Suite II - Die Arithmetische

Teil 6: Essays 148-154

Komplex Konjugiert. $x^{\mathtt{cc}}$. $\mathtt{cc}$–Notation. $\Box$ keine Algebra auf Q. $\Box$ keine Algebra in A.

Andreas Unterreiter

25. April 2012

Einiges über $0, 1, <, 1 : x, x$.

Ersterstellung: 19/09/10 **Letzte Änderung: 24/03/12**

148-1. Es gilt $0 < x \in \mathbb{R}$genau dann, wenn $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $0 < 1 : x$:

148-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 < x \in \mathbb{R}$.

`ii)` $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

`iii)` $0 < 1 : x$.

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **148-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-24**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$0 \neq x$" und
aus `1.3`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`3:` Aus **107-6**"$0 < 1$" und
aus `2.2`"$x : x = 1$"
folgt: $0 < x : x$.

...

Beweis **148-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

...

`4:` Via **136-1** gilt: $x : x = x \cdot (1 : x)$.

`5:` Aus `3`"$0 < x : x$" und
aus `4`"$x : x = x \cdot (1 : x)$"
folgt: $0 < x \cdot (1 : x)$.

`6:` Aus `1.2`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `3`"$0 < x \cdot (1 : x)$"
folgt via **131-3**: $((x < 0) \wedge (1 : x < 0)) \vee ((0 < x) \wedge (0 < 1 : x))$.

`7:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-13**: $\neg(x < 0)$.

`8:` Aus `6`"$((x < 0) \wedge (1 : x < 0)) \vee ((0 < x) \wedge (0 < 1 : x))$" und
aus `7`"$\neg(x < 0)$"
folgt: $(0 < x) \wedge (0 < 1 : x)$.

`9:` Aus `8`"$\ldots 0 < 1 : x$" und
aus `2.1`"$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

Aus `VS`
folgt: $0 < 1 : x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < 1 : x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < 1 : x$"
folgt via **107-16**: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = +\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < 1 : x$"
folgt via **41-3**: $0 \neq 1 : x$.

`2:` Via **137-17** gilt: $1 : x \neq +\infty$.

`3:` Aus `1.1`"$(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = +\infty)$" und
aus `2`"$1 : x \neq +\infty$"
folgt: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `1.2`"$0 \neq 1 : x$" und
aus `3`"$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-24**: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **148-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < 1 : x$.

...

`5.1:` Aus `4`"$\dots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`5.2:` Aus `4`"$\dots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `4`"$0 \neq x \dots$" und
aus `5.2`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`7:` Aus **107-6**"$0 < 1$" und
aus `6`"$x : x = 1$"
folgt: $0 < x : x$.

`8:` Via **136-1** gilt: $x : x = x \cdot (1 : x)$.

`9:` Aus `7`"$0 < x : x$" und
aus `8`"$x : x = x \cdot (1 : x)$"
folgt: $0 < x \cdot (1 : x)$.

`10:` Aus `5.1`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `9`"$0 < x \cdot (1 : x)$"
folgt via **131-3**: $((x < 0) \wedge (1 : x < 0)) \vee ((0 < x) \wedge (0 < 1 : x))$.

`11:` Aus `VS` gleich "$0 < 1 : x$"
folgt via **107-13**: $\neg(1 : x < 0)$.

`12:` Aus `10`"$((x < 0) \wedge (1 : x < 0)) \vee ((0 < x) \wedge (0 < 1 : x))$" und
aus `11`"$\neg(1 : x < 0)$"
folgt: $(0 < x) \wedge (0 < 1 : x)$.

`13:` Aus `12`"$0 < x \dots$" und
aus `4`"$\dots x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < x \in \mathbb{R}$.

$\square$

148-2. Es gibt - natürlich - ein Analogon von **148-1** mit $>$ an Stelle von $<$:

148-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathbb{R} \ni x < 0$.

`ii)` $\mathbb{R} \ni 1 : x < 0$.

`iii)` $1 : x < 0$.

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **148-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathbb{R} \ni x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni x \dots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots x < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`2:` Aus `1.2`"$0 < -x$" und
aus `1.1`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $0 < 1 : (-x) \in \mathbb{R}$.

`3:` Via **FS**$-$: gilt: $1 : (-x) = -1 : x$.

`4:` Aus `2`"$0 < 1 : (-x) \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$1 : (-x) = -1 : x$"
folgt: $0 < -1 : x \in \mathbb{R}$.

`5.1:` Aus `4`"$0 < -1 : x$"
folgt via **109-16**: $1 : x < 0$.

`5.2:` Aus `4`"$-1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\mathbb{R} \ni 1 : x < 0$.

<u>Beweis **148-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathbb{R} \ni 1 : x < 0.$

Aus `VS`
folgt: $1 : x < 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $1 : x < 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$1 : x < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -1 : x.$

`2:` Via **FS**$-$: gilt: $-1 : x = 1 : (-x).$

`3:` Aus `1`"$0 < -1 : x$" und
aus `2`"$-1 : x = 1 : (-x)$"
folgt: $0 < 1 : (-x).$

`4:` Aus `3`"$0 < 1 : (-x)$"
folgt via **148-1**: $0 < -x \in \mathbb{R}.$

`5.1:` Aus `4`"$0 < -x \ldots$"
folgt via **109-16**: $x < 0.$

`5.2:` Aus `4`"$\ldots - x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{R}.$

`6:` Aus `5.2` und
aus `5.1`
folgt: $\mathbb{R} \ni x < 0.$

$\square$

148-3. Als Anwendung von **148-1** wird das nunmehrige, oft hilfreiche Resultat bewiesen. Im Beweis wird erstmalig in einer Beweiskette ein Symbol der Form "$\overset{\bullet}{<}$" verwendet. Mit diesem Symbol wird genau so umgegangen wie mit $\overset{\bullet}{=}$ oder wie mit $\overset{\bullet}{\subseteq}$, so dass sich weitere Erläuterungen erübrigen:

148-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $0 < x < y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $0 < x \in \mathbb{R}$.

b) $0 < y \in \mathbb{R}$.

c) $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

d) $0 < 1 : y \in \mathbb{R}$.

e) $0 < 1 : y < 1 : x$.

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **148-3**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$0 < x < y \ldots$"
folgt via **107-12**: $x \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus $\rightarrow)$ "$0 < x \ldots$" und
aus $\rightarrow)$ "$x < y \ldots$"
folgt via **107-8**: $0 < y$.

1.4: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **148-3**</u>

...

`2.a)`: Aus →) “$0 < x\ldots$” und
aus `1.2` “$x \in \mathbb{R}$”
folgt: $0 < x \in \mathbb{R}$.

`2.b)`: Aus `1.3` “$0 < y$” und
aus →) “$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt: $0 < y \in \mathbb{R}$.

`2.1`: Aus `1.2` “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2.2`: Aus `1.3` “$0 < y$”
folgt via **41-3**: $0 \neq y$.

`3.c)`: Aus `2.a)` “$0 < x \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-1**: $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

`3.d)`: Aus `2.b)` “$0 < y \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-1**: $0 < 1 : y \in \mathbb{R}$.

`3.1`: Aus `1.1` “$0 \neq x$” und
aus `2.1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`3.2`: Aus `2.2` “$0 \neq y$” und
aus `1.4` “$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $y : y = 1$.

`4.1`: Aus `3.c)` “$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{S}$.

`4.2`: Aus `3.d)` “$\ldots 1 : y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : y \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **148-3**

...

`5.1:` Aus `4.1`“$1 : x \in \mathbb{S}$” und
aus `4.2`“$1 : y \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-14**: $(1 : x < 1 : y) \vee (1 : x = 1 : y) \vee (1 : y < 1 : x)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $1 : x < 1 : y$.

`6.1:` Aus `2.b)`“$0 < y \ldots$”
folgt via **41-3**: $0 \leq y$.

`6.2:` Aus `3.c)`“$0 < 1 : x \ldots$” und
aus `5.1.1.Fall`“$1 : x < 1 : y$”
folgt: $0 < 1 : x < 1 : y$.

`7:` Aus →)“$\ldots x < y \ldots$”,
aus `6.1`“$0 \leq y$” und
aus `6.2`“$0 < 1 : x < 1 : y$”
folgt via **147-2**: $(1 : x) \cdot x < (1 : y) \cdot y$.

`8:` $1 \stackrel{3.1}{=} x : x \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (1 : x) \cdot x \stackrel{7}{<} (1 : y) \cdot y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} y : y \stackrel{3.2}{=} 1$.

`9:` Es gilt `8`“$1 \ldots < \ldots 1$”.
Via **41-5** gilt “$\neg(1 < 1)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $1 : y < 1 : x$.

`5.1.2.Fall` $1 : x = 1 : y$.

`6:` Aus `5.1.2.Fall`“$1 : x = 1 : y$”,
aus `2.1`“$x \in \mathbb{C}$” und
aus `1.4`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-3**: $x = y$.

`7:` Aus →)“$\ldots x < y \ldots$”
folgt via **41-3**: $x \neq y$.

`8:` Es gilt `7`“$x \neq y$”.
Es gilt `6`“$x = y$”.
Ex falso quodlibet folgt: $1 : y < 1 : x$.

`5.1.3.Fall` $1 : y < 1 : x$.

...

Beweis **148-3**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}1 : y < 1 : x\text{"}}$

`5.e):` Aus `3.d)` "$0 < 1 : y \ldots$" und
aus `A1` gleich "$1 : y < 1 : x$"
folgt: $0 < 1 : y < 1 : x.$

$\square$

148-4. Es gibt - natürlich - ein Analogon von **148-3** mit $>$ an Stelle von $<$:

148-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\mathbb{R} \ni x < y < 0$.

Dann folgt:

a) $\mathbb{R} \ni x < 0$.

b) $\mathbb{R} \ni y < 0$.

c) $\mathbb{R} \ni 1 : x < 0$.

d) $\mathbb{R} \ni 1 : y < 0$.

e) $1 : y < 1 : x < 0$.

RECH. $\leq$-**Notation**.

Beweis **148-4**

1.1: Aus $\rightarrow$) "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$\ldots x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

1.3: Aus $\rightarrow$) "$\mathbb{R} \ni x \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

1.4: Via **FS**$-$: gilt: $-1 : (-x) = 1 : x$.

1.5: Via **FS**$-$: gilt: $-1 : (-y) = 1 : y$.

2: Aus 1.1,
aus 1.2 und
aus 1.3
folgt: $0 < -y < -x \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **148-4**</u>

...

`3.1:` Aus `2`“$0<-y<-x\in\mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0<-x\in\mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2`“$0<-y<-x\in\mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0<-y\in\mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2`“$0<-y<-x\in\mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0<1:(-x)\in\mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2`“$0<-y<-x\in\mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0<1:(-y)\in\mathbb{R}$.

`3.5:` Aus `2`“$0<-y<-x\in\mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0<1:(-x)<1:(-y)$.

`4.1:` Aus `3.1`“$0<-x\ldots$”
folgt via **109-16**: $x<0$.

`4.2:` Aus `3.1`“$\ldots-x\in\mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $x\in\mathbb{R}$.

`4.3:` Aus `3.2`“$0<-y\ldots$”
folgt via **109-16**: $y<0$.

`4.4:` Aus `3.2`“$\ldots-y\in\mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $y\in\mathbb{R}$.

`4.5:` Aus `3.3`“$0<1:(-x)\ldots$”
folgt via **109-16**: $-1:(-x)<0$.

`4.6:` Aus `3.4`“$0<1:(-y)\ldots$”
folgt via **109-16**: $-1:(-y)<0$.

`4.7:` Aus `3.5`“$\ldots1:(-x)<1:(-y)$”
folgt via **109-14**: $-1:(-y)<-1:(-x)$.

...

Beweis **148-4**

...

5.a): Aus 4.2 "$x \in \mathbb{R}$" und
aus 4.1 "$x < 0$"
folgt: $\mathbb{R} \ni x < 0.$

5.b): Aus 4.4 "$y \in \mathbb{R}$" und
aus 4.3 "$y < 0$"
folgt: $\mathbb{R} \ni y < 0.$

5.1: Aus 4.2 "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : x \in \mathbb{R}.$

5.2: Aus 4.4 "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{R}.$

5.3: $$1 : y \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} -1 : (-y) \stackrel{4.7}{<} -1 : (-x) \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} 1 : x.$$

5.4: Aus 4.5 "$-1 : (-x) < 0$" und
aus 1.4 "$-1 : (-x) = \ldots = 1 : x$"
folgt: $1 : x < 0.$

5.5: Aus 4.6 "$-1 : (-y) < 0$" und
aus 1.5 "$-1 : (-y) = \ldots = 1 : y$"
folgt: $1 : y < 0.$

6.c): Aus 5.1 "$1 : x \in \mathbb{R}$" und
aus 5.4 "$1 : x < 0$"
folgt: $\mathbb{R} \ni 1 : x < 0.$

6.d): Aus 5.2 "$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus 5.5 "$1 : y < 0$"
folgt: $\mathbb{R} \ni 1 : y < 0.$

6.e): Aus 5.3 "$1 : y \ldots < \ldots 1 : x$" und
aus 5.4 "$1 : x < 0$"
folgt: $1 : y < 1 : x < 0.$

□

148-5. Interessanter Weise ist $0 < x < y \in \mathbb{R}$ äquivalent zu $0 < 1 : y < 1 : x$:

148-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 < x < y \in \mathbb{R}$.

`ii)` $0 < 1 : y < 1 : x$.

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **148-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x < y \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich “$0 < x < y \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-4**: $0 < 1 : y < 1 : x$.

<u>Beweis **148-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < 1 : y < 1 : x.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 < 1 : y \ldots$”
folgt via **148-1**: $0 < y \in \mathbb{R}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 < 1 : y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots 1 : y < 1 : x$”
folgt via **107-8**: $0 < 1 : x.$

`2.1:` Aus `1.1`“$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}.$

`2.2:` Aus `2.2`“$0 < 1 : x$”
folgt via **148-1**: $0 < x \in \mathbb{R}.$

`3.1:` Aus `2.1`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-1**: $y = 1 : (1 : y).$

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots x \in \mathbb{R}$”
folgt via **137-6**: $1 : x \in \mathbb{R}.$

`3.3:` Aus `2.2`“$\ldots x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}.$

`4.1:` Aus `VS` gleich “$0 < 1 : y < 1 : x$” und
aus `3.2`“$1 : x \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0 < 1 : (1 : x) < 1 : (1 : y).$

`4.2:` Aus `3.3`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-1**: $x = 1 : (1 : x).$

`5:` Aus `4.1`“$\ldots 1 : (1 : x) < 1 : (1 : y)$” und
aus `3.1`“$y = 1 : (1 : y)$”
folgt: $1 : (1 : x) < y.$

`6:` Aus `4.2`“$x = 1 : (1 : x)$” und
aus `5`“$1 : (1 : x) < y$”
folgt: $x < y.$

`7:` Aus `2.2`“$0 < x \ldots$”,
aus `6`“$x < y$” und
aus `1.1`“$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt: $0 < x < y \in \mathbb{R}.$

$\square$

148-6. Es gibt - natürlich - ein Analogon von **148-5** mit $>$ an Stelle von $<$:

148-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathbb{R} \ni x < y < 0$.

`ii)` $1 : y < 1 : x < 0$.

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **148-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathbb{R} \ni x < y < 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni x \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y.$

`1.4:` Via **FS**$-$: gilt: $-1 : (-x) = 1 : x.$

`1.5:` Via **FS**$-$: gilt: $-1 : (-y) = 1 : y.$

`2:` Aus `1.3`"$0 < -y$",
aus `1.2`"$-y < -x$" und
aus `1.1`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-5**: $0 < 1 : (-x) < 1 : (-y).$

`3.1:` Aus `2`"$0 < 1 : (-x) \ldots$"
folgt via **109-16**: $-1 : (-x) < 0.$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots 1 : (-x) < 1 : (-y)$"
folgt via **109-14**: $-1 : (-y) < -1 : (-x).$

`4.1:` $1 : y \stackrel{1.5}{=} -1 : (-y) \stackrel{3.2}{<} -1 : (-x) \stackrel{1.4}{=} 1 : x.$

`4.2:` Aus `3.1`"$-1 : (-x) < 0$" und
aus `1.4`"$-1 : (-x) = 1 : x$"
folgt: $1 : x < 0.$

`5:` Aus `4.1`"$1 : y \ldots < \ldots 1 : x$" und
aus `4.2`"$1 : x < 0$"
folgt: $1 : y < 1 : x < 0.$

<u>Beweis **148-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $1 : y < 1 : x < 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$1 : y < 1 : x \ldots$”
folgt via **109-14**: $-1 : x < -1 : y.$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots 1 : x < 0$”
folgt via **109-16**: $0 < -1 : x.$

`1.3:` Via **FS**$-$: gilt: $-1 : x = 1 : (-x).$

`1.4:` Via **FS**$-$: gilt: $-1 : y = 1 : (-y).$

`2.1:` $1 : (-x) \stackrel{1.3}{=} -1 : x \stackrel{1.1}{<} -1 : y \stackrel{1.4}{=} 1 : (-y).$

`2.2:` Aus `1.2`“$0 < -1 : x$” und
aus `1.3`“$-1 : x = 1 : (-x)$”
folgt: $0 < 1 : (-x).$

`3:` Aus `2.2`“$0 < 1 : (-x)$” und
aus `2.1`“$1 : (-x) \ldots < \ldots 1 : (-y)$”
folgt via **148-5**: $0 < -y < -x \in \mathbb{R}.$

`4.1:` Aus `3`“$0 < -y \ldots$”
folgt via **109-16**: $y < 0.$

`4.2:` Aus `3`“$\ldots - y < -x \ldots$”
folgt via **109-14**: $x < y.$

`4.3:` Aus `3`“$\ldots - x \in \mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{R}.$

`5:` Aus `4.3`“$x \in \mathbb{R}$”,
aus `4.2`“$x < y$” und
aus `4.1`“$y < 0$”
folgt: $\mathbb{R} \ni x < y < 0.$

$\square$

148-7. Es gilt $\mathbb{R} \ni x < 0 < y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $1 : x < 0 < 1 : y$:

148-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathbb{R} \ni x < 0 < y \in \mathbb{R}$.

`ii)` $1 : x < 0 < 1 : y$.

`RECH.`$\le$-**Notation**.

Beweis **148-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathbb{R} \ni x < 0 < y \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni x < 0 \ldots$"
folgt via **148-2**: $1 : x < 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $0 < 1 : y$.

`2:` Aus `1.1`"$1 : x < 0$" und
aus `1.2`"$0 < 1 : y$"
folgt: $1 : x < 0 < 1 : y$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $1 : x < 0 < 1 : y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$1 : x < 0 \ldots$"
folgt via **148-2**: $\mathbb{R} \ni x < 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < 1 : y$"
folgt via **148-1**: $0 < y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathbb{R} \ni x < 0$" und
aus `1.2`"$0 < y \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathbb{R} \ni x < 0 < y \in \mathbb{R}$.

$\square$

148-8. Es gilt $0 < x < 1$ genau dann, wenn $1 < 1 : x$:

148-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 < x < 1$.

`ii)` $1 < 1 : x$.

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **148-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x < 1$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x < 1$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < x < 1 \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$0 < x < 1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-5**: $0 < 1 : 1 < 1 : x$.

`3:` Aus `2`"$\ldots 1 : 1 < 1 : x$" und
aus **139-4**"$1 : 1 = 1$"
folgt: $1 < 1 : x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $1 < 1 : x$.

`1:` Aus **107-6**"$0 < 1$" und
aus `VS` gleich "$1 < 1 : x$"
folgt: $0 < 1 < 1 : x$.

`2:` Aus `1`"$0 < 1 < 1 : x$" und
aus **139-4**"$1 : 1 = 1$"
folgt: $0 < 1 : 1 < 1 : x$.

`3:` Aus `2`"$0 < 1 : 1 < 1 : x$"
folgt via **148-5**: $0 < x < 1 \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `4`
folgt: $0 < x < 1$.

$\square$

148-9. Es gilt $1 < x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $0 < 1 : x < 1$:

148-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $1 < x \in \mathbb{R}$.

`ii)` $0 < 1 : x < 1$.

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **148-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $1 < x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus **107-6**"$0 < 1$ und
aus `VS` gleich "$1 < x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < 1 < x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$0 < 1 < x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-5**: $0 < 1 : x < 1 : 1$.

`3:` Aus `3`"$0 < 1 : x < 1 : 1$" und
aus **123-11**"$1 : 1 = 1$"
folgt: $0 < 1 : x < 1$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 < 1 : x < 1$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < 1 : x < 1$" und
aus **123-11**"$1 : 1 = 1$"
folgt: $0 < 1 : x < 1 : 1$.

`2:` Aus `1`"$0 < 1 : x < 1 : 1$"
folgt via **148-5**: $0 < 1 < x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $1 < x \in \mathbb{R}$.

□

komplex konjugiert. x^{cc}.
cc**-Notation.**

Ersterstellung: 20/09/10 **Letzte Änderung: 25/04/11**

149-1. Gegen Ende von **Suite II** wird nun "komplex konjugiert" in die Essays eingeführt:

149-1(Definition)

1) $x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

2) "$\mathfrak{C}$ **konjugiert komplex** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x^{\mathsf{cc}}.$$

RECH-**Notation**.

149-2. Wenig überraschend ist konjugiert komplex x durch x eindeutig fest gelegt:

149-2(Satz)

a) *x^{cc} konjugiert komplex x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ konjugiert komplex x" und "$\mathfrak{D}$ konjugiert komplex x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **149-2** `a)`

Aus "$x^{\mathsf{cc}} = x^{\mathsf{cc}}$" folgt via **149-1(Def)**: x^{cc} konjugiert komplex x.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ konjugiert komplex x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ konjugiert komplex x).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ konjugiert komplex $x\ldots$"
folgt via **149-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x^{\mathsf{cc}}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ konjugiert komplex x"
folgt via **149-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x^{\mathsf{cc}}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = x^{\mathsf{cc}}$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

149-3. Nun wird ein Kriterium für x^{cc} Zahl gegeben:

149-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Zahl.*

`ii)` x^{cc} *Zahl.*

`iii)` x^{cc} *Menge.*

`iv)` $x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U}$.

Beweis **149-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl" folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via **117-4**: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und aus `2`"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via **96-29**: $(\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$ Zahl.

`4.1:` Via **149-1(Def)** gilt: $x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4.2:` Via **110-8** gilt: $(\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$.

`5:` Aus `4.1`"$x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$" und aus `4.2`"$(\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$" folgt: $x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$.

`6:` Aus `5`"$x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$" und aus `3`"$(\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$ Zahl" folgt: x^{cc} Zahl.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich x^{cc} Zahl.

Aus `VS` gleich "x^{cc} Zahl" folgt via **95-6**: x^{cc} Menge.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich x^{cc} Menge.

Aus `VS` gleich "x^{cc} Menge" folgt via **0-17**: $x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U}$.

Beweis **149-3** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U}$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:` $x^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{2}{=} \mathcal{U} - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) = \mathcal{U} + (-\mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Es gilt `3` "$x^{\mathsf{cc}} = \ldots = \mathcal{U}$".
Es gilt `VS` "$x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: x Zahl.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x Zahl.

$\square$

149-4. Aus **149-3** folgt ein Kriterium für $x^{\mathsf{cc}} \notin \mathbb{A}$:

149-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \notin \mathbb{A}$.

`ii)` $x^{\mathsf{cc}} \notin \mathbb{A}$.

`iii)` x^{cc} *Unmenge.*

`iv)` $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

Beweis **149-4**

`1.1:` Via **149-3** gilt : $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U})$.

`1.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U})$.

`2.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{A})$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\neg(x \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (\neg(x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (\neg(x^{\mathsf{cc}} \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(x^{\mathsf{cc}} \neq \mathcal{U}))$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$.

□

149-5. Es gilt $0^{\mathsf{cc}} = 0$, $\mathcal{U}^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$, $1^{\mathsf{cc}} = 1$, $\mathsf{i}^{\mathsf{cc}} = -\mathsf{i}$ und es gilt x^{cc} Zahl oder $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$:

149-5(Satz)

a) $0^{\mathsf{cc}} = 0$.

b) $\mathcal{U}^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

c) $1^{\mathsf{cc}} = 1$.

d) $\mathsf{i}^{\mathsf{cc}} = -\mathsf{i}$.

e) $(-\mathsf{i})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{i}$.

f) *"x^{cc} Zahl" oder "$x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **149-5**

`REIM`-**Notation**.

---

a)

1:

$$0^{\mathsf{cc}} \stackrel{\text{149-1(Def)}}{=} (\mathsf{Re}0) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}0) \stackrel{\text{AAIII}}{=} 0 - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}0) \stackrel{\text{110-8}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}0) \stackrel{\text{98-12}}{=} \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}0) \stackrel{\text{AAIII}}{=} \mathsf{i} \cdot (-0) \stackrel{\text{98-15}}{=} \mathsf{i} \cdot 0 \stackrel{\text{98-18}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $0^{\mathsf{cc}} = 0$.

Beweis **149-5** `b)`

`1:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **149-4**: $\mathcal{U}^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`c)`

`1:`
$$1^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} (\mathsf{Re}1) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}1) \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} 1 - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}1) \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} 1 - \mathsf{i} \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-18}}{=} 1 - 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 1 + 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 1.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $1^{\mathsf{cc}} = 1$.

`d)`

`1:`
$$\mathsf{i}^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-5(Def)}}{=} (\mathsf{Re}\mathsf{i}) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}\mathsf{i}) \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0 - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}\mathsf{i}) \stackrel{\mathbf{110-8}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}\mathsf{i}) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}\mathsf{i}) \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} \mathsf{i} \cdot (-1) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -\mathsf{i} \cdot 1 \stackrel{\mathbf{114-11}}{=} -\mathsf{i}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{i}^{\mathsf{cc}} = -\mathsf{i}$.

Beweis **149-5** e)

1:

$$(-\mathsf{i})^{\mathsf{cc}}$$

$$\stackrel{\mathbf{149-5(Def)}}{=} \mathsf{Re}(-\mathsf{i}) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-\mathsf{i})$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Rei}) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-\mathsf{i})$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Rei}) - \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Imi})$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} (-0) - \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Imi})$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0 - \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Imi})$$

$$\stackrel{\mathbf{110-8}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Imi})$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Imi})$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} \mathsf{i} \cdot 1$$

$$\stackrel{\mathbf{114-11}}{=} \mathsf{i}.$$

2: Aus 1
folgt:

$$(-\mathsf{i})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{i}.$$

Beweis **149-5** `f)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **149-3**: x^{cc} Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **149-4**: $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$.

□

149-6. Auch diese Gleichungen überraschen wenig:

149-6(Satz)

a) $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

b) $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

c) $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})$.

d) $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})$.

e) $x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **149-6** `ab)`

`1.1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"x Zahl" folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3:` Aus 2"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via **117-4**: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus 2"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und aus 3"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)) = \mathsf{Re}x$.

`4.2:` Aus 2"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und aus 3"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)) = -\mathsf{Im}x$.

`4.3:` Via **110-8** gilt: $(\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$.

`5:` Aus "$x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$" und aus `4.3`"$(\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$" folgt: $x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$.

`6.1:` Aus 5"$x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$" und aus `4.1`"$\mathsf{Re}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)) = \mathsf{Re}x$" folgt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`6.2:` Aus 5"$x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$" und aus `4.2`"$\mathsf{Im}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)) = -\mathsf{Im}x$" folgt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`7:` Aus `6.1` und aus `6.2` folgt: $(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x)$.

...

Beweis **149-6** `ab)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **149-4**: $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`2.3:` Aus `1.1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3.1:` $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{Re}x$.

`3.2:` $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{2.3}{=} -\mathsf{Im}x$.

`4:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \ldots = \mathsf{Re}x$” und
aus `3.2`“$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = \ldots = -\mathsf{Im}x$”
folgt: $(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` “$(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x)$”

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})$.

<u>Beweis **149-6**</u> `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x.$

`2:` $\mathsf{Im}x \overset{\mathbf{100-4}}{=} -(-\mathsf{Im}x) \overset{1}{=} -\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}).$

`3:` Aus `2` folgt: $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}).$

`e)`

`1:`

$$
\begin{aligned}
& x^{\mathsf{cc}} \\
& \overset{\mathbf{149-1(Def)}}{=} (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \\
& \overset{\mathtt{c)}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \\
& \overset{\mathbf{110-8}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x) \\
& \overset{\mathtt{b)}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}).
\end{aligned}
$$

`2:` Aus `1` folgt: $x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}).$

$\square$

149-7. Es gilt $x = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$ genau dann, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$:

149-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x$.

`ii)` *"x Zahl" oder "$x = \mathcal{U}$".*

Beweis **149-7**

`REIM.RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall` folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **149-4**: $x^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$.

`3:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3`"$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$" folgt via **149-4**: $\mathcal{U}^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `2`"$x^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$" und aus `4`"$\mathcal{U}^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$" folgt: $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x$" und aus `5`"$(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$" folgt: $x = \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6` folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \in \mathcal{U})$.

Beweis **149-7** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

1: Nach VS gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ x Zahl.

2: Aus 1.1.Fall "x Zahl" folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

3:
$$x \stackrel{2}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-(-\mathsf{Im}x)) \stackrel{\mathbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot (-(-\mathsf{Im}x)) \stackrel{\mathbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) \stackrel{\mathbf{110-8}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}.$$

4: Aus 3 folgt: $x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

5: Aus 4 folgt: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = \mathcal{U}$.

2: Aus **149-5** "$\mathcal{U}^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$" folgt: $(\mathcal{U}^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}^{\mathsf{cc}}$.

3: $x \stackrel{\mathbf{1.2.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} \mathcal{U}^{\mathsf{cc}} \stackrel{2}{=} (\mathcal{U}^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{1.2.Fall}}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

4: Aus 3 folgt: $x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

5: Aus 4 folgt: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

□

149-8. Zur Vorbereitung des Beweises von **149-10** wird nun ein Kriterium für $x = -x$ mit $x \in \mathbb{T}$ gegeben:

149-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x = -x$" und "$x \in \mathbb{T}$".*

`ii)` *"$x = 0$" oder "$x = \mathsf{nan}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **149-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(x = -x) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

1: Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

2: Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

3: Aus 2 "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x = -x$"
folgt via **FS**$-$: $x + x = 0$.

4: Aus 3 "$x + x = 0$"
folgt via **127-1**: $x = 0$.

5: Aus 4
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

2: Nach `VS` gilt: $x = -x$.

3: $+\infty \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} x \stackrel{2}{=} -x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} -(+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\infty$.

4: Es gilt 3 "$+\infty = \ldots = -\infty$".
Via **107-6** gilt "$-\infty \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

2: Nach `VS` gilt: $x = -x$.

3: $-\infty \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} x \stackrel{2}{=} -x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} -(-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

4: Es gilt 3 "$-\infty = \ldots = +\infty$".
Via **107-6** gilt "$-\infty \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.4.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

Aus `1.4.Fall`
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Beweis **149-8** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

1: Nach VS gilt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$x = 0$" und
aus **98-15** "$-0 = 0$"
folgt: $-x = x$.

2.2: Aus 1.1.Fall "$x = 0$" und
aus **95-12** "$0 \in \mathbb{T}$"
folgt: $x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2.1 "$-x = x$" und
aus 2.2 "$x \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x = -x) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

1.2.Fall $x = \mathsf{nan}$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$x = \mathsf{nan}$" und
aus **AAVI** "$-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $-x = x$.

2.2: Aus 1.2.Fall "$x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2.1 "$-x = x$" und
aus 2.2 "$x \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x = -x) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x = -x) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

$\square$

149-9. Basierend auf **149-8** wird nun ein Kriterium für $x = -x$ gegeben:

149-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = -x$.

`ii)` "$x = 0$" *oder* "$x = \mathsf{nan}$"
oder "$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" *oder* "$x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" *oder* "$x = \mathcal{U}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **149-9**

`REIM`-**Notation**.

`i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x = -x$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x = -x$"
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}(-x)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$x = -x$"
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}(-x)$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}(-x)$" und
aus **96-27**"$\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$"
folgt: $\mathsf{Re}x = -\mathsf{Re}x$.

`3.2:` Aus `2.3`"$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}(-x)$" und
aus **96-27**"$\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$"
folgt: $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}x$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x = -\mathsf{Re}x$" und
aus `2.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **149-8**: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}x$" und
aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-8**: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0) \\ \vee & (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \\ \vee & (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = 0) \\ \vee & (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **149-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = -x$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

6: Aus `5.1.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$” und
aus `5.1.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **96-31**: $x = 0$.

7: Aus 6
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`5.2.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

6: Aus `5.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

7: Aus 6“$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$” und
aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$”
folgt: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

8: Aus 7
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

...

Beweis **149-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $x = -x$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ x Zahl.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

6: Aus 5.3.Fall"$\dots \mathsf{Im}x = 0 \dots$"
folgt via **130-3**: $x = \mathsf{Re}x$.

7: Aus 6"$x = \mathsf{Re}x$" und
aus 5.3.Fall"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \dots$"
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

8: Aus 7
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{5.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

6: Aus 1.1.Fall"x Zahl"
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

7: Aus 6"$x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus 5.4.Fall"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \dots$"
folgt: $x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

8: Aus 7"$x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus 5.4.Fall"$\dots \mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt: $x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

9: Aus 8
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

...

Beweis **149-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = -x$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x = -x$" und
aus `2`"$-x = \mathcal{U}$"
folgt: $x = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x = 0$" und
aus **98-15**"$-0 = 0$"
folgt: $-x = x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x = -x$.

...

<u>Beweis **149-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x = \mathsf{nan}$” und
aus **AAVI**“$-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $-x = x$.

`3:` Aus 2
folgt: $x = -x$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` $x \stackrel{\texttt{1.3.Fall}}{=} \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\texttt{1.3.Fall}}{=} -x$.

`3:` Aus 2
folgt: $x = -x$.

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:`
$$\begin{aligned} &x \\ \stackrel{\texttt{1.4.Fall}}{=}\ &\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \\ \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\ &(-\mathsf{nan}) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{nan}) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ &(-\mathsf{nan}) + (-\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \\ =\ &(-\mathsf{nan}) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \\ =\ &-\mathsf{nan} - \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \\ \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ &-(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \\ \stackrel{\texttt{1.4.Fall}}{=}\ &-x. \end{aligned}$$

`3:` Aus 2
folgt: $x = -x$.

...

Beweis **149-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$
$(x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.5.Fall}}$ $x = \mathcal{U}$.

2: Aus 1.5.Fall "$x = \mathcal{U}$" und
aus **96-19** "$-\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $-x = x$.

3: Aus 2
folgt: $x = -x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x = -x$.

□

149-10. Die Gleichung $x = x^{\mathsf{cc}}$ gilt genau dann, wenn $x = \mathcal{U}$ oder $x \in \mathbb{T}$ oder $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$:

149-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`ii)` *"*$x \in \mathbb{T}$*" oder "*$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$*" oder "*$x = \mathcal{U}$*".*

`REIM`-**Notation**.

Beweis **149-10**

`RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = x^{\mathsf{cc}}$" folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})$.

`2:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})$" und aus `2`"$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$" folgt: $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}x$.

`4:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **149-10** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x = x^{\mathsf{cc}}$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` x Zahl.

5: Aus `4.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

6: Aus 3“$\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}x$” und
aus 5“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **149-8**: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $\mathsf{Im}x = 0$.

7: Aus `6.1.Fall`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

8: Aus 7
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`6.2.Fall` $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

Aus `6.2.Fall`
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

Beweis **149-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = x^{\mathsf{cc}}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

`5:` Aus `4.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **149-4**: $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$x = x^{\mathsf{cc}}$" und
aus `5` "$x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$"
folgt: $x = \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **149-10** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im} x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im} x = 0$.

`3:` Aus `2.1`“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re} x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im} x)$.

`4:`
$$
\begin{aligned}
& x \\
\stackrel{3}{=}\ & (\mathsf{Re} x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im} x) \\
\stackrel{2.2}{=}\ & (\mathsf{Re} x) + \mathsf{i} \cdot 0 \\
\stackrel{\mathbf{98-15}}{=}\ & (\mathsf{Re} x) + \mathsf{i} \cdot (-0) \\
\stackrel{2.2}{=}\ & (\mathsf{Re} x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im} x) \\
\stackrel{\mathbf{110-8}}{=}\ & (\mathsf{Re} x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im} x) \\
\stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=}\ & x^{\mathsf{cc}}.
\end{aligned}
$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

...

Beweis **149-10** $\boxed{\boxed{\texttt{ii) ⇒ i)}}}$ `VS` gleich $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

2: Aus `1.w.Fall`“$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$” folgt via **95-16**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” folgt via **96-9**: x Zahl.

4: Aus 3“x Zahl” folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

5:
$$x \stackrel{3}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{nan}) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{110-8}}{=} (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} x^{\mathsf{cc}}.$$

5: Aus 4 folgt: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`1.3.Fall` $x = \mathcal{U}$.

2: Aus **149-5**“$\mathcal{U}^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$” und aus `1.3.Fall`“$x = \mathcal{U}$” folgt: $x^{\mathsf{cc}} = x$.

3: Aus 2 folgt: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

□

cc-Notation. Es werden die üblichen Notationen im Umgang mit konjugiert Komplexen in die Essays eingeführt. Hierbei sind unter anderem “ $-x^{\mathtt{cc}}$” und “ $(-x)^{\mathtt{cc}}$” voneinander zu unterscheiden:

cc-Notation

1) $-x^{\mathtt{cc}} = -(x^{\mathtt{cc}})$.

2) $x + y^{\mathtt{cc}} = x + (y^{\mathtt{cc}})$.

3) $x^{\mathtt{cc}} + y = (x^{\mathtt{cc}}) + y$.

4) $x^{\mathtt{cc}} + y^{\mathtt{cc}} = (x^{\mathtt{cc}}) + (y^{\mathtt{cc}})$.

5) $x - y^{\mathtt{cc}} = x - (y^{\mathtt{cc}})$.

6) $x^{\mathtt{cc}} - y = (x^{\mathtt{cc}}) - y$.

7) $x^{\mathtt{cc}} - y^{\mathtt{cc}} = (x^{\mathtt{cc}}) - (y^{\mathtt{cc}})$.

8) $x \cdot y^{\mathtt{cc}} = x \cdot (y^{\mathtt{cc}})$.

9) $x^{\mathtt{cc}} \cdot y = (x^{\mathtt{cc}}) \cdot y$.

10) $x^{\mathtt{cc}} \cdot y^{\mathtt{cc}} = (x^{\mathtt{cc}}) \cdot (y^{\mathtt{cc}})$.

11) $x : y^{\mathtt{cc}} = x : (y^{\mathtt{cc}})$.

12) $x^{\mathtt{cc}} : y = (x^{\mathtt{cc}}) : y$.

13) $x^{\mathtt{cc}} : y^{\mathtt{cc}} = (x^{\mathtt{cc}}) : (y^{\mathtt{cc}})$.

RECH-Notation.

149-11. Die Gleichung $x = -x^{\mathsf{cc}}$ gilt genau dann, wenn $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$ oder $x = \mathcal{U}$. Die Gleichung $-x = x^{\mathsf{cc}}$ gilt genau dann, wenn $x \notin \mathbb{A}$ oder $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$. Aus $x = -x^{\mathsf{cc}}$ folgt $-x = x^{\mathsf{cc}}$. Dass hier keine Äquivalent vorliegt, wird in **149-12,13** thematisiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

149-11(Satz)

`a)` *“$x = -x^{\mathsf{cc}}$” genau dann, wenn*
“$\mathsf{Re}x = 0$” *oder* “$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$” *oder* “$x = \mathcal{U}$”.

`b)` *“$-x = x^{\mathsf{cc}}$” genau dann, wenn*
“$x \notin \mathbb{A}$” *oder* “$\mathsf{Re}x = 0$” *oder* “$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$”.

`c)` *Aus “$x = -x^{\mathsf{cc}}$” folgt “$-x = x^{\mathsf{cc}}$”.*

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **149-11** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x = -x^{\mathsf{cc}}$.

`1:` $\mathsf{Re}x \overset{\mathbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \overset{\mathbf{100-4}}{=} -(-\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) \overset{\mathbf{96-27}}{=} -\mathsf{Re}(-x^{\mathsf{cc}}) \overset{\mathtt{VS}}{=} -\mathsf{Re}x$.

`2:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` x Zahl.

`3:` Aus `2.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `1`“$\mathsf{Re}x = \ldots = -\mathsf{Re}x$” und
aus `3`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **149-8**: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

Beweis **149-11** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x=-x^{cc}$.

...

Fallunterscheidung

...

2.2.Fall $x\notin\mathbb{A}$.

3: Aus 2.2.Fall "$x\notin\mathbb{A}$" folgt via **149-4**: $x^{cc}=\mathcal{U}$.

4: $x\stackrel{\text{VS}}{=}-x^{cc}\stackrel{3}{=}-\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{96-9}}{=}\mathcal{U}$.

5: Aus 4 "$x=\ldots=\mathcal{U}$" folgt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(\mathsf{Re}x=\mathsf{nan})\vee(x=\mathcal{U})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(\mathsf{Re}x=\mathsf{nan})\vee(x=\mathcal{U})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(\mathsf{Re}x=0)\vee(\mathsf{Re}x=\mathsf{nan})\vee(x=\mathcal{U})$.

1: Nach VS gilt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(\mathsf{Re}x=\mathsf{nan})\vee(x=\mathcal{U})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\mathsf{Re}x=0$.

2: Aus 1.1.Fall "$\mathsf{Re}x=0$" folgt via **127-4**: x Zahl.

3: Aus 2 "x Zahl" folgt via **96-24**: $x=(\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$.

4:
$$x\stackrel{3}{=}(\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}-(-(\mathsf{Re}x)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))\stackrel{\text{1.1.Fall}}{=}-(-0-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))\stackrel{\mathbf{98-15}}{=}-(0-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))\stackrel{\text{1.1.Fall}}{=}-((\mathsf{Re}x)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))\stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=}-x^{cc}.$$

5: Aus 4 folgt: $x=-x^{cc}$.

...

Beweis **149-11** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

2: Aus 1.2.Fall“$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-16**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **96-9**: x Zahl.

4: Aus 3“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

5:
$$\begin{aligned} & x \\ \stackrel{3}{=} \; & (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} \; & -(-(\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \; & -(-\mathsf{nan} - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \; & -(\mathsf{nan} - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \; & -((\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} \; & -x^{\mathsf{cc}}. \end{aligned}$$

5: Aus 4
folgt: $x = -x^{\mathsf{cc}}$.

1.3.Fall $x = \mathcal{U}$.

2: $x \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} -\mathcal{U}^{\mathsf{cc}} \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} -x^{\mathsf{cc}}$.

3: Aus 2
folgt: $x = -x^{\mathsf{cc}}$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $x = -x^{\mathsf{cc}}$.

<u>Beweis **149-11**</u> `c)` `VS` gleich $x = -x^{\mathsf{cc}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = -x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $-x = -(-x^{\mathsf{cc}})$.

`2:` Via **149-5** gilt: $(x^{\mathsf{cc}}\ \text{Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2`"$(x^{\mathsf{cc}}\ \text{Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$"
folgt via **FS**$--$: $-(-x^{\mathsf{cc}}) = x^{\mathsf{cc}}$.

`4:` Aus `1`"$-x = -(-x^{\mathsf{cc}})$" und
aus `3`"$-(-x^{\mathsf{cc}}) = x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $-x = x^{\mathsf{cc}}$.

<u>Beweis **149-11**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-x = x^{\mathsf{cc}}$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`3:` Aus `2` "$-(-x) = x$" und
aus `VS` gleich "$-x = x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $-x^{\mathsf{cc}} = x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x = -x^{\mathsf{cc}}$.

`5:` Aus `4` "$x = -x^{\mathsf{cc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

Aus `5.1.Fall`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`5.2.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`6:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`7:` Aus `5.2.Fall` "$x = \mathcal{U}$" und
aus `6` "$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

...

Beweis **149-11** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $-x = x^{cc}$.

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

Aus 1.2.Fall
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathrm{Re}x = 0) \vee (\mathrm{Re}x = \mathrm{nan})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathrm{Re}x = 0) \vee (\mathrm{Re}x = \mathrm{nan})$.

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathrm{Re}x = 0) \vee (\mathrm{Re}x = \mathrm{nan})$.

1: Nach VS gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (\mathrm{Re}x = 0) \vee (\mathrm{Re}x = \mathrm{nan})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.1.Fall "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **149-4**: $x^{cc} = \mathcal{U}$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $-x = x^{cc}$.

1.2.Fall $(\mathrm{Re}x = 0) \vee (\mathrm{Re}x = \mathrm{nan})$.

2: Aus 1.2.Fall "$(\mathrm{Re}x = 0) \vee (\mathrm{Re}x = \mathrm{nan})$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $x = -x^{cc}$.

3: Aus 2 "$x = -x^{cc}$"
folgt via des bereits bewiesenen c): $-x = x^{cc}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $-x = x^{cc}$.

□

149-12. Wie vorab zu **149-11** erwähnt und wie durch das nachfolgende Beispiel **149-13** belegt, kann die Implikation von **149-11**`c)` nicht ohne Weiteres in eine Äquivalenz verwandelt werden:

149-12.Bemerkung

- Die Aussage
  “$(-x = x^{\mathsf{cc}}) \Rightarrow (x = -x^{\mathsf{cc}})$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(x = -x^{\mathsf{cc}}) \Leftrightarrow (-x = x^{\mathsf{cc}})$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

149-13. Wie an Hand vorliegenden Beispiels klar gemacht wird, kann die Implikation von **149-11**`c)` nicht ohne Weiteres in eine Äquivalenz verwandelt werden:

149-13.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Dann folgt:

`a)` $-x = \mathcal{U}$.

`b)` $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`c)` $-x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`d)` $-x = x^{\mathsf{cc}}$.

`e)` $x \neq -x^{\mathsf{cc}}$.

Ad `e)`: Via **6-12** gilt $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

149-14. Nun werden vertraute Formeln im Umgang mit komplex konjugierten Klassen unter Vorzeichenwechsel bewiesen:

149-14(Satz)

a) $-x^{\mathtt{cc}} = (-x)^{\mathtt{cc}}$.

b) $-(-x^{\mathtt{cc}}) = x^{\mathtt{cc}}$.

c) $-(-x)^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}}$.

d) $(-(-x))^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}}$.

e) $((-x)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = -x$.

f) $(-x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = -x$.

g) $-(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = -x$.

h) $((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}}$.

`RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **149-14**

`REIM`-**Notation**.

`a)`

`1:` $$-x^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\textbf{149-1(Def)}}{=} -((\mathsf{Re}x) - \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -(\mathsf{Re}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\textbf{96-27}}{=} \mathsf{Re}(-x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\textbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}((-x)^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\textbf{100-4}}{=} \mathsf{Re}((-x)^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i}\cdot(-(-\mathsf{Im}x))$$
$$\stackrel{\textbf{96-27}}{=} \mathsf{Re}((-x)^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Im}(-x))$$
$$\stackrel{\textbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}((-x)^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}((-x)^{\mathsf{cc}})$$
$$\stackrel{\textbf{149-6}}{=} (-x)^{\mathsf{cc}}.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$-x^{\mathsf{cc}} = (-x)^{\mathsf{cc}}.$$

`bc)`

`1:` Via **149-5** gilt: $$(x^{\mathsf{cc}}\text{ Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}).$$

`2.b):` Aus `1` “$(x^{\mathsf{cc}}$ Zahl$) \vee (x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U})$” folgt via **FS**−−: $$-(-x^{\mathsf{cc}}) = x^{\mathsf{cc}}.$$

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $$-x^{\mathsf{cc}} = (-x)^{\mathsf{cc}}.$$

`4.c):` Aus `2.b)` “$-(-x^{\mathsf{cc}}) = x^{\mathsf{cc}}$” und aus `3` “$-x^{\mathsf{cc}} = (-x)^{\mathsf{cc}}$” folgt: $$-(-x)^{\mathsf{cc}} = x^{\mathsf{cc}}.$$

Beweis **149-14** `d)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **FS−−**: $-(-x) = x$.

`3:` Aus 2“$-(-x) = x$”
folgt: $(-(-x))^{\mathsf{cc}} = x^{\mathsf{cc}}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **149-4**: $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`3:` $(-(-x))^{\mathsf{cc}} \stackrel{2.1}{=} (-\mathcal{U})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} x^{\mathsf{cc}}$.

`4:` Aus 3
folgt: $(-(-x))^{\mathsf{cc}} = x^{\mathsf{cc}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(-(-x))^{\mathsf{cc}} = x^{\mathsf{cc}}$.

`e)`

`1:` Aus **126-1**“$(-x \text{ Zahl}) \vee (-x = \mathcal{U})$”
folgt via **149-7**: $-x = ((-x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`2:` Aus 1
folgt: $((-x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = -x$.

`f)`

`1:` $(-x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{a)}}{=} ((-x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{e)}}{=} -x$.

`2:` Aus 2
folgt: $(-x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = -x$.

Beweis **149-14** `g)`

`1:` $$-(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \stackrel{\mathtt{a)}}{=} (-x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \stackrel{\mathtt{f)}}{=} -x.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = -x.$$

`h)`

`1:` Via **149-5** gilt: $$(x^{\mathtt{cc}}\ \text{Zahl}) \vee (x^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}).$$

`2:` Aus `1` “ $(x^{\mathtt{cc}}\ \text{Zahl}) \vee (x^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U})$ ”
folgt via **149-7**: $$x^{\mathtt{cc}} = ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}}.$$

□

149-15. Nun werden vertraute Formeln im Umgang mit komplex konjugierten Klassen und ab2 bewiesen:

149-15(Satz)

a) $\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{ab2}(x)$.

b) $(\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

c) $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

d) $\mathsf{ab2}((\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

e) $(\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

f) $\mathsf{ab2}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{ab2}(x)$.

g) $(\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

h) $((\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

RECH.cc-**Notation**.

Beweis **149-15**

REIM-**Notation**.

---

a)

1:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}})\\
&\overset{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \cdot \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\\
&\overset{\mathbf{149-6}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\\
&\overset{\mathbf{149-6}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (-\mathsf{Im}x)\\
&\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\overset{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(x).
\end{aligned}$$

2: Aus 1 folgt: $\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{ab2}(x)$.

<u>Beweis **149-15**</u> `b)`

Aus **128-14** "$(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$"
folgt via **149-10**: $(\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`c)`

1: $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}})) \stackrel{\mathrm{a)}}{=} \mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) \stackrel{\mathbf{128-15}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

`d)`

1: $\mathsf{ab2}((\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathrm{b)}}{=} \mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) \stackrel{\mathbf{128-15}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{ab2}((\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

`e)`

1: $(\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathrm{b)}}{=} \mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) \stackrel{\mathbf{128-5}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1
folgt: $(\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

`f)`

1: $\mathsf{ab2}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathrm{a)}}{=} \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathrm{a)}}{=} \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{ab2}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{ab2}(x)$.

`g)`

1: $(\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathrm{b)}}{=} \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathrm{a)}}{=} \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1
folgt: $(\mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`h)`

1: $((\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathrm{b)}}{=} (\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathrm{b)}}{=} \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1
folgt: $((\mathsf{ab2}(x))^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

$\square$

149-16. Nun werden vertraute Formeln im Umgang mit komplex konjugierten Klassen und rez bewiesen:

149-16(Satz)

a) $1 : x^{\mathtt{cc}} = (1 : x)^{\mathtt{cc}}$.

b) $1 : (1 : x^{\mathtt{cc}}) = (1 : (1 : x))^{\mathtt{cc}}$.

c) $1 : (1 : x)^{\mathtt{cc}} = (1 : (1 : x))^{\mathtt{cc}}$.

d) $1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) = 1 : x$.

e) $(1 : x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = 1 : x$.

f) $((1 : x)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = 1 : x$.

RECH.cc-**Notation**.

Beweis **149-16**

`REIM`-**Notation**.

---

a)

1: $$(1:x)^{\mathsf{cc}}$$

$$\overset{\mathbf{149-1(Def)}}{=} \mathsf{Re}(1:x) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(1:x)$$

$$\overset{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(1:x)$$

$$\overset{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) - \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$$

$$\overset{\mathbf{149-15}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) - \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) - \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{110-8}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{149-6}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) : \mathsf{ab2}(x^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{123-9}}{=} 1 : x^{\mathsf{cc}}.$$

2: Aus 1
folgt: $$(1:x)^{\mathsf{cc}} = 1 : x^{\mathsf{cc}}.$$

3: Aus 2
folgt: $$1 : x^{\mathsf{cc}} = (1:x)^{\mathsf{cc}}.$$

b)

1: $$1 : (1 : x^{\mathsf{cc}}) \overset{\mathsf{a)}}{=} 1 : (1:x)^{\mathsf{cc}} \overset{\mathsf{a)}}{=} (1 : (1:x))^{\mathsf{cc}}.$$

2: Aus 1
folgt: $$1 : (1 : x^{\mathsf{cc}}) = (1 : (1:x))^{\mathsf{cc}}.$$

c)

1: $$1 : (1:x)^{\mathsf{cc}} \overset{\mathsf{a)}}{=} (1 : (1:x))^{\mathsf{cc}}.$$

2: Aus 1
folgt: $$1 : (1:x)^{\mathsf{cc}} = (1 : (1:x))^{\mathsf{cc}}.$$

Beweis **149-16** `d)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl" folgt via **149-7**: $x = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$.

`3:` Aus 2 "$x = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$" folgt: $1 : x = 1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}})$.

`4:` Aus `3` folgt: $1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) = 1 : x$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $1 : x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **149-4**: $x^{\mathtt{cc}} = \mathcal{U}$.

`3:` $1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) \stackrel{2.2}{=} 1 : \mathcal{U}^{\mathtt{cc}} \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} 1 : \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.1}{=} 1 : x$.

`4:` Aus `3` folgt: $1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) = 1 : x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) = 1 : x$.

`e)`

`1:` $(1 : x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \stackrel{\mathtt{a)}}{=} 1 : ((x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) \stackrel{\mathtt{d)}}{=} 1 : x$.

`2:` Aus `1` folgt: $(1 : x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = 1 : x$.

`f)`

`1:` $((1 : x)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \stackrel{\mathtt{a)}}{=} (1 : x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \stackrel{\mathtt{e)}}{=} 1 : x$.

`2:` Aus `1` folgt: $((1 : x)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) = 1 : x$.

□

149-17. Nun werden vertraute Formeln im Umgang mit komplex konjugierten Klassen und Re bewiesen:

149-17(Satz)

a) $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

b) $(\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$

c) $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{Re}x.$

d) $\mathsf{Re}((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

e) $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$

f) $\mathsf{Re}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

g) $(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$

h) $((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$

`REIM`-**Notation**.

Beweis **149-17** a)

Via **149-6** gilt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

b)

1: Via **126-1** gilt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U}).$

2: Aus 1 “ $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$ ”
folgt via **149-10**: $\mathsf{Re}x = (\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}.$

3: Aus 2
folgt: $(\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$

<u>Beweis **149-17**</u> `c)`

`1:` $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) \stackrel{\mathbf{99-10}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathsf{a)}}{=} \mathsf{Re}x.$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{Re}x.$

`d)`

`1:` $\mathsf{Re}((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathsf{b)}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \stackrel{\mathbf{99-10}}{=} \mathsf{Re}x.$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{Re}((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

`e)`

`1:` $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{b)}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \stackrel{\mathbf{99-10}}{=} \mathsf{Re}x.$

`2:` Aus `1` folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$

`f)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x.$

`3:` Aus `2` folgt: $\mathsf{Re}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}.$

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}.$

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **149-4**: $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}.$

`3:` $\mathsf{Re}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) \stackrel{2.2}{=} \mathsf{Re}(\mathcal{U}^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}x.$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Re}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x.$

Beweis **149-17** g)

1: $$(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{a)}}{=} (\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} \mathsf{Re}x.$$

2: Aus 1
folgt: $$(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$$

h)

1: $$((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} (\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} \mathsf{Re}x.$$

2: Aus 1
folgt: $$((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Re}x.$$

$\square$

149-18. Nun werden vertraute Formeln im Umgang mit komplex konjugierten Klassen und Im bewiesen:

<u>**149-18(Satz)**</u>

a) $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

b) $(\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}x$.

c) $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

d) $\mathsf{Im}((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

e) $(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

f) $\mathsf{Im}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}x$.

g) $(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} = -\mathsf{Im}x$.

h) $((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}x$.

<u>`REIM.RECH`-**Notation**</u>.

Weitere Aussagen über "$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$" sind in **#99** zu finden.

<u>Beweis **149-18**</u> `a)`

Via **149-6** gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`b)`

1: Via **126-1** gilt: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$.

2: Aus 1 "$(\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$"
folgt via **149-10**: $\mathsf{Im}x = (\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}$.

3: Aus 2
folgt: $(\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}x$.

Beweis **149-18** c)

1: $$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) \stackrel{\text{a)}}{=} \mathsf{Im}(-\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{99-13}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x).$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x).$$

d)

1: $$\mathsf{Im}((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\text{b)}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x).$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathsf{Im}((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x).$$

e)

1: $$(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\text{b)}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x).$$

2: Aus 1 folgt: $$(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x).$$

f)

1: Via **95-6** gilt: $$(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

2: Aus 1.1.Fall "x Zahl" folgt via **149-7**: $$(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x.$$

3: Aus 2 folgt: $$\mathsf{Im}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}x.$$

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $$\mathsf{Im}x = \mathcal{U}.$$

2.2: Aus 1.2.Fall "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **149-4**: $$x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}.$$

3: $$\mathsf{Im}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) \stackrel{2.2}{=} \mathsf{Im}(\mathcal{U}^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}x.$$

4: Aus 3 folgt: $$\mathsf{Im}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}x.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $$\mathsf{Im}((x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}x.$$

Beweis **149-18** g)

1: $$(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{a)}}{=} (-\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-14}}{=} -(\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} -\mathsf{Im}x.$$

2: Aus 1
folgt: $$(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))^{\mathsf{cc}} = -\mathsf{Im}x.$$

h)

1: $$((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} (\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{b)}}{=} \mathsf{Im}x.$$

2: Aus 1
folgt: $$((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}x.$$

□

149-19. Nun werden vertraute Formeln im Umgang mit komplex konjugierten Klassen und Re, Im bewiesen:

149-19(Satz)

a) $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) = -\mathsf{Im}x$.

b) $\mathsf{Re}((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}x$.

c) $(\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}x$.

d) $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

e) $\mathsf{Im}((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

f) $(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

`REIM`-**Notation**.

Weitere Aussagen über “$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$” sind in **#99** zu finden.

Beweis **149-19** a)

1: $$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) \overset{\mathbf{149-18}}{=} \mathsf{Re}(-\mathsf{Im}x) \overset{\mathbf{96-27}}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \overset{\mathbf{99-10}}{=} -\mathsf{Im}x.$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) = -\mathsf{Im}x.$$

b)

1: $$\mathsf{Re}((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}) \overset{\mathbf{149-18}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \overset{\mathbf{99-10}}{=} \mathsf{Im}x.$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathsf{Re}((\mathsf{Im}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}x.$$

c)

1: $$(\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x))^{\mathsf{cc}} \overset{\mathbf{149-17}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \overset{\mathbf{99-10}}{=} \mathsf{Im}x.$$

2: Aus 1 folgt: $$(\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}x.$$

Beweis **149-19** d)

1: $$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) \stackrel{\mathbf{149-17}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x).$$

2: Aus 1
folgt: $$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x).$$

e)

1: $$\mathsf{Im}((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{149-17}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x).$$

2: Aus 1
folgt: $$\mathsf{Im}((\mathsf{Re}x)^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x).$$

f)

1: $$(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-18}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x))^{\mathsf{cc}} = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}x).$$

□

149-20. Die Gleichung $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$ ist nicht ohne Weiteres verfügbar:

149-20(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`ii)` *"$x \notin \mathbb{A}$" oder "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$".*

`iii)` *"$x \notin \mathbb{A}$" oder "$x \in \mathbb{C}$" oder "$x \in \mathbb{T}$" oder "$\mathsf{Re}x = 0$".*

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

<u>Beweis **149-20**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl" folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl" folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$" und aus `2.1`"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$" folgt: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und aus `2.2`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$" folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x \cdot x^{\mathsf{cc}}) = 0$.

`5:`
$$
\begin{aligned}
& 0 \\
\stackrel{\mathbf{98-15}}{=}\ & -0 \\
\stackrel{4}{=}\ & -\mathsf{Im}(x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ & -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}))) \\
\stackrel{\mathbf{149-6}}{=}\ & -((\mathsf{Re}x) \cdot (-\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}))) \\
\stackrel{\mathbf{149-6}}{=}\ & -((\mathsf{Re}x) \cdot (-\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & -(-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ & (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ & (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x).
\end{aligned}
$$

`6:` Aus `5`"$0 = \ldots = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

`7:` Aus `6`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$" folgt via **102-5**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$.

...

...

Beweis **149-20** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

...

`8:` Aus `3.2`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$” und
aus `7`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`9:` Aus `8`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.2.Fall`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R})$.

Beweis **149-20** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R})$.

1: Nach `VS` gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

`1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

2: Es gilt: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0) \vee (0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

3: Aus `2.1.Fall` “$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\mathsf{Re}x = 0$.

Aus `3.1.Fall`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

`3.2.Fall` $\mathsf{Im}x = 0$.

4: Aus `3.2.Fall` “$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

5: Aus 4
folgt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

...

...

Beweis **149-20** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` Aus `1.2.Fall`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **ElementAxiom**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ Menge.

`4:` Aus `3`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ Menge”
folgt via **96-15**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{Re}x$ Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `5`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”,
aus `2.2.Fall`“$0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$” und
aus `1.2.Fall`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **131-2**: $(0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`7:` Aus `6`“$\ldots \mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `6`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0).$$

<u>Beweis **149-20**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` $x \cdot x^{\mathsf{cc}} \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{ab2}(x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

...

Beweis **149-20** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \in \mathbb{C}$.

2: Aus `1.2.Fall`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

3: Aus 2"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}\ldots$" und
aus 2"$\ldots\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

4: Aus 3"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$.

5: Aus 4"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

6:
$$\begin{aligned}
& x \cdot x^{\mathsf{cc}} \\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) \\
& +\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})) \\
\stackrel{\mathbf{149-6}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})) \\
& +\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{149-6}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Im}x)\cdot(-\mathsf{Im}x))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(-\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x))) \\
& +\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (-\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ & ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(-\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{96-22}}{=}\ & \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (-\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}x) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}x) \\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ & \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ & \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \\
\stackrel{5}{=}\ & \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot 0 \\
\stackrel{\mathbf{98-18}}{=}\ & \mathsf{ab2}(x) + 0 \\
\stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\ & \mathsf{ab2}(x).
\end{aligned}$$

...

...

Beweis **149-20** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{C}) \vee (x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \in \mathbb{C}$.

...

7: Aus 6
folgt: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $x \in \mathbb{T}$.

2.1: Aus 1.3.Fall"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

2.2: Aus 1.3.Fall"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

3: Aus 2.2"$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{ab2}(x) = x \cdot x$.

4: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} \stackrel{2.1}{=} x \cdot x \stackrel{3}{=} \mathsf{ab2}(x)$.

5: Aus 4
folgt: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $\mathsf{Re}x = 0$.

2.1: Aus 1.4.Fall"$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **149-11**: $-x = x^{\mathsf{cc}}$.

2.2: Aus 1.4.Fall"$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{ab2}(x) = -x \cdot x$.

3: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} \stackrel{2.1}{=} x \cdot (-x) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -x \cdot x \stackrel{2.2}{=} \mathsf{ab2}(x)$.

4: Aus 3
folgt: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

$\square$

149-21. Nun werden einige vertraute “additive” Formeln mit konjugiert Komplexem etabliert:

149-21(Satz)

a) $(x+y)^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}} + y^{\mathtt{cc}}$.

b) $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} + y = x + y$.

c) $x + (y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x + y$.

d) $(x^{\mathtt{cc}} + y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x + y$.

e) $((x+y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x + y$.

f) $(x-y)^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}} - y^{\mathtt{cc}}$.

g) $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} - y = x - y$.

h) $x - (y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x - y$.

i) $(x^{\mathtt{cc}} - y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x - y$.

j) $((x-y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x - y$.

`RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **149-21**

REIM-Notation.

---

a)

1:
$$(x+y)^{\mathsf{cc}}$$
$$\overset{\mathbf{149-1(Def)}}{=} \mathsf{Re}(x+y) - \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x+y)$$
$$\overset{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)) - \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x+y)$$
$$\overset{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)) - \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y))$$
$$\overset{\mathbf{DGi}}{=} ((\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)) - (\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$\overset{\mathbf{103-6}}{=} ((\mathsf{Re}x)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$\overset{\mathbf{149-1(Def)}}{=} x^{\mathsf{cc}} + ((\mathsf{Re}y)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$\overset{\mathbf{149-1(Def)}}{=} x^{\mathsf{cc}} + y^{\mathsf{cc}}.$$

2: Aus 1 folgt:
$$(x+y)^{\mathsf{cc}} = x^{\mathsf{cc}} + y^{\mathsf{cc}}.$$

Beweis **149-21** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **149-7**: $x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`3:` $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + y \stackrel{2}{=} x + y$.

`4:` Aus `3` folgt: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + y = x + y$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **149-4**: $x^{\mathsf{cc}} = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

`3:` $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U}^{\mathsf{cc}} + y \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} \mathcal{U} + y \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} x + y$.

`4:` Aus `3` folgt: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + y = x + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + y = x + y$.

`c)`

`1:` $x + (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + x \stackrel{\mathsf{b)}}{=} y + x \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} x + y$.

`2:` Aus `1` folgt: $x + (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x + y$.

`d)`

`1:` $(x^{\mathsf{cc}} + y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{a)}}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} + (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{b)}}{=} x + (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{c)}}{=} x + y$.

`2:` Aus `1` folgt: $(x^{\mathsf{cc}} + y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x + y$.

Beweis **149-21** `e)`

1: $$((x+y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{a)}}{=} (x^{\mathtt{cc}}+y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{d)}}{=} x+y.$$

2: Aus 1 folgt: $$((x+y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x+y.$$

`f)`

1: $$(x-y)^{\mathtt{cc}}$$
$$= (x+(-y))^{\mathtt{cc}}$$
$$\overset{\mathtt{a)}}{=} x^{\mathtt{cc}}+(-y)^{\mathtt{cc}}$$
$$\overset{\mathbf{149-14}}{=} x^{\mathtt{cc}}+(-y^{\mathtt{cc}})$$
$$= x^{\mathtt{cc}}-y^{\mathtt{cc}}.$$

2: Aus 1 folgt: $$(x-y)^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}}-y^{\mathtt{cc}}.$$

`g)`

1: $$(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}-y = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}+(-y) \overset{\mathtt{b)}}{=} x+(-y) = x-y.$$

2: Aus 1 folgt: $$(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}-y = x-y.$$

`h)`

1: $$x-(y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x+(-(y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}) \overset{\mathbf{149-14}}{=} x+(-y) = x-y.$$

2: Aus 1 folgt: $$x-(y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x-y.$$

`i)`

1: $$(x^{\mathtt{cc}}-y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{f)}}{=} (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}-(y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{g)}}{=} x-(y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{h)}}{=} x-y.$$

2: Aus 1 folgt: $$(x^{\mathtt{cc}}-y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x-y.$$

`j)`

1: $$((x-y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{f)}}{=} (x^{\mathtt{cc}}-y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \overset{\mathtt{i)}}{=} x-y.$$

2: Aus 1 folgt: $$((x-y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x-y.$$

□

149-22. Nun werden einige vertraute “ multiplikative ” Formeln mit konjugiert Komplexem etabliert:

149-22(Satz)

a) $(x \cdot y)^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}} \cdot y^{\mathtt{cc}}$.

b) $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} \cdot y = x \cdot y$.

c) $x \cdot (y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x \cdot y$.

d) $(x^{\mathtt{cc}} \cdot y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x \cdot y$.

e) $((x \cdot y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x \cdot y$.

f) $(x : y)^{\mathtt{cc}} = x^{\mathtt{cc}} : y^{\mathtt{cc}}$.

g) $(x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} : y = x : y$.

h) $x : (y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x : y$.

i) $(x^{\mathtt{cc}} : y^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x : y$.

j) $((x : y)^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}} = x : y$.

`RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **149-22** a)

1:

$$(x\cdot y)^{\mathsf{cc}}$$

$$\overset{\mathbf{149-1(Def)}}{=} \mathsf{Re}(x\cdot y)-\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x\cdot y)$$

$$\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))-\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x\cdot y)$$

$$\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))-\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\overset{\mathbf{149-6}}{=} (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\overset{\mathbf{149-6}}{=} (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}})-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{149-6}}{=} (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}})-(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(\mathsf{Im}y)+(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{149-6}}{=} (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}})-(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot(-\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}})))$$
$$-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(-\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}}))+(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}}))$$
$$-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(-\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}}))+(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot(-\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}}))+(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}})+(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}))\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}})+(-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}})))$$

$$= \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{FS}-+}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})-\mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}})+\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}})))$$

$$\overset{\mathbf{110-8}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Im}(y^{\mathsf{cc}})+\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}})\cdot\mathsf{Re}(y^{\mathsf{cc}}))$$

$$\overset{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}})$$

$$\overset{\mathbf{96-26}}{=} x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}}.$$

2: Aus 1
folgt:

$$(x\cdot y)^{\mathsf{cc}}=x^{\mathsf{cc}}\cdot y^{\mathsf{cc}}.$$

Beweis **149-22** b)

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

2: Aus 1.1.Fall“x Zahl” folgt via **149-7**: $x = (x^{cc})^{cc}$.

3: $(x^{cc})^{cc} \cdot y \stackrel{2}{=} x \cdot y$.

4: Aus 3 folgt: $(x^{cc})^{cc} \cdot y = x \cdot y$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **149-4**: $x^{cc} = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

3: $(x^{cc})^{cc} \cdot y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U}^{cc} \cdot y \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} \mathcal{U} \cdot y \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} x \cdot y$.

4: Aus 3 folgt: $(x^{cc})^{cc} \cdot y = x \cdot y$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x^{cc})^{cc} \cdot y = x \cdot y$.

c)

1: $x \cdot (y^{cc})^{cc} \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (y^{cc})^{cc} \cdot x \stackrel{\text{b)}}{=} y \cdot x \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot y$.

2: Aus 1 folgt: $x \cdot (y^{cc})^{cc} = x \cdot y$.

d)

1: $(x^{cc} \cdot y^{cc})^{cc} \stackrel{\text{a)}}{=} (x^{cc})^{cc} \cdot (y^{cc})^{cc} \stackrel{\text{b)}}{=} x \cdot (y^{cc})^{cc} \stackrel{\text{c)}}{=} x \cdot y$.

2: Aus 1 folgt: $(x^{cc} \cdot y^{cc})^{cc} = x \cdot y$.

e)

1: $((x \cdot y)^{cc})^{cc} \stackrel{\text{a)}}{=} (x^{cc} \cdot y^{cc})^{cc} \stackrel{\text{d)}}{=} x \cdot y$.

2: Aus 1 folgt: $((x \cdot y)^{cc})^{cc} = x \cdot y$.

<u>Beweis **149-22**</u> `f)`

`1:`

$$(x:y)^{\texttt{cc}}$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x\cdot(1:y))^{\texttt{cc}}$$
$$\stackrel{\texttt{a)}}{=} x^{\texttt{cc}}\cdot(1:y)^{\texttt{cc}}$$
$$\stackrel{\mathbf{149-16}}{=} x^{\texttt{cc}}\cdot(1:y^{\texttt{cc}})$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x^{\texttt{cc}}:y^{\texttt{cc}}.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(x:y)^{\texttt{cc}} = x^{\texttt{cc}}:y^{\texttt{cc}}.$$

`g)`

`1:`

$$(x^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}}:y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}}\cdot(1:y) \stackrel{\texttt{b)}}{=} x\cdot(1:y) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x:y.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(x^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}}:y = x:y.$$

`h)`

`1:`

$$x:(y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x\cdot(1:((y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}})) \stackrel{\mathbf{149-16}}{=} x\cdot(1:y) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x:y.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$x:(y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} = x:y.$$

`i)`

`1:`

$$(x^{\texttt{cc}}:y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} \stackrel{\texttt{f)}}{=} (x^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}}:(y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} \stackrel{\texttt{g)}}{=} x:(y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} \stackrel{\texttt{h)}}{=} x:y.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(x^{\texttt{cc}}:y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} = x:y.$$

`j)`

`1:`

$$((x:y)^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} \stackrel{\texttt{f)}}{=} (x^{\texttt{cc}}:y^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} \stackrel{\texttt{i)}}{=} x:y.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$((x:y)^{\texttt{cc}})^{\texttt{cc}} = x:y.$$

$\square$

149-23. Es gilt unter anderem $(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (-\mathsf{Im}x) - \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$ und $(\mathsf{i}\cdot(-x))^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$:

149-23(Satz)

a) $(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (-\mathsf{Im}x) - \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

b) $\mathsf{i}\cdot x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

c) $-(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

d) $(-\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

e) $((-\mathsf{i})\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

f) $(\mathsf{i}\cdot(-x))^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

REIM.RECH.cc-**Notation**.

Beweis **149-23** a)

1:
$$(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x) - \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x) \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Im}x) - \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x) \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Im}x) - \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

2: Aus 1 folgt:
$$(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (-\mathsf{Im}x) - \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

<u>Beweis **149-23**</u> `b)`

`1:` $$\mathsf{i}\cdot x^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\mathbf{149-5}}{=} (-\mathsf{i})^{\mathsf{cc}}\cdot x^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\mathbf{149-22}}{=} ((-\mathsf{i})\cdot x)^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\mathbf{149-14}}{=} -(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\mathsf{a)}}{=} -((-\mathsf{Im}x)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$\mathsf{i}\cdot x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`c)`

`1:` $$-(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}}$$
$$\stackrel{\mathsf{a)}}{=} -((-\mathsf{Im}x)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x))$$
$$= -(-(\mathsf{Im}x)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$-(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`d)`

`1:` $$(-\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-14}}{=} -(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{c)}}{=} (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(-\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`e)`

`1:` $$((-\mathsf{i})\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-14}}{=} -(\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathsf{c)}}{=} (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$((-\mathsf{i})\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

Beweis **149-23** `f)`

`1:` $$(\mathsf{i}\cdot(-x))^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-\mathsf{i}\cdot x)^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathrm{d)}}{=} (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$((-\mathsf{i})\cdot x)^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).$$

$\square$

149-24. Es gilt $x \in \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ genau dann, wenn $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$:

149-24(Satz)

a) *"$x \in \mathbb{R}$" genau dann, wenn "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}$".*

b) *"$x \in \mathbb{S}$" genau dann, wenn "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{S}$".*

c) *"$x \in \mathbb{T}$" genau dann, wenn "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$".*

d) *"$x \in \mathbb{C}$" genau dann, wenn "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$".*

e) *"$x \in \mathbb{B}$" genau dann, wenn "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{B}$".*

f) *"x Zahl" genau dann, wenn "x^{cc} Zahl".*

Beweis **149-22**

`REIM.RECH`-**Notation**.

...

Beweis **149-24** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `2`"$x = x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}$"
folgt via **ElementAxiom**: x^{cc} Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.1`"x^{cc} Menge"
folgt via **149-3**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.2`"$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x^{\mathsf{cc}} = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`3:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **149-7**: $x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`4:` Aus `3`"$x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$" und
aus `2.2`"$x^{\mathsf{cc}} = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`5:` Aus `4`"$x = x^{\mathsf{cc}}$" und
aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **149-24**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `2`"$x = x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{S}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{S}$"
folgt via **ElementAxiom**: x^{cc} Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.1`"x^{cc} Menge"
folgt via **149-3**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.2`"$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x^{\mathsf{cc}} = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`3:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **149-7**: $x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`4:` Aus `3`"$x = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$" und
aus `2.2`"$x^{\mathsf{cc}} = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $x = x^{\mathsf{cc}}$.

`5:` Aus `4`"$x = x^{\mathsf{cc}}$" und
aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{S}$"
folgt: $x \in \mathbb{S}$.

Beweis **149-24** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x = x^{\mathtt{cc}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `2`"$x = x^{\mathtt{cc}}$"
folgt: $x^{\mathtt{cc}} \in \mathbb{T}$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x^{\mathtt{cc}} \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathtt{cc}} \in \mathbb{T}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x^{\mathtt{cc}}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathtt{cc}} \in \mathbb{T}$"
folgt via **149-10**: $x^{\mathtt{cc}} = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$.

`2:` Aus `1.1`"$x^{\mathtt{cc}}$ Menge"
folgt via **149-3**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **149-7**: $x = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$.

`4:` Aus `3`"$x = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$" und
aus `1.2`"$x^{\mathtt{cc}} = (x^{\mathtt{cc}})^{\mathtt{cc}}$"
folgt: $x = x^{\mathtt{cc}}$.

`5:` Aus `4`"$x = x^{\mathtt{cc}}$" und
aus `VS` gleich "$x^{\mathtt{cc}} \in \mathbb{T}$"
folgt: $x \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **149-24**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`3.2:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$" und
aus `1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$" und
aus `2`"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.1`"$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R}$" und
aus `4.2`"$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`1.3:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$" und
aus `1.1`"$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{R}$"
folgt: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.2`"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **149-24**</u> `e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **117-4**: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`3.2:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$” und
aus `1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$” und
aus `2`“$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”
folgt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.1`“$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S}$” und
aus `4.2`“$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S}$”
folgt via **101-3**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{B}$.

`e)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{B}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S})$.

`1.2:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$.

`1.3:` Via **149-6** gilt: $\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$.

`2.1:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) = \mathsf{Re}x$” und
aus `1.1`“$\mathsf{Re}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1.3`“$\mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) = -\mathsf{Im}x$” und
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{Im}(x^{\mathsf{cc}}) \in \mathbb{S}$”
folgt: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.2`“$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **117-4**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$” und
aus `3`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **101-3**: $x \in \mathbb{B}$.

Beweis **149-24** `f)`

Via **149-3** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}).$

$\square$

149-25. Nun wird die Frage thematisiert, unter welchen Voraussetzungen aus $x^{\mathsf{cc}} = y$ auf $x = y^{\mathsf{cc}}$ geschlossen werden kann:

149-25(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x^{\mathsf{cc}} = y$.

$\rightarrow)$
x Zahl.
oder
x^{cc} Zahl.
oder
y Zahl.
oder
$x = \mathcal{U}$.

Dann folgt "$x = y^{\mathsf{cc}}$".

Beweis **149-25**

1: Nach $\rightarrow)$ gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x^{\mathsf{cc}} \text{ Zahl}) \vee (y \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

2: Aus `1.1.Fall` "x Zahl" folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

3: $x \stackrel{2}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\rightarrow)}{=} y^{\mathsf{cc}}$.

4: Aus 3 folgt: $x = y^{\mathsf{cc}}$.

...

<u>Beweis **149-25**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` x^{cc} Zahl.

`2:` Aus `1.2.Fall`"x^{cc} Zahl"
folgt via **149-3**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

`4:` $x \stackrel{3}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\rightarrow)}{=} y^{\mathsf{cc}}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x = y^{\mathsf{cc}}$.

`1.3.Fall` y Zahl.

`2:` Aus →) "$x^{\mathsf{cc}} = y$" und
aus `1.3.Fall`"y Zahl"
folgt: x^{cc} Zahl.

`3:` Aus `2`"x^{cc} Zahl"
folgt via **149-3**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

`5:` $x \stackrel{4}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\rightarrow)}{=} y^{\mathsf{cc}}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x = y^{\mathsf{cc}}$.

`1.4.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.4.Fall`"$x = \mathcal{U}$"
folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

`3:` $x \stackrel{2}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\rightarrow)}{=} y^{\mathsf{cc}}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x = y^{\mathsf{cc}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x = y^{\mathsf{cc}}$.

□

149-26. Nun wird die Frage thematisiert, unter welchen Voraussetzungen aus $x^{\mathsf{cc}} = y^{\mathsf{cc}}$ auf $x = y$ geschlossen werden kann:

149-26(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x^{\mathsf{cc}} = y^{\mathsf{cc}}$.

$\rightarrow)$ *x Zahl.*

oder

x^{cc} Zahl.

oder

y Zahl.

oder

y^{cc} Zahl.

Dann folgt "$x = y$".

Beweis **149-26**

1: Nach →) gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x^{cc} \text{ Zahl}) \vee (y \text{ Zahl}) \vee (y^{cc} \text{ Zahl})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

2.1: Aus 1.1.Fall"x Zahl" folgt via **149-3**: x^{cc} Zahl.

2.2: Aus 1.1.Fall"x Zahl" folgt via **149-7**: $(x^{cc})^{cc} = x$.

3.1: Aus 2.1"x^{cc} Zahl" und aus →) "$x^{cc} = y^{cc}$" folgt: y^{cc} Zahl.

3.2: $x \stackrel{2.2}{=} (x^{cc})^{cc} \stackrel{\rightarrow)}{=} (y^{cc})^{cc}$.

4: Aus 3.1"y^{cc} Zahl" folgt via **149-3**: y Zahl.

5: Aus 4"y Zahl" folgt via **149-7**: $(y^{cc})^{cc} = y$.

6: Aus 3.2"$x = \ldots = (y^{cc})^{cc}$" und aus 5"$(y^{cc})^{cc} = y$" folgt: $x = y$.

`1.2.Fall` x^{cc} Zahl.

2.1: Aus 1.2.Fall"x^{cc} Zahl" folgt via **149-3**: x Zahl.

2.2: Aus 1.2.Fall"x^{cc} Zahl" und aus →) "$x^{cc} = y^{cc}$" folgt: y^{cc} Zahl.

3.1: Aus 2.1"x Zahl" folgt via **149-7**: $(x^{cc})^{cc} = x$.

3.2: Aus 2.2"y^{cc} Zahl" folgt via **149-3**: y Zahl.

4.1: $x \stackrel{3.1}{=} (x^{cc})^{cc} \stackrel{\rightarrow)}{=} (y^{cc})^{cc}$.

4.2: Aus 3.2"y Zahl" folgt via **149-7**: $(y^{cc})^{cc} = y$.

5: Aus 4.1"$x = \ldots = (y^{cc})^{cc}$" und aus 4.2"$(y^{cc})^{cc} = y$" folgt: $x = y$.

...

Beweis **149-26**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` y Zahl.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“y Zahl”
folgt via **149-3**: y^{cc} Zahl.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`“y Zahl”
folgt via **149-7**: $(y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = y$.

`3.1:` Aus `2.1`“y^{cc} Zahl” und
aus →)“$x^{\mathsf{cc}} = y^{\mathsf{cc}}$”
folgt: x^{cc} Zahl.

`3.2:` $y \stackrel{2.2}{=} (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\rightarrow)}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`4:` Aus `3.1`“x^{cc} Zahl”
folgt via **149-3**: x Zahl.

`5:` Aus `4`“x Zahl”
folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

`6:` Aus `3.2`“$y = \ldots = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$” und
aus `5`“$(y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$”
folgt: $y = x$.

`7:` Aus `6`
folgt: $x = y$.

...

Beweis **149-26**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ y^{cc} Zahl.

`2.1:` Aus `1.4.Fall` "y^{cc} Zahl"
folgt via **149-3**: y Zahl.

`2.2:` Aus `1.4.Fall` "y^{cc} Zahl" und
aus →) "$x^{\mathsf{cc}} = y^{\mathsf{cc}}$"
folgt: x^{cc} Zahl.

`3.1:` Aus `2.1` "y Zahl"
folgt via **149-7**: $(y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = y$.

`3.2:` Aus `2.2` "x^{cc} Zahl"
folgt via **149-3**: x Zahl.

`4.1:` $y \stackrel{3.1}{=} (y^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} \stackrel{\rightarrow)}{=} (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$.

`4.2:` Aus `3.2` "x Zahl"
folgt via **149-7**: $(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$.

`5:` Aus `4.1` "$y = \ldots = (x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}}$" und
aus `4.2` "$(x^{\mathsf{cc}})^{\mathsf{cc}} = x$"
folgt: $y = x$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x = y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x = y$.

□

149-27. Es gilt $x^{\mathsf{cc}} = 0$ genau dann, wenn $x = 0$:

> **149-27(Satz)**
>
> a) *"$x^{\mathsf{cc}} = 0$" genau dann, wenn "$x = 0$".*
>
> b) *"$0 \neq x^{\mathsf{cc}}$" genau dann, wenn "$0 \neq x$".*

Beweis **149-25** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x^{\mathsf{cc}} = 0.$

1: Aus VS gleich "$x^{\mathsf{cc}} = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt via **149-25**: $x = 0^{\mathsf{cc}}.$

2: Aus 1"$x = 0^{\mathsf{cc}}$" und
aus **149-5**"$0^{\mathsf{cc}} = 0$"
folgt: $x = 0.$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x = 0.$

1: $x^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} 0^{\mathsf{cc}} \stackrel{\mathbf{149-5}}{=} 0.$

2: Aus 1
folgt: $x^{\mathsf{cc}} = 0.$

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(x^{\mathsf{cc}} = 0) \Leftrightarrow (x = 0).$

2: Aus 1
folgt: $(0 \neq x^{\mathsf{cc}}) \Leftrightarrow (0 \neq x).$

□

Einiges über $0 \neq x : y$.
Einiges über $x : y \in \mathbb{C}$.

Ersterstellung: 20/09/10 **Letzte Änderung: 27/03/12**

150-1. Nun wird ein Kriterium für $0 \neq x : y$ Zahl gegeben:

150-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : y$ *Zahl.*

`ii)` "$(0 \neq x$ *Zahl*$) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})$" *oder* "$(0 \neq x$ *Zahl*$) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **150-1**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y$ Zahl.

`1:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x : y$ Zahl" und
aus `1`"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq 1 : y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `3`"$\ldots 0 \neq 1 : y$ Zahl"
folgt via **137-29**: $(y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`5:` Aus `3`"$0 \neq x$ Zahl..." und
aus `4`"$(y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C})$"
folgt: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge ((y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich
$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$"
folgt: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge ((y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `2`"$\ldots (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C})$"
folgt via **137-29**: $0 \neq 1 : y$ Zahl.

`3:` Aus `1`"$0 \neq x$ Zahl..." und
aus `2`"$0 \neq 1 : y$ Zahl"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`4:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`5:` Aus `3`"$0 \neq x \cdot (1 : y)$ Zahl" und
aus `4`"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x : y$ Zahl.

□

150-2. Aus **150-1** folgt ohne viel Aufwand das folgende, gelegentlich gut einsatzbare Resultat:

150-2(Satz)

Aus "$0 \neq x : y$ Zahl" folgt "$0 \neq x$ Zahl" und "$0 \neq y$ Zahl".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **150-2**</u> `VS` gleich $0 \neq x : y$ Zahl.

`1:` `VS` gleich "$0 \neq x : y$ Zahl"
folgt via **150-1**:
$$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge ((y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`3.1:` Aus `2`
folgt: $(y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $(y \in \mathbb{A}) \wedge (y \notin \mathbb{B})$.

`5.1:` Aus `4`"$y \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`5.2:` Aus **101-7**"$0 \in \mathbb{B}$" und
aus `4`"$\ldots y \notin \mathbb{B}$"
folgt via **0-1**: $0 \neq y$.

`6:` Aus `5.2`"$0 \neq y$" und
aus `5.1`"y Zahl"
folgt: $0 \neq y$ Zahl.

`3.2.Fall` $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$0 \neq y \ldots$" und
aus `4`"y Zahl"
folgt: $0 \neq y$ Zahl.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq y$ Zahl"

`3.2:` Aus `2`"$0 \neq x$ Zahl$\ldots$" und
aus `A1` gleich "$0 \neq y$ Zahl"
folgt: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})$.

$\square$

150-3. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, ist die Implikation von **150-2** - auch etwas abgeschwächt - nicht ohne Weiteres invertierbar:

150-3.Bemerkung

a) Die Aussage
"$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})) \Rightarrow (0 \neq x : y)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

b) Die Aussage
"$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})) \Rightarrow (0 \neq x : y \text{ Zahl})$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

150-4. An Hand des nunmehrigen Beispiels wird klar, dass die Implikation von **150-2** - auch etwas abgeschwächt - nicht ohne Weiteres invertierbar ist:

<u>**150-4.BEISPIEL**</u>

Es gelte:

→) $x = 1$.

→) $y = +\infty$.

Dann folgt:

a) $0 \neq x$ Zahl.

b) $0 \neq y$ Zahl.

c) $x : y = 0$.

150-5. Nun wird ein Kriterium für $0 \neq x : y$ gegeben:

150-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : y$.

`ii)` "$x \notin \mathbb{A}$" *oder* "$y \notin \mathbb{A}$" *oder* "$(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})$" *oder* "$(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **150-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x : y$" und aus `1.1.Fall` "$x : y$ Zahl" folgt: $0 \neq x : y$ Zahl.

`3:` Aus 2 "$0 \neq x : y$ Zahl" folgt via **150-1**:
$$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`4:` Aus `3` folgt:
$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`1.2.Fall` $x : y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x : y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`3:` Aus `2` folgt:
$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

<u>Beweis **150-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$
$\vee((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}))$
$\vee(((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$

`3:` Aus `2.1.Fall` "$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$"
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}.$

`4:` Aus **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `3` "$x : y = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq x : y.$

`2.2.Fall` $((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$

`3:` Aus `2.2.Fall`
"$((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$"
folgt via **150-1**: $0 \neq x : y$ Zahl.

`4:` Aus `3`
folgt: $0 \neq x : y.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x : y.$

$\square$

150-6. Basierend auf **140-1** und **137-23** ist nunmehriges Kriterium für $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$ verfügbar:

150-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : y \in \mathbb{C}$.

`ii)` "$0 \neq x \in \mathbb{C}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{C}$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **150-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{C}$.

`1:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x : y \in \mathbb{C}$" und
aus `1`"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{C})$.

`4:` Aus `3`"$\ldots 0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`5:` Aus `3`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `4`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `2`"$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$" und
aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{C}$.

$\square$

150-7. Im nunmehrigen Satz wird ein an **132-3** angelehntes Kriterium für $x : y \in \mathbb{C}$ gegeben:

150-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : y \in \mathbb{C}$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$" *oder* "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **150-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{C}$.

`1:` Es gilt: $(x : y = 0) \vee (0 \neq x : y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x : y = 0$”
folgt via **146-1**: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`1.2.Fall` $0 \neq x : y$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq x : y$” und
aus `VS` gleich “$x : y \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq x : y \in \mathbb{C}$”
folgt via **150-6**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`4:` Aus `2`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

Beweis **150-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))$$
$$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})).$$

`1:` Nach `VS` gilt: $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})).$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$

`3:` Aus `2.1.Fall` “$((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$”
folgt via **146-1**: $x:y=0.$

`4:` Aus `3` “$x:y=0$” und
aus **101-5** “$0\in\mathbb{C}$”
folgt: $x:y\in\mathbb{C}.$

`2.2.Fall` $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C}).$

`3:` Aus `2.2.Fall` “$(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$”
folgt via **150-6**: $0\neq x:y\in\mathbb{C}.$

`4:` Aus `3`
folgt: $x:y\in\mathbb{C}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x:y\in\mathbb{C}.$

□

In $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auf gemeinsamen Nenner bringen.

Ersterstellung: 20/09/10 **Letzte Änderung: 28/03/12**

151-1. Nun wird unter anderem die vertraute Gleichung $x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$ für komplexe Zahlen thematisiert:

151-1(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{C}$.

→) $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

→) $z \in \mathbb{C}$.

→) $0 \neq w \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

b) $x : y - z : w = (x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

c) $-x : y + z : w = (-x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

d) $-x : y - z : w = (-x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **151-1**</u> `a)`

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”,
aus →) “$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$0 \neq w \in \mathbb{C}$”
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $$(w \cdot x) : (w \cdot y) = x : y.$$

`1.2:` Aus →) “$z \in \mathbb{C}$”,
aus →) “$\ldots w \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$0 \neq y \in \mathbb{C}$”
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $$(y \cdot z) : (y \cdot w) = z : w.$$

`1.3:` Aus →) “$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$\ldots w \in \mathbb{C}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $$y \cdot w \in \mathbb{C}.$$

`2:` Aus `1.3`“$y \cdot w \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $$y \cdot w \in \mathbb{B}.$$

`3:` Aus `2`“$y \cdot w \in \mathbb{B}$”
folgt via **137-18**:
$$(x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w) = (x \cdot w) : (y \cdot w) + (y \cdot z) : (y \cdot w).$$

`4:`
$$\begin{aligned} & x : y + z : w \\ \stackrel{1.1}{=}\ & (w \cdot x) : (w \cdot y) + z : w \\ \stackrel{1.2}{=}\ & (w \cdot x) : (w \cdot y) + (y \cdot z) : (y \cdot w) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ & (x \cdot w) : (w \cdot y) + (y \cdot z) : (y \cdot w) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ & (x \cdot w) : (y \cdot w) + (y \cdot z) : (y \cdot w) \\ \stackrel{3}{=}\ & (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w). \end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $$x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w).$$

Beweis **151-1** `b)`

`1:` Aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **117-4**: $-z \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $0 \neq y \in \mathbb{C}$ ” ,
aus `1` “ $-z \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $0 \neq w \in \mathbb{C}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$x : y + (-z) : w = (x \cdot w + y \cdot (-z)) : (y \cdot w).$$

`3:`
$$\begin{aligned} & x : y - z : w \\ &= x : y + (-z : w) \\ &\overset{\textbf{FS}-:}{=} x : y + (-z) : w \\ &\overset{2}{=} (x \cdot w + y \cdot (-z)) : (y \cdot w) \\ &\overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot w + (-y \cdot z)) : (y \cdot w) \\ &= (x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x : y - z : w = (x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

Beweis **151-1** `c)`

`1:` Aus →) " $x \in \mathbb{C}$ "
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1` " $-x \in \mathbb{C}$ ",
aus →) " $0 \neq y \in \mathbb{C}$ ",
aus →) " $z \in \mathbb{C}$ " und
aus →) " $0 \neq w \in \mathbb{C}$ "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(-x) : y + z : w = ((-x) \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w).$$

`3:`
$$-x : y + z : w \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} (-x) : y + z : w \stackrel{2}{=} ((-x) \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $-x : y + z : w = (-x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

Beweis **151-1** d)

1: Aus →) " $x \in \mathbb{C}$ "
folgt via **117-4**: $$-x \in \mathbb{C}.$$

2: Aus 1 " $-x \in \mathbb{C}$ ",
aus →) " $0 \neq y \in \mathbb{C}$ ",
aus →) " $z \in \mathbb{C}$ " und
aus →) " $0 \neq w \in \mathbb{C}$ "
folgt via des bereits bewiesenen b):
$$(-x) : y - z : w = ((-x) \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w).$$

3:
$$\begin{aligned} & -x : y - z : w \\ \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} & (-x) : y - z : w \\ \stackrel{2}{=} & ((-x) \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & ((-x \cdot w) - y \cdot z) : (y \cdot w) \\ = & (-x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w). \end{aligned}$$

4: Aus 3
folgt: $$-x : y - z : w = (-x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w).$$

□

151-2. Nun wird unter anderem die vertraute Gleichung $x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$ für reelle Zahlen thematisiert:

151-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow)$ $0 \neq y \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow)$ $z \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow)$ $0 \neq w \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

b) $x : y - z : w = (x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

c) $-x : y + z : w = (-x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

d) $-x : y - z : w = (-x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **151-2**

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$z \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $z \in \mathbb{C}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $w \in \mathbb{C}$.

...

Beweis **151-2** . . .

2.1: Aus →) “$0 \neq y\ldots$” und
aus 1.2 “$y \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

2.2: Aus →) “$0 \neq w\ldots$” und
aus 1.4 “$w \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq w \in \mathbb{C}$.

3.a): Aus 1.1 “$x \in \mathbb{C}$”,
aus 2.1 “$0 \neq y \in \mathbb{C}$”,
aus 1.3 “$z \in \mathbb{C}$” und
aus 2.2 “$0 \neq w \in \mathbb{C}$”
folgt via **151-1**: $x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

3.b): Aus 1.1 “$x \in \mathbb{C}$”,
aus 2.1 “$0 \neq y \in \mathbb{C}$”,
aus 1.3 “$z \in \mathbb{C}$” und
aus 2.2 “$0 \neq w \in \mathbb{C}$”
folgt via **151-1**: $x : y - z : w = (x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

3.c): Aus 1.1 “$x \in \mathbb{C}$”,
aus 2.1 “$0 \neq y \in \mathbb{C}$”,
aus 1.3 “$z \in \mathbb{C}$” und
aus 2.2 “$0 \neq w \in \mathbb{C}$”
folgt via **151-1**: $-x : y + z : w = (-x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$.

3.d): Aus 1.1 “$x \in \mathbb{C}$”,
aus 2.1 “$0 \neq y \in \mathbb{C}$”,
aus 1.3 “$z \in \mathbb{C}$” und
aus 2.2 “$0 \neq w \in \mathbb{C}$”
folgt via **151-1**: $-x : y - z : w = (-x \cdot w - y \cdot z) : (y \cdot w)$.

□

Einiges über $x \cdot y + z \cdot w = 0$.
Einiges über $x \cdot y - z \cdot w = 0$.
Einiges über $x \cdot y$.

Ersterstellung: 20/09/10 **Letzte Änderung: 27/03/12**

152-1. Es gilt $x \cdot y + z \cdot w = 0$ genau dann, wenn $x \cdot y = z \cdot w = 0$ oder $0 \neq x \cdot y$ und $0 \neq z \cdot w$ und $x : z + w : y = 0$ gilt und dies ist genau dann der Fall, wenn $x \cdot y = z \cdot w = 0$ oder $0 \neq x, y, z, w \in \mathbb{C}$ *und* $x : z + w : y = 0$ gilt:

152-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y + z \cdot w = 0.$

`ii)` *"*$(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)$*"*
oder "$(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0)$*".*

`iii)` *"*$(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)$*"*
oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge (x : z + w : y = 0)$*".*

`RECH`-**Notation**.

Weitere Aussagen über "$x \cdot y = 0$" und "$z \cdot w = 0$" sind in **NTF**$\mathbb{A}$ zu finden.

Beweis **152-1** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \cdot y + z \cdot w = 0.$

`1:` Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y = 0.$

`2:` $z \cdot w \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} 0 + z \cdot w \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} x \cdot y + z \cdot w \stackrel{\texttt{VS}}{=} 0.$

`3:` Aus `1.1.Fall`"$x \cdot y = 0$" und
aus `2`"$z \cdot w = \ldots = 0$"
folgt: $(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0).$

`4:` Aus `3`
folgt: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w) \wedge (x : z + w : y = 0)).$

...

Beweis **152-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y + z \cdot w = 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq x \cdot y.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y + z \cdot w = 0$"
folgt via **FS**$-$: $(x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x \cdot y = -z \cdot w).$

`3.1:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x \cdot y$" und
aus 2"$x \cdot y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}.$

`3.2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x \cdot y$" und
aus 2"$\ldots x \cdot y = -z \cdot w$"
folgt: $0 \neq -z \cdot w.$

`4.1:` Aus `3.1`"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$

`4.2:` Aus `3.2`"$0 \neq -z \cdot w$"
folgt via **100-13**: $0 \neq z \cdot w.$

`5:` Aus `4.2`"$0 \neq z \cdot w$" und
aus 2"$\ldots z \cdot w \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt: $0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}.$

`6:` Aus `5`"$0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $(0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}).$

`7:` Aus `4.1`"$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `6`"$\ldots z \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot z \in \mathbb{C}.$

`8.1:` Aus `7`"$y \cdot z \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \cdot z \in \mathbb{B}.$

`8.2:` Aus `7`"$y \cdot z \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \cdot z$ Zahl.

`9.1:` Aus `8.1`"$y \cdot z \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-18**:
$$(x \cdot y + z \cdot w) : (y \cdot z) = (x \cdot y) : (y \cdot z) + (z \cdot w) : (y \cdot z).$$

`9.2:` Aus `8.2`"$y \cdot z$ Zahl"
folgt via **FSD**0: $0 : (y \cdot z) = 0.$

...

...

Beweis **152-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y + z \cdot w = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 \neq x \cdot y.$

...

`10.1:` Aus `4.1`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `6`“$\ldots z \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `4.1`“$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$”
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $(y \cdot x) : (y \cdot z) = x : z.$

`10.2:` Aus `6`“$\ldots w \in \mathbb{C}$” und
aus `4.1`“$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus `6`“$\ldots 0 \neq z \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $(z \cdot w) : (z \cdot y) = w : y.$

`11:`
$$\begin{aligned} & x : z + w : y \\ \stackrel{10.1}{=} & (y \cdot x) : (y \cdot z) + w : y \\ \stackrel{10.2}{=} & (y \cdot x) : (y \cdot z) + (z \cdot w) : (z \cdot y) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} & (x \cdot y) : (y \cdot z) + (z \cdot w) : (z \cdot y) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} & (x \cdot y) : (y \cdot z) + (z \cdot w) : (y \cdot z) \\ \stackrel{9.1}{=} & (x \cdot y + z \cdot w) : (y \cdot z) \\ \stackrel{\mathtt{VS}}{=} & 0 : (y \cdot z) \\ \stackrel{9.2}{=} & 0. \end{aligned}$$

`12:` Aus `3.1`“$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$”,
aus `5`“$0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}$” und
aus `11`“$x : z + w : y = \ldots = 0$”
folgt: $((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0)).$

`13:` Aus `1.2`
folgt: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0)).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)) \vee ((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0)).$$

Beweis **152-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$.

`1.1:` Via **140-1** gilt: $(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`1.2:` Via **140-1** gilt: $(0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `VS`"$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$" und

aus `1.1`"$(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$"
folgt:
$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$.

`3:` Aus `2`"$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$" und

aus `1.2`"$(0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}))$"
folgt:
$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z + w : y = 0))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z + w : y = 0))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`
folgt: $x \cdot y = 0$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`
folgt: $z \cdot w = 0$.

`3:` $x \cdot y + z \cdot w \stackrel{2.1}{=} 0 + z \cdot w \stackrel{2.2}{=} 0 + 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot y + z \cdot w = 0$.

...

Beweis **152-1** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z + w : y = 0))$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot z \in \mathbb{C}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots w \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $z \cdot w \in \mathbb{C}$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot x \in \mathbb{C}$.

`2.4:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{B}$.

`2.5:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $z \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1`"$y \cdot z \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \cdot z$ Zahl.

`4.1:` Aus `3`"$y \cdot z$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (y \cdot z) = 0$.

`4.2:` Aus `2.1`"$y \cdot z \in \mathbb{C}$" und
aus `2.5`"$z \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-18**: $(y \cdot z) \cdot (x : z) = ((y \cdot z) \cdot x) : z$.

`4.3:` Aus `2.1`"$y \cdot z \in \mathbb{C}$" und
aus `2.4`"$y \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-18**: $(y \cdot z) \cdot (w : y) = ((y \cdot z) \cdot w) : y$.

...

...

Beweis **152-1** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z + w : y = 0))$.

...

`5.1:` Aus `1.2.Fall`...$x : z + w : y = 0$ und
aus `4.1`“$0 \cdot (y \cdot z) = 0$”
folgt: $(x : z + w : y) \cdot (y \cdot z) = 0$.

`5.2:` Aus `1.2.Fall`“...$z \in \mathbb{C}$...” und
aus `1.2.Fall`“...$x \in \mathbb{C}$...”
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $z \cdot (y \cdot x) = (z \cdot y) \cdot x$.

`5.3:` Aus `1.2.Fall`“...$y \in \mathbb{C}$...” und
aus `1.2.Fall`“...$w \in \mathbb{C}$...”
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $y \cdot (z \cdot w) = (y \cdot z) \cdot w$.

`6.1:` Aus `2`“$y \cdot z \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$:
$(y \cdot z) \cdot (x : z + w : y) = (y \cdot z) \cdot (x : z) + (y \cdot z) \cdot (w : y)$.

`6.2:` Aus `2.3`“$y \cdot x \in \mathbb{C}$” und
aus `1.2.Fall`“...$0 \neq z \in \mathbb{C}$...”
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $(z \cdot (y \cdot x)) : z = y \cdot x$.

`6.3:` Aus `2.2`“$z \cdot w \in \mathbb{C}$” und
aus `1.2.Fall`“...$0 \neq y \in \mathbb{C}$...”
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $(y \cdot (z \cdot w)) : y = z \cdot w$.

...

...

Beweis **152-1** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + w : y = 0))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z + w : y = 0))$.

...

7:

$$\begin{aligned}
& x \cdot y + z \cdot w \\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\; & y \cdot x + z \cdot w \\
\stackrel{6.2}{=}\; & (z \cdot (y \cdot x)) : z + z \cdot w \\
\stackrel{6.3}{=}\; & (z \cdot (y \cdot x)) : z + (y \cdot (z \cdot w)) : y \\
\stackrel{5.2}{=}\; & ((z \cdot y) \cdot x) : z + (y \cdot (z \cdot w)) : y \\
\stackrel{5.3}{=}\; & ((z \cdot y) \cdot x) : z + ((y \cdot z) \cdot w) : y \\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\; & ((y \cdot z) \cdot x) : z + ((y \cdot z) \cdot w) : y \\
\stackrel{4.2}{=}\; & (y \cdot z) \cdot (x : z) + ((y \cdot z) \cdot w) : y \\
\stackrel{4.3}{=}\; & (y \cdot z) \cdot (x : z) + (y \cdot z) \cdot (w : y) \\
\stackrel{6.1}{=}\; & (y \cdot z) \cdot (x : z + w : y) \\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\; & (x : z + w : y) \cdot (y \cdot z) \\
\stackrel{5.1}{=}\; & 0.
\end{aligned}$$

8: Aus 7 folgt: $x \cdot y + z \cdot w = 0$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \cdot y + z \cdot w = 0$.

$\square$

152-2. Es gilt $x \cdot y - z \cdot w = 0$ genau dann, wenn $x \cdot y = z \cdot w = 0$ oder $0 \neq x \cdot y$ und $0 \neq z \cdot w$ und $x : z - w : y = 0$ gilt und dies ist genau dann der Fall, wenn $x \cdot y = z \cdot w = 0$ oder $0 \neq x, y, z, w \in \mathbb{C}$ *und* $x : z - w : y = 0$ gilt:

152-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y - z \cdot w = 0$.

`ii)` "$(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)$"
oder "$(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0)$".

`iii)` "$(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)$"
oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge (x : z - w : y = 0)$".

`RECH`-**Notation**.

Weitere Aussagen über "$x \cdot y = 0$" und "$z \cdot w = 0$" sind in **NTF**$\mathbb{A}$ zu finden.

Beweis **152-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \cdot y - z \cdot w = 0.$

1: $x \cdot y + z \cdot (-w) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot y + (-z \cdot w) = x \cdot y - z \cdot w \stackrel{\texttt{VS}}{=} 0.$

2: Aus 1 "$x \cdot y + z \cdot (-w) = \ldots = 0$"
folgt via **152-1**: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot (-w) = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot (-w) \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + (-w) : y = 0)).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot (-w) = 0).$

3: Aus 2.1.Fall
folgt: $z \cdot (-w) = 0.$

4: $z \cdot w \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-z \cdot w) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(z \cdot (-w)) \stackrel{3}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$

5: Aus 2.1.Fall "$x \cdot y = 0 \ldots$" und
aus 4 "$z \cdot w = \ldots = 0$"
folgt: $(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0).$

6: Aus 5
folgt: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0)).$

...

<u>Beweis **152-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y - z \cdot w = 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot (-w) \in \mathbb{C}) \wedge (x : z + (-w) : y = 0).$

`3.1:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $z \cdot (-w) = -z \cdot w.$

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $x : z + (-w) : y = 0.$

`4.1:` Aus `2.2.Fall`“$\ldots 0 \neq z \cdot (-w) \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `3.1`“$z \cdot (-w) = -z \cdot w$”
folgt: $0 \neq -z \cdot w \in \mathbb{C}.$

`4.2:` $x : z - w : y = x : z + (-w : y) \stackrel{\textbf{FS}-:}{=} x : z + (-w) : y \stackrel{3.2}{=} 0.$

`5.1:` Aus `4.1`“$0 \neq -z \cdot w \ldots$”
folgt via **100-13**: $0 \neq z \cdot w.$

`5.2:` Aus `4.1`“$\ldots -z \cdot w \in \mathbb{C}$”
folgt via **117-4**: $z \cdot w \in \mathbb{C}.$

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}.$

`7:` Aus `2.2.Fall`“$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `6`“$0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}$” und
aus `4.2`“$x : z - w : y = \ldots = 0$”
folgt: $(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0).$

`8:` Aus `7`
folgt: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0)).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)) \vee ((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0)).$$

Beweis **152-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0))$.

`1.1`: Via **140-1** gilt: $(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`1.2`: Via **140-1** gilt: $(0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}))$.

`2`: Aus `VS`“ $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0))$” und

aus `1.1`“ $(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$ ”
folgt:
$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0))$.

`3`: Aus `2`“ $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0))$” und

aus `1.2`“ $(0 \neq z \cdot w \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}))$ ”
folgt:
$((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z - w : y = 0))$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0))$.

`1`: Nach `VS` gilt: $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z - w : y = 0))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0)$.

`2.1`: Aus `1.1.Fall`
folgt: $x \cdot y = 0$.

`2.2`: Aus `1.1.Fall`
folgt: $z \cdot w = 0$.

`3`: $x \cdot y - z \cdot w \stackrel{2.1}{=} 0 - z \cdot w \stackrel{2.2}{=} 0 - 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0$.

`4`: Aus `3`
folgt: $x \cdot y - z \cdot w = 0$.

...

<u>Beweis **152-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x \cdot y = 0) \wedge (z \cdot w = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C}) \wedge (x : z - w : y = 0))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq z \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq w \in \mathbb{C})$
$\wedge(x : z - w : y = 0)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq w \ldots$"
folgt via **100-13**: $0 \neq -w$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots w \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-w \in \mathbb{C}$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $x : z - w : y = 0$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \neq -w \in \mathbb{C}$.

`3.2:` $x : z + (-w) : y \stackrel{\textbf{FS}-:}{=} x : z + (-w : y) = x : z - w : y \stackrel{2.3}{=} 0.$

`4:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq z \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `3.1`"$0 \neq -w \in \mathbb{C}$" und
aus `3.2`"$x : z + (-w) : y = \ldots = 0$"
folgt via **152-1**: $x \cdot y + z \cdot (-w) = 0$.

`5:` $x \cdot y - z \cdot w = x \cdot y + (-z \cdot w) \stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot y + z \cdot (-w) \stackrel{4}{=} 0.$

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot y - z \cdot w = 0$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \cdot y - z \cdot w = 0$.

□

152-3. Nun wird ein Kriterium für $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$ gegeben:

152-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$.

`ii)` “$(x = 0) \wedge (y$ *Zahl*$)$” *oder* “$(x$ *Zahl*$) \wedge (y = 0)$”

oder “$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$” *oder* “$(x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)$”

oder “$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))$”.

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$” und
aus **95-12**“$0 \in \mathbb{T}$”
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{T}.$

`1.2:` Via **96-26** gilt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$

`2.1:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **96-9**: $x \cdot y$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0.$

`3:` Aus `2.1`“$x \cdot y$ Zahl”
folgt via **96-15**: $(x$ Zahl$) \wedge (y$ Zahl$).$

`4.1:` Aus `3`“x Zahl…”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}).$

`4.2:` Aus `3`“…y Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}).$

…

<u>Beweis **152-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $$\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$$

...

`5:` Aus `2.2`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0$”
folgt via **152-2**: $$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0)$$
$$\vee \quad (0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0).$$

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0).$$

`6.1:` Aus `5.1.Fall`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0 \ldots$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $$(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Re}y = 0).$$

`6.2:` Aus `5.1.Fall`“$\ldots (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $$(\mathsf{Im}x = 0) \vee (\mathsf{Im}y = 0).$$

`7:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = 0)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = 0).$$

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0).$$

`8:` Aus `7.1.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$” und
aus `7.1.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **96-31**: $$x = 0.$$

`9:` Aus `8`“$x = 0$” und
aus `3`“$\ldots y$ Zahl”
folgt: $$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}).$$

`10:` Aus `9`
folgt: $$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

...

Beweis **152-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`7.2.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = 0).$

`8:` Aus `7.2.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}y = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y \in \mathbb{T}.$

`9:` Aus `7.2.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$" und
aus `8`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T}).$

`10:` Aus `9`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

`7.3.Fall` $(\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0).$

`8:` Aus `7.3.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}.$

`9:` Aus `8`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `7.3.Fall`"$\mathsf{Re}y = 0 \ldots$"
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0).$

`10:` Aus `9`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

...

...

Beweis **152-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`7.4.Fall` $(\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = 0).$

8: Aus `7.4.Fall`“$\mathsf{Re}y = 0 \ldots$” und
aus `7.4.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y = 0$”
folgt via **96-31**: $y = 0.$

9: Aus 3“x Zahl…” und
aus 8“$y = 0$”
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0).$

10: Aus 9
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

...

<u>Beweis **152-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.2.Fall}}$ $(0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{C})$
$\wedge((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0).$

`6.1:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-14**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}.$

`6.2:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-14**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}.$

`6.3:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-14**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}.$

`6.4:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-14**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}.$

`6.5:` Aus `5.2.Fall`“$0 \neq \mathsf{Re}x \ldots$”
folgt via **96-32**: $0 \neq x.$

`6.6:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Re}y \ldots$”
folgt via **96-32**: $0 \neq y.$

`6.7:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots (\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0$”
folgt via **102-7**: $(\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) = (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y).$

...

...

Beweis **152-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$.

...

`Fallunterscheidung`

...

$\boxed{\texttt{5.2.Fall}}$ $(0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{C})$
$\wedge ((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0)$.

...

`7.1:` Aus `6.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" und
aus `6.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`7.2:` Aus `6.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$" und
aus `6.4`"$\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $y \in \mathbb{C}$.

`7.3:` Aus `6.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`7.4:` Aus `6.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

`7.5:` Aus `6.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`7.6:` Aus `6.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$" und
aus `6.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via :**SZ**: $(\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`7.7:` Aus `5.2.Fall`"$\ldots 0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `5.2.Fall`"$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **150-6**: $0 \neq (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$.

`7.8:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x)$.

`7.9:` Aus `6.7`
folgt: $(\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = (\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x)$.

...

...

Beweis **152-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad \mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

$\boxed{\texttt{5.2.Fall}}$ $(0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{C})$
$\wedge((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0).$

...

`8.1:` Aus `6.5`“$0 \neq x$” und
aus `7.1`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt: $\qquad 0 \neq x \in \mathbb{C}.$

`8.2:` Aus `6.6`“$0 \neq y$” und
aus `7.2`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt: $\qquad 0 \neq y \in \mathbb{C}.$

`8.3:` Aus `7.1`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\qquad x$ Zahl.

`8.4:` Aus `7.2`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\qquad y$ Zahl.

`8.5:` Aus `7.4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”,
aus `7.3`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus `7.5`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-7**: $\qquad (\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}x : \mathsf{Im}x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y : \mathsf{Im}x).$

`8.6:` Aus `7.8`“$\ldots \Omega = (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x)$” und
aus `7.6`“$(\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$”
folgt: $\qquad \Omega \in \mathbb{R}.$

`8.7:` Aus `7.7`“$0 \neq (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x) \ldots$” und
aus `7.8`“$\ldots \Omega = (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $\qquad 0 \neq \Omega.$

`8.8:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `5.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `7.9`“$(\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = (\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x)$”
folgt via **DIR**: $\qquad \mathsf{Im}y = ((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x)) \cdot (\mathsf{Re}y).$

`8.9:` Aus `7.8`“$\ldots \Omega = (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $\qquad (\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x) = \Omega.$

`8.10:` Aus `7.5`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `7.3`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **DG**i: $\qquad \Omega \cdot ((\mathsf{Im}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Re}x)) = \Omega \cdot (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{Re}x)).$

...

...

<u>Beweis **152-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.2.Fall}}$ $(0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{C})$
$\wedge ((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0).$

...

`9.1:` Aus `8.3`“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x).$

`9.2:` Aus `8.4`“y Zahl”
folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y).$

`9.3:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `5.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `8.9`“$(\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x) = \Omega$”
folgt via **DIR**: $\mathsf{Re}y = \Omega \cdot (\mathsf{Im}x).$

`10:`
$$\begin{aligned}
& y \\
& \stackrel{\mathsf{9.2}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y) \\
& \stackrel{\mathsf{8.8}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x)) \cdot (\mathsf{Re}y)) \\
& \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot ((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x))) \\
& \stackrel{\mathsf{8.5}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : (\mathsf{Im}x))) \\
& \stackrel{\mathsf{8.9}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \Omega) \\
& \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
& \stackrel{\mathsf{9.3}}{=} \Omega \cdot (\mathsf{Im}x) + \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
& \stackrel{\mathsf{8.10}}{=} \Omega \cdot ((\mathsf{Im}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
& \stackrel{\mathbf{149-23}}{=} \Omega \cdot (\mathsf{i} \cdot x^{\mathsf{cc}}) \\
& \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}).
\end{aligned}$$

...

...

Beweis **152-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.2.Fall}}$ $(0 \neq \mathsf{Re}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Re}y \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{C})$
$\wedge ((\mathsf{Re}x) : (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) : (\mathsf{Re}y) = 0).$

...

`11:` Aus `7.8`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `8.7`“$0 \neq \Omega$”,
aus `8.6`“$\Omega \in \mathbb{R}$” und
aus `10`“$y = \ldots = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})$”
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$

`12:` Aus `8.1`“$0 \neq x \in \mathbb{C}$”,
aus `8.2`“$0 \neq y \in \mathbb{C}$” und
aus `11`
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

`13:` Aus `12`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$$

Beweis **152-3** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee\quad((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee\quad((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

`1:` Nach `VS` gilt: $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$

$\vee\quad((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$

$\vee\quad((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x=0)\wedge(y\text{ Zahl}).$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0\cdot y=0.$

`3:` Aus `1.1.Fall`"$x=0\ldots$" und
aus 2"$0\cdot y=0$"
folgt: $x\cdot y=0.$

`4:` $\mathsf{Re}(x\cdot y)\stackrel{3}{=}\mathsf{Re}0\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=}0.$

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x\cdot y)=0.$

`1.2.Fall` $(x\text{ Zahl})\wedge(y=0).$

`2:` Aus `1.2.Fall`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x\cdot 0=0.$

`3:` Aus 2"$x\cdot 0=0$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots y=0$"
folgt: $x\cdot y=0.$

`4:` $\mathsf{Re}(x\cdot y)\stackrel{3}{=}\mathsf{Re}0\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=}0.$

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x\cdot y)=0.$

...

Beweis **152-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee\quad((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee\quad((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}).$

`2.1:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots y\in\mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots y\in\mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}y=0.$

`2.3:` Aus `1.3.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}x=0.$

`3.1:` Aus `2.1`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $y\cdot 0=0.$

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{Im}y=0$"
folgt via **130-5**: $\mathsf{Re}(y\cdot x)=y\cdot\mathsf{Re}x.$

`4:` $\mathsf{Re}(x\cdot y)\overset{\mathbf{KGM}}{=}\mathsf{Re}(y\cdot x)\overset{3.2}{=}y\cdot\mathsf{Re}x\overset{2.3}{=}y\cdot 0\overset{3.1}{=}0.$

`5:` Aus `4`
folgt: $\mathsf{Re}(x\cdot y)=0.$

...

<u>Beweis **152-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$\vee \quad ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $(x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0).$

`2.1:` Aus `1.4.Fall`“$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0.$

`2.3:` Aus `1.4.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}y = 0.$

`3.1:` Aus `2.1`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`3.2:` Aus `2.2`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **130-5**: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Re}y.$

`4:` $\mathsf{Re}(x \cdot y) \stackrel{3.2}{=} x \cdot \mathsf{Re}y \stackrel{2.3}{=} x \cdot 0 \stackrel{3.1}{=} 0.$

`5:` Aus `4`
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0.$

$\boxed{\texttt{1.5.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

`2.1:` Aus `1.5.Fall`
folgt: $y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}).$

`2.2:` Aus `1.5.Fall`$\ldots \Omega \in \mathbb{R} \ldots$ und
folgt via $\in$**SZ**: $\Omega \in \mathbb{C}.$

`2.3:` Aus `1.5.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x).$

`2.4:` Aus `1.5.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}.$

...

...

Beweis **152-3** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

VS gleich
$$((x=0)\wedge(y\ \text{Zahl}))\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y=0))$$
$$\vee\quad((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$
$$\vee\quad((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.5.Fall`
$$(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`3.1:` Aus `1.5.Fall`"$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$" und
aus `2.2`"$\Omega\in\mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $$x\cdot(x^{\mathsf{cc}}\cdot\Omega)=(x\cdot x^{\mathsf{cc}})\cdot\Omega.$$

`3.2:` Aus `2.4`"$\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{R}$" und
aus `1.5.Fall`"$\ldots\Omega\in\mathbb{R}\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $$\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega\in\mathbb{R}.$$

`4:` Aus `3.2`"$\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega\in\mathbb{R}$"
folgt via **134-1**: $$\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot(\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega))=0.$$

`5:`
$$\mathsf{Re}(x\cdot y)$$
$$\stackrel{2.1}{=}\mathsf{Re}(x\cdot(\mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})))$$
$$\stackrel{\mathbf{133-2}}{=}\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot(x\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})))$$
$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot(x\cdot(x^{\mathsf{cc}}\cdot\Omega)))$$
$$\stackrel{3.1}{=}\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot((x\cdot x^{\mathsf{cc}})\cdot\Omega))$$
$$\stackrel{2.3}{=}\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot(\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega))$$
$$\stackrel{4}{=}0.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $$\mathsf{Re}(x\cdot y)=0.$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $$\mathsf{Re}(x\cdot y)=0.$$

□

152-4. Beim Beweis `ii)` $\Rightarrow$ `i)` von **152-3** wird weder die Voraussetzung $0 \neq x$ noch die Voraussetzung $0 \neq y \in \mathbb{C}$ noch die Voraussetzung $0 \neq \Omega$ benötigt:

152-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $y = \mathsf{i} \cdot (a \cdot x^{\mathsf{cc}})$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

<u>Beweis **152-4**</u>

1.1: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

1.2: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus →) “$a \in \mathbb{R}$”
folgt via ∈**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

2.1: Aus 1.2 “$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$” und
aus →) “$a \in \mathbb{R}$”
folgt via ·**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$.

2.2: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$” und
aus 1.3 “$a \in \mathbb{C}$”
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a$.

3: Aus 2.1 “$\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$”
folgt via **134-1**: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{ab2}(x) \cdot a)) = 0$.

4:
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x \cdot y)\\
\stackrel{\rightarrow)}{=}\ &\mathsf{Re}(x \cdot (\mathsf{i} \cdot (a \cdot x^{\mathsf{cc}})))\\
\stackrel{\mathbf{133-2}}{=}\ &\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x \cdot (a \cdot x^{\mathsf{cc}})))\\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a)))\\
\stackrel{2.2}{=}\ &\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot ((x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a))\\
\stackrel{1.1}{=}\ &\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{ab2}(x) \cdot a))\\
\stackrel{3}{=}\ &0.
\end{aligned}$$

5: Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = 0$.

□

152-5. Mit Hilfe von **152-3** ergibt sich ohne viel Mühe ein Kriterium für $x \cdot y \in \mathbb{T}$ und, äquivalenter Weise, für $\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0$:

152-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0$.

`ii)` $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`iii)` *"*$(x = 0) \wedge (y$ *Zahl*$)$*" oder "*$(x$ *Zahl*$) \wedge (y = 0)$*"*

oder "$(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$*" oder "*$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)$*"*

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$*"*.

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0.$

Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

1: Aus `VS` gleich "$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0.$

2: $$\mathsf{Re}((\mathsf{i} \cdot x) \cdot y) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x \cdot y)) \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} -\mathsf{Im}(x \cdot y) \stackrel{1}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$$

3: Aus 2"$\mathsf{Re}((\mathsf{i} \cdot x) \cdot y) = \ldots = 0$"
folgt via **152-3**:
$$((\mathsf{i} \cdot x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})))).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **152-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $(\mathsf{i} \cdot x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x = 0 \ldots$"
folgt via **133-7**: $x = 0$.

`5:` Aus `4`"$x = 0$" und
aus `3.1.Fall`"$\ldots y$ Zahl"
folgt: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`6:` Aus `5`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x$ Zahl..."
folgt via **96-15**: x Zahl.

`5:` Aus `4`"x Zahl" und
aus `3.2.Fall`"$\ldots y = 0$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`6:` Aus `5`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **152-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`4:` Aus `3.3.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$.

`5:` $\mathsf{Im}x \overset{\mathbf{100-4}}{=} -(-\mathsf{Im}x) \overset{\mathbf{133-1}}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) \overset{4}{=} -0 \overset{\mathbf{98-15}}{=} 0$.

`6:` Aus `5`“$\mathsf{Im}x = \ldots = 0$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `6`“$x \in \mathbb{T}$” und
aus `3.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`8:` Aus `7`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{3.4.Fall}}$ $(\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)$.

`4:` Aus `3.4.Fall`“$\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$.

`5:` $\mathsf{Re}x \overset{\mathbf{133-1}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) \overset{4}{=} 0$.

`6:` Aus `5`“$\mathsf{Re}x = \ldots = 0$” und
aus `3.4.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0$”
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)$.

`7:` Aus `6`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **152-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.5.Fall}}$ $(0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})))$.

`4.1:` Aus `3.5.Fall`“$0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **140-1**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`4.2:` Aus `3.5.Fall`
folgt: $y = \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})$.

`5:`
$$\begin{aligned}
& y \\
& \stackrel{4.2}{=} \mathsf{i} \cdot (\Omega \cdot (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}}) \\
& \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} \Omega \cdot (\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}}) \\
& \stackrel{\mathbf{149-23}}{=} \Omega \cdot (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x)) \\
& \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \Omega \cdot ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x)) \\
& \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \Omega \cdot ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)) \\
& \stackrel{\mathbf{110-8}}{=} \Omega \cdot ((\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \\
& \stackrel{\mathbf{149-1(Def)}}{=} \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}.
\end{aligned}$$

`6:` Aus `4.1`“$0 \neq x \in \mathbb{C}$”,
aus `3.5.Fall`“$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `3.5.Fall`“$\ldots \exists\Omega : 0 \neq \Omega \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `5`“$y = \ldots = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}$”
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

`7:` Aus `6`
folgt:
$$\begin{aligned}
& ((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \\
\vee \quad & ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)) \\
\vee \quad & ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).
\end{aligned}$$

...

Beweis **152-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`3:` Aus `1.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
aus 2“$0 \cdot y = 0$”
folgt: $x \cdot y = 0$.

`4:` $\mathsf{Im}(x \cdot y) \stackrel{3}{=} \mathsf{Im}0 \stackrel{\textbf{AAIII}}{=} 0.$

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0$.

...

Beweis **152-5** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))$

$\vee \quad ((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$

$\vee \quad ((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(x \text{ Zahl})\wedge(y=0).$

`2:` Aus `1.2.Fall`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x\cdot 0=0.$

`3:` Aus 2“$x\cdot 0=0$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots y=0$”
folgt: $x\cdot y=0.$

`4:` $\mathsf{Im}(x\cdot y)\stackrel{3}{=}\mathsf{Im}0\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=}0.$

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Im}(x\cdot y)=0.$

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}).$

`1:` Aus `1.3.Fall`“$x\in\mathbb{T}\ldots$” und
aus `1.3.Fall`“$\ldots y\in\mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x\cdot y\in\mathbb{T}.$

`2:` Aus 1“$x\cdot y\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x\cdot y)=0.$

...

<u>Beweis **152-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee\quad((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee\quad((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0).$

`2.1:` Aus `1.4.Fall`“$\mathsf{Re}x=0\ldots$”
folgt via **127-4**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$\mathsf{Re}x=0$”
folgt via **130-2**: $\mathsf{Im}(x\cdot y)=(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y).$

`2.3:` Aus `1.4.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}y=0.$

`3:` Aus `2.1`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x)\cdot 0=0.$

`5:` $\mathsf{Im}(x\cdot y)\stackrel{2.2}{=}(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\stackrel{2.3}{=}(\mathsf{Im}x)\cdot 0\stackrel{4}{=}0.$

`6:` Aus `5`
folgt: $\mathsf{Im}(x\cdot y)=0.$

...

Beweis **152-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee\quad((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee\quad((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.5.Fall` $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})).$

`2.1:` Aus `1.5.Fall`
folgt: $y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}.$

`2.2:` Aus `1.5.Fall`$\ldots\Omega\in\mathbb{R}\ldots$ und
folgt via $\in$**SZ**: $\Omega\in\mathbb{C}.$

`2.3:` Aus `1.5.Fall`“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$”
folgt via **149-20**: $x\cdot x^{\mathsf{cc}}=\mathsf{ab2}(x).$

`2.4:` Aus `1.5.Fall`“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$”
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{R}.$

`3.1:` Aus `1.5.Fall`“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$” und
aus `2.2`“$\Omega\in\mathbb{C}$”
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x\cdot(x^{\mathsf{cc}}\cdot\Omega)=(x\cdot x^{\mathsf{cc}})\cdot\Omega.$

`3.2:` Aus `2.4`“$\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{R}$” und
aus `1.5.Fall`“$\ldots\Omega\in\mathbb{R}\ldots$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega\in\mathbb{R}.$

`4:` Aus `3.2`“$\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega\in\mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega\in\mathbb{T}.$

`5:`
$$x\cdot y\overset{2.1}{=}x\cdot(\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})\overset{\mathbf{KGM}}{=}x\cdot(x^{\mathsf{cc}}\cdot\Omega)\overset{3.1}{=}(x\cdot x^{\mathsf{cc}})\cdot\Omega\overset{2.3}{=}\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega.$$

`6:` Aus `5`“$x\cdot y=\ldots=\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega$” und
aus `4`“$\mathsf{ab2}(x)\cdot\Omega\in\mathbb{T}$”
folgt: $x\cdot y\in\mathbb{T}.$

`7:` Aus `6`“$x\cdot y\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x\cdot y)=0.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Im}(x\cdot y)=0.$

□

152-6. Beim Beweis `ii)` $\Rightarrow$ `i)` von **152-5** wird weder die Voraussetzung $0 \neq x$ noch die Voraussetzung $0 \neq y \in \mathbb{C}$ noch die Voraussetzung $0 \neq \Omega$ benötigt. Es gilt sogar die nunmehrige Aussage:

152-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $y = a \cdot x^{\mathsf{cc}}$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$x \cdot y \in \mathbb{R}$".

`RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-6**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$" und
aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `1.3`"$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a$.

`3:`
$$x \cdot y \stackrel{\rightarrow)}{=} x \cdot (a \cdot x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) \stackrel{2.2}{=} (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a \stackrel{1.1}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot a.$$

`4:` Aus `3`"$x \cdot y = \ldots = \mathsf{ab2}(x) \cdot a$" und
aus `2.1`"$\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

$\square$

152-7. Aus **152-5** folgt ohne viel Mühe das nunmehrige Kriterium für $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$:

152-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`ii)` "$(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y$ Zahl"
folgt: $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x \cdot y$ Zahl"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **152-5**: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$\vee \quad ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee \quad ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **152-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{4.1.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

Es gilt `4.1.Fall`"$x = 0\ldots$" .

Es gilt `3`"$0 \neq x\ldots$" .

Ex falso quodlibet folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

Es gilt `4.2.Fall`"$\ldots y = 0$" .

Es gilt `3`"$\ldots 0 \neq y\ldots$" .

Ex falso quodlibet folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{4.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`5.1:` Aus `3`"$0 \neq x\ldots$" und
aus `4.3.Fall`"$x \in \mathbb{T}\ldots$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{T}$.

`5.2:` Aus `3`"$\ldots 0 \neq y\ldots$" und
aus `4.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

`7:` Aus `6`
folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **152-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}.$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.4.Fall}}$ $$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0).$$

`5.1:` Aus `3`"$0 \neq x \ldots$"
folgt via **96-32**: $$(0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x).$$

`5.2:` Aus `3`"$\ldots 0 \neq y \ldots$"
folgt via **96-32**: $$(0 \neq \mathsf{Re}y) \vee (0 \neq \mathsf{Im}y).$$

`6.1:` Aus `4.4.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$" und
aus `5.1`"$(0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x)$"
folgt: $$0 \neq \mathsf{Im}x.$$

`6.2:` Aus `4.4.Fall`"$\ldots \mathsf{Re}y = 0$" und
aus `5.2`"$(0 \neq \mathsf{Re}y) \vee (0 \neq \mathsf{Im}y)$"
folgt: $$0 \neq \mathsf{Im}y.$$

`7:` Aus `4.4.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$",
aus `6.1`"$0 \neq \mathsf{Im}x$",
aus `4.4.Fall`"$\ldots \mathsf{Re}y = 0$" und
aus `6.2`"$0 \neq \mathsf{Im}y$"
folgt: $$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y).$$

`8:` Aus `7`
folgt: $$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{4.5.Fall}}$ $$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

Aus `4.5.Fall`
folgt: $$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

Beweis **152-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots 0 \neq y \ldots$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2.1`“$0 \neq x \cdot y$” und
aus `2.2`“$x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **152-5**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$”
folgt via **96-32**: $0 \neq x$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y$”
folgt via **96-32**: $0 \neq y$.

`3:` Aus `2.2`“$0 \neq x$” und
aus `2.3`“$0 \neq y$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`4:` Aus `3`“$0 \neq x \cdot y$” und
aus `2.1`“$x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **152-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots 0 \neq y \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `1.3.Fall`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots \exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})$"
folgt via **152-5**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2.1`"$0 \neq x \cdot y$" und
aus `2.2`"$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

□

152-8. An Stelle der letzten Alternative von `ii)` in **152-7** kann eine schwächere Forderung gesetzt werden, um $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$, ja sogar $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$ zu erreichen:

152-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $y = a \cdot x^{\mathsf{cc}}$.

$\rightarrow$) $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $(0 \neq y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

oder

$0 \neq a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$".

`RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-8**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`2:` Nach $\rightarrow$) gilt: $((0 \neq y) \wedge (a \in \mathbb{R})) \vee (0 \neq a \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis **152-8**</u>

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(0 \neq y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus →) "$0 \neq x \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$0 \neq y \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall` "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`4.1:` Aus →) "$\ldots x \in \mathbb{C}$" und
aus `3.2` "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a$.

`4.2:` Aus `1.1` "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$" und
aus `2.1.Fall` "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$.

`5:` $x \cdot y \stackrel{\rightarrow)}{=} x \cdot (a \cdot x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) \stackrel{4.1}{=} (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a \stackrel{1.2}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot a$.

`6:` Aus `5` "$x \cdot y = \ldots = \mathsf{ab2}(x) \cdot a$" und
aus `4.2` "$\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `3.1` "$0 \neq x \cdot y$" und
aus `6` "$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

Beweis **152-8**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus →) "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **149-27**: $0 \neq x^{\mathsf{cc}}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall` "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via ∈**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`4.1:` Aus `2.2.Fall` "$0 \neq a \ldots$" und
aus `3.1` "$0 \neq x^{\mathsf{cc}}$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq a \cdot x^{\mathsf{cc}}$.

`4.2:` Aus →) "$\ldots x \in \mathbb{C}$" und
aus `3.2` "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a$.

`4.3:` Aus `1.1` "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$" und
aus `2.2.Fall` "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via ·**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$.

`5.1:` Aus →) "$y = a \cdot x^{\mathsf{cc}}$" und
aus `4.1` "$0 \neq a \cdot x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $0 \neq y$.

`5.2:` $x \cdot y \stackrel{\to)}{=} x \cdot (a \cdot x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (x^{\mathsf{cc}} \cdot a) \stackrel{4.2}{=} (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) \cdot a \stackrel{1.2}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot a$.

`6.1:` Aus →) "$0 \neq x \ldots$" und
aus `5.1` "$0 \neq y$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`6.2:` Aus `5.2` "$x \cdot y = \ldots = \mathsf{ab2}(x) \cdot a$" und
aus `4.3` "$\mathsf{ab2}(x) \cdot a \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `6.1` "$0 \neq x \cdot y$" und
aus `6.2` "$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

□

152-9. Mit Hilfe des via **152-5** gewonnenen Satzes **152-7** läßt sich ohne allzu viel Mühe eine im Detail etwas klarere Re-Formulierung von **152-5** bezüglich $x \cdot y \in \mathbb{T}$ zu gewinnen:

152-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`ii)` *“$(x = 0) \wedge (y$ Zahl$)$” oder “$(x$ Zahl$) \wedge (y = 0)$”*

oder “$(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$”

oder “$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$”

*oder “$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$”.*

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`1:` Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \cdot y = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$.

`3:` Aus 2
folgt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **152-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq x \cdot y$.

2: Aus 1.2.Fall“$0 \neq x \cdot y$” und
aus VS gleich “$x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt via **152-7**:

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

4: Aus 3
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

1: Nach VS gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **152-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}))$
$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}).$

Aus `1.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **152-5**: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0).$

Aus `1.2.Fall`“x Zahl…” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots y = 0$”
folgt via **152-5**: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

`1.3.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T}).$

Aus `1.3.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `1.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

`1.4.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y).$

Aus `1.4.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **152-5**: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

`1.5.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$

Aus `1.5.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$” ,
aus `1.5.Fall`“$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `1.5.Fall`“$\ldots \exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})$”
folgt via **152-5**: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

$\square$

152-10. Aus **152-7** folgt das nunmehrige Kriterium für $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$:

152-10(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

ii) "$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$".

REIM.RECH.cc-**Notation**.

Beweis **152-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

2: Aus VS gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus 1"$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **152-7**: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$
$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$
$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **152-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"... $x \in \mathbb{T}$..." und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-2**: $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$
$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$
$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

...

Beweis **152-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`4.2:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`4.3:` Aus `3.2.Fall`"$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`5:` $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{4.1}{=} x \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{4.3}{=} x \cdot y$.

`6.1:` Aus 5"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = \ldots = x \cdot y$" und
aus VS gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$"
folgt: $0 \neq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`6.2:` Aus 5"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = \ldots = x \cdot y$" und
aus VS gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`7.1:` Aus 6.1"$0 \neq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$"
folgt via **100-13**: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`7.2:` Aus 6.2"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`8:` Aus 7.1 und
aus 7.2
folgt: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`9:` Aus 4.2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 8"$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-2**: $(0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$.

`10:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$",
aus 9"$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S} \ldots$",
aus `3.2.Fall`"$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$" und
aus 9"$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$.

`11:` Aus 10
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$
$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$
$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

...

Beweis **152-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus `3.3.Fall`
folgt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

`Fallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots 0 \neq y \ldots$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{S}$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **152-10** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \ldots$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`2.4:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`3:`
$$-x \cdot y \stackrel{2.1}{=} -(\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot y \stackrel{2.2}{=} -(\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$$

`4.1:` Aus `3`“$-x \cdot y = \ldots = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.3`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$”
folgt: $0 \neq -x \cdot y$.

`4.2:` Aus `3`“$-x \cdot y = \ldots = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.4`“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$”
folgt: $-x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`5.1:` Aus `4.1`“$0 \neq -x \cdot y$”
folgt via **100-13**: $0 \neq x \cdot y$.

`5.2:` Aus `4.2`“$-x \cdot y \in \mathbb{S}$”
folgt via **117-4**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **152-10** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

`2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}$",
aus `1.3.Fall`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **152-8**: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus `3`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

$\square$

152-11. Mit Hilfe von **152-10** ergibt sich ein Kriterium für $x \cdot y \in \mathbb{S}$:

152-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`ii)` *“*$(x = 0) \wedge (y$ *Zahl*$)$*” oder “*$(x$ *Zahl*$) \wedge (y = 0)$*”*

oder “$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$*”*

oder “$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S})$*”*

oder “$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$*”*.

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`1:` Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \cdot y = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$.

`3:` Aus `2`
folgt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **152-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq x \cdot y$.

2: Aus 1.2.Fall"$0 \neq x \cdot y$" und
aus VS gleich "$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **152-10**:

$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

4: Aus 3
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

1: Nach VS gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **152-11** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((x=0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y=0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$
$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x=0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

2: Aus `1.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $x \cdot y = 0.$

3: Aus 2“$x \cdot y = 0$” und
aus **95-11**“$0 \in \mathbb{S}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y=0)$.

2: Aus `1.2.Fall`“x Zahl...” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots y = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $x \cdot y = 0.$

3: Aus 2“$x \cdot y = 0$” und
aus **95-11**“$0 \in \mathbb{S}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

`1.3.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$.

Aus `1.3.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `1.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}.$

...

<u>Beweis **152-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{S})\wedge(0\neq y\in\mathbb{S}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{S})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{S}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{S})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{S}).$

Aus `1.4.Fall`"$\mathsf{Re}x=0\ldots$",
aus `1.4.Fall`"$\ldots 0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{S}$",
aus `1.4.Fall`"$\ldots\mathsf{Re}y=0\ldots$" und
aus `1.4.Fall`"$\ldots 0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{S}\ldots$"
folgt via **152-10**: $x\cdot y\in\mathbb{S}.$

$\boxed{\texttt{1.5.Fall}}$ $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})).$

Aus `1.5.Fall`"$0\neq x\in\mathbb{C}\ldots$",
aus `1.5.Fall`"$\ldots 0\neq y\in\mathbb{C}\ldots$" und
aus `1.5.Fall`"$\ldots\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})$"
folgt via **152-10**: $x\cdot y\in\mathbb{S}.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x\cdot y\in\mathbb{S}.$

$\square$

152-12. Aus **152-7** folgt ohne viel Mühe das nunmehrige Kriterium für $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$:

152-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`ii)` "$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **152-12** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2`: Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`3`: Aus `2`"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **152-7**: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$
$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$
$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **152-12**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

`4:` Aus **`3.1.Fall`** "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-2**: $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`5:` Aus `4`
folgt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

...

Beweis **152-12** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y)$.

4.1: Aus 3.2.Fall "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

4.2: Aus 3.2.Fall "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

4.3: Aus 3.2.Fall "$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

5: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{4.1}{=} x \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{4.3}{=} x \cdot y$.

6.1: Aus 5 "$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = \ldots = x \cdot y$" und
aus VS gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$"
folgt: $0 \neq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

6.2: Aus 5 "$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = \ldots = x \cdot y$" und
aus VS gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

7.1: Aus 6.1 "$0 \neq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$"
folgt via **100-13**: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

7.2: Aus 6.2 "$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

8: Aus 7.1 und
aus 7.2
folgt: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

9: Aus 4.2 "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 8 "$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-2**: $(0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

10: Aus 3.2.Fall "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$",
aus 9 "$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus 3.2.Fall "$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$" und
aus 9 "$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

11: Aus 10
folgt:
$$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

...

Beweis **152-12** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus `3.3.Fall`
folgt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots 0 \neq y \ldots$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq x \cdot y$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{R}$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

Beweis **152-12** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \ldots$”
folgt via **NTF$\mathbb{A}$**: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`2.4:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`3:`
$$-x \cdot y \stackrel{2.1}{=} -(\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot y \stackrel{2.2}{=} -(\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$$

`4.1:` Aus `3`“$-x \cdot y = \ldots = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.3`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$”
folgt: $0 \neq -x \cdot y$.

`4.2:` Aus `3`“$-x \cdot y = \ldots = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.4`“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $-x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`5.1:` Aus `4.1`“$0 \neq -x \cdot y$”
folgt via **100-13**: $0 \neq x \cdot y$.

`5.2:` Aus `4.2`“$-x \cdot y \in \mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

Beweis **152-12** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{S}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus `1.3.Fall`“$\ldots y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}$”,
aus `1.3.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `1.3.Fall`“$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **152-8**: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

□

152-13. Mit Hilfe von **152-12** ergibt sich ein Kriterium für $x \cdot y \in \mathbb{R}$:

152-13(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **152-13** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`1:` Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \cdot y = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$
$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}})))$.

...

Beweis **152-13** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq x \cdot y$.

2: Aus 1.2.Fall"$0 \neq x \cdot y$" und
aus VS gleich "$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **152-12**:

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

4: Aus 3
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

1: Nach VS gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **152-13** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x = 0 \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $x \cdot y = 0$.

`3:` Aus 2"$x \cdot y = 0$" und
aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"x Zahl..." und
aus `1.2.Fall`"$\ldots y = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $x \cdot y = 0$.

`3:` Aus 2"$x \cdot y = 0$" und
aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`1.3.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

Aus `1.3.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **152-13**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{R})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{R})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{R})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R})$.

Aus $\texttt{1.4.Fall}$ "$\mathsf{Re}x=0\ldots$",
aus $\texttt{1.4.Fall}$ "$\ldots 0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{R}$",
aus $\texttt{1.4.Fall}$ "$\ldots\mathsf{Re}y=0\ldots$" und
aus $\texttt{1.4.Fall}$ "$\ldots 0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}\ldots$"
folgt via **152-12**: $x\cdot y\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{1.5.Fall}}$ $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus $\texttt{1.5.Fall}$ "$0\neq x\in\mathbb{C}\ldots$",
aus $\texttt{1.5.Fall}$ "$\ldots 0\neq y\in\mathbb{C}\ldots$" und
aus $\texttt{1.5.Fall}$ "$\ldots\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega\cdot x^{\mathsf{cc}})$"
folgt via **152-12**: $x\cdot y\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x\cdot y\in\mathbb{R}$.

□

152-14. Zur Abrundung dieses Essays werden nun - teilweise bekannte - Kriterien für $(0 \neq)x \cdot y \in \mathbb{C}$ und $(0 \neq)x \cdot y$ Zahl gegeben. Die Diskussion von $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{B}$ und von $x \cdot y \in \mathbb{B}$ unterbleibt bis auf Weiteres:

152-14(Satz)

a) *"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$" genau dann, wenn "$0 \neq x \in \mathbb{C}$" und "$0 \neq y \in \mathbb{C}$".*

b) *"$x \cdot y \in \mathbb{C}$" genau dann, wenn*
"$(x = 0) \wedge (y$ Zahl$)$" oder "$(x$ Zahl$) \wedge (y = 0)$"
oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$".

c) *"$0 \neq x \cdot y$ Zahl" genau dann, wenn "$0 \neq x$ Zahl" und "$0 \neq y$ Zahl".*

d) *"$x \cdot y$ Zahl" genau dann, wenn "x Zahl" und "y Zahl".*

RECH-**Notation**.

Beweis **152-14** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

Aus VS gleich "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

Aus VS gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

1: Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \cdot y = 0$.

2: Aus 1.1.Fall "$x \cdot y = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$.

3: Aus 2
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

...

<u>Beweis **152-14**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 \neq x \cdot y$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq x \cdot y$” und
aus `VS` gleich “$x \cdot y \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$”
folgt via **140-1**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$$
$$\vee \quad (x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$$
$$\vee \quad (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
uas `1.1.Fall`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $x \cdot y = 0$.

`3:` Aus `2`“$x \cdot y = 0$” und
aus **101-5**“$0 \in \mathbb{C}$”
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

...

Beweis **152-14** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(x=0)\wedge(y\text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"x Zahl..." und
aus `1.2.Fall`"... $y=0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $x\cdot y=0$.

`3:` Aus 2"$x\cdot y=0$" und
aus **101-5**"$0\in\mathbb{C}$"
folgt: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

`1.3.Fall` $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$.

Aus `1.3.Fall`"... $x\in\mathbb{C}$..." und
aus `1.3.Fall`"... $y\in\mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0\neq x\cdot y$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$0\neq x\cdot y$ Zahl"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(0\neq x\text{ Zahl})\wedge(0\neq y\text{ Zahl})$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(0\neq x\text{ Zahl})\wedge(0\neq y\text{ Zahl})$.

Aus `VS` gleich "$0\neq x$ Zahl..." und
aus `VS` gleich "... $0\neq y$ Zahl"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0\neq x\cdot y$ Zahl.

<u>Beweis **152-14**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \cdot y$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$x \cdot y$ Zahl"
folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

Aus `VS` gleich "x Zahl…" und
aus `VS` gleich "…y Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

□

Einiges über $1 : x$.
Einiges über $x : y$.

Ersterstellung: 20/09/10 **Letzte Änderung: 29/03/12**

153-1. Nun wird die Gleichung $\mathsf{Re}(1:x)=0$ thematisiert:

153-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathsf{Re}(1:x)=0$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x=0$" *oder* "$x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **153-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\mathsf{Re}(1:x)=0.$

1: Via **123-9** gilt: $\mathsf{Re}(1:x)=(\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x).$

2: Aus VS gleich “$\mathsf{Re}(1:x)=0$” und
aus 1“$\mathsf{Re}(1:x)=(\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)$”
folgt: $(\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)=0.$

3: Aus 2“$(\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)=0$”
folgt via **146-3**:

$$(\mathsf{Re}x=0)\wedge(x\text{ Zahl})$$
$$\vee\quad(\mathsf{Re}x\text{ Zahl})\wedge(x=0)$$
$$\vee\quad(\mathsf{Re}x\text{ Zahl})\wedge(\mathsf{ab2}(x)=+\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(x\text{ Zahl}).$

Aus `3.1.Fall`“$\mathsf{Re}x=0\ldots$”
folgt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}).$

`3.2.Fall` $(\mathsf{Re}x\text{ Zahl})\wedge(x=0).$

4: Aus `3.2.Fall`“$\ldots x=0$”
folgt via **96-31**: $\mathsf{Re}x=0.$

5: Aus 4
folgt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}).$

`3.3.Fall` $\mathsf{ab2}(x)=+\infty.$

4: Aus `3.3.Fall`“$\mathsf{ab2}(x)=+\infty$”
folgt via **128-8**: $x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}.$

5: Aus 4
folgt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(\mathsf{Re}x=0)\vee(x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}).$

<u>Beweis **153-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}x = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **127-4**: x Zahl.

`3:` Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{Re}x = 0$" und
aus `2` "x Zahl"
folgt via **146-3**: $(\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) = 0$.

`4:` Via **123-9** gilt: $\mathsf{Re}(1 : x) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

`5:` Aus `4` "$\mathsf{Re}(1 : x) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$" und
aus `3` "$(\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) = 0$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$.

`1.2.Fall` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **128-8**: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`3:` Aus `2.1` "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

`5:` Aus `4` "$\mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **137-3**: $(\mathsf{Re}x) : (+\infty) = 0$.

`6:` $\mathsf{Re}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) : (+\infty) \stackrel{5}{=} 0$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$.

□

153-2. Nun wird die Gleichung $\mathsf{Im}(1:x)=0$ thematisiert. Dabei kann via **FS**$\mathbb{T}$ auf **137-26** zurück gegriffen werden:

153-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $1:x\in\mathbb{T}$.

`ii)` $\mathsf{Im}(1:x)=0$.

`iii)` "$\mathsf{Im}x=0$" *oder* "$x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}$".

`iv)` "$x\in\mathbb{T}$" *oder* "$x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **153-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 : x \in \mathbb{T}$.

Aus `VS` gleich "$1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}(1 : x) = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1`"$1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-26**: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`2.2:` Via **FS**$\mathbb{T}$ gilt: $(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x = 0)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1:` Via **FS**$\mathbb{T}$ gilt: $(\mathsf{Im}x = 0) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{T})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(\mathsf{Im}x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$" und
aus `1`"$(\mathsf{Im}x = 0) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{T})$"
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

Aus `VS` gleich "$(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"
folgt via **137-26**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

□

153-3. Es wird nun ein Kriterium für $\mathsf{Re}(x:y)=0$ gegeben. Der Beweis stützt sich auf **152-3** und auf **146-1**:

153-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathsf{Re}(x:y)=0$.

`ii)` *“$(x=0)\wedge(y\ \mathit{Zahl})$”*

oder “$(x\ \mathit{Zahl})\wedge(y=0)$” oder “$(x\ \mathit{Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})$”

oder “$(\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T})$” oder “$(x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0)$”

oder “$(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})))$”.

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)}\Rightarrow\texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x:y)=0.$

`1:` Via **136-1** gilt: $x:y=x\cdot(1:y).$

`2:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{Re}(x:y)=0$” und
aus `1`“$x:y=x\cdot(1:y)$”
folgt: $\mathsf{Re}(x\cdot(1:y))=0.$

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Re}(x\cdot(1:y))=0$”
folgt via **152-3**:

$$(x=0)\wedge(1:y\ \text{Zahl})$$
$$\vee\quad(x\ \text{Zahl})\wedge(1:y=0)$$
$$\vee\quad(\mathsf{Re}x=0)\wedge(1:y\in\mathbb{T})$$
$$\vee\quad(x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}(1:y)=0)$$
$$\vee\quad(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq 1:y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Phi:(0\neq\Phi\in\mathbb{R})\wedge(1:y=\mathsf{i}\cdot(\Phi\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x : y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (1 : y \text{ Zahl}).$

`4`: Aus `3.1.Fall`"$\ldots 1 : y$ Zahl"
folgt via **96-17**: y Zahl.

`5`: Aus `3.1.Fall`"$x = 0 \ldots$" und
aus `4`"y Zahl"
folgt: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}).$

`6`: Aus `5`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))).$$

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge (1 : y = 0).$

`4`: Aus `3.2.Fall`"$\ldots 1 : y = 0$"
folgt via **137-22**: $(y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}).$

`5`: Aus `3.2.Fall`"x Zahl$\ldots$" und
aus `4`"$(y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`6`: Aus `5`
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`7`: Aus `6`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x : y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (1 : y \in \mathbb{T}).$

`4.1:` Aus `3.3.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **127-4**: x Zahl.

`4.2:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots 1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **153-2**: $(y \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}).$

`5:` Aus `3.3.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$",
aus `4.1`"x Zahl" und
aus `4.2`"$(y \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"
folgt: $((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (x \text{ Zahl})) \wedge ((y \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`6:` Aus `5`
folgt: $(((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (x \text{ Zahl})) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee (((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (x \text{ Zahl})) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`7:` Aus `6`
folgt: $((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`8:` Aus `7`
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})).$

`9:` Aus `8`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$

$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

<u>Beweis **153-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x : y) = 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.4.Fall}}$ $(x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}(1 : y) = 0).$

`4.1:` Aus `3.4.Fall`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4.2:` Aus `3.4.Fall`"$\ldots \mathsf{Re}(1 : y) = 0$"
folgt via **153-1**: $(\mathsf{Re}y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}).$

`5:` Aus `3.4.Fall`"$x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `4.1`"x Zahl" und
aus `4.2`"$(\mathsf{Re}y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"
folgt: $((x \in \mathbb{T}) \wedge (x \text{ Zahl})) \wedge ((\mathsf{Re}y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`6:` Aus `5`
folgt: $(((x \in \mathbb{T}) \wedge (x \text{ Zahl})) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$
$\vee(((x \in \mathbb{T}) \wedge (x \text{ Zahl})) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`7:` Aus `6`
folgt: $((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`8:` Aus `7`
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)).$

`9:` Aus `8`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$

$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$

$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$

$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))).$

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x : y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.5.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (1 : y = \mathsf{i} \cdot (\Phi \cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

`4.1:` Aus `3.5.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}.$

`4.2:` Aus `3.5.Fall`"$\ldots 0 \neq 1 : y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **137-30**: $0 \neq y \in \mathbb{C}.$

`4.3:` Aus `3.5.Fall`"$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\Phi \in \mathbb{C}.$

`4.4:` Aus `3.5.Fall`"$\ldots 0 \neq \Phi \ldots$"
folgt via **100-13**: $0 \neq -\Phi.$

`4.5:` Aus `3.5.Fall`"$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-\Phi \in \mathbb{R}.$

`4.6:` Aus `3.5.Fall`
folgt: $1 : y = \mathsf{i} \cdot (\Phi \cdot x^{\mathsf{cc}}).$

`5.1:` Aus `4.2`"$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $y = 1 : (1 : y).$

`5.2:` Aus `4.4`"$0 \neq -\Phi$" und
aus `4.5`"$-\Phi \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq -\Phi \in \mathbb{R}.$

`5.3:` Aus `4.3`"$\Phi \in \mathbb{C}$"
folgt via **117-4**: $-\Phi \in \mathbb{C}.$

`6.1:` Aus `5.2`"$0 \neq -\Phi \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : (-\Phi) \in \mathbb{R}.$

`6.2:` Aus `5.3`"$-\Phi \in \mathbb{C}$" und
aus `4.1`"$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-4**: $1 : ((-\Phi) \cdot x^{\mathsf{cc}}) = (1 : (-\Phi)) \cdot (1 : x^{\mathsf{cc}}).$

`7:` Aus `6.1`"$0 \neq 1 : (-\Phi) \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega = 1 : (-\Phi)) \wedge (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}).$

`8:` Aus 7
folgt: $\Omega = 1 : (-\Phi).$

...

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Re}(x:y)=0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.5.Fall}}$ $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq 1:y\in\mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Phi:(0\neq\Phi\in\mathbb{R})\wedge(1:y=\mathsf{i}\cdot(\Phi\cdot x^{\mathsf{cc}}))).$

...

`9:`
$$y$$
$$\stackrel{5.1}{=} 1:(1:y)$$
$$\stackrel{4.6}{=} 1:(\mathsf{i}\cdot(\Phi\cdot x^{\mathsf{cc}}))$$
$$\stackrel{\mathbf{133-9}}{=} -\mathsf{i}:(\Phi\cdot x^{\mathsf{cc}})$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} \mathsf{i}:(-\Phi\cdot x^{\mathsf{cc}})$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{i}:((-\Phi)\cdot x^{\mathsf{cc}})$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} \mathsf{i}\cdot(1:((-\Phi)\cdot x^{\mathsf{cc}}))$$
$$\stackrel{6.2}{=} \mathsf{i}\cdot((1:(-\Phi))\cdot(1:x^{\mathsf{cc}}))$$
$$\stackrel{8}{=} \mathsf{i}\cdot(\Omega\cdot(1:x^{\mathsf{cc}}))$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} \mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}}).$$

`10:` Aus `7`"$\exists\Omega\ldots$",
aus `7`"$\ldots 0\neq\Omega\in\mathbb{R}$" und
aus `9`"$y=\ldots=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})$"
folgt: $\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})).$

`11:` Aus `3.5.Fall`"$0\neq x\in\mathbb{C}\ldots$",
aus `4.2`"$0\neq y\in\mathbb{C}$" und
aus `10`"$\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}}))$"
folgt: $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$

`12:` Aus `11`
folgt: $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))$
$$\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$
$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})))).$

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\mathsf{Re}(x:y)=0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$
$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})))).$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$
$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})))).$

1: Nach VS gilt: $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$
$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$
$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})))).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$

2: Aus 1.1.Fall“$((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$”
folgt via **146-1**: $x:y=0.$

3: Aus 2“$x:y=0$”
folgt via **96-31**: $\mathsf{Re}(x:y)=0.$

...

<u>Beweis **153-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))$$
$$\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{i}\cdot(\Omega:x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(y\in\mathbb{T})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots y\in\mathbb{T}$”
folgt via **137-6**: $1:y\in\mathbb{T}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x=0\ldots$” und
aus 2“$1:y\in\mathbb{T}$”
folgt via **152-3**: $\mathsf{Re}(x\cdot(1:y))=0$.

`4:` $\mathsf{Re}(x:y)\stackrel{\mathbf{136-1}}{=}\mathsf{Re}(x\cdot(1:y))\stackrel{3}{=}0$.

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x:y)=0$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(x\in\mathbb{T})\wedge(\mathsf{Re}y=0)$.

`2:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots\mathsf{Re}y=0$”
folgt via **153-1**: $\mathsf{Re}(1:y)=0$.

`3:` Aus `1.3.Fall`“$x\in\mathbb{T}\ldots$” und
aus 2“$\mathsf{Re}(1:y)=0$”
folgt via **152-3**: $\mathsf{Re}(x\cdot(1:y))=0$.

`4:` $\mathsf{Re}(x:y)\stackrel{\mathbf{136-1}}{=}\mathsf{Re}(x\cdot(1:y))\stackrel{3}{=}0$.

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x:y)=0$.

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$

$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$

`2.1:` Aus `1.4.Fall`
folgt: $y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}}).$

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}.$

`2.3:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}.$

`2.4:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x).$

`2.5:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots \Omega \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $\Omega \in \mathbb{C}.$

`3.1:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `2.5`“$\Omega \in \mathbb{C}$” und
aus `2.2`“$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-11**: $x : (\Omega : x^{\mathsf{cc}}) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : \Omega.$

`3.2:` Aus `2.3`“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots \Omega \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via :**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) : \Omega \in \mathbb{R}.$

`4:` Aus `3.2`“$\mathsf{ab2}(x) : \Omega \in \mathbb{R}$”
folgt via **134-1**: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{ab2}(x) : \Omega)) = 0.$

...

...

Beweis **153-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall`

$$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`5:`

$$\mathsf{Re}(x : y)$$
$$\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x : (\mathsf{i} \cdot (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))$$
$$\stackrel{\mathbf{136-4}}{=} \mathsf{Re}(-\mathsf{i} \cdot (x : (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x : (\Omega : x^{\mathsf{cc}})))$$
$$\stackrel{3.1}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot ((x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : \Omega))$$
$$\stackrel{2.4}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{ab2}(x) : \Omega))$$
$$\stackrel{4}{=} -0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$$

`6:` Aus 5 folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Re}(x : y) = 0.$

□

153-4. Beim Beweis `ii)` $\Rightarrow$ `i)` von **153-3** wird weder die Voraussetzung $0 \neq x$ noch die Voraussetzung $0 \neq y \in \mathbb{C}$ noch die Voraussetzung $0 \neq \Omega$ benötigt:

153-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $y = \mathsf{i} \cdot (a : x^{\mathsf{cc}})$.

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$\mathsf{Re}(x : y) = 0$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

<u>Beweis **153-4**</u>

1.1: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

1.2: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

1.4: Aus →) “$a \in \mathbb{R}$”
folgt via ∈**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

2.1: Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”,
aus 1.4“$a \in \mathbb{C}$” und
aus 1.1“$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-11**: $x : (a : x^{\mathsf{cc}}) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : a$.

2.2: Aus 1.2“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$” und
aus →) “$a \in \mathbb{R}$”
folgt via :**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) : a \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2.2“$\mathsf{ab2}(x) : a \in \mathbb{R}$”
folgt via **134-1**: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{ab2}(x) : a)) = 0$.

4:
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y)\\
&\stackrel{\rightarrow)}{=} \mathsf{Re}(x : (\mathsf{i} \cdot (a : x^{\mathsf{cc}})))\\
&\stackrel{\mathbf{136-4}}{=} \mathsf{Re}(-\mathsf{i} \cdot (x : (a : x^{\mathsf{cc}})))\\
&\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x : (a : x^{\mathsf{cc}})))\\
&\stackrel{2.1}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot ((x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : a))\\
&\stackrel{1.3}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{ab2}(x) : a))\\
&\stackrel{3}{=} -0\\
&\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.
\end{aligned}$$

5: Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = 0$.

□

153-5. Aus **153-1** folgt via Negation das nunmehrige Kriterium für $0 \neq \mathsf{Re}(1:x)$:

153-5(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq \mathsf{Re}(1:x)$.

ii) "$(0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})$" *oder* "$(0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (x \in \mathbb{C})$".

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **153-5**

1.1: Via **153-1** gilt: $$(\mathsf{Re}(1:x) = 0) \Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$$

1.2: Via **5-3** gilt: $$(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})).$$

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt: $$(\mathsf{Re}(1:x) = 0) \Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x = 0) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C}))).$$

3: Aus 2 folgt: $$(\neg(\mathsf{Re}(1:x) = 0)) \Leftrightarrow (\neg((\mathsf{Re}x = 0) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})))).$$

4: Aus 3 folgt: $$(0 \neq \mathsf{Re}(1:x))) \Leftrightarrow ((\neg(\mathsf{Re}x = 0)) \wedge (\neg((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})))).$$

5: Aus 4 folgt: $$(0 \neq \mathsf{Re}(1:x))) \Leftrightarrow ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\neg((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})))).$$

6: Aus 5 folgt: $$(0 \neq \mathsf{Re}(1:x))) \Leftrightarrow ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge ((\neg(x \in \mathbb{B}) \vee (\neg(x \notin \mathbb{C}))))).$$

7: Aus 6 folgt: $$(0 \neq \mathsf{Re}(1:x))) \Leftrightarrow ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C}))).$$

8: Aus 7 folgt:

$$(0 \neq \mathsf{Re}(1:x))) \Leftrightarrow (((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (x \in \mathbb{C}))).$$

□

153-6. Aus $0 \neq \mathsf{Re}(1:x)$ folgt $0 \neq \mathsf{Re}x$:

153-6(Satz)

Aus "$0 \neq \mathsf{Re}(1:x)$" *folgt* "$0 \neq \mathsf{Re}x$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **153-6** `VS` gleich $0 \neq \mathsf{Re}(1:x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Re}(1:x)$"
folgt via **153-5**: $((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (x \in \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 \neq \mathsf{Re}x$.

□

153-7. Auf das folgende Beispiel **153-8** beziehend wird hier fest gestellt:

<u>153-7.Bemerkung</u>

Die Aussage
“$(0 \neq \mathsf{Re}x) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{Re}(1:x))$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

153-8. Dieses Beispiel belegt, dass aus $0 \neq \mathsf{Re}x$ nicht ohne Weiteres $0 \neq \mathsf{Re}(1 : x)$ folgt:

<u>153-8.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) $x = +\infty$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{Re}x = +\infty$.

b) $0 \neq \mathsf{Re}x$.

c) $1 : x = 0$.

d) $0 = \mathsf{Re}(1 : x)$.

153-9. Es wird ein Kriterium für $\mathsf{Im}(x:y)=0$ und für $x:y\in\mathbb{T}$ gegeben. Der Beweis stützt sich auf **153-3** und auf **133-1**:

153-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathsf{Im}(x:y)=0.$

`ii)` $x:y\in\mathbb{T}.$

`iii)` "$(x=0)\wedge(y\ \mathit{Zahl})$"

oder "$(x\ \mathit{Zahl})\wedge(y=0)$" *oder* "$(x\ \mathit{Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})$"

oder "$(x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T})$" *oder* "$(\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0)$"

oder "$(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)}\Rightarrow\texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}(x:y)=0.$

Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}(x:y)=0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x:y\in\mathbb{T}.$

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x : y)) = 0$.

`2:` $\mathsf{Re}((\mathsf{i} \cdot x) : y) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x : y)) \stackrel{1}{=} 0$.

`3:` Aus 2"$\mathsf{Re}((\mathsf{i} \cdot x) : y) = \ldots = 0$"
folgt via **153-3**:

$$((\mathsf{i} \cdot x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re} y = 0)) \vee ((0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Phi : (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})))).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\mathsf{i} \cdot x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x = 0$"
folgt via **133-7**: $x = 0$.

`5:` Aus 4"$x = 0$" und
aus `3.1.Fall`"$\ldots y$ Zahl"
folgt: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`6:` Aus 5
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re} x = 0) \wedge (\mathsf{Re} y = 0)) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\mathsf{i} \cdot x$ Zahl...”
folgt via **96-15**: x Zahl.

`5:` Aus `4`“x Zahl” und
aus `3.2.Fall`“... $y = 0$”
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`6:` Aus `5`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\mathsf{i} \cdot x$ Zahl...”
folgt via **96-15**: x Zahl.

`5:` Aus `4`“x Zahl” und
aus `3.2.Fall`“... $y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`6:` Aus `5`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`4`: Aus `3.4.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$.

`5`: $\mathsf{Im} x \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-\mathsf{Im} x) \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} -\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{4}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0$.

`6`: Aus `5`"$\mathsf{Im} x = \ldots = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`7`: Aus `6`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `3.4.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`8`: Aus `7`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re} x = 0) \wedge (\mathsf{Re} y = 0))$$
$$\vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{3.5.Fall}}$ $(\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re} y = 0)$.

`4`: Aus `3.5.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$.

`5`: $\mathsf{Re} x \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{4}{=} 0$.

`6`: Aus `5`"$\mathsf{Re} x = \ldots = 0$" und
aus `3.5.Fall`"$\ldots \mathsf{Re} y = 0$"
folgt: $(\mathsf{Re} x = 0) \wedge (\mathsf{Re} y = 0)$.

`7`: Aus `6`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re} x = 0) \wedge (\mathsf{Re} y = 0))$$
$$\vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.6.Fall` $(0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Phi : (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})))$.

`4.1:` Aus `3.6.Fall` "$0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`4.2:` Aus `3.6.Fall`
folgt: $y = \mathsf{i} \cdot (\Phi : (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})$.

`4.3:` Aus `3.6.Fall` "$\ldots 0 \neq \Phi \ldots$"
folgt via **100-13**: $0 \neq -\Phi$.

`4.4:` Aus `3.6.Fall` "$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-\Phi \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.3` "$0 \neq -\Phi$" und
aus `4.4` "$-\Phi \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq -\Phi \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5` "$0 \neq -\Phi \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega = -\Phi) \wedge (0 \neq \Omega \in \mathbb{R})$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\Omega = -\Phi$.

`8:`
$$\begin{aligned} & y \\ \stackrel{4.2}{=}\; & \mathsf{i} \cdot (\Phi : (\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}}) \\ \stackrel{\mathbf{149-22}}{=}\; & \mathsf{i} \cdot (\Phi : (\mathsf{i}^{\mathsf{cc}} \cdot x^{\mathsf{cc}})) \\ \stackrel{\mathbf{149-5}}{=}\; & \mathsf{i} \cdot (\Phi : ((-\mathsf{i}) \cdot x^{\mathsf{cc}})) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\; & \mathsf{i} \cdot (\Phi : (-\mathsf{i} \cdot x^{\mathsf{cc}})) \\ \stackrel{\mathbf{136-4}}{=}\; & \mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot (\Phi : x^{\mathsf{cc}})) \\ \stackrel{\mathbf{133-2}}{=}\; & -\Phi : x^{\mathsf{cc}} \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\; & (-\Phi) : x^{\mathsf{cc}} \\ \stackrel{7}{=}\; & \Omega : x^{\mathsf{cc}}. \end{aligned}$$

...

...

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.6.Fall}}$ $$(0 \neq \mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{i} \cdot (\Phi : ((\mathsf{i} \cdot x)^{\mathsf{cc}})))).$$

...

`9:` Aus `6`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `6`"$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{R}$" und
aus `8`"$y = \ldots = \Omega : x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}).$$

`10:` Aus `4.1`"$0 \neq x \in \mathbb{C}$",
aus `3.5.Fall`$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$ und
aus `9`"$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})$"
folgt: $$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})).$$

`11:` Aus `10`
folgt: $$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re} x = 0) \wedge (\mathsf{Re} y = 0)) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re} x = 0) \wedge (\mathsf{Re} y = 0)) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

Beweis **153-9** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$

$$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

1: Nach VS gilt: $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$

$$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$.

2: Aus 1.1.Fall“$((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$
$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$”
folgt via **146-1**: $x:y=0$.

3: Aus 2“$x:y=0$”
folgt via **96-31**: $\mathsf{Im}(x:y)=0$.

1.2.Fall $(x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T})$.

2: Aus 1.2.Fall“$x\in\mathbb{T}\ldots$” und
aus 1.2.Fall“$\ldots y\in\mathbb{T}$”
folgt via :**SZ**: $x:y\in\mathbb{T}$.

3: Aus 2“$x:y\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x:y)=0$.

...

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$

$$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$

$$\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0)$.

2: Via **133-1** gilt: $\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)=\mathsf{Re}x$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)=\mathsf{Re}x$" und
aus `1.3.Fall`"$\mathsf{Re}x=0\ldots$"
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)=0$.

4: Aus 3"$\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)=0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{i}\cdot x\in\mathbb{T}$.

5: Aus 4"$\mathsf{i}\cdot x\in\mathbb{T}$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots\mathsf{Re}y=0$"
folgt via **153-3**: $\mathsf{Re}((\mathsf{i}\cdot x):y)=0$.

6:
$$\mathsf{Im}(x:y)\stackrel{\mathbf{100-4}}{=}-(-\mathsf{Im}(x:y))\stackrel{\mathbf{133-1}}{=}-\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot(x:y))\stackrel{\mathbf{133-2}}{=}-\mathsf{Re}((\mathsf{i}\cdot x):y)\stackrel{5}{=}-0\stackrel{\mathbf{98-15}}{=}0.$$

7: Aus 6
folgt: $\mathsf{Im}(x:y)=0$.

...

Beweis **153-9** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))$

$$\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$

$$\vee((x\in\mathbb{T})\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(\mathsf{Re}y=0))$$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))$.

`2.1:` Aus `1.4.Fall`
folgt: $y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}$.

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots\Omega\in\mathbb{R}\ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $\Omega\in\mathbb{C}$.

`2.3:` Aus →)“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$”
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}}\in\mathbb{C}$.

`2.4:` Aus →)“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$”
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{R}$.

`2.5:` Aus →)“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$”
folgt via **149-20**: $x\cdot x^{\mathsf{cc}}=\mathsf{ab2}(x)$.

`3.1:` Aus →)“$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$”,
aus `2.2`“$\Omega\in\mathbb{C}$” und
aus `2.3`“$x^{\mathsf{cc}}\in\mathbb{C}$”
folgt via **141-11**: $x:(\Omega:x^{\mathsf{cc}})=(x\cdot x^{\mathsf{cc}}):\Omega$.

`3.2:` Aus `2.4`“$\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{R}$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots\Omega\in\mathbb{R}\ldots$”
folgt via :**SZ**: $\mathsf{ab2}(x):\Omega\in\mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.2`“$\mathsf{ab2}(x):\Omega\in\mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x):\Omega\in\mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{ab2}(x):\Omega\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x):\Omega)=0$.

...

...

<u>Beweis **153-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$

$$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})).$$

6:

$$\mathsf{Im}(x : y)$$
$$\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}(x : (\Omega : x^{\mathsf{cc}}))$$
$$\stackrel{3.1}{=} \mathsf{Im}((x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : \Omega)$$
$$\stackrel{2.5}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x) : \Omega)$$
$$\stackrel{5}{=} 0.$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x : y) = 0.$$

□

153-10. Beim Beweis `iii)` $\Rightarrow$ `i)` von **153-9** wird weder die Voraussetzung $0 \neq \mathsf{i} \cdot x$ noch die Voraussetzung $0 \neq y \in \mathbb{C}$ noch die Voraussetzung $0 \neq \Omega$ benötigt:

153-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $y = a : x^{\mathsf{cc}}$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$x : y \in \mathbb{R}$".

`RECH.cc`-**Notation**.

<u>Beweis **153-10**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1.4:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **149-20**: $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$.

`2.1:` Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$",
aus `1.1` "$a \in \mathbb{C}$" und
aus `1.2` "$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-11**: $x : (a : x^{\mathsf{cc}}) = (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : a$.

`2.2:` Aus `1.3` "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$" und
aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via :**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) : a \in \mathbb{R}$.

`3:` $x : y \stackrel{\rightarrow)}{=} x : (a : x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{2.1}{=} (x \cdot x^{\mathsf{cc}}) : a \stackrel{1.4}{=} \mathsf{ab2}(x) : a$.

`4:` Aus `3` "$x : y = \ldots = \mathsf{ab2}(x) : a$" und
aus `2.2` "$\mathsf{ab2}(x) : a \in \mathbb{R}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{R}$.

$\square$

153-11. Mit Hilfe von **153-2** wird ein Kriterium für $1 : x \notin \mathbb{T}$ erhalten:

153-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq \mathsf{Im}(1 : x)$.

`ii)` $1 : x \notin \mathbb{T}$.

`iii)` "$(0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})$" *oder* "$(0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C})$".

`iv)` "$(x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \notin \mathbb{B})$" *oder* "$(x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{C})$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **153-11** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $0 \neq \mathsf{Im}(1 : x)$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im}(1 : x)$"
folgt via **99-3**: $1 : x \notin \mathbb{T}$.

`ii)` $\Rightarrow$ `iii)` `VS` gleich $1 : x \notin \mathbb{T}$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee (\neg(x \in \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"
folgt via **2-2**: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`3:` Aus 2"$(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"
folgt via **153-2**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`4:` Es gilt 3"$1 : x \in \mathbb{T}$".
Es gilt `VS` gleich "$1 : x \notin \mathbb{T}$".
Ex falso quodlibet folgt:
$((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C}))$.

...

<u>Beweis **153-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $1: x \notin \mathbb{T}.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\neg(x \in \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$

`2:` Aus `1.2.Fall` folgt: $x \notin \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}).$

`3.1:` Aus 2"$x \notin \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$" folgt via **2-3**: $x \notin \mathbb{T}.$

`3.2:` Aus 2"$x \notin \mathbb{T} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$" folgt via **2-3**: $x \notin \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}.$

`4.1:` Aus `3.1`"$x \notin \mathbb{T}$" folgt via **99-3**: $0 \neq \mathsf{Im}x.$

`4.2:` Aus `3.2`"$x \notin \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$" folgt via **5-4**: $(x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C}).$

`5:` Aus `4.1` und aus `4.2` folgt: $(0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C})).$

`6:` Aus `5` folgt: $((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C})).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C})).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C})).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C}))$" folgt: $(0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C})).$

`1.2:` Via **99-3** gilt: $(x \notin \mathbb{T}) \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{Im}x).$

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt: $(x \notin \mathbb{T}) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C})).$

`3:` Aus `2` folgt: $((x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{C})).$

Beweis **153-11** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{C}))$.

`1:` Es gilt: $(\mathsf{Im}(1:x) = 0) \vee (0 \neq \mathsf{Im}(1:x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) = 0$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$\mathsf{Im}(1:x) = 0$"
folgt via **153-2**: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$((x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((x \notin \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{C}))$"
folgt: $(x \notin \mathbb{T}) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`5:` Aus `2.2`"$\ldots (x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C})$" und
aus `4`"$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`6:` Es gilt `5`"$x \in \mathbb{C}$".
Es gilt `4`"$\ldots x \notin \mathbb{C}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$.

`1.2.Fall` $0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$.

□

153-12. Aus **153-11** folgt ohne viel Mühe, dass aus $0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$ stets auf $0 \neq \mathsf{Im}x$ führt:

153-12(Satz)

Aus "$0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$" *folgt* "$0 \neq \mathsf{Im}x$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **153-12** `VS` gleich $0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im}(1:x)$"
folgt via **153-11**: $((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (x \in \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}x$.

□

153-13. Auf das folgende Beispiel **153-14** beziehend wird hier fest gestellt:

153-13.Bemerkung

Die Aussage
“$(0 \neq \mathsf{Im}x) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{Im}(1 : x))$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

153-14. Dieses Beispiel belegt, dass aus $0 \neq \mathsf{Im}x$ nicht ohne Weiteres $0 \neq \mathsf{Im}(1 : x)$ folgt:

153-14.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{Im}x = +\infty$.

b) $0 \neq \mathsf{Im}x$.

c) $1 : x = 0$.

d) $0 = \mathsf{Im}(1 : x)$.

153-15. Es wird ein Kriterium für $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$ gegeben.:

153-15(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

`ii)` "$(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})$" *oder* "$(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

<u>Beweis **153-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

1: Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

2: Aus `VS` gleich “$0 \neq x : y \in \mathbb{T}$” und
aus 1“$x : y = x \cdot (1 : y)$”
folgt: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **152-7**: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{T})$
$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}(1 : y) = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}(1 : y)))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (1 : y = \Phi \cdot x^{\mathsf{cc}})))$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{T})$.

4: Aus `3.1.Fall`“$0 \neq 1 : y \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-31**: $(y = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

5: Aus 4
folgt: $(0 \neq y \in \mathbb{R}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

6: Aus `3.1.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus 5“$(0 \neq y \in \mathbb{R}) \vee (y = \mathsf{nan})$”
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge ((0 \neq y \in \mathbb{R}) \vee (y = \mathsf{nan}))$.

7: Aus 6
folgt: $((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan}))$.

8: Aus 7
folgt: $((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$

$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$

$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})))$.

...

Beweis **153-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}(1 : y) = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}(1 : y))$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}(1 : y) = 0 \ldots$”
folgt via **153-1**: $(\mathsf{Re}y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`4.2:` Aus `3.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}(1 : y)$”
folgt via **153-11**: $((y \notin \mathbb{T}) \wedge (y \notin \mathbb{B})) \vee ((y \notin \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

`5:` Aus `4.2`
folgt: $(y \notin \mathbb{T}) \wedge ((y \notin \mathbb{B}) \vee (y \in \mathbb{C}))$.

`6.1:` Aus `5`“$y \notin \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **99-3**: $0 \neq \mathsf{Im}y$.

`6.2:` Aus `5`“$\ldots (y \notin \mathbb{B}) \vee (y \in \mathbb{C})$”
folgt via **5-4**: $y \notin \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`7:` Aus `4.1`“$(\mathsf{Re}y = 0) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$” und
aus `6.2`“$y \notin \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt: $\mathsf{Re}y = 0$.

`8:` Aus `7`“$\mathsf{Re}y = 0$”
folgt via **127-4**: y Zahl.

`9:` Aus `8`“y Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $y \in \mathbb{A}$.

...

<u>Beweis **153-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}(1 : y) = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}(1 : y))$.

...

`10.1:` Aus `5`
folgt: $(y \notin \mathbb{B}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{10.1.1.Fall}}$ $y \notin \mathbb{B}$.

`11:` Aus `9`“$y \in \mathbb{A}$” und
aus `10.1.1.Fall`“$y \notin \mathbb{B}$”
folgt via **5-3**: $y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`12:` Aus `11`“$y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via **128-7**: $(\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$.

`13:` Aus `7`“$\mathsf{Re}y = 0$” und
aus **95-7**“$0 \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $\mathsf{Re}y \neq \mathsf{nan}$.

`14:` Aus `12`“$(\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$” und
aus `13`“$\mathsf{Re}y \neq \mathsf{nan}$”
folgt:
$\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}$.

`15:` Aus `14`
folgt: $(0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{10.1.2.Fall}}$ $y \in \mathbb{C}$.

`11:` Aus `10.1.2.Fall`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`12:` Aus `6.1`“$0 \neq \mathsf{Im}y$” und
aus `11`“$\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`13:` Aus `12`
folgt: $(0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$.

...

...

Beweis **153-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}(1 : y) = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}(1 : y))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$"

`10.2:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$",
aus `3.2.Fall`"$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$",
aus 7"$\mathsf{Re}y = 0$" und
aus `A1` gleich "$(0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$"
folgt:
$$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge ((0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})).$$

`11:` Aus `10.2`
folgt:
$$((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})).$$

`12:` Aus `11`
folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

<u>Beweis **153-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (1 : y = \Phi \cdot x^{\mathsf{cc}}))$.

`4.1:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`4.2:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`4.3:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : \Phi \in \mathbb{R}$.

`4.4:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\Phi \in \mathbb{C}$.

`4.5:` Aus `3.3.Fall`
folgt: $1 : y = \Phi \cdot x^{\mathsf{cc}}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $y = 1 : (1 : y)$.

`5.2:` Aus `4.4`"$\Phi \in \mathbb{C}$" und
aus `4.1`"$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-4**: $1 : (\Phi \cdot x^{\mathsf{cc}}) = (1 : \Phi) \cdot (1 : x^{\mathsf{cc}})$.

`5.3:` Aus `4.3`"$0 \neq 1 : \Phi \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega = 1 : \Phi) \wedge (0 \neq \Omega \in \mathbb{R})$.

`6:` Aus `5.3`
folgt: $\Omega = 1 : \Phi$.

`7:`
$$y \stackrel{5.1}{=} 1 : (1 : y) \stackrel{4.5}{=} 1 : (\Phi \cdot x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{5.2}{=} (1 : \Phi) \cdot (1 : x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{6}{=} \Omega \cdot (1 : x^{\mathsf{cc}}) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} \Omega : x^{\mathsf{cc}}.$$

...

...

Beweis **153-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall`

$$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Phi : (0 \neq \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (1 : y = \Phi \cdot x^{\mathsf{cc}})).$$

...

`8:` Aus `5.3`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `5.3`“$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{R}$” und
aus `7`“$y = \ldots \Omega : x^{\mathsf{cc}}$”
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})$.

`9:` Aus `3.3.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$”,
aus `4.2`“$0 \neq y \in \mathbb{C}$” und
aus `8`“$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})$”
folgt:
$$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$$
$$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})).$$

`10:` Aus `9`
folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

<u>Beweis **153-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})).$

`2:` Aus `1.1.Fall` "$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan}))$
$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge ((y = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{R})).$

`3:` Aus `2` "$\ldots (y = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{R})$"
folgt via **137-31**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{T}.$

`4:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3` "$0 \neq 1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **152-7**: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}.$

`5:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y).$

`6:` Aus `4` "$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$" und
aus `5` "$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}.$

...

Beweis **153-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})).$

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **153-1**: $\mathsf{Re}(1 : y) = 0.$

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$” und
aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}.$

`3:` Aus `2.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $y \in \mathbb{C}.$

`4:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \ldots$” und
aus `3`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **153-11**: $0 \neq \mathsf{Im}(1 : y).$

`5:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”,
aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$”,
aus `2.1`“$\mathsf{Re}(1 : y) = 0$” und
aus `4`“$0 \neq \mathsf{Im}(1 : y)$”
folgt via **152-7**: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}.$

`6:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y).$

`7:` Aus `5`“$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$” und
aus `6`“$x : y = x \cdot (1 : y)$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}.$

...

<u>Beweis **153-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})).$

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **153-1**: $\mathsf{Re}(1 : y) = 0.$

`2.2:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$” und
aus `1.3.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y = \mathsf{nan}$”
folgt via **137-8**: $1 : y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}.$

`3:` Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **134-1**: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}.$

`4:` Aus `2.2`“$1 : y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$” und
aus `3`“$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$”
folgt: $\mathsf{Im}(1 : y) = \mathsf{nan}.$

`5:` Aus `4`“$\mathsf{Im}(1 : y) = \mathsf{nan}$” und
aus **95-7**“$0 \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}(1 : y).$

`6:` Aus `1.3.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”,
aus `1.3.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$”,
aus `2.1`“$\mathsf{Re}(1 : y) = 0$” und
aus `5`“$0 \neq \mathsf{Im}(1 : y)$”
folgt via **152-7**: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}.$

`7:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y).$

`8:` Aus `6`“$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$” und
aus `7`“$x : y = x \cdot (1 : y)$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}.$

...

Beweis **153-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$

`2.1:` Aus `1.4.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **150-6**: $0 \neq x : y \in \mathbb{C}$.

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$”
folgt via **153-9**: $x : y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2.1`“$0 \neq x : y \ldots$” und
aus `2.2`“$x : y \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

□

153-16. An Stelle der letzten Alternative von `ii)` in **152-17** kann eine schwächere Forderung gesetzt werden, um $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$, ja sogar $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$ zu erreichen:

153-16(Satz)

Es gelte:

→) $y = a : x^{\mathsf{cc}}$.

→) $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

→) $(0 \neq y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

oder

$0 \neq a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$0 \neq x : y \in \mathbb{R}$".

`RECH.cc`-**Notation**.

<u>Beweis **153-16**</u>

`1.1:` Via **136-1** gilt: $a : x^{\mathsf{cc}} = a \cdot (1 : x^{\mathsf{cc}})$.

`1.2:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`1.3:` Aus →) "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **149-24**: $x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`1.4:` Nach →) gilt: $((0 \neq y) \wedge (a \in \mathbb{R})) \vee (0 \neq a \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.4.1.Fall` $(0 \neq y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.3.1.Fall`"$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via ∈**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`2.2:` Aus `1.4.1.Fall`"$0 \neq y \ldots$" und
aus →) "$y = a : x^{\mathsf{cc}}$"
folgt: $0 \neq a : x^{\mathsf{cc}}$.

`3:` Aus `2.1`"$a \in \mathbb{C}$" und
aus `1.3`"$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via :**SZ**: $a : x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `2.2`"$0 \neq a : x^{\mathsf{cc}}$" und
aus `3`"$a : x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq a : x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$.

`5:` Aus `4`"$0 \neq a : x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via **150-6**: $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq a \ldots$" und
aus `1.4.1.Fall`"$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

`1.4.2.Fall` $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq a \in \mathbb{R}$"

...

<u>Beweis **153-16**</u>

...

`2.1:` Aus `A1` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`2.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : a \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1`"$a \in \mathbb{C}$" und
aus `1.3`"$x^{\mathsf{cc}} \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-4**: $1 : (a : x^{\mathsf{cc}}) = x^{\mathsf{cc}} : a$.

`4:` $1 : y \overset{\rightarrow)}{=} 1 : (a : x^{\mathsf{cc}}) \overset{3}{=} x^{\mathsf{cc}} : a \overset{\mathbf{136-1}}{=} (1 : a) \cdot x^{\mathsf{cc}}$.

`5:` Aus $\rightarrow)$"$0 \neq x \in \mathbb{C}$",
aus `2.2`"$0 \neq 1 : a \in \mathbb{R}$" und
aus `4`"$1 : y = \ldots = (1 : a) \cdot x^{\mathsf{cc}}$"
folgt via **152-8**: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

$\square$

153-17. Mit Hilfe von **153-15** läßt sich ohne allzu viel Mühe eine im Detail etwas klarere Re-Formulierung von **152-9** bezüglich $x : y \in \mathbb{T}$ zu gewinnen:

153-17(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $x : y \in \mathbb{T}$.

ii) "$(x = 0) \wedge (y \textit{ Zahl})$"

oder "$(x \textit{ Zahl}) \wedge (y = 0)$" *oder* "$(x \textit{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})$" *oder* "$(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$".

REIM.RECH.cc-**Notation**.

Beweis **153-17** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

`1:` Es gilt: $(x : y = 0) \vee (0 \neq x : y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x : y = 0$"
folgt via **146-1**: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$
$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1.2.Fall` $0 \neq x : y$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x : y$" und
aus `VS` gleich "$x : y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **153-15**:

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

<u>Beweis **153-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x : y \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach VS gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **153-17** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

$$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))$$
$$\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(y=\mathsf{nan}))\vee((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(\mathsf{Im}y=\mathsf{nan}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall`

$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$.

`2:` Aus `1.1.Fall` “$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$”
folgt via **146-1**: $x:y=0$.

`3:` Aus 2“$x:y=0$” und
aus **95-12**“$0\in\mathbb{T}$”
folgt: $x:y\in\mathbb{T}$.

...

Beweis **153-17** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

$$((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(y=\mathsf{nan}))\vee((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(\mathsf{Im}y=\mathsf{nan}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$

$$((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(y=\mathsf{nan}))\vee((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(\mathsf{Im}y=\mathsf{nan}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

`2:` Aus `1.2.Fall`“$((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(y=\mathsf{nan}))$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{T})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(\mathsf{Im}y=\mathsf{nan}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}})))\text{”}$$

folgt via **153-15**: $0\neq x:y\in\mathbb{T}.$

`3:` Aus 2
folgt: $x:y\in\mathbb{T}.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x:y\in\mathbb{T}.$

$\square$

153-18. Es wird ein Kriterium für $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$ gegeben.:

153-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

`ii)` "$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **153-18** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x : y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x : y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x : y \ldots$" und
aus `1`"$x : y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **153-15**:

$$((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = \mathsf{nan}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **153-18** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`2.1:` Aus `3.1.Fall`"$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`2.2:` Aus `3.1.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3:` $x : y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : y) \stackrel{2.2}{=} x \cdot (1 : \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.1}{=} \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3"$x : y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt: $x : y \notin \mathbb{S}$.

`5:` Es gilt 4"$x : y \notin \mathbb{S}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x : y \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$

$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})))$.

...

<u>Beweis **153-18**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{4.1.1.Fall}}$ $x \in \mathbb{S}$.

Aus `3.2.Fall`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `4.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\texttt{4.1.2.Fall}}$ $x = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$0 \neq y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`"$\ldots 1 : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : y \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `5`"$0 \neq 1 : y \ldots$" und
aus `6`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{T}$.

`8:` Aus `7`"$0 \neq 1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot (1 : y) = \mathsf{nan}$.

`9:` $x : y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : y) \stackrel{\texttt{4.1.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot (1 : y) \stackrel{8}{=} \mathsf{nan}$.

`10:` Aus `9`"$x : y = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt: $x : y \notin \mathbb{S}$.

`11:` Es gilt `10`"$x : y \notin \mathbb{S}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x : y \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

...

...

Beweis **153-18** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$0 \neq x \in \mathbb{S}$"

`4.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{S}$" und aus `3.2.Fall`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$" folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`5:` Aus `4.2` folgt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`3.3.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.3.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0$" folgt via **130-2**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`5.1:` Aus 4"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" folgt via **95-16**: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

Aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$" und aus `5.1.1.Fall`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$" folgt: $0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

...

...

<u>Beweis **153-18**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.1.2.Fall}}$ $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

`6.1:` Aus `3.3.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0\ldots$”
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`6.2:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots\mathsf{Re}y = 0\ldots$”
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`6.3:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`7.1:` Aus `6.1`“$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$” und
aus `5.1.2.Fall`“$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$”
folgt: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`7.2:` Aus `6.3`“$\ldots 1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$.

`8:` Aus `6.3`“$0 \neq 1 : \mathsf{Im}y\ldots$” und
aus `7.2`“$1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq 1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$.

`9:` Aus `8`“$0 \neq 1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot (1 : \mathsf{Im}y) = \mathsf{nan}$.

...

...

Beweis **153-18** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.2.Fall` $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

...

`10:`

$$x : y \stackrel{7.1}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) : y \stackrel{6.2}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{136-4}}{=} \mathsf{nan} : \mathsf{Im}y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} \mathsf{nan} \cdot (1 : \mathsf{Im}y) \stackrel{9}{=} \mathsf{nan}.$$

`11:` Aus `10`"$x : y = \ldots = \mathsf{nan}$" und aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$" folgt: $x : y \notin \mathbb{S}$.

`12:` Es gilt `11`"$x : y \notin \mathbb{S}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x : y \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"

...

...

Beweis **153-18** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

`5.2:` Aus `3.3.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$",
aus `A1` gleich "$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$",
aus `3.3.Fall`"$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$" und
aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`6:` Aus `5.2`
folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{3.4.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus `3.4.Fall`
folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

Beweis **153-18** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt: $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via :**SZ**: $x : y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus `2.1`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3`“$0 \neq x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$”
folgt via **153-15**: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$0 \neq x : y \ldots$” und
aus `2.2`“$x : y \in \mathbb{S}$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

<u>Beweis **153-18**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **:SZ**: $(\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`2.4:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”,
aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$”,
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **153-15**: $0 \neq x : y \in \mathbb{T}$.

`3:` $x : y \stackrel{2.1}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) : y \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{136-4}}{=} (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y)$.

`4:` Aus `3`“$x : y = \ldots = (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.3`“$(\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$”
folgt: $x : y \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `2.4`“$0 \neq x : y \ldots$” und
aus `4`“$x : y \in \mathbb{S}$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **153-18** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}})).$

2: Aus 1.3.Fall"$\ldots y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}$",
aus 1.3.Fall"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus 1.3.Fall"$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **153-16**: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}.$

3: Aus 2"$\ldots x : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x : y \in \mathbb{S}.$

4: Aus 2"$0 \neq x : y \ldots$" und
aus 3"$x : y \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{S}.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 \neq x : y \in \mathbb{S}.$

$\square$

153-19. Mit Hilfe von **153-18** läßt sich das nunmehrige Kriterium für $x : y \in \mathbb{S}$ gewinnen:

153-19(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : y \in \mathbb{S}$.

`ii)` *“$(x = 0) \wedge (y$ Zahl$)$”*

oder “$(x$ Zahl$) \wedge (y = 0)$” oder “$(x$ Zahl$) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$”

oder “$(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$”

oder “$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$”

oder “$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$”.

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **153-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{S}$.

`1:` Es gilt: $(x : y = 0) \vee (0 \neq x : y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x : y = 0$" folgt via **146-1**:
$$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$$

`3:` Aus `2` folgt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1.2.Fall` $0 \neq x : y$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x : y$" und aus `VS` gleich "$x : y \in \mathbb{S}$" folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x : y \in \mathbb{S}$" folgt via **153-18**:
$$((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`4:` Aus `3` folgt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

<u>Beweis</u> **153-19** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **153-19** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

$$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))$$
$$\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{S})\wedge(y=\mathsf{nan}))\vee((0\neq x\in\mathbb{S})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(\mathsf{Im}y=\mathsf{nan}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall`

$$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$$

2: Aus `1.1.Fall`“$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))$ $\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$”
folgt via **146-1**: $x:y=0.$

3: Aus 2“$x:y=0$” und
aus **95-11**“$0\in\mathbb{S}$”
folgt: $x:y\in\mathbb{S}.$

`1.2.Fall`

$$((0\neq x\in\mathbb{S})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{S})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$
$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

2: Aus `1.2.Fall`“$((0\neq x\in\mathbb{S})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$
$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{S})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$
$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}})))$”
folgt via **153-18**: $0\neq x:y\in\mathbb{S}.$

3: Aus 2
folgt: $x:y\in\mathbb{S}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x:y\in\mathbb{S}.$

□

153-20. Es wird ein Kriterium für $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$ gegeben.:

153-20(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

`ii)` "$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **153-20** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x : y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x : y \ldots$" und
aus `1`"$x : y \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x : y \in \mathbb{S}$"
folgt via **153-18**: $((0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **153-20** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`4.1:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4.2:` Aus `3.1.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x : y \in \mathbb{R}$" und
aus `4.1`"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `4.2`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `5`"$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-2**: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `6`"$0 \neq x \in \mathbb{R}$" und
aus `3.1.Fall`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`8:` Aus `7`
folgt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **153-20** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad 0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $\qquad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $\qquad x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`4.2:` Aus `3.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $\qquad y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`4.3:` Aus aus `3.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\qquad \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`5:`
$$x : y \stackrel{4.1}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) : y \stackrel{4.2}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{136-4}}{=} (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y).$$

`6:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x : y \in \mathbb{R}$” und
aus `5`“$x : y = \ldots = (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y)$”
folgt: $\qquad 0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `4.3`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `6`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt via **131-2**: $\qquad 0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `3.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”,
aus `7`“$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$”,
aus `3.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$” und
aus `3.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt: $\qquad (\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$.

`9:` Aus `8`
folgt:
$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

Beweis **153-20** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus `3.3.Fall` folgt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **153-20**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2`"$\ldots 1 : y \in \mathbb{R}$",
aus `1.1.Fall`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `2`"$\ldots 0 \neq 1 : y \ldots$"
folgt via **106-3**: $0 \neq x \cdot (1 : y)$.

`3.2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via :**SZ**: $x : y \in \mathbb{R}$.

`4:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`5:` Aus `4`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `3.1`"$0 \neq x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x : y$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq x : y$" und
aus `3.2`"$x : y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

...

Beweis **153-20** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $y = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`2.4:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via :**SZ**: $(\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R} \ldots$”,
aus `2.3`“$\ldots 1 : \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”,
aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$” und
aus `3`“$0 \neq 1 : \mathsf{Im}y \ldots$”
folgt via **106-3**: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y)$.

`4:` Via **136-1** gilt: $(\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y)$.

`5:` Aus `4`“$(\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y)$” und
aus `3`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{Im}y)$”
folgt: $0 \neq (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y)$.

`6:` Aus `5`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.4`“$(\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $0 \neq (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`7:` $x : y \stackrel{2.1}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) : y \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{136-4}}{=} (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y)$.

`8:` Aus `7`“$x : y = \ldots = (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y)$” und
aus `6`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) : (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **153-20**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$

$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$.

Aus `1.3.Fall`“$\ldots y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}$”,
aus `1.3.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `1.3.Fall`“$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **153-16**: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

□

153-21. Mit Hilfe von **153-20** läßt sich das nunmehrige Kriterium für $x : y \in \mathbb{R}$ gewinnen:

153-21(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : y \in \mathbb{R}$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y \textit{ Zahl})$"

oder "$(x \textit{ Zahl}) \wedge (y = 0)$" *oder* "$(x \textit{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$"

oder "$(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R})$"

oder "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$
$\wedge(\exists\Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))$".

`REIM.RECH.cc`-**Notation**.

Beweis **153-21** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : y \in \mathbb{R}$.

`1:` Es gilt: $(x : y = 0) \vee (0 \neq x : y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x : y = 0$"
folgt via **146-1**: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$
$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`3:` Aus `2`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`1.2.Fall` $0 \neq x : y$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq x : y$" und
aus `VS` gleich "$x : y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2` "$0 \neq x : y \in \mathbb{R}$"
folgt via **153-20**:

$$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

<u>Beweis **153-21**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i) } \Rightarrow \texttt{ ii)}}}$ $\mathtt{VS}$ gleich $x : y \in \mathbb{R}.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii) } \Rightarrow \texttt{ i)}}}$ $\mathtt{VS}$ gleich

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

1: Nach $\mathtt{VS}$ gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y = \Omega : x^{\mathsf{cc}}))).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **153-21** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $((x=0)\wedge(y\ \text{Zahl}))$

$$\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{R})\wedge(y=\mathsf{nan}))\vee((0\neq x\in\mathbb{R})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$$

$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$

$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x)\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(\mathsf{Im}y=\mathsf{nan}))$$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall`

$$((x=0)\wedge(y\ \text{Zahl}))\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$$

`2:` Aus **`1.1.Fall`**“$((x=0)\wedge(y\ \text{Zahl}))\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y=0))$
$\vee((x\ \text{Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}))$”
folgt via **146-1**: $x:y=0.$

`3:` Aus 2“$x:y=0$” und
aus **AAI**“$0\in\mathbb{R}$”
folgt: $x:y\in\mathbb{R}.$

`1.2.Fall` $((0\neq x\in\mathbb{R})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{R})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}}))).$$

`2:` Aus **`1.2.Fall`**“$((0\neq x\in\mathbb{R})\wedge(0\neq y\in\mathbb{R}))$

$$\vee((\mathsf{Re}x=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}x\in\mathbb{R})\wedge(\mathsf{Re}y=0)\wedge(0\neq\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}))$$

$$\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})\wedge(\exists\Omega:(0\neq\Omega\in\mathbb{R})\wedge(y=\Omega:x^{\mathsf{cc}})))”$$

folgt via **153-20**: $0\neq x:y\in\mathbb{R}.$

`3:` Aus 2
folgt: $x:y\in\mathbb{R}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x:y\in\mathbb{R}.$

□

153-22. Zur Abrundung dieses Essays werden alle bereits bekannten Kriterien für $(0 \neq) x : y \in \mathbb{C}$ und $(0 \neq) x : y$ Zahl gegeben. Die Diskussion von $0 \neq x : y \in \mathbb{B}$ und von $x : y \in \mathbb{B}$ unterbleibt bis auf Weiteres:

153-22(Satz)

a) *“$0 \neq x : y \in \mathbb{C}$” genau dann, wenn “$0 \neq x \in \mathbb{C}$” und “$0 \neq y \in \mathbb{C}$”.*

b) *“$x : y \in \mathbb{C}$” genau dann, wenn “$(x = 0) \wedge (y$ Zahl$)$” oder “$(x$ Zahl$) \wedge (y = 0)$” oder “$(x$ Zahl$) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$ oder “$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$”.*

c) *“$0 \neq x : y$ Zahl” genau dann, wenn “$(0 \neq x$ Zahl$) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})$” oder “$(0 \neq x$ Zahl$) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$”.*

d) *“$x : y$ Zahl” genau dann, wenn “x Zahl” und “y Zahl”.*

RECH-**Notation**.

Beweis **153-22** a)

Via **150-6** gilt: $(0 \neq x : y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))$.

b)

Via **150-7** gilt:

$$(x : y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))).$$

c)

Via **150-1** gilt:

$$(0 \neq x : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}))).$$

d)

Via **96-17** gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}))$.

□

☐ keine Algebra auf Q.
☐ keine Algebra in A.

Ersterstellung: 20/09/10 **Letzte Änderung: 30/03/12**

154-1. Es wird definiert, was es heisst, *keine* Algebra in A oder auf Q zu sein:

154-1(Definition)

1) "$\square$ **keine Algebra in** A" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\square \text{ Algebra in } A).$$

2) "$\square$ **keine Algebra auf** Q" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(\square \text{ Algebra auf } Q).$$

154-2. Nun wird ein Kriterium für $\Box$ keine Algebra in A gegeben:

154-2(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $\Box$ *keine Algebra in* A.

ii) "$\Box$ *keine Funktion*" *oder* "$\mathsf{dom}\,\Box \neq A \times A$" *oder* "$\mathsf{ran}\,\Box \not\subseteq A$".

<u>Beweis **154-2**</u>

`1.1:` Via **154-1(Def)** gilt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A) \Leftrightarrow (\neg(\Box \text{ Algebra in } A))$.

`1.2:` Via **93-5(Def)** gilt: $(\Box \text{ Algebra in } A) \Leftrightarrow (\Box : A \times A \to A)$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A) \Leftrightarrow (\neg(\Box : A \times A \to A))$.

`2.2:` Via **21-1(Def)** gilt:
$(\Box : A \times A \to A) \Leftrightarrow ((\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A))$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A)$
$\Leftrightarrow (\neg((\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)))$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A)$
$\Leftrightarrow ((\neg(\Box \text{ Funktion})) \vee (\neg(\mathsf{dom}\,\Box = A \times A)) \vee (\neg(\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)))$.

`4.2:` Via **18-18(Def)** gilt: $(\Box \text{ keine Funktion}) \Leftrightarrow (\neg(\Box \text{ Funktion}))$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A)$
$\Leftrightarrow ((\Box \text{ keine Funktion}) \vee (\neg(\mathsf{dom}\,\Box = A \times A)) \vee (\neg(\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)))$.

`6.1:` Aus `5`
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A)$
$\Leftrightarrow ((\Box \text{ keine Funktion}) \vee (\mathsf{dom}\,\Box \neq A \times A) \vee (\neg(\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)))$.

`6.2:` Via **0-3** gilt: $(\neg(\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)) \Leftrightarrow (\mathsf{ran}\,\Box \not\subseteq A)$.

`7:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra in } A)$
$\Leftrightarrow ((\Box \text{ keine Funktion}) \vee (\mathsf{dom}\,\Box \neq A \times A) \vee (\mathsf{ran}\,\Box \not\subseteq A))$.

$\Box$

154-3. $\mathcal{U}$ ist keine Algebra in A:

154-3(Satz)

$\mathcal{U}$ *keine Algebra in* A.

Beweis **154-3**

Aus **18-51**"$\mathcal{U}$ keine Funktion"
folgt via **154-2**: $\mathcal{U}$ keine Algebra in A.

$\square$

154-4. Nun wird ein Kriterium für $\Box$ keine Algebra auf Q gegeben:

154-4(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $\Box$ *keine Algebra auf* Q.

ii) $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in Q) \wedge (\Phi \in Q) \wedge (\Omega\_\Box\_\Phi \notin Q)$.

ALG-**Notation**.

Beweis **154-4**

1.1: Via **154-1(Def)** gilt: $(\Box \text{ keine Algebra auf } Q) \Leftrightarrow (\neg(\Box \text{ Algebra auf } Q))$.

1.2: Via **93-5(Def)** gilt: $(\Box \text{ Algebra auf } Q)$
$\Leftrightarrow (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\beta \in Q)) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q))$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra auf } Q)$
$\Leftrightarrow (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\beta \in Q)) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)))$.

3: Aus 2
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra auf } Q)$
$\Leftrightarrow (\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in Q) \wedge (\Phi \in Q) \wedge (\neg(\Omega\_\Box\_\Phi \in Q)))$.

4: Aus 3
folgt: $(\Box \text{ keine Algebra auf } Q)$
$\Leftrightarrow (\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in Q) \wedge (\Phi \in Q) \wedge (\Omega\_\Box\_\Phi \notin Q))$.

$\square$

154-5. Aus $x, y \in Q$ und $x\_\Box\_y \notin Q$ folgt, dass $\Box$ keine Algebra auf Q ist. Falls $\Box$ keine Algebra auf Q ist, dann ist $\Box$ auch keine Algebra in Q:

154-5(Satz)

a) *Aus "$x \in Q$" und "$y \in Q$" und "$x\_\Box\_y \notin Q$" folgt "$\Box$ keine Algebra auf Q".*

b) *Aus "$\Box$ keine Algebra auf Q" folgt "$\Box$ keine Algebra in Q".*

ALG-**Notation**.

Beweis **154-5** a) VS gleich $(x \in Q) \wedge (y \in Q) \wedge (x\_\Box\_y \notin Q)$.

1: Es gilt: $(\Box$ Algebra auf $Q) \vee (\neg(\Box$ Algebra auf $Q))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\Box$ Algebra auf Q.

2: Aus 1.1.Fall "$\Box$ Algebra auf Q",
aus VS gleich "$x \in Q \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots y \in Q \ldots$"
folgt via **93-5(Def)**: $x\_\Box\_y \in Q$.

3: Es gilt 2 "$x\_\Box\_y \in Q$".
Es gilt VS gleich "$\ldots x\_\Box\_y \notin Q$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Box$ keine Algebra auf Q.

1.2.Fall $\neg(\Box$ Algebra auf $Q)$.

Aus 1.2.Fall "$\neg(\Box$ Algebra auf $Q)$"
folgt via **154-1(Def)**: $\Box$ keine Algebra auf Q.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\Box$ keine Algebra auf Q.

Beweis **154-5** `b) VS` gleich $\Box$ keine Algebra auf Q.

`1:` Es gilt: $(\Box \text{ Algebra in } Q) \vee (\neg(\Box \text{ Algebra in } Q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\Box$ Algebra in Q.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\Box$ Algebra in Q"
folgt via **93-26**: $\Box$ Algebra auf Q.

`3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ keine Algebra auf Q"
folgt via **154-1(Def)**: $\neg(\Box \text{ Algebra auf } Q)$.

`4:` Es gilt `2` "$\Box$ Algebra auf Q".
Es gilt `3` "$\neg(\Box \text{ Algebra auf } Q)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Box$ keine Algebra in Q.

`1.2.Fall` $\neg(\Box \text{ Algebra in } Q)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(\Box \text{ Algebra in } Q)$"
folgt via **154-1(Def)**: $\Box$ keine Algebra in Q.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\Box$ keine Algebra in Q.

$\Box$

154-6. Nun wird thematisiert, unter welchen Voraussetzungen $\mathcal{U}$ eine Algebra auf Q ist:

154-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *$\mathcal{U}$ Algebra auf Q.*

`ii)` *"$Q = 0$" oder "$0 \in Q$".*

Beweis **154-6**

ALG-Notation.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathcal{U}$ Algebra auf Q.

`1:` Es gilt: $(Q = 0) \vee (0 \neq Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $Q = 0$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(Q = 0) \vee (0 \in Q)$.

`1.2.Fall` $0 \neq Q$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq Q$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in Q$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$\mathcal{U}$ Algebra auf Q”,
aus `2`“$\ldots \Omega \in Q$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in Q$”
folgt via **93-5(Def)**: $\Omega \mathcal{U}\_\Omega \in Q$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in Q$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3.2`“Ω Menge” und
aus `3.2`“Ω Menge”
folgt via **93-4**: $\Omega \mathcal{U}\_\Omega = 0$.

`5:` Aus `3.1`“$\Omega \mathcal{U}\_\Omega \in Q$” und
aus `4`“$\Omega \mathcal{U}\_\Omega = 0$”
folgt: $0 \in Q$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(Q = 0) \vee (0 \in Q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(Q = 0) \vee (0 \in Q)$.

<u>Beweis **154-6**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(Q = 0) \vee (0 \in Q)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(Q = 0) \vee (0 \in Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $Q = 0$.

`2:` Via **93-18** gilt: $\mathcal{U}$ Algebra auf 0.

`3:` Aus 2"$\mathcal{U}$ Algebra auf 0" und aus `1.1.Fall`"$Q = 0$" folgt: $\mathcal{U}$ Algebra auf Q.

`1.2.Fall` $0 \in Q$.

`Thema2` $(\alpha \in Q) \wedge (\beta \in Q)$.

`3.1:` Aus `Thema2`"$\alpha \in Q \ldots$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.2:` Aus `Thema2`"$\ldots \beta \in Q$" folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`4:` Aus `3.1`"α Menge" und aus `3.2`"β Menge" folgt via **93-4**: $\alpha \mathcal{U}_- \beta = 0$.

`5:` Aus 4"$\alpha \mathcal{U}_- \beta = 0$" und aus `1.2.Fall`"$0 \in Q$" folgt: $\alpha \mathcal{U}_- \beta \in Q$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\beta \in Q)) \Rightarrow (\alpha \mathcal{U}_- \beta \in Q)$.

Konsequenz via **93-5(Def)**: $\mathcal{U}$ Algebra auf Q.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathcal{U}$ Algebra auf Q.

$\square$

- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).