x \cdot (-\infty) \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty$.

`2.2:` $(-\infty) \cdot x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty$.

`3:` Aus `2.1` "$x \cdot (-\infty) = \ldots = -\infty$" und
aus `2.2` "$(-\infty) \cdot x = \ldots = -\infty$"
folgt: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$.

□

107-23. Im **FundamentalSatz** $\leq\ \cdot$ wird die in **AAVIIg)** für reelle Zahlen formulierte Rechenregel via **107-22**, teilweise unter unter schwächeren, teilweise unter anderen Voraussetzungen re-formuliert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - b) - c)`:

107-23(Satz) (FS$\leq\cdot$: FundamentalSatz $\leq\cdot$)

`a)` *Aus* "$0 < x$" *und* "$0 < y$" *folgt* "$0 < x \cdot y$".

`b)` *Aus* "$0 < x$" *und* "$0 \leq y$" *folgt* "$0 \leq x \cdot y$".

`c)` *Aus* "$0 \leq x$" *und* "$0 < y$" *folgt* "$0 \leq x \cdot y$".

`d)` *Aus* "$0 \leq x$" *und* "$0 \leq y$" *folgt* "$0 \leq x \cdot y$".

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **107-23** `a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-16**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee\quad & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\quad & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\quad & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via **AAVII**: $0 < x \cdot y$.

...

Beweis **107-23** `a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus 3"$x \cdot (+\infty) = +\infty$" und
aus `2.2.Fall`$\ldots y = +\infty$
folgt: $x \cdot y = +\infty$.

`5:` Aus **107-6**"$0 < +\infty$" und
aus 4"$x \cdot y = +\infty$"
folgt: $0 < x \cdot y$.

`2.3.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus →)"$0 < y$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`4:` Aus `2.3.Fall`"$x = +\infty \ldots$" und
aus 3"$(+\infty) \cdot y = +\infty$"
folgt: $x \cdot y = +\infty$.

`5:` Aus **107-6**"$0 < +\infty$" und
aus 4"$x \cdot y = +\infty$"
folgt: $0 < x \cdot y$.

`2.4.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`5:` Aus **107-6**"$0 < +\infty$" und
aus 4"$x \cdot y = \ldots = +\infty$"
folgt: $0 < x \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 < x \cdot y$.

<u>Beweis **107-23**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **41-5**: $(0 < y) \vee (0 = y)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (0 < x) \wedge (0 < y) \\ \vee & (0 < x) \wedge (0 = y) \\ \vee & (0 = x) \wedge (0 < y) \\ \vee & (0 = x) \wedge (0 = y). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$0 < x \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x \cdot y$.

`4:` Aus `3`"$0 < x \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x \cdot y$.

`2.2.Fall` $(0 < x) \wedge (0 = y)$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`5:` Aus `4`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`6:` Aus `5`"$x \cdot 0 = 0$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots 0 = y$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`7:` Aus **107-6**"$0 \leq 0$" und
aus `6`"$x \cdot y = 0$"
folgt: $0 \leq x \cdot y$.

...

<u>Beweis **107-23**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(0 = x) \wedge (0 < y)$.

`3:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`5:` Aus `4`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`6:` Aus `2.3.Fall`"$0 = x \ldots$" und
aus `5`"$0 \cdot y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`7:` Aus **107-6**"$0 \le 0$"und
aus `5`"$x \cdot y = 0$"
folgt: $0 \le x \cdot y$.

`2.4.Fall` $(0 = x) \wedge (0 = y)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = 0$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = 0$.

`4:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} 0 \cdot y \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0$.

`5:` Aus **107-6**"$0 \le 0$" und
aus `4`"$x \cdot y = \ldots = 0$"
folgt: $0 \le x \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 \le x \cdot y$.

<u>Beweis **107-23**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 \leq x \cdot y$.

`c)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via **41-3**: $0 \leq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$" und
aus `1`"$0 \leq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 \leq x \cdot y$.

$\square$

107-24. Nun wird der erste von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **KommutativGesetz Multiplikation** bewiesen:

107-24(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$.

b) $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

c) $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **107-24**

$\leq$-**Notation**.

Beweis **107-24** a)

1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2: $$x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot 0 \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot x.$$

3: Aus 2 folgt: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$.

1.2.Fall $0 \neq x$.

1: Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" folgt via ∈**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1.2.Fall "$0 \neq x$" und aus 1 "$x \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$.

<u>Beweis **107-24**</u> `b)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

Aus `1.1.Fall` “$x < 0$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

`2:` $x \cdot (+\infty) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} 0 \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot 0 \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (+\infty) \cdot x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

`1.3.Fall` $0 < x$.

Aus `1.3.Fall` “$0 < x$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

Beweis **107-24** `c)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

Aus `1.1.Fall` “$x < 0$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

`2:` $x \cdot (-\infty) \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} 0 \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot 0 \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (-\infty) \cdot x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

`1.3.Fall` $0 < x$.

Aus `1.3.Fall` “$0 < x$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

□

107-25. Nun wird als zweiter von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **KommutativGesetz Multiplikation** bewiesen, dass für $x \in \mathbb{S}$ und $y \in \mathbb{R}$ stets $x \cdot y = y \cdot x$ gilt:

107-25(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$x \cdot y = y \cdot x$".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **107-25**</u>

1: Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall` “$x \in \mathbb{R}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $x \cdot y = y \cdot x$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

2: Aus →) “$y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2 “$y \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-24**: $(+\infty) \cdot y = y \cdot (+\infty)$.

4: Aus 3 “$(+\infty) \cdot y = y \cdot (+\infty)$” und
aus `1.2.Fall` “$x = +\infty$”
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

2: Aus →) “$y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2 “$y \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-24**: $(-\infty) \cdot y = y \cdot (-\infty)$.

4: Aus 3 “$(-\infty) \cdot y = y \cdot (-\infty)$” und
aus `1.3.Fall` “$x = -\infty$”
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

□

107-26. Im dritten von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **KommutativGesetz Multiplikation** wird nun bewiesen, dass in $\mathbb{S}$ ein KommutativGesetz Multiplikation gilt:

107-26(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{S}$.

Dann folgt "$x \cdot y = y \cdot x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **107-26**

1: Aus →) “ ... $y \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

Aus →) “ $x \in \mathbb{S}$ ” und
aus `1.1.Fall` “ $y \in \mathbb{R}$ ”
folgt via **107-25**: $x \cdot y = y \cdot x$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

2: Aus →) “ $x \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **107-24**: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

3: Aus 2 “ $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$ ” und
aus `1.2.Fall` “ $y = +\infty$ ”
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`1.3.Fall` $y = -\infty$.

2: Aus →) “ $x \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **107-24**: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

3: Aus 2 “ $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$ ” und
aus `1.3.Fall` “ $y = -\infty$ ”
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

□

107-27. Im nun vorliegenden vierten von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **KommutativGesetz Multiplikation** wird nachgewiesen, dass $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{T}$ gilt:

107-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt "$x \cdot y = y \cdot x$".

RECH-**Notation**.

Beweis **107-27**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$x \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

$$\begin{aligned} & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee \quad & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **107-27**

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-26**: $x \cdot y = y \cdot x$.

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

3: Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-24**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$.

4: Aus 3"$x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots y = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`2.3.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

3: Aus `2.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-24**: $\mathsf{nan} \cdot y = y \cdot \mathsf{nan}$.

4: Aus 3"$\mathsf{nan} \cdot y = y \cdot \mathsf{nan}$" und
aus `2.3.Fall`"$x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`2.4.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

3: Aus "$\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus `2.4.Fall`"$x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$.

4: Aus 3"$x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x$" und
aus `2.4.Fall`"$\ldots y = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

□

107-28. Interessanter Weise ist der fünfte von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum **KommutativGesetz Multiplikation** *nicht* gleich dem **KommutativGesetz Multiplikation**:

107-28(Satz)

Es gelte:

→) x *Zahl.*

→) y *Zahl.*

Dann folgt "$x \cdot y = y \cdot x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **107-28**

`REIM`-**Notation**.

`1.1:` Aus →) “x Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`1.2:` Aus →) “y Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `1.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **107-27**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`2.2:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **107-27**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`2.3:` Aus `1.1`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **107-27**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.4:` Aus `1.1`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **107-27**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` $x \cdot y$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{2.1}{=} ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{2.4}{=} ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{2.3}{=} ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} y \cdot x.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

□

107-29. Gemäß **KommutativGesetz Multiplikaiton** ist die Reihenfolge, in der Klassen multipliziert werden, irrelevant:

107-29(Satz) (KGM: KommutativGesetz Multiplikation)

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

RECH-**Notation**.

Beweis **107-29**

1: Via **95-6** gilt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y$ Zahl.

2: Aus 1.1.Fall"$x \cdot y$ Zahl" folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

3: Aus 2"x Zahl..." und aus 2"...y Zahl" folgt via **107-28**: $x \cdot y = y \cdot x$.

`1.2.Fall` $x \cdot y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$x \cdot y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall"$x \cdot y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-16**: $y \cdot x = \mathcal{U}$.

3: Aus 2.1"$x \cdot y = \mathcal{U}$..." und aus 2.2"...$y \cdot x = \mathcal{U}$" folgt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

□

·SZ: ·Satz Zahlen.

Ersterstellung: 20/07/05 **Letzte Änderung: 08/02/12**

108-1. Das vorliegende Resultat ist beim Beweis von $\cdot$**SZ** hilfreich:

108-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow)$ "$y = 0$" *oder* "$y = +\infty$" *oder* "$y = -\infty$".

Dann folgt:

a) "$x \cdot y = 0$" *oder* "$x \cdot y = +\infty$" *oder* "$x \cdot y = -\infty$".

b) $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **108-1** a)

1: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

2: Aus 1 "$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$" und
aus $\rightarrow)$ "$(y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$"
folgt: $((x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty))$.

3: Aus 2
folgt:
$$\begin{aligned} & (x < 0) \wedge (y = 0) \\ \vee\ & (x < 0) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\ & (x < 0) \wedge (y = -\infty) \\ \vee\ & (x = 0) \wedge (y = 0) \\ \vee\ & (x = 0) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\ & (x = 0) \wedge (y = -\infty) \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (y = 0) \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (y = +\infty) \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (y = -\infty). \end{aligned}$$

Fallunterscheidung

...

<u>Beweis **108-1**</u> `a)`

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x < 0) \wedge (y = 0)$.

`3:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via ∈**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot 0 = 0$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

`2.2.Fall` $(x < 0) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$x < 0 \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot (+\infty) = -\infty$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt: $x \cdot y = -\infty$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

`2.3.Fall` $(x < 0) \wedge (y = -\infty)$.

`3:` Aus `2.3.Fall`"$x < 0 \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot (-\infty) = +\infty$" und
aus `2.3.Fall`"$\ldots y = -\infty$"
folgt: $x \cdot y = +\infty$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

...

Beweis **108-1** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

`3:` Aus **98-16**“$0 \cdot 0 = 0$” und
aus `2.4.Fall`“$x = 0 \ldots$”
folgt: $x \cdot 0 = 0$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot 0 = 0$” und
aus `2.4.Fall`“$\ldots y = 0$”
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

`2.5.Fall` $(x = 0) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus **AAVI**“$0 \cdot (+\infty) = 0$” und
aus `2.5.Fall`“$x = 0 \ldots$”
folgt: $x \cdot (+\infty) = 0$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot (+\infty) = 0$” und
aus `2.5.Fall`“$\ldots y = +\infty$
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

`2.6.Fall` $(x = 0) \wedge (y = -\infty)$.

`3:` Aus **AAVI**“$0 \cdot (-\infty) = 0$” und
aus `2.6.Fall`“$x = 0 \ldots$”
folgt: $x \cdot (-\infty) = 0$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot (-\infty) = 0$” und
aus `2.6.Fall`“$\ldots y = -\infty$
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

...

Beweis **108-1** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.7.Fall}}$ $(0 < x) \wedge (y = 0)$.

`3:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`5:` Aus `4`“$x \cdot 0 = 0$” und
aus `2.7.Fall`“$\ldots y = 0$”
folgt: $x \cdot y = 0$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

$\boxed{\texttt{2.8.Fall}}$ $(0 < x) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus `2.8.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot (+\infty) = +\infty$” und
aus `2.8.Fall`“$\ldots y = +\infty$”
folgt: $x \cdot y = +\infty$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

$\boxed{\texttt{2.9.Fall}}$ $(0 < x) \wedge (y = -\infty)$.

`3:` Aus `2.9.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot (-\infty) = -\infty$” und
aus `2.9.Fall`“$\ldots y = -\infty$”
folgt: $x \cdot y = -\infty$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty).$$

Beweis **108-1** `b)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$(y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(x \cdot y = 0) \vee (x \cdot y = +\infty) \vee (x \cdot y = -\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y = 0.$

Aus `1.1.Fall` "$x \cdot y = 0$" und
aus **95-11** "$0 \in \mathbb{S}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

`1.2.Fall` $x \cdot y = +\infty.$

Aus `VS` gleich "$x \cdot y = +\infty$"
folgt via **95-15**: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

`1.3.Fall` $x \cdot y = -\infty.$

Aus `VS` gleich "$x \cdot y = -\infty$"
folgt via **95-15**: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

□

108-2. Je nachdem, ob x in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ und ob y in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ liegt, liegt das Produkt $x \cdot y$ in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - p) - d) - e) - f) - g) - h) - j) - i) - k) - l) - m) - n) - o) - q) - r) - s) - t) - u)`:

108-2(Satz) **(·SZ: ·Satz Zahlen)**

`a)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{R}$".

`b)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{S}$".

`c)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{T}$".

`d)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{C}$".

`e)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{B}$".

`f)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`g)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{S}$".

`h)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{T}$".

`i)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{B}$".

`j)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{B}$".

`k)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`l)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{T}$".

`m)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`n)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`o)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

...

RECH-**Notation**.

108-2(Satz) ...

`p)` *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x \cdot y \in \mathbb{C}$".

`q)` *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`r)` *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`s)` *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`t)` *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`u)` *Aus* "x *Zahl*" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y$ *Zahl*".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **108-2**

`REIM`-**Notation**.

`a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **108-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2.Fall`"$y = +\infty$"
folgt via **108-1**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`1.3.Fall` $y = -\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `1.3.Fall`"$y = -\infty$"
folgt via **108-1**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

Beweis **108-2** `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **108-2** `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $y = \mathsf{nan}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus **AAVI**“$0 \cdot \mathsf{nan} = 0$” und
aus `2.1.Fall`“$x = 0$”
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} = 0$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot \mathsf{nan} = 0$” und
aus `1.2.Fall`“$y = \mathsf{nan}$”
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Aus `4`“$x \cdot y = 0$” und
aus **95-12**“$0 \in \mathbb{T}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2.2.Fall` $0 \neq x$.

`3:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `2.2.Fall`“$0 \neq x$” und
aus `3`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `1.2.Fall`“$y = \mathsf{nan}$” und
aus `4`“$x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5`“$x \cdot y = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-16**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **108-2**</u> `p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`2.4:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.4`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Aus `2.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \in \mathbb{R}$.

`4.2:` Aus `2.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$" und
aus `2.3`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.1`
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`6.1:` Via **96-26** gilt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`6.2:` Via **96-26** gilt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

Beweis **108-2** `p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

...

`7.1:` Aus `6.1`“$\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `5`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

`7.2:` Aus `6.2`“$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$” und
aus `4.2`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7.1`“$\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{R}$” und
aus `7.2`“$\mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{C}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via des bereits bewiesenen `p)`: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(x = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}y$ Zahl.

`2.3:` Aus `1.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}y$ Zahl.

...

<u>Beweis **108-2**</u> `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

...

`3.1:` Aus `2.1`"$x = \mathsf{Re}x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{Re}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot \mathsf{Re}y = 0$.

`3.3:` Aus `2.3`"$\mathsf{Im}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot \mathsf{Im}y = 0$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`4.3:` Aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x = 0$" und
aus `3.3`"$0 \cdot \mathsf{Im}y = 0$"
folgt: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0$.

`4.4:` Aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x = 0$" und
aus `3.2`"$0 \cdot \mathsf{Re}y = 0$"
folgt: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0$.

`5.1:`

$$\begin{aligned} &\mathsf{Re}(x \cdot y) \\ \stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \\ \stackrel{4.3}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-15}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y). \end{aligned}$$

`5.2:`

$$\begin{aligned} &\mathsf{Im}(x \cdot y) \\ \stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \\ \stackrel{4.4}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y). \end{aligned}$$

...

<u>Beweis **108-2**</u> `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

...

`6.1:` Aus `5.1`"$\mathsf{Re}(x \cdot y) = \ldots = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$" und
aus `4.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{S}$.

`6.2:` Aus `5.2`"$\mathsf{Im}(x \cdot y) = \ldots = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$" und
aus `4.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{S}$.

`7:` Aus `6.1`"$\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{S}$" und
aus `6.2`"$\mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $x \cdot y \in \mathbb{B}$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

Beweis **108-2** g) VS gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $y \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1.1.Fall"$y \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $y \cdot x \in \mathbb{S}$.

3: Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

4: Aus 3"$x \cdot y = y \cdot x$" und
aus 2"$y \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

1.2.Fall $y = +\infty$.

Aus VS gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus 1.2.Fall"$y = +\infty$"
folgt via **108-1**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

1.3.Fall $y = -\infty$.

Aus VS gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus 1.3.Fall"$y = -\infty$"
folgt via **108-1**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

Beweis **108-2** `h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **108-2** `h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $y = \mathsf{nan}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus **AAVI**"$0 \cdot \mathsf{nan} = 0$" und aus `2.1.Fall`"$x = 0$" folgt: $x \cdot \mathsf{nan} = 0$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot \mathsf{nan} = 0$" und aus `1.2.Fall`"$y = \mathsf{nan}$" folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot y = 0$" und aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$" folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2.2.Fall` $0 \neq x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `2.2.Fall`"$0 \neq x$" und aus `3`"$x \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und aus `1.2.Fall`"$y = \mathsf{nan}$" folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5`"$x \cdot y = \mathsf{nan}$" folgt via **95-16**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **108-2**</u> `j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(x = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}y$ Zahl.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}y$ Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"$x = \mathsf{Re}x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{Re}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Re}y) \cdot 0 = 0$.

`3.3:` Aus `2.3`"$\mathsf{Im}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}y) \cdot 0 = 0$.

`4.1:` Aus `1.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$" und
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$(\mathsf{Re}y) \cdot 0 = 0$" und
aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt: $(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

`4.3:` Aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$" und
aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

`4.4:` Aus `3.3`"$(\mathsf{Im}y) \cdot 0 = 0$" und
aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt: $(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

...

Beweis **108-2** `j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

...

`5.1:` $\mathsf{Re}(y \cdot x)$

$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}x)$

$\stackrel{4.4}{=} (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) - 0$

$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) + 0$

$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`5.2:` $\mathsf{Im}(y \cdot x)$

$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$

$\stackrel{4.2}{=} 0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$

$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`6.1:` Aus `5.1`“$\mathsf{Re}(y \cdot x) = \ldots = (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$” und
aus `4.1`“$(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$”
folgt: $\mathsf{Re}(y \cdot x) \in \mathbb{S}$.

`6.2:` Aus `5.2`“$\mathsf{Im}(y \cdot x) = \ldots = (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x)$” und
aus `4.3`“$(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$”
folgt: $\mathsf{Im}(y \cdot x) \in \mathbb{S}$.

`7:` Aus `6.1`“$\mathsf{Re}(y \cdot x) \in \mathbb{S}$” und
aus `6.2`“$\mathsf{Im}(y \cdot x) \in \mathbb{S}$”
folgt via **101-3**: $y \cdot x \in \mathbb{B}$.

`8:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`9:` Aus `8`“$x \cdot y = y \cdot x$” und
aus `7`“$y \cdot x \in \mathbb{B}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{B}$.

`i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `1`“$y \in \mathbb{B}$”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $x \cdot y \in \mathbb{B}$.

<u>Beweis **108-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

<u>Beweis **108-2**</u> `l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3:` Aus `2.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{S}$” und
aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $y \cdot x \in \mathbb{T}$.

`4:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`5:` Aus `4`“$x \cdot y = y \cdot x$” und
aus `3`“$y \cdot x \in \mathbb{T}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2.4.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3:` Aus `2.4.Fall`“$x = \mathsf{nan} \ldots$” und
aus **97-5**“$\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$” und
aus `2.4.Fall`“$\ldots y = \mathsf{nan}$”
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4`“$x \cdot y = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-16**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`m)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`“x Zahl” und
aus `1.2`“y Zahl”
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

<u>Beweis **108-2**</u> `n)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`o)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`q)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`r)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

Beweis **108-2** `s)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2:` Aus `1.1`"x Zahl" und
aus `1.2`"y Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`t)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1`"x Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`u)` `VS` gleich $(x$ Zahl$) \wedge (y$ Zahl$)$.

Aus `VS` gleich "x Zahl…" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

$\square$

- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).