Suite III - Die Elementare

Teil 2: Essays 171 - 194

$\leq$Satz vom Minimum. $\leq$Satz vom Maximum.
$\leq$InfZwischenWertSatz. $\leq$SupZwischenWertSatz.
MMS$\mathbb{N}$: MinimumMaximumSatz $\mathbb{N}$.
MMS$\mathbb{Z}$: MinimumMaximumSatz $\mathbb{Z}$.
Archimedes I. Archimedes II.

$\overset{M}{\mathsf{eus}}$. $\overset{M}{\mathsf{eos}}$. $\overset{M}{\mathsf{us}}$. $\overset{M}{\mathsf{os}}$.

$\overset{M}{\mathsf{einf}}$. $\overset{M}{\mathsf{esup}}$. $\overset{M}{\mathsf{inf}}$. $\overset{M}{\mathsf{sup}}$.

$\overset{M}{\mathsf{emin}}$. $\overset{M}{\mathsf{emax}}$. $\overset{M}{\mathsf{min}}$. $\overset{M}{\mathsf{max}}$.

$\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$. $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$. $\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$. $\overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$.

$\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$. $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$. $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$. $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$. $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$. $\overset{\leq}{\mathsf{min}}$. $\overset{\leq}{\mathsf{max}}$. $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$. $\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}$.

$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$. $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$. $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$. $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

Andreas Unterreiter

22. August 2013

Einiges über $\leq$ _Infima.
Einiges über $\leq$ _Suprema.
Einiges über $\leq$ _Minima.
Einiges über $\leq$ _Maxima.
Einiges über $\leq$ _minimale Elemente.
Einiges über $\leq$ _maximale Elemente.
$\leq$**Satz vom Minimum**. $\leq$**Satz vom Maximum**.
$\leq$**InfZwischenWertSatz**. $\leq$**SupZwischenWertSatz**.

Ersterstellung: 09/05/12 **Letzte Änderung: 09/05/12**

171-1. Hier wird die Eindeutigkeitsfrage von $\leq$ _Infimum und $\leq$ _Supremum in der erwateten Weise geklärt:

171-1(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E"*
und "j ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt "$inf = j$".

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E"*
und "s ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt "$sup = s$".

Beweis **171-1** a)

VS gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (j \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E)$.

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus VS gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots j$ ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **46-2**: $inf = j$.

b)

VS gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (s \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E)$.

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus VS gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots s$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **46-2**: $sup = s$.

□

171-2. Nun wird die Eindeutigkeitsfrage von $\leq$ _Minimum und $\leq$ _Maximum in der erwateten Weise geklärt:

<u>**171-2(Satz)**</u>

a) *Aus "min ist $\leq$ _Minimum von E" und "μ ist $\leq$ _Minimum von E" folgt "min $= \mu$".*

b) *Aus "max ist $\leq$ _Maximum von E" und "μ ist $\leq$ _Maximum von E" folgt "max $= \mu$".*

<u>Beweis **171-2**</u> a)

VS gleich $(min$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (\mu$ ist $\leq$ _Minimum von $E)$.

1.1: Aus VS gleich "min ist $\leq$ _Minimum von $E \ldots$"
folgt via **38-6**: min ist $\leq$ _Infimum von E.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mu$ ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **38-6**: μ ist $\leq$ _Infimum von E.

2: Aus 1.1"min ist $\leq$ _Infimum von E" und
aus 1.2"μ ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **171-1**: $min = \mu$.

b)

VS gleich $(max$ ist $\leq$ _Maximum von $E) \wedge (\mu$ ist $\leq$ _Maximum von $E)$.

1.1: Aus VS gleich "max ist $\leq$ _Maximum von $E \ldots$"
folgt via **38-7**: max ist $\leq$ _Supremum von E.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mu$ ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **38-7**: μ ist $\leq$ _Supremum von E.

2: Aus 1.1"max ist $\leq$ _Supremum von E" und
aus 1.2"μ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **171-1**: $max = \mu$.

$\square$

171-3. Da es sich bei $\mathbb{S}$ um eine $\leq$ _Kette handelt, ist jedes $\leq$ _minimale Element von E mit $E \subseteq \mathbb{S}$ ein $\leq$ _Minimum von E. Ähnliches gilt für $\leq$ _maximale Elemente von E:

171-3(Satz)

a) *Aus "μin ist $\leq$ _minimales Element von E" und "$E \subseteq \mathbb{S}$" folgt "μin ist $\leq$ _Minimum von E".*

b) *Aus "μax ist $\leq$ _maximales Element von E" und "$E \subseteq \mathbb{S}$" folgt "μax ist $\leq$ _Maximum von E".*

Beweis **171-3** `a)` `VS` gleich $(\mu in \text{ ist } \leq \text{\_minimales Element von } E) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`2:` Aus `1`"E ist $\leq$ _Kette" und
aus `VS` gleich "μin ist $\leq$ _minimales Element von $E \ldots$"
folgt via **45-3**: μin ist $\leq$ _Minimum von E.

`b)` `VS` gleich $(\mu ax \text{ ist } \leq \text{\_maximales Element von } E) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`2:` Aus `1`"E ist $\leq$ _Kette" und
aus `VS` gleich "μax ist $\leq$ _maximales Element von $E \ldots$"
folgt via **45-4**: μax ist $\leq$ _Maximum von E.

□

171-4. Da $\leq$ antiSymmetrisch ist und da $\mathbb{S}$ eine $\leq$ _Kette ist, hat jede TeilKlasse von $\mathbb{S}$ höchstens ein $\leq$ _minimales Element. Analoges gilt für $\leq$ _maximale Element von TeilKlassen von $\mathbb{S}$:

171-4.(Satz)

a) *Aus "μin ist $\leq$ _minimales Element von E"*
und "μ ist $\leq$ _minimales Element von E"
und "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt "$\mu in = \mu$".

b) *Aus "μax ist $\leq$ _maximales Element von E"*
und "μ ist $\leq$ _maximales Element von E"
und "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt "$\mu ax = \mu$".

Beweis **171-4** `a)` `VS` gleich $(\mu in$ ist $\le$ _minimales Element von $E)$
$\wedge(\mu$ ist $\le$ _minimales Element von $E)$
$\wedge(E \subseteq \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\le$ antiSymmetrisch.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\le$ _Kette.

`2:` Aus `1.1`"$\le$ antiSymmetrisch",
aus `1.2`"E ist $\le$ _Kette",
aus `VS` gleich "μin ist $\le$ _minimales Element von $E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mu$ ist $\le$ _minimales Element von $E \ldots$"
folgt via **46-6**: $\mu in = \mu$.

`b)` `VS` gleich $(\mu ax$ ist $\le$ _maximales Element von $E)$
$\wedge(\mu$ ist $\le$ _maximales Element von $E)$
$\wedge(E \subseteq \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\le$ antiSymmetrisch.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\le$ _Kette.

`2:` Aus `1.1`"$\le$ antiSymmetrisch",
aus `1.2`"E ist $\le$ _Kette",
aus `VS` gleich "μax ist $\le$ _maximales Element von $E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mu$ ist $\le$ _maximales Element von $E \ldots$"
folgt via **46-7**: $\mu ax = \mu$.

$\square$

171-5. Da $\leq$ antiSymmetrisch ist, ergibt sich vorliegendes Resultat ohne allzu viel Mühe aus **46-8,9**:

171-5(Satz)

a) *Aus "min ist $\leq$ _Minimum von E" und "μin ist $\leq$ _minimales Element von E"*

folgt "$min = \mu in$".

b) *Aus "max ist $\leq$ _Maximum von E" und "μax ist $\leq$ _maximales Element von E"*

folgt "$max = \mu ax$".

Beweis **171-5** a) VS gleich (min ist $\leq$ _Minimum von E) $\wedge$(μin ist $\leq$ _minimales Element von E).

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus VS gleich "min ist $\leq$ _Minimum von E ..." und
aus VS gleich "... μin ist $\leq$ _minimales Element von E"
folgt via **46-8**: $min = \mu in$.

b) VS (max ist $\leq$ _Maximum von E) $\wedge$(μax ist $\leq$ _maximales Element von E).

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus VS gleich "max ist $\leq$ _Maximum von E ..." und
aus VS gleich "... μax ist $\leq$ _maximales Element von E"
folgt via **46-9**: $max = \mu ax$.

□

171-6. Nun wird die $\leq$-Version vom **Satz vom Minimum** bewiesen:

171-6(Satz) (**$\leq$Satz vom Minimum**)

Aus "$0 \neq E \subseteq \mathbb{S}$" und "$E$ endlich"
folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von E".

Beweis **171-6** `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (E$ endlich$)$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ transitiv.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`2:` Aus `1.1`"$\leq$ transitiv",
aus `1.2`"E ist $\leq$ _Kette",
aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **Satz vom Minimum**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von E.

$\square$

171-7. Nun wird die $\leq$-Version vom **Satz vom Maximum** bewiesen:

171-7(Satz) **($\leq$Satz vom Maximum)**

Aus "$0 \neq E \subseteq \mathbb{S}$" *und* "$E$ *endlich*"

folgt "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $\leq$ _*Maximum von* E".

Beweis **171-7** `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ transitiv.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`2:` Aus `1.1`"$\leq$ transitiv",
aus `1.2`"E ist $\leq$ _Kette",
aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **Satz vom Maximum**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von E.

□

171-8. Hier wird der **InfZwischenWertSatz** für $\leq$ adaptiert:

171-8(Satz) (**$\leq$InfZwischenWertSatz**)

Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E" und "$inf < p \in E$"

folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf \leq \xi < p)$".

$\leq$-Notation.

Beweis **171-8** `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf < p \in E)$.

`1.1`: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ antiSymmetrisch})$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere $\leq$ _Schranke von E.

`2`: Aus `1.1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S} \ldots$" und
aus `1.2`"inf untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **37-1**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`3`: Aus `2`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`4`: Aus `1.1`"$\ldots \leq$ antiSymmetrisch",
aus `3`"E ist $\leq$ _Kette",
aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots inf < p \ldots$"
folgt via **InfZwischenWertSatz**:
$$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf \leq \xi) \wedge (\xi < p).$$

`5`: Aus `4`
folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf \leq \xi < p)$.

□

171-9. Nun wird der **SupZwischenWertSatz** für $\leq$ adaptiert:

171-9(Satz) **($\leq$SupZwischenWertSatz)**

Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E" und "$E \ni p < sup$"

folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (p < \xi \leq sup)$".

$\leq$**-Notation**.

Beweis **171-8** VS gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{ \_Supremum von } E) \wedge (E \ni p < sup)$.

1.1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ antiSymmetrisch})$.

1.2: Aus VS gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von E ..."
folgt via **36-1(Def)**: sup obere $\leq$ _Schranke von E.

1.3: Aus VS gleich "... $E \ni p$ ..."
folgt: $p \in E$.

2: Aus 1.1"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$ ..." und
aus 1.2"sup obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **37-1**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

3: Aus 2"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

4: Aus 1.1"... $\leq$ antiSymmetrisch",
aus 3"E ist $\leq$ _Kette",
aus VS gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von E ...",
aus 1.3"$p \in E$" und
aus VS gleich "... $p < sup$"
folgt via **SupZwischenWertSatz**:
$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (p < \xi) \wedge (\xi \leq sup)$.

5: Aus 4
folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (p < \xi \leq sup)$.

□

Eine Folgerung aus **InfZwischenWertSatz**, wenn $inf \notin K$.
Eine Folgerung aus **SupZwischenWertSatz**, wenn $sup \notin K$.

Ersterstellung: 10/05/12 **Letzte Änderung: 10/05/12**

172-1. Hat eine Klasse ein Infimum, aber kein Minimum, so ist jedes Infimum *kein* Element dieser Klasse und nicht nur in diesem Fall kann **InfZwischenWertSatz** modifiziert werden:

172-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

$\rightarrow$) *inf ist M_Infimum von K.*

$\rightarrow$) $inf \notin K$.

$\rightarrow$) $p \in K$.

Dann gibt es ξ, so dass gilt:

`e.1)` $\xi \in K$.

`e.2)` $inf \,{}_{-}\overset{\textbf{ir}}{M}{}_{-}\, \xi$.

`e.3)` $\xi \,{}_{-}\overset{\textbf{ir}}{M}{}_{-}\, p$.

<u>Beweis</u> **172-1**

1: Aus →) “inf ist M_Infimum von K” und
aus →) “$p \in K$”
folgt via **36-3**: inf_M_p.

2: Aus →) “$p \in K$” und
aus →) “$inf \notin K$”
folgt via **0-1**: $p \neq inf$.

3: Aus 2
folgt: $inf \neq p$.

4: Aus 1 “inf_M_p” und
aus 3 “$inf \neq p$”
folgt via **41-3**: $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

5: Aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus →) “K ist M_Kette”,
aus →) “inf ist M_Infimum von K”,
aus →) “$p \in K$” und
aus 4 “$inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$”
folgt via **InfZwischenWertSatz**: $\exists \xi : (\xi \in K) \wedge (inf\_M\_\xi) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

6: Aus 5 “$\ldots \xi \in K \ldots$” und
aus →) “$inf \notin K$”
folgt via **0-1**: $\xi \neq inf$.

7: Aus 6
folgt: $inf \neq \xi$.

8: Aus 5 “$\ldots inf\_M\_\xi \ldots$” und
aus 7 “$inf \neq \xi$”
folgt via **41-3**: $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi$.

9: Aus 5 “$\exists \xi \ldots$”,
aus 5 “$\ldots \xi \in K \ldots$”,
aus 8 “$inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi$” und
aus 5 “$\ldots \xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$”
folgt: $\exists \xi : (\xi \in K) \wedge (inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

□

172-2. Hat eine Klasse ein Supremum, aber kein Maximum, so ist jedes Supremum *kein* Element dieser Klasse und nicht nur in diesem Fall kann **SupZwischenWertSatz** modifiziert werden:

172-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) K *ist* M_*Kette.*

$\rightarrow$) *sup ist* M_*Supremum von* K.

$\rightarrow$) $sup \notin K$.

$\rightarrow$) $p \in K$.

Dann gibt es ξ, *so dass gilt:*

`e.1)` $\xi \in K$.

`e.2)` $p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\xi$.

`e.3)` $\xi_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}sup$.

<u>Beweis **172-2**</u>

`1:` Aus →) “ sup ist M-Supremum von K ” und
aus →) “ $p \in K$ ”
folgt via **36-4**: $p \_ M \_ sup$.

`2:` Aus →) “ $p \in K$ ” und
aus →) “ $sup \notin K$ ”
folgt via **0-1**: $p \neq sup$.

`3:` Aus `1` “ $p \_ M \_ sup$ ” und
aus `2` “ $p \neq sup$ ”
folgt via **41-3**: $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ sup$.

`4:` Aus →) “ M antiSymmetrisch ” ,
aus →) “ K ist M-Kette ” ,
aus →) “ sup ist M-Supremum von K ” ,
aus →) “ $p \in K$ ” und
aus `3` “ $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ sup$ ”
folgt via **SupZwischenWertSatz**: $\exists \xi : (\xi \in K) \wedge (p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \xi) \wedge (\xi \_ M \_ sup)$.

`5:` Aus `4` “ $\ldots \xi \in K \ldots$ ” und
aus →) “ $sup \notin K$ ”
folgt via **0-1**: $\xi \neq sup$.

`6:` Aus `4` “ $\ldots \xi \_ M \_ sup$ ” und
aus `5` “ $\xi \neq sup$ ”
folgt via **41-3**: $\xi \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ sup$.

`7:` Aus `4` “ $\exists \xi \ldots$ ” ,
aus `4` “ $\ldots \xi \in K \ldots$ ” ,
aus `4` “ $\ldots p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \xi$ ” und
aus `6` “ $\xi \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ sup$ ”
folgt: $\exists \xi : (\xi \in K) \wedge (p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \xi) \wedge (\xi \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ sup)$.

□

Einiges über $\leq$ -Infima von E, die *nicht* in E sind.
Einiges über $\leq$ -Suprema von E, die *nicht* in E sind.

Ersterstellung: 10/05/12 **Letzte Änderung: 12/05/12**

173-1. Falls inf ein $\leq$ _Infimum von E ist, das *nicht* in E ist, dann gibt es zu jedem $p \in E$ ein $\xi \in E$ mit $inf < \xi < p$. Analoges gilt für $\leq$ _Suprema von E, die *nicht* in E sind:

173-1(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E" und "$inf \notin E$" und "$p \in E$" folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < p)$".*

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E" und "$sup \notin E$" und "$p \in E$" folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (p < \xi < sup)$".*

$\leq$**-Notation**.

Beweis **173-1** a) VS gleich $(inf$ ist $\leq$ _Infimum von $E) \wedge (inf \notin E) \wedge (p \in E)$.

1.1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$" folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

1.2: Aus VS gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

2: Aus 1.2"$E \subseteq \mathbb{S}$" folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

3: Aus 1.1"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus 2"E ist $\leq$ _Kette",
aus VS gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots inf \notin E \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots p \in E$"
folgt via **172-2**: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi) \wedge (\xi < p)$.

4: Aus 3
folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < p)$.

<u>Beweis **173-1**</u> `b)` `VS` gleich (sup ist $\le$ _Supremum von E) $\wedge$ ($sup \notin E$) $\wedge$ ($p \in E$).

`1.1:` Aus **AAVII**"$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\le$ antiSymmetrisch.

`1.2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\le$ _Supremum von E ..."
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\le$ _Kette.

`3:` Aus `1.1`"$\le$ antiSymmetrisch",
aus `2`"E ist $\le$ _Kette",
aus `VS` gleich "sup ist $\le$ _Supremum von E ...",
aus `VS` gleich "... $sup \notin E$ ..." und
aus `VS` gleich "... $p \in E$"
folgt via **172-1**: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (p < \xi) \wedge (\xi < sup)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (p < \xi < sup)$.

□

173-2. Nicht zuletzt auf Grund der "globalen $\leq$ _Ketten-Struktur" von $\mathbb{S}$ ist die nunmehrige Alternative von **173-1**, in der weder x noch y Elemente von E sein müssen, verfügbar:

173-2(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E" und "$inf \notin E$" und "$inf < x$" folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < x)$".*

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E" und "$sup \notin E$" und "$y < sup$" folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (y < \xi < sup)$".*

$\leq$-Notation.

Beweis **173-2** `a)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \notin E) \wedge (inf < x)$.

`1:` Es gilt:
$$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x \leq \alpha)$$
$$\vee$$
$$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (\neg(x \leq \xi)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x \leq \alpha)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf < x$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`4:` Aus 2"$x \in \mathbb{S}$" und
aus 3"$\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\,(\leq)$.

`5:` Aus 4"$x \in \mathsf{dom}\,(\leq)$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x \leq \alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: x untere $\leq$ _Schranke von E.

`6:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" und
aus 5"x untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: $x \leq inf$.

`7:` Aus 6"$x \leq inf$"
folgt via **107-13**: $\neg(inf < x)$.

`8:` Es gilt 7"$\neg(inf < x)$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots inf < x$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < x)$.

...

Beweis **173-2** `a)` `VS` gleich (inf ist $\leq$ _Infimum von E) $\wedge$ ($inf \notin E$) $\wedge$ ($inf < x$).

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\exists\xi : (\xi \in E) \wedge (\neg(x \leq \xi))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von E ..." und aus `1.2.Fall` "... $\xi \in E$ ..." folgt via **36-3**: $inf \leq \xi$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "... $\xi \in E$ ..." und aus `VS` gleich "... $inf \notin E$ ..." folgt via **0-1**: $\xi \neq inf$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "... $inf < x$" folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1` "$inf \leq \xi$" folgt via **107-3**: $\xi \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2.2` folgt: $inf \neq \xi$.

`4.1:` Aus `2.3` "$x \in \mathbb{S}$" und aus `3.1` "$\xi \in \mathbb{S}$" folgt via **107-14**: $(x \leq \xi) \vee (\xi < x)$.

`4.2:` Aus `2.1` "$inf \leq \xi$" und aus `3.2` "$inf \neq \xi$" folgt via **41-3**: $inf < \xi$.

`5:` Aus `4.1` "$(x \leq \xi) \vee (\xi < x)$" und aus `1.2.Fall` "... $\neg(x \leq \xi)$" folgt: $\xi < x$.

`6:` Aus `4.2` "$inf < \xi$" und aus `5` "$\xi < x$" folgt: $inf < \xi < x$.

`7:` Aus `1.2.Fall` "$\exists\xi$ ...", aus `1.2.Fall` "... $\xi \in E$ ..." und aus `6` "$inf < \xi < x$" folgt: $\exists\xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\exists\xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < x).$$

<u>Beweis **173-2**</u> `b)`

`VS` gleich $(sup \text{ ist } \le \text{-Supremum von } E) \wedge (sup \notin E) \wedge (y < sup)$.

`1:` Es gilt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \le y)$
$\vee$
$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (\neg(\xi \le y))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \le y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < sup$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus **AAVII**"$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}(\le) = \mathbb{S}$.

`4:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `3`"$\mathsf{ran}(\le) = \mathbb{S}$"
folgt: $y \in \mathsf{ran}(\le)$.

`5:` Aus `4`"$y \in \mathsf{ran}(\le)$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \le y)$"
folgt via **35-1(Def)**: y obere $\le$-Schranke von E.

`6:` Aus `VS` gleich "sup ist $\le$-Supremum von $E \ldots$" und
aus `5`"y obere $\le$-Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: $sup \le y$.

`7:` Aus `6`"$sup \le y$"
folgt via **107-13**: $\neg(y < sup)$.

`8:` Es gilt `7`"$\neg(y < sup)$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots y < sup$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (y < \xi < sup)$.

...

Beweis **173-2** `b)`

`VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \notin E) \wedge (y < sup)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (\neg(\xi \leq y))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \xi \in E \ldots$"
folgt via **36-4**: $\xi \leq sup$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots \xi \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots sup \notin E \ldots$"
folgt via **0-1**: $\xi \neq sup$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < sup$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1`"$\xi \leq sup$"
folgt via **107-3**: $\xi \in \mathbb{S}$.

`4.1:` Aus `3`"$\xi \in \mathbb{S}$" und
aus `2.3`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(\xi \leq y) \vee (y < \xi)$.

`4.2:` Aus `2.1`"$\xi \leq sup$" und
aus `2.2`"$\xi \neq sup$"
folgt via **41-3**: $\xi < sup$.

`5:` Aus `4.1`"$(\xi \leq y) \vee (y < \xi)$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \neg(\xi \leq y)$"
folgt: $y < \xi$.

`6:` Aus `5`"$y < \xi$" und
aus `4.2`"$\xi < sup$"
folgt: $y < \xi < sup$.

`7:` Aus `1.2.Fall`"$\exists \xi \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$\ldots \xi \in E \ldots$" und
aus `6`"$y < \xi < sup$"
folgt: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (y < \xi < sup)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (y < \xi < sup).$$

□

173-3. Falls inf ein *reelles* $\leq$ _Infimum von E ist, ist die vorliegende Modifikation von **173-2**`a)` verfügbar. Ähnlich kann für ein *reelles* $\leq$ _Supremum von E argumentiert werden:

173-3(Satz)

`a)` *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E"*
und "$inf \notin E$"
und "$inf \in \mathbb{R}$"
und "$0 < a$" *folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < a + inf)$".*

`b)` *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E"*
und "$sup \notin E$"
und "$sup \in \mathbb{R}$"
und "$0 < a$" *folgt "$\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (-a + sup < \xi < sup)$".*

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **173-3** `a)`
`VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \notin E) \wedge (inf \in \mathbb{R}) \wedge (0 < a)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a$" und
aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **VR**<: $(inf) + 0 < (inf) + a$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $(inf) + 0 = inf$.

`2.2:` Via **FSA** gilt: $(inf) + a = a + inf$.

`3:` Aus `1`"$(inf) + 0 < (inf) + a$" und
aus `2.1`"$(inf) + 0 = inf$"
folgt: $inf < (inf) + a$.

`4:` Aus `3`"$inf < (inf) + a)$" und
aus `2.2`"$(inf) + a = a + inf$"
folgt: $inf < a + inf$.

`5:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots inf \notin E \ldots$" und
aus `4`"$inf < a + inf$"
folgt via **173-2**: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < a + inf)$.

<u>Beweis **173-3**</u> `b)`

`VS` gleich $(sup \text{ ist } \le \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \notin E) \wedge (sup \in \mathbb{R}) \wedge (0 < a)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < a$"
folgt via **109-16**: $-a < 0$.

`2:` Aus `1`"$-a < 0$" und
aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **VR**<: $(sup) - a < (sup) + 0$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $(sup) + 0 = sup$.

`3.2:` Via **FS**$-+$ gilt: $-a + sup = (sup) - a$.

`4:` Aus `2`"$(sup) - a < (sup) + 0$" und
aus `3.1`"$(sup) + 0 = sup$"
folgt: $(sup) - a < sup$.

`5:` Aus `3.2`"$-a + sup = (sup) - a$" und
aus `4`"$(sup) - a < sup$"
folgt: $-a + sup < sup$.

`6:` Aus `VS` gleich "$sup \text{ ist } \le \text{\_Supremum von } E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots sup \notin E \ldots$" und
aus `5`"$-a + sup < sup$"
folgt via **173-2**: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (-a + sup < \xi < sup)$.

□

173-4. Zur Vorbereitung des Folgenden werden einige gerne verwendeten Schlussfolgerungen aus "Ungleichungs-Ketten" gezogen. Interessanter Weise muss weder in `b)` noch in `c)` eine Forderung an x oder a erhoben werden - die Untersuchungen zeigen, dass aus den jeweiligen Voraussetzungen $x \in \mathbb{R}$ und $0 < a$ folgt:

173-4(Satz)

a) *Aus* "$x < p < q < y$" *folgt* "$0 < q - p < y - x$".

b) *Aus* "$x < p < q < a + x$" *folgt* "$0 < q - p < a$".

c) *Aus* "$-a + x < p < q < x$" *folgt* "$0 < q - p < a$".

`RECH.`$\leq$`.`**-Notation**

<u>Beweis **173-4**</u> `a)` `VS` gleich $x < p < q < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x < p < q \ldots$”
folgt via **107-12**: $p \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots p < q < y$”
folgt via **107-12**: $q \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$x < p \ldots$”
folgt via **109-14**: $-p < -x$.

`2.1:` Aus `1.1`“$p \in \mathbb{R}$”
folgt via **96-36**: $-p + p = 0$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots p < q \ldots$” und
aus `1.1`“$p \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$<$: $-p + p < -p + q$.

`2.3:` Aus `1.3`“$-p < -x$” und
aus `1.2`“$q \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$<$: $q + (-p) < q + (-x)$.

`3.1:` Aus `2.2`“$-p + p < -p + q$” und
aus `2.1`“$-p + p = 0$”
folgt: $0 < -p + q$.

`3.2:` Aus `2.3`“$q + (-p) < q + (-x)$” und
aus “$q + (-p) = q - p$”
folgt: $q - p < q + (-x)$.

`3.3:` Via **FS**$-+$ gilt: $-p + q = q - p$.

`4.1:` Aus `3.2`“$q - p < q + (-x)$” und
aus “$q + (-x) = q - x$”
folgt: $q - p < q - x$.

`4.2:` Aus `3.1`“$0 < -p + q$” und
aus `3.3`“$-p + q = q - p$”
folgt: $0 < q - p$.

`5:` Aus `4.2`“$0 < q - p$” und
aus `4.1`“$q - p < q - x$”
folgt via **107-12**: $q - p \in \mathbb{R}$.

...

Beweis **173-4** `a)` `VS` gleich $x < p < q < y.$

...

`6.1:` Aus `VS` gleich "$x < p \ldots$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty).$

`Fallunterscheidung`

`6.1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}.$

`7:` Aus `VS` gleich "$\ldots q < y$" und
aus `6.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$<$: $-x + q < -x + y.$

`8.1:` Via **FS**$-+$ gilt: $q - x = -x + q.$

`8.2:` Via **FS**$-+$ gilt: $-x + y = y - x.$

`9:` Aus `7`"$-x + q < -x + y$" und
aus `8.1`"$q - x = -x + q$"
folgt: $q - x < -x + y.$

`10:` Aus `9`"$q - x < -x + y$" und
aus `8.2`"$-x + y = y - x$"
folgt: $q - x < y - x.$

`11:` Aus `4.1`"$q - p < q - x$" und
aus `10`"$q - x < y - x$"
folgt via **107-8**: $q - p < y - x.$

...

Beweis **173-4** `a)` `VS` gleich $x < p < q < y$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.1.2.Fall` $x = -\infty$.

`7.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q < y$"
folgt via **107-9**: $-\infty < y$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`8:` Aus `7.1`"$-\infty < y$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq y$.

`9:` Aus `8`"$-\infty \neq y$" und
aus `7.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **165-4**: $y - (-\infty) = +\infty$.

`10:` Aus `9`"$y - (-\infty) = +\infty$" und
aus `6.1.2.Fall`"$x = -\infty$"
folgt: $y - x = +\infty$.

`11:` Aus `5`"$q - p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $q - p < +\infty$.

`12:` Aus `11`"$q - p < +\infty$" und
aus `10`"$y - x = +\infty$"
folgt: $q - p < y - x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$q - p < y - x$"

`6.2:` Aus `4.2`"$0 < q - p$" und
aus `A1` gleich "$q - p < y - x$"
folgt: $0 < q - p < y - x$.

<u>Beweis **173-4**</u> `b)` `VS` gleich "$x < p < q < a + x$"

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < p \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q < a + x$"
folgt via **107-9**: $a + x \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x < p < q < a + x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < q - p < (a + x) - x$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `1.2`"$a + x \in \mathbb{S}$" und
aus `2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-4**: $a \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$a \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(a \in \mathbb{T}) \wedge (a \text{ Zahl})$.

`5:` Aus `VS` gleich "$x < p \ldots$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`7:` Aus `6`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `4`"$\ldots a$ Zahl"
folgt via **160-3**: $-x + (x + a) = a$.

`8:` $(a + x) - x \overset{\textbf{FS}-+}{=} -x + (a + x) \overset{\textbf{FSA}}{=} -x + (x + a) \overset{7}{=} a$.

`9:` Aus `1.3`"$0 < q - p < (a + x) - x$" und
aus `8`"$(a + x) - x = \ldots = a$"
folgt: $0 < q - p < a$.

...

<u>Beweis</u> **173-4** `b)` `VS` gleich “$x < p < q < a + x$”

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $x = -\infty$.

`6.1:` Aus `1.2`“$a + x \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-20**: $a + x \neq \mathsf{nan}$.

`6.2:` Aus `4`“$a \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **119-1**: $(a + (-\infty) = -\infty) \vee (a + (-\infty) = \mathsf{nan})$.

`7:` Aus `6.2`“$(a + (-\infty) = -\infty) \vee (a + (-\infty) = \mathsf{nan})$” und
aus `5.2.Fall`“$x = -\infty$”
folgt: $(a + x = -\infty) \vee (a + x = \mathsf{nan})$.

`8:` Aus `7`“$(a + x = -\infty) \vee (a + x = \mathsf{nan})$” und
aus `6.1`“$a + x \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $a + x = -\infty$.

`9:` Aus `VS` gleich “$\ldots q < a + x$” und
aus `8`“$a + x = -\infty$”
folgt: $q < -\infty$.

`10:` Es gilt `9`“$q < -\infty$”.
Via **107-7** gilt “$\neg(q < -\infty)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $0 < q - p < a$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 < q - p < a$.

<u>Beweis **173-4**</u> `c)` `VS` gleich “$-a+x<p<q<x$”

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-a+x<p\ldots$”
folgt via **107-9**: $-a+x\in\mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots q<x$”
folgt via **107-9**: $x\in\mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$-a+x<p<q<x$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0<q-p<x-(-a+x)$.

`2.1:` Aus `1.2`“$x\in\mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $x\in\mathbb{T}$.

`2.2:` Aus “$(-a)+x=-a+x$” und
aus `1.1`“$-a+x\in\mathbb{S}$”
folgt: $(-a)+x\in\mathbb{S}$.

`2.3:` $x-(-a+x)\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}x-(-(a-x))\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}x+(a-x)\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}x+(-x+a)$.

`3.1:` Aus `2.2`“$(-a)+x\in\mathbb{S}$” und
aus `2.1`“$x\in\mathbb{T}$”
folgt via **109-4**: $-a\in\mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `1.3`“$0<q-p<x-(-a+x)$” und
aus `2.3`“$x-(-a+x)=\ldots=x+(-x+a)$”
folgt: $0<q-p<x+(-x+a)$.

`4.1:` Aus `3.1`“$-a\in\mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $-a\in\mathbb{T}$.

`4.2:` Aus `3.1`“$-a\in\mathbb{S}$”
folgt via **117-4**: $a\in\mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.2`“$a\in\mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: a Zahl.

...

<u>Beweis</u> **173-4** `c)` `VS` gleich "$-a+x<p<q<x$"

...

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots q<x$"
folgt via **107-9**: $(x\in\mathbb{R})\vee(x=+\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $x\in\mathbb{R}$.

`7:` Aus `6.1.Fall`"$x\in\mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x\in\mathbb{C}$.

`8:` Aus `7`"$x\in\mathbb{C}$" und
aus `5`"a Zahl"
folgt via **160-3**: $x+(-x+a)=a$.

`9:` Aus `3.2`"$0<q-p<x+(-x+a)$" und
aus `8`"$x+(-x+a)=\ldots=a$"
folgt: $0<q-p<a$.

...

<u>Beweis **173-4**</u> `c)` `VS` gleich "$-a+x<p<q<x$"

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $x=+\infty$.

`7.1:` Aus `1.1`"$-a+x\in\mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $-a+x\neq\mathsf{nan}$.

`7.2:` Aus `4.1`"$-a\in\mathbb{T}\ldots$"
folgt via **119-1**: $((-a)+(+\infty)=+\infty)\vee((-a)+(+\infty)=\mathsf{nan})$.

`8.1:` Aus "$(-a)+x=-a+x$" und
aus `7.1`"$-a+x\neq\mathsf{nan}$"
folgt: $(-a)+x\neq\mathsf{nan}$.

`8.2:` Aus `7.2`"$((-a)+(+\infty)=+\infty)\vee((-a)+(+\infty)=\mathsf{nan})$" und
aus `6.2.Fall`"$x=+\infty$"
folgt: $((-a)+x=+\infty)\vee((-a)+x=\mathsf{nan})$.

`9:` Aus `8.2`"$((-a)+x=+\infty)\vee(a+x=\mathsf{nan})$" und
aus `8.1`"$(-a)+x\neq\mathsf{nan}$"
folgt: $(-a)+x=+\infty$.

`10:` Aus `9`"$(-a)+x=+\infty$" und
aus "$(-a)+x=-a+x$"
folgt: $-a+x=+\infty$.

`11:` Aus `VS` gleich "$-a+x<p$" und
aus `10`"$-a+x=+\infty$"
folgt: $+\infty<p$.

`12:` Es gilt `11`"$+\infty<p$".
Via **107-7** gilt "$\neg(+\infty<p)$".
Ex falso quodlibet folgt: $0<q-p<a$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0<q-p<a$.

□

173-5. In Kombination von **173-2,3,4** ergibt sich der vorliegende Satz, der unter den jeweiligen Voraussetzungen auf eine "Verdichtung" der Elemente von E hindeutet:

173-5(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E"*
und "$inf \notin E$"
und "$inf \in \mathbb{R}$"
und "$0 < a$" *folgt "$\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < a)$".*

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E"*
und "$sup \notin E$"
und "$sup \in \mathbb{R}$"
und "$0 < a$" *folgt "$\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < a)$".*

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **173-5** `a)`
`VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \notin E) \wedge (inf \in \mathbb{R}) \wedge (0 < a)$.

`1:` Aus`VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots inf \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a$"
folgt via **173-3**: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (inf < \xi < a + inf)$.

`2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots inf \notin E \ldots$" und
aus `1`"$\ldots inf < \xi \ldots$"
folgt via **173-2**: $\exists \eta : (\eta \in E) \wedge (inf < \eta < \xi)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots inf < \eta < \xi$" und
aus `1`"$\ldots \xi < a + inf$"
folgt: $inf < \eta < \xi < a + inf$.

`4:` Aus `3`"$inf < \eta < \xi < a + inf$"
folgt via **173-4**: $0 < \xi - \eta < a$.

`5:` Aus `1`"$\exists \xi \ldots$",
aus `2`"$\exists \eta \ldots$",
aus `1`"$\ldots \xi \in E \ldots$",
aus `2`"$\ldots \eta \in E \ldots$" und
aus `4`"$0 < \xi - \eta < a$"
folgt: $\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < a)$.

<u>Beweis **173-5**</u> `b)`

`VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \notin E) \wedge (sup \in \mathbb{R}) \wedge (0 < a)$.

`1:` Aus`VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots sup \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a$"
folgt via **173-3**: $\exists \eta : (\eta \in E) \wedge (-a + sup < \eta < sup)$.

`2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots sup \notin E \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \eta < sup$"
folgt via **173-2**: $\exists \xi : (\xi \in E) \wedge (\eta < \xi < sup)$.

`3:` Aus `1`"$\ldots -a + \text{sup} < \eta \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \eta < \xi < sup$"
folgt: $-a + sup < \eta < \xi < sup$.

`4:` Aus `3`"$-a + sup < \eta < \xi < sup$"
folgt via **173-4**: $0 < \xi - \eta < a$.

`5:` Aus `2`"$\exists \xi \ldots$",
aus `1`"$\exists \eta \ldots$",
aus `2`"$\ldots \xi \in E \ldots$",
aus `1`"$\ldots \eta \in E \ldots$" und
aus `4`"$0 < \xi - \eta < a$"
folgt: $\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < a)$.

□

173-6. Hat E ein reelles $\leq$ _Infiumum, das *nicht* zu E gehört, dann kann E keine TeilKlasse von $\mathbb{Z}$ sein. Entsprechendes gilt für $\leq$ _Suprema:

173-6(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E"*
und "$inf \notin E$"
und "$inf \in \mathbb{R}$" *folgt "$E \not\subseteq \mathbb{Z}$".*

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E"*
und "$sup \notin E$"
und "$sup \in \mathbb{R}$" *folgt "$E \not\subseteq \mathbb{Z}$".*

Beweis **173-6**

`RECH.`**$\leq$-Notation**.

---

a) `VS` gleich "$(inf$ ist $\leq$ _Infimum von $E) \wedge (inf \notin E) \wedge (inf \in \mathbb{R})$"

`1:` Es gilt: $(E \subseteq \mathbb{Z}) \vee (\neg(E \subseteq \mathbb{Z}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots inf \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$" und
aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **173-5**: $\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < 1)$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \xi \in E \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$E \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $\xi \in \mathbb{Z}$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \eta \in E \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$E \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $\eta \in \mathbb{Z}$.

`3.3:` Aus `2`"$\ldots 0 < \xi - \eta < 1$"
folgt via **142-3**: $\xi - \eta \in \,]0|1[$.

`4:` Aus `3.1`"$\xi \in \mathbb{Z}$" und
aus `3.2`"$\eta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $\xi - \eta \in \mathbb{Z}$.

`5:` Aus **168-2**"$\mathbb{Z} \cap \,]0|1[\, = 0$" und
aus `3.3`"$\xi - \eta \in \,]0|1[$"
folgt via **161-1**: $\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$.

`6:` Es gilt `5`"$\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$".
Es gilt `4`"$\xi - \eta \in \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`1.2.Fall` $\neg(E \subseteq \mathbb{Z})$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(E \subseteq \mathbb{Z})$"
folgt via **0-3**: $E \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E \not\subseteq \mathbb{Z}$.

Beweis **173-6** `b)`

`VS` gleich "$(sup$ ist $\leq$ _Supremum von $E) \wedge (sup \notin E) \wedge (sup \in \mathbb{R})$"

`1:` Es gilt: $(E \subseteq \mathbb{Z}) \vee (\neg(E \subseteq \mathbb{Z}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots sup \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$" und
aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **173-5**: $\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < 1)$.

`3.1:` Aus 2"$\ldots \xi \in E \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$E \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $\xi \in \mathbb{Z}$.

`3.2:` Aus 2"$\ldots \eta \in E \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$E \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $\eta \in \mathbb{Z}$.

`3.3:` Aus 2"$\ldots 0 < \xi - \eta < 1$"
folgt via **142-3**: $\xi - \eta \in]0|1[$.

`4:` Aus `3.1`"$\xi \in \mathbb{Z}$" und
aus `3.2`"$\eta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $\xi - \eta \in \mathbb{Z}$.

`5:` Aus **168-2**"$\mathbb{Z} \cap]0|1[= 0$" und
aus `3.3`"$\xi - \eta \in]0|1[$"
folgt via **161-1**: $\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$.

`6:` Es gilt 5"$\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$".
Es gilt 4"$\xi - \eta \in \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`1.2.Fall` $\neg(E \subseteq \mathbb{Z})$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(E \subseteq \mathbb{Z})$"
folgt via **0-3**: $E \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E \not\subseteq \mathbb{Z}$.

□

Einiges über $x = \{p\}$.
Einiges über $x \neq \{p\}$.

Ersterstellung: 10/05/12 **Letzte Änderung: 06/09/12**

174-1. Hier wird Notwendiges und Hinreichendes dafür angegeben, dass eine Klasse gleich $\{p\}$ ist:

174-1(Satz)

a) *Aus* "$x = \{p\}$" *folgt* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$".

b) *Aus* "$x = 0$" *und* "p *Unmenge*" *folgt* "$x = \{p\}$".

c) "$0 \neq x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$"
genau dann, wenn "$x = \{p\}$" *und* "p *Menge*".

d) "$p \in x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$"
genau dann, wenn "$x = \{p\}$" *und* "p *Menga*".

e) "$0 \neq x \subseteq \{p\}$" *genau dann, wenn* "$x = \{p\}$" *und* "p *Menge*".

f) "$0 \neq \{p\} \subseteq x$" *genau dann, wenn* "$p \in x$".

Beweis **174-1** a) VS gleich $x = \{p\}$.

Thema1 $\alpha \in x$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in x$" und
aus VS gleich "$x = \{p\}$"
folgt: $\alpha \in \{p\}$.

3: Aus 2 "$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$.

b) VS gleich $(x = 0) \wedge (p \text{ Unmenge})$.

1: Aus VS gleich "$\dots p$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

2: Aus VS gleich "$x = 0 \dots$" und
aus 1 "$\{p\} = 0$"
folgt: $x = \{p\}$.

Beweis **174-1** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \{p\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \{p\}$”
folgt via **1-6**: $\beta = p$.

`3:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \ldots$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$”
folgt: $\Omega = p$.

`5:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in x$” und
aus `4`“$\Omega = p$”
folgt: $p \in x$.

`6:` Aus `2`“$\beta = p$” und
aus `5`“$p \in x$”
folgt: $\beta \in x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \{p\}) \Rightarrow (\beta \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: | `A1` | “$\{p\} \subseteq x$” |

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$”
folgt via **1-10**: $x \subseteq \{p\}$.

`2:` Aus `1.2`“$x \subseteq \{p\}$” und
aus `A1` gleich “$\{p\} \subseteq x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = \{p\}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \ldots$” und
aus `2`“$x = \{p\}$”
folgt: $0 \neq \{p\}$.

`4:` Aus `3`“$0 \neq \{p\}$”
folgt via **1-3**: p Menge.

`5:` Aus `2`“$x = \{p\}$” und
aus `4`“p Menge”
folgt: $(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

<u>Beweis **174-1**</u> `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x = \{p\} \ldots$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \{p\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \subseteq \{p\}$"
folgt via **1-10**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$x = \{p\} \ldots$"
folgt: $0 \neq x$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.1`
folgt: $(0 \neq x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p))$.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$x = \{p\} \ldots$"
folgt: $p \in x$.

`3:` Aus `2`"$p \in x$" und
aus `1.1`"$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$"
folgt: $(p \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p))$.

Beweis **174-1** `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \neq x \subseteq \{p\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq \{p\}$"
folgt via **1-10**: $(x = 0) \vee (x = \{p\})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `1`"$(x = 0) \vee (x = \{p\})$"
folgt: $x = \{p\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `2`"$x = \{p\}$"
folgt: $0 \neq \{p\}$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq \{p\}$"
folgt via **1-3**: p Menge.

`5:` Aus `2`"$x = \{p\}$" und
aus `4`"p Menge"
folgt: $(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x = \{p\} \ldots$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \{p\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$x = \{p\} \ldots$"
folgt: $0 \neq x$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x$" und
aus `1.1`"$x \subseteq \{p\}$"
folgt: $0 \neq x \subseteq \{p\}$.

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \neq \{p\} \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{p\} \ldots$"
folgt via **1-3**: p Menge.

`2:` Aus `1`"p Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $p \in x$.

<u>Beweis **174-1**</u> `f)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $p \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

`2:` Aus `1.1`"p Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `1.2`"$\{p\} \subseteq x$"
folgt: $0 \neq \{p\} \subseteq x$.

□

174-2. Nun wird ein Kriterium dafür angegeben, dass ein Klasse ungleich $\{p\}$ ist:

174-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq \{p\}$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (p$ *Menge*$)$" *oder* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$".

Beweis **174-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \neq \{p\}$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq x) \vee (x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq x$.

`2:` Es gilt: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$ $\vee$ $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq x$" und
aus `2.1.Fall`"$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha = p)$"
folgt via **174-1**: $x = \{p\}$.

`4:` Es gilt `3`"$x = \{p\}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \neq \{p\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

`2.2.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \neq \{p\}$" und
aus `1.2.Fall`"$x = 0$"
folgt: $0 \neq \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \{p\}$"
folgt via **1-3**: p Menge.

`4:` Aus `1.2.Fall`"$x = 0$" und
aus `3`"p Menge"
folgt: $(x = 0) \wedge (p \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (p \text{ Menge})) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)).$$

Beweis **174-2** `ii) ⇐ i)`

`VS` gleich $((x=0)\wedge(p \text{ Menge}))\vee(\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\Omega\neq p))$.

1: Nach `VS` gilt: $((x=0)\wedge(p \text{ Menge}))\vee(\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\Omega\neq p))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x=0)\wedge(p \text{ Menge})$.

2: Aus `1.1.Fall` "$\dots p$ Menge"
folgt via **1-3**: $0\neq\{p\}$.

3: Aus `1.1.Fall` "$x=0\dots$" und
aus 2 "$0\neq\{p\}$"
folgt: $x\neq\{p\}$.

`1.2.Fall` $\exists\Omega:(\Omega\in x)\wedge(\Omega\neq p)$.

2: Es gilt: $(x\neq\{p\})\vee(x=\{p\})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x\neq\{p\}$.

`2.2.Fall` $x=\{p\}$.

3: Aus `1.2.Fall` "$\dots\Omega\in x\dots$" und
aus `2.2.Fall` "$x=\{p\}$"
folgt: $\Omega\in\{p\}$.

4: Aus 3 "$\Omega\in\{p\}$"
folgt via **1-6**: $\Omega=p$.

5: Es gilt 4 "$\Omega=p$".
Es gilt `1.2.Fall` "$\dots\Omega\neq p$".
Ex falso quodlibet folgt: $x\neq\{p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x\neq\{p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x\neq\{p\}$.

□

174-3. Aus **174-2** ergibt sich ein einfaches Kriterium für $0 \neq x \neq \{p\}$:

174-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \neq \{p\}$.

`ii)` $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

Beweis **174-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \neq \{p\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \neq \{p\}$"
folgt via **174-2**: $((x = 0) \wedge (p \text{ Menge})) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p))$.

`2:` Aus `1`"$((x = 0) \wedge (p \text{ Menge})) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p))$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$"
folgt via **174-2**: $x \neq \{p\}$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \neq x$" und
aus `1.2`"$x \neq \{p\}$"
folgt: $0 \neq x \neq \{p\}$.

□

174-4. Gelegentlich ist es hilfreich, eine Quantoren-freie Version von **174-1**`a)` und von **174-3**`ii)`$\Rightarrow$`i)` zur Verfügung zu haben:

174-4(Satz)

`a)` *Aus* "$x = \{p\}$" *und* "$q \in x$" *folgt* "$q = p$".

`b)` *Aus* "$q \in x$" *und* "$q \neq p$" *folgt* "$0 \neq x \neq \{p\}$".

Beweis **174-4** `a)` `VS` gleich $(x = \{p\}) \wedge (q \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in x$" und
aus `VS` gleich "$x = \{p\} \ldots$"
folgt: $q \in \{p\}$.

`2:` Aus `1`"$q \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $q = p$.

`b)` `VS` gleich $(q \in x) \wedge (q \neq p)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$q \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

`1.2:` Es gilt: $(x = \{p\}) \vee (x \neq \{p\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $x = \{p\}$.

`2:` Aus `1.2.1.Fall`"$x = \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$q \in x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $q = p$.

`3:` Es gilt `2`"$q = p$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots q \neq p$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq \{p\}$.

`1.2.2.Fall` $x \neq \{p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \neq \{p\}$"

`2:` Aus `1.1`"$0 \neq x$" und
aus `A1` gleich "$x \neq \{p\}$"
folgt: $0 \neq x \neq \{p\}$.

$\square$

Einiges über E mit reellem $\leq$ _Infimum.
Einiges über E mit reellem $\leq$ _Supremum.

Ersterstellung: 10/05/12 **Letzte Änderung: 14/06/12**

175-1. Die vorliegenden Aussagen verkürzen später Einiges:

175-1(Satz)

a) *Aus* "$x \leq y$" *und* "$y \neq +\infty$" *folgt* "$x < +\infty$" *und* "$y < +\infty$".

b) *Aus* "$x \leq y$" *und* "$x \neq -\infty$" *folgt* "$-\infty < x$" *und* "$-\infty < y$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **175-1** `a)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (y \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq +\infty$.

`3:` Aus `2`"$y \leq +\infty$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq +\infty$"
folgt via **41-3**: $y < +\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$" und
aus `3`"$y < +\infty$"
folgt via **107-8**: $x < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$x < +\infty$" und
aus `3`"$y < +\infty$"
folgt: $(x < +\infty) \wedge (y < +\infty)$.

`b)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \neq -\infty)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \neq -\infty$"
folgt: $-\infty \neq x$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq x$.

`3:` Aus `2`"$-\infty \leq x$" und
aus `1.2`"$-\infty \neq x$"
folgt via **41-3**: $-\infty < x$.

`4:` Aus `3`"$-\infty < x$" und
aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-8**: $-\infty < y$.

`5:` Aus `3`"$-\infty < x$" und
aus `4`"$-\infty < y$"
folgt: $(-\infty < x) \wedge (-\infty < y)$.

$\square$

175-2. Hier wird untersucht, welche notwendigen und hinreichende Bedingungen Klassen E, die ein reelles $\leq$ _Infimum haben, begleiten:

175-2(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq E \neq \{+\infty\}$"
und "u *untere* $\leq$ _*Schranke von* E"
und "$u \neq -\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ _*Infimum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$".

b) *Aus* "*inf ist* $\leq$ _*Infimum von* E" *und* "$inf \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq E \neq \{+\infty\}$" *und* "$E \subseteq \mathbb{S}$"
und "$\exists \Psi : (\Psi$ *untere* $\leq$ _*Schranke von* $E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$".

$\leq$-Notation.

Beweis **175-2** a)
VS gleich $(0 \neq E \neq \{+\infty\}) \wedge (u$ untere $\leq$ _Schranke von $E) \wedge (u \neq -\infty)$.

1.1: Aus VS gleich "$0 \neq E \neq \{+\infty\} \ldots$"
folgt via **174-3**: $\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge (\Psi \neq +\infty)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots u$ untere $\leq$ _Schranke von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $(u \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots u$ untere $\leq$ _Schranke von $E \ldots$" und
aus 1.1"$\ldots \Psi \in E \ldots$"
folgt via **35-1(Def)**: $u \leq \Psi$.

2.2: Aus 1.2"$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von E.

...

Beweis **175-2** `a)`

`VS` gleich $(0 \neq E \neq \{+\infty\}) \wedge (u \text{ untere } \leq \text{-Schranke von } E) \wedge (u \neq -\infty)$.

...

`3.1:` Aus `2.1`"$u \leq \Psi$" und
aus `1.1`"$\ldots \Psi \neq +\infty$"
folgt via **175-1**: $\Psi < +\infty$.

`3.2:` Aus `2.1`"$u \leq \Psi$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \neq -\infty$"
folgt via **175-1**: $-\infty < u$.

`3.3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Infimum von E" und
aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere $\leq$ -Schranke von $E \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: $u \leq \Omega$.

`3.4:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Infimum von E" und
aus `1.1`"$\ldots \Psi \in E \ldots$"
folgt via **36-3**: $\Omega \leq \Psi$.

`4.1:` Aus `3.2`"$-\infty < u$" und
aus `3.3`"$u \leq \Omega$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \Omega$.

`4.2:` Aus `3.4`"$\Omega \leq \Psi$" und
aus `3.1`"$\Psi < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\Omega < +\infty$.

`5:` Aus `4.1`"$-\infty < \Omega$" und
aus `4.2`"$\Omega < +\infty$"
folgt via **107-4**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `2.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Infimum von $E \ldots$" und
aus `5`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq \text{-Infimum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **175-2**</u> `b)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \le\text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = inf$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $E \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere $\le$ _Schranke von E.

`1.3:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $inf \neq +\infty$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = inf$" und
aus `1.2`"inf untere $\le$ _Schranke von E"
folgt: Ψ untere $\le$ _Schranke von E.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = inf$" und
aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$"
folgt: $\Psi \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `1.1`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.1`"Ψ untere $\le$ _Schranke von E" und
aus `2.2`"$\Psi \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$.

`3.2:` Es gilt: $(E = 0) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $E = 0$.

`4:` Aus **157-5**"$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von 0" und
aus `3.2.1.Fall`"$E = 0$"
folgt: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

`5:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $E \ldots$" und
aus `4`"$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E"
folgt via **171-1**: $inf = +\infty$.

`6:` Es gilt `5`"$inf = +\infty$".
Es gilt `1.4`"$inf \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E$.

`3.2.2.Fall` $0 \neq E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$0 \neq E$"

...

Beweis **175-2** `b)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

...

`3.3:` Es gilt: $(E = \{+\infty\}) \vee (E \neq \{+\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`3.3.1.Fall` $E = \{+\infty\}$.

`4:` Aus **95-11**“$+\infty \in \mathbb{S}$”
folgt via **157-6**: $+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Minimum von } \{+\infty\}$.

`5:` Aus `4`“$+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Minimum von } \{+\infty\}$”
folgt via **38-6**: $+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{+\infty\}$.

`6:` Aus `5`“$+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{+\infty\}$” und
aus `3.3.1.Fall`“$E = \{+\infty\}$”
folgt: $+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E$.

`7:` Aus `VS` gleich “$inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E \ldots$” und
aus `6`“$+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E$”
folgt via **171-1**: $inf = +\infty$.

`8:` Es gilt `7`“$inf = +\infty$”.
Es gilt `1.4`“$inf \neq +\infty$”.
Ex falso quodlibet folgt: $E \neq \{+\infty\}$.

`3.3.2.Fall` $E \neq \{+\infty\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A2` “$E \neq \{+\infty\}$”

`3.4:` Aus `A1` gleich “$0 \neq E$” und
aus `A2` gleich “$E \neq \{+\infty\}$”
folgt: $0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

`4:` Aus `3.4`“$0 \neq E \neq \{+\infty\}$”,
aus `1.3`“$E \subseteq \mathbb{S}$” und
aus `3.1`“$\exists \Psi : (\Psi \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$”
folgt: $(0 \neq E \neq \{+\infty\}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$
$\wedge(\exists \Psi : (\Psi \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R}))$.

□

175-3. Hier wird untersucht, welche notwendigen und hinreichende Bedingungen Klassen E, die ein reelles $\leq$ _Supremum haben, begleiten:

175-3(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq E \neq \{-\infty\}$"
und "o *obere* $\leq$ _*Schranke von* E"
und "$o \neq +\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ _*Supremum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$".

b) *Aus* "*sup ist* $\leq$ _*Supremum von* E" *und* "$sup \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq E \neq \{-\infty\}$" *und* "$E \subseteq \mathbb{S}$"
und "$\exists \Psi : (\Psi$ *obere* $\leq$ _*Schranke von* $E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **175-3** a)
VS gleich $(0 \neq E \neq \{-\infty\}) \wedge (o$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \wedge (o \neq +\infty)$.

1.1: Aus VS gleich "$0 \neq E \neq \{-\infty\} \ldots$"
folgt via **174-3**: $\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge (\Psi \neq -\infty)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots o$ obere $\leq$ _Schranke von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $(o \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots o$ obere $\leq$ _Schranke von $E \ldots$" und
aus 1.1"$\ldots \Psi \in E \ldots$"
folgt via **35-1(Def)**: $\Psi \leq o$.

2.2: Aus 1.2"$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von E.

...

Beweis **175-3** `a)`
`VS` gleich $(0 \neq E \neq \{-\infty\}) \wedge (o \text{ obere } \leq \text{-Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

...

`3.1:` Aus `2.1`"$\Psi \leq o$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o \neq +\infty$"
folgt via **175-1**: $o < +\infty$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\Psi \leq o$" und
aus `1.1`"$\ldots \Psi \neq -\infty$"
folgt via **175-1**: $-\infty < \Psi$.

`3.3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Supremum von E" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere $\leq$-Schranke von $E \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: $\Omega \leq o$.

`3.4:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Supremum von E" und
aus `1.1`"$\ldots \Psi \in E \ldots$"
folgt via **36-4**: $\Psi \leq \Omega$.

`4.1:` Aus `3.2`"$-\infty < \Psi$" und
aus `3.4`"$\Psi \leq \Omega$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \Omega$.

`4.2:` Aus `3.3`"$\Omega \leq o$" und
aus `3.1`"$o < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\Omega < +\infty$.

`5:` Aus `4.1`"$-\infty < \Omega$" und
aus `4.2`"$\Omega < +\infty$"
folgt via **107-4**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `2.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Supremum von $E \ldots$" und
aus `5`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq \text{-Supremum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **175-3**</u> `b)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = sup$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere $\leq$ _Schranke von E.

`1.3:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $sup \neq -\infty$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = sup$" und
aus `1.2`"sup obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt: Ψ obere $\leq$ _Schranke von E.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = sup$" und
aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$"
folgt: $\Psi \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `1.1`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.1`"Ψ obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus `2.2`"$\Psi \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$.

`3.2:` Es gilt: $(E = 0) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $E = 0$.

`4:` Aus **157-5**"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0" und
aus `3.2.1.Fall`"$E = 0$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`5:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `4`"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **171-1**: $sup = -\infty$.

`6:` Es gilt `5`"$sup = -\infty$".
Es gilt `1.4`"$sup \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E$.

`3.2.2.Fall` $0 \neq E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$0 \neq E$"

...

Beweis **175-3** `b) VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

...

`3.3:` Es gilt: $(E = \{-\infty\}) \vee (E \neq \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`3.3.1.Fall` $E = \{-\infty\}$.

`4:` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } \{-\infty\}$.

`5:` Aus `4` "$-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } \{-\infty\}$"
folgt via **38-7**: $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{-\infty\}$.

`6:` Aus `5` "$-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{-\infty\}$" und
aus `3.3.1.Fall` "$E = \{-\infty\}$"
folgt: $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E$.

`7:` Aus `VS` gleich "$sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E \ldots$" und
aus `6` "$-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E$"
folgt via **171-1**: $sup = -\infty$.

`8:` Es gilt `7` "$sup = -\infty$".
Es gilt `1.4` "$sup \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \neq \{-\infty\}$.

`3.3.2.Fall` $E \neq \{-\infty\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A2` "$E \neq \{-\infty\}$"

`3.4:` Aus `A1` gleich "$0 \neq E$" und
aus `A2` gleich "$E \neq \{-\infty\}$"
folgt: $0 \neq E \neq \{-\infty\}$.

`4:` Aus `3.4` "$0 \neq E \neq \{-\infty\}$",
aus `1.3` "$E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `3.1` "$\exists \Psi : (\Psi \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$"
folgt: $(0 \neq E \neq \{-\infty\}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$
$\wedge (\exists \Psi : (\Psi \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R}))$.

□

175-4. Aus **175-2,3** ergibt sich leicht Hinreichendes dafür, dass eine *reelle* Klasse E ein *reelles* $\leq$ _Infimum oder ein *reelles* $\leq$ _Supremum hat:

175-4(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq E \subseteq \mathbb{R}$"
und "u *untere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$u \neq -\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$".

b) *Aus* "$0 \neq E \subseteq \mathbb{R}$"
und "o *obere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$o \neq +\infty$"
folgt "$\exists \Psi : (\Psi$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$".

Beweis **175-4** a)

VS gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{R}) \wedge (u \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (u \neq -\infty)$.

1.1: Es gilt: $(E = \{+\infty\}) \vee (E \neq \{+\infty\})$.

Fallunterscheidung

1.1.1.Fall $E = \{+\infty\}$.

2: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{R} \ldots$" und aus 1.1.1.Fall"$E = \{+\infty\}$" folgt: $\{+\infty\} \subseteq \mathbb{R}$.

3: Aus **95-3**"$+\infty$ Menge" folgt via **1-3**: $+\infty \in \{+\infty\}$.

4: Aus 3"$+\infty \in \{+\infty\}$" und aus 2"$\{+\infty\} \subseteq \mathbb{R}$" folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{R}$.

5: Es gilt 4"$+\infty \in \mathbb{R}$". Via **AAI** gilt "$+\infty \notin \mathbb{R}$". Ex falso quodlibet folgt: $E \neq \{+\infty\}$.

1.1.2.Fall $E \neq \{+\infty\}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$E \neq \{+\infty\}$"

1.2: Aus VS gleich "$0 \neq E \ldots$" und aus A1 gleich "$E \neq \{+\infty\}$" folgt: $0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

2: Aus 1.2"$0 \neq E \neq \{+\infty\}$", aus VS gleich "$\ldots u \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E \ldots$" und aus VS gleich "$\ldots u \neq -\infty$" folgt via **175-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **175-4**</u> `b)`

`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{R}) \wedge (o \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

`1.1:` Es gilt: $(E = \{-\infty\}) \vee (E \neq \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $E = \{-\infty\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{R} \ldots$" und aus `1.1.1.Fall` "$E = \{-\infty\}$" folgt: $\{-\infty\} \subseteq \mathbb{R}$.

`3:` Aus **95-3** "$-\infty$ Menge" folgt via **1-3**: $-\infty \in \{-\infty\}$.

`4:` Aus `3` "$-\infty \in \{-\infty\}$" und aus `2` "$\{-\infty\} \subseteq \mathbb{R}$" folgt via **0-4**: $-\infty \in \mathbb{R}$.

`5:` Es gilt `4` "$-\infty \in \mathbb{R}$". Via **AAI** gilt "$-\infty \notin \mathbb{R}$". Ex falso quodlibet folgt: $E \neq \{-\infty\}$.

`1.1.2.Fall` $E \neq \{-\infty\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$E \neq \{-\infty\}$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und aus `A1` gleich "$E \neq \{-\infty\}$" folgt: $0 \neq E \neq \{-\infty\}$.

`2:` Aus `1.2` "$0 \neq E \neq \{-\infty\}$", aus `VS` gleich "$\ldots o \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots o \neq +\infty$" folgt via **175-3**: $\exists \Psi : (\Psi \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (\Psi \in \mathbb{R})$.

□

175-5. Nun werden $\leq$ _Infima *ungleich* spezieller Werte thematisiert:

175-5(Satz)

a) *Aus* "inf *ist* $\leq$ *_Infimum von* E" *und* "$inf \neq +\infty$" *folgt* "$0 \neq E \neq \{+\infty\}$".

b) *Aus* "inf *ist* $\leq$ *_Infimum von* E" *und* "$inf \neq -\infty$" *folgt* "$\exists\Omega : (\Omega$ *untere* $\leq$ *_Schranke von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$".

c) *Aus* "inf *ist* $\leq$ *_Infimum von* E" *und* "$inf \in \mathbb{R}$" *folgt* "$0 \neq E \cap \mathbb{R}$" *und* "$E \subseteq]-\infty|+\infty]$".

d) *Aus* "sup *ist* $\leq$ *_Supremum von* E" *und* "$sup \neq +\infty$" *folgt* "$\exists\Omega : (\Omega$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$".

e) *Aus* "sup *ist* $\leq$ *_Supremum von* E" *und* "$sup \neq -\infty$" *folgt* "$0 \neq E \neq \{-\infty\}$".

f) *Aus* "sup *ist* $\leq$ *_Supremum von* E" *und* "$sup \in \mathbb{R}$" *folgt* "$0 \neq E \cap \mathbb{R}$" *und* "$E \subseteq [-\infty|+\infty[$".

<u>Beweis **175-5**</u> `a)` `VS` gleich $(inf \text{ ist} \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \neq +\infty)$.

`1:` Es gilt: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\}) \vee 0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$”
folgt via **157-9**: $+\infty \text{ ist} \leq \text{\_Infimum von } E$.

`3:` Aus `VS` gleich “inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$” und
aus 2“$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E”
folgt via **171-1**: $inf = +\infty$.

`4:` Es gilt 3“$inf = +\infty$” .
Es gilt `VS` gleich “$\ldots inf \neq +\infty$” .
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

`1.2.Fall` $0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

<u>Beweis **175-5**</u> `b)` `VS` gleich $(\mathit{inf} \text{ ist } \le\text{\_Infimum von } E) \wedge (\mathit{inf} \neq -\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $E\dots$"
folgt via **157-3**: $(\mathit{inf} \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`"$\mathit{inf} \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(\mathit{inf} \in \mathbb{R}) \vee (\mathit{inf} = +\infty) \vee (\mathit{inf} = -\infty)$.

`3:` Aus `2`"$(\mathit{inf} \in \mathbb{R}) \vee (\mathit{inf} = +\infty) \vee (\mathit{inf} = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\dots \mathit{inf} \neq -\infty$"
folgt: $(\mathit{inf} \in \mathbb{R}) \vee (\mathit{inf} = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\mathit{inf} \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \mathit{inf}$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $E\dots$"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere $\le$ _Schranke von E.

`5.1:` Aus `4.1`"$\dots \Omega = \mathit{inf}$" und
aus `4.2`"inf untere $\le$ _Schranke von E"
folgt: Ω untere $\le$ _Schranke von E.

`5.2:` Aus `4.1`"$\dots \Omega = \mathit{inf}$" und
aus `3.1.Fall`"$\mathit{inf} \in \mathbb{R}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `4.1`"$\exists \Omega \dots$",
aus `5.1`"Ω untere $\le$ _Schranke von E" und
aus `5.2`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis **175-5**</u> `b) VS` gleich $(inf \text{ ist } \le\text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \neq -\infty)$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.2.Fall` $inf = +\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich “inf ist $\le$_Infimum von $E\ldots$” und
aus `3.2.Fall`“$inf = +\infty$”
folgt: $+\infty$ ist $\le$_Infimum von E.

`5.1:` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $(\le \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\le \text{ transitiv in } \mathbb{S})$.

`5.2:` Aus `4`“$+\infty$ ist $\le$_Infimum von E”
folgt via **36-1(Def)**: $+\infty$ untere $\le$_Schranke von E.

`6:` Aus `5.1`“$(\le \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\le \text{ transitiv in } \mathbb{S})$”,
aus `5.2`“$+\infty$ untere $\le$_Schranke von E” und
aus **165-3**“$0 \le +\infty$”
folgt via **37-27**: 0 untere $\le$_Schranke von E.

`7:` Aus `6`“0 untere $\le$_Schranke von E” und
aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$”
folgt: $(0 \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (0 \in \mathbb{R})$.

`8:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`9:` Aus `8`“$\ldots \Omega = 0$” und
aus `7`“$(0 \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (0 \in \mathbb{R})$”
folgt: $(\Omega \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

`10:` Aus `8`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `9`“$(\Omega \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } \le\text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **175-5**</u> `c)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(inf \neq +\infty) \wedge (inf \neq -\infty)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" und
aus `1`"$inf \neq +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \neq E \neq \{+\infty\}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" und
aus `1`"$inf \neq -\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

`Thema3.1` $\alpha \in E$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < inf$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" und
aus `Thema3.1`"$\alpha \in E$"
folgt via **36-3**: $inf \leq \alpha$.

`5:` Aus `4.1`"$-\infty < inf$" und
aus `4.2`"$inf \leq \alpha$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \alpha$.

`6:` Aus `5`"$-\infty < \alpha$"
folgt via **142-3**: $\alpha \in]-\infty|+\infty]$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in]-\infty|+\infty])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$E \subseteq]-\infty|+\infty]$"

...

Beweis **175-5** `c)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

...

`3.2:` Es gilt: $(E \cap \mathbb{R} = 0) \vee (0 \neq E \cap \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $E \cap \mathbb{R} = 0$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < inf$.

`Thema5.1` $\alpha \in E$.

`6.1:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in E$" und
aus `4.1` "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`6.2:` Aus `3.1.1.Fall` "$E \cap \mathbb{R} = 0$" und
aus `Thema5` "$\alpha \in E$"
folgt via **161-1**: $\alpha \notin \mathbb{R}$.

`6.3:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" und
aus `Thema5.1` "$\alpha \in E$"
folgt via **36-3**: $inf \leq \alpha$.

`7.1:` Aus `6.1` "$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(\alpha \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$.

`7.2:` Aus `4.2` "$-\infty < inf$" und
aus `6.3` "$inf \leq \alpha$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \alpha$.

`8.1:` Aus `7.1` "$(\alpha \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$" und
aus `6.2` "$\alpha \notin \mathbb{R}$"
folgt: $(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$.

`8.2:` Aus `7.2` "$-\infty < \alpha$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq \alpha$.

`9:` Aus `8.1` "$(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$" und
aus `8.2` "$-\infty \neq \alpha$"
folgt: $\alpha = +\infty$.

Ergo `Thema5.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$.

Konsequenz via **1-10**: `A2` | "$(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$"

...

...

<u>Beweis **175-5**</u> `c) VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \_\text{Infimum von } E) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

...

`3.2:` Es gilt: $(E \cap \mathbb{R} = 0) \vee (0 \neq E \cap \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $E \cap \mathbb{R} = 0$.

...

`5.2:` Es gilt `A2` gleich "$(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$".
Es gilt `2.1`"$0 \neq E \neq \{+\infty\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E \cap \mathbb{R}$.

`3.2.2.Fall` $0 \neq E \cap \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A3` | "$0 \neq E \cap \mathbb{R}$"

`3.3:` Aus `A3` gleich "$0 \neq E \cap \mathbb{R}$" und
aus `A1` gleich "$E \subseteq]-\infty|+\infty]$"
folgt: $(0 \neq E \cap \mathbb{R}) \wedge (E \subseteq]-\infty|+\infty])$.

<u>Beweis **175-5**</u> `d)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E\ldots$"
folgt via **157-3**: $(sup \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`"$sup \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(sup \in \mathbb{R}) \vee (sup = -\infty) \vee (sup = +\infty)$.

`3:` Aus `2`"$(sup \in \mathbb{R}) \vee (sup = -\infty) \vee (sup = +\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots sup \neq +\infty$"
folgt: $(sup \in \mathbb{R}) \vee (sup = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $sup \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = sup$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E\ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere $\leq$ _Schranke von E.

`5.1:` Aus `4.1`"$\ldots \Omega = sup$" und
aus `4.2`"sup obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt: Ω obere $\leq$ _Schranke von E.

`5.2:` Aus `4.1`"$\ldots \Omega = sup$" und
aus `3.1.Fall`"$sup \in \mathbb{R}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `4.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `5.1`"Ω obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus `5.2`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

...

Beweis **175-5** `d) VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \_\text{Supremum von } E) \wedge (sup \neq +\infty)$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.2.Fall` $sup = -\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von E..." und
aus `3.2.Fall` "$sup = -\infty$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`5.1:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ transitiv in } \mathbb{S})$.

`5.2:` Aus `4` "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: $-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E.

`6:` Aus `5.1` "$(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ transitiv in } \mathbb{S})$",
aus `5.2` "$-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus **165-3** "$-\infty \leq 0$"
folgt via **37-27**: 0 obere $\leq$ _Schranke von E.

`7:` Aus `6` "0 obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus **AAI** "$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $(0 \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (0 \in \mathbb{R})$.

`8:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`9:` Aus `8` "$\ldots \Omega = 0$" und
aus `7` "$(0 \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (0 \in \mathbb{R})$"
folgt: $(\Omega \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

`10:` Aus `8` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `9` "$(\Omega \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **175-5**</u> `e)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \neq -\infty)$.

`1:` Es gilt: $$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\}) \vee 0 \neq E \neq \{-\infty\}.$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$"
folgt via **157-9**: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`3:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `2` "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **171-1**: $sup = -\infty$.

`4:` Es gilt `3` "$sup = -\infty$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots sup \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E \neq \{-\infty\}$.

`1.2.Fall` $0 \neq E \neq \{-\infty\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq E \neq \{-\infty\}$.

Beweis **175-5** `f)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \_\text{Supremum von } E) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(sup \neq +\infty) \wedge (sup \neq -\infty)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `1` "$sup \neq +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $0 \neq E \neq \{-\infty\}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `1` "$sup \neq -\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } \leq \_\text{Schranke von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

`Thema3.1` $\alpha \in E$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $sup < +\infty$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `Thema3.1` "$\alpha \in E$"
folgt via **36-4**: $\alpha \leq sup$.

`5:` Aus `4.2` "$\alpha \leq sup$" und
aus `4.1` "$sup < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\alpha < +\infty$.

`6:` Aus `5` "$\alpha < +\infty$"
folgt via **142-3**: $\alpha \in [-\infty| + \infty[$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in [-\infty| + \infty[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$E \subseteq [-\infty| + \infty[$"

...

<u>Beweis **175-5**</u> `f) VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

...

`3.2:` Es gilt: $(E \cap \mathbb{R} = 0) \vee (0 \neq E \cap \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $E \cap \mathbb{R} = 0$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $sup < +\infty$.

`Thema5.1` $\alpha \in E$.

`6.1:` Aus `Thema5.1`"$\alpha \in E$" und
aus `4.1`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`6.2:` Aus `3.1.1.Fall`"$E \cap \mathbb{R} = 0$" und
aus `Thema5`"$\alpha \in E$"
folgt via **161-1**: $\alpha \notin \mathbb{R}$.

`6.3:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `Thema5.1`"$\alpha \in E$"
folgt via **36-4**: $\alpha \leq sup$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(\alpha \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$.

`7.2:` Aus `6.3`"$\alpha \leq sup$" und
aus `4.2`"$sup < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\alpha < +\infty$.

`8.1:` Aus `7.1`"$(\alpha \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$" und
aus `6.2`"$\alpha \notin \mathbb{R}$"
folgt: $(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$.

`8.2:` Aus `7.2`"$\alpha < +\infty$"
folgt via **41-3**: $\alpha \neq +\infty$.

`9:` Aus `8.1`"$(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$" und
aus `8.2`"$\alpha \neq +\infty$"
folgt: $\alpha = -\infty$.

Ergo `Thema5.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$.

Konsequenz via **1-10**: `A2` | "$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$"

...

...

Beweis **175-5** `f)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

...

`3.2:` Es gilt: $(E \cap \mathbb{R} = 0) \vee (0 \neq E \cap \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $E \cap \mathbb{R} = 0$.

...

`5.2:` Es gilt `A2` gleich "$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$".
Es gilt `2.1`"$0 \neq E \neq \{-\infty\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E \cap \mathbb{R}$.

`3.2.2.Fall` $0 \neq E \cap \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A3` "$0 \neq E \cap \mathbb{R}$"

`3.3:` Aus `A3` gleich "$0 \neq E \cap \mathbb{R}$" und
aus `A1` gleich "$E \subseteq [-\infty|+\infty[$"
folgt: $(0 \neq E \cap \mathbb{R}) \wedge (E \subseteq [-\infty|+\infty[)$.

□

0 ist $\leq$ -Minimum von $\mathbb{N}$.
$+\infty$ ist $\leq$ -Supremum von $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ hat kein $\leq$ -Maximum.
$-\infty$ ist $\leq$ -Infimum von $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ -Minimum.
$+\infty$ ist $\leq$ -Supremum von $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ -Maximum.

Ersterstellung: 11/05/12 **Letzte Änderung: 12/05/12**

176-1. Nun wird $\mathbb{N}$ auf $\leq$ _Schranken untersucht. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - e) - d) - f)`:

176-1(Satz)

a) *0 untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$.*

b) *0 ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{N}$.*

c) *0 ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{N}$.*

d) *$+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$.*

e) *$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$.*

f) *$\mathbb{N}$ hat kein $\leq$ _Maximum.*

Beweis **176-1**

$\leq$-Notation.

---

abc)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{N}$.

Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq \alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (0 \leq \alpha)$"

`1.a)`: Aus **95-11** "$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (0 \leq \alpha)$"
folgt via **157-7**: 0 untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$.

`2.c)`: Aus **159-10** "$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `1.a)` "0 untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$"
folgt via **38-6**: 0 ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{N}$.

`3.b)`: Aus `2.c)` "0 ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{N}$"
folgt via **38-6**: 0 ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> **176-1** `e)`

`1:` Aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$" und
aus **159-10**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt via **36-4**: $0 \leq \Omega$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$"
folgt via **157-3**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1`"$0 \leq \Omega$"
folgt via **107-17**: $\Omega \neq -\infty$.

`4.1:` Aus `2.2`"$\Omega \in \mathbb{S}$" und
aus `3`"$\Omega \neq -\infty$"
folgt via **95-19**: $(\Omega \in \mathbb{R}) \vee (\Omega = +\infty)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **176-1** `e)`

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $\Omega \in \mathbb{R}$.

`5.1:` Es gilt: $(\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\Omega \notin \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $\Omega \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5.1.1.Fall`"$\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`7.1:` Aus `1`"$\dots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$" und
aus `6`"$1 + \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **36-4**: $1 + \Omega \leq \Omega$.

`7.2:` Aus `4.1.1.Fall`"$\Omega \in \mathbb{R}$" und
aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **165-2**: $\Omega < \Omega + 1$.

`8.1:` Aus `7.1`"$1 + \Omega \leq \Omega$"
folgt via **107-13**: $\neg(\Omega < 1 + \Omega)$.

`8.2:` Via **FSA** gilt: $\Omega + 1 = 1 + \Omega$.

`9:` Aus `7.2`"$\Omega < \Omega + 1$" und
aus `8.2`"$\Omega + 1 = 1 + \Omega$"
folgt: $\Omega < 1 + \Omega$.

`10:` Es gilt `9`"$\Omega < 1 + \Omega$".
Es gilt `8.1`"$\neg(\Omega < 1 + \Omega)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Omega \notin \mathbb{N}$.

`5.1.2.Fall` $\Omega \notin \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\Omega \notin \mathbb{N}$"

...

...

Beweis **176-1** `e)`

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $\Omega \in \mathbb{R}$.

...

`5.2:` Aus `1`"$\ldots\Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$",
aus `A1` gleich "$\Omega \notin \mathbb{N}$" und
aus `4.1.1.Fall`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`6:` Aus `5.2`"$\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-3**: $\neg(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$.

`7:` Es gilt `6`"$\neg(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Omega = +\infty$.

`4.1.2.Fall` $\Omega = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A2` | "$\Omega = +\infty$"

`4.2:` Aus `1`"$\ldots\Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\Omega = +\infty$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$.

`2:` Aus `1`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$"
folgt via **36-1(Def)**: $+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$.

Beweis **176-1** `f)`

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{N}$
$\vee$
$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{N}$”
folgt via **38-6**: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N})$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$” und
aus `3`“$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$”
folgt via **171-1**: $\Omega = +\infty$.

`5:` Aus `2`“$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `4`“$\Omega = +\infty$”
folgt: $+\infty \in \mathbb{N}$.

`6:` Es gilt `5`“$+\infty \in \mathbb{N}$”.
Via **166-1** gilt “$+\infty \notin \mathbb{N}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{N}$ hat kein $\leq$ _Maximum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{N})$.

Aus `1.2.Fall`“$\neg(\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{N})$”
folgt via **38-1(Def)**: $\mathbb{N}$ hat kein $\leq$ _Maximum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathbb{N}$ hat kein $\leq$ _Maximum.

$\square$

176-2. Hier wird unter anderem fest gestellt, dass $\mathbb{Z}$ weder $\leq$ _Minimum noch $\leq$ _Maximum hat. Jedoch hat $\mathbb{Z}$ mit $-\infty$ ein $\leq$ _Infimum und mit $+\infty$ ein $\leq$ _Supremum. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - e) - d) - f)`:

176-2(Satz)

`a)` $-\infty$ *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\mathbb{Z}$*.*

`b)` $-\infty$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\mathbb{Z}$*.*

`c)` $\mathbb{Z}$ *hat kein* $\leq$ *_Minimum.*

`d)` $+\infty$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\mathbb{Z}$*.*

`e)` $+\infty$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\mathbb{Z}$*.*

`f)` $\mathbb{Z}$ *hat kein* $\leq$ *_Maximum.*

Beweis **176-2** `ab)`

`1:` Aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **157-3**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

> `Thema3.1` $\alpha \in \mathbb{N}$.
>
> `4:` Aus `Thema3.1`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
> folgt via **164-6**: $-\alpha \in \mathbb{Z}$.
>
> `5:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$" und
> aus `4`"$-\alpha \in \mathbb{Z}$"
> folgt via **36-3**: $\Omega \leq -\alpha$.
>
> `6:` Aus `5`"$\Omega \leq -\alpha$"
> folgt via **165-1**: $\alpha \leq -\Omega$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \leq -\Omega)$"

`3.2:` Aus `2`"$\Omega \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $-\Omega \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2`"$-\Omega \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \leq -\Omega)$"
folgt via **157-7**: $-\Omega$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$.

`5:` Aus **176-1**"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$" und
aus `4`"$-\Omega$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$"
folgt via **157-9**: $-\Omega = +\infty$.

`6:` Aus `5`"$-\Omega = +\infty$"
folgt via **100-13**: $\Omega = -\infty$.

`7.b):` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$" und
aus `6`"$\Omega = -\infty$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$.

`8.a):` Aus `7.b)`"$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **36-1(Def)**: $-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$.

Beweis **176-2** `c)`

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{Z}$ $\vee$ $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"...Ω ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **38-6**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z})$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$.

`4:` Aus `2`"...Ω ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$" und
aus `3`"$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **171-1**: $\Omega = -\infty$.

`5:` Aus `2`"$\Omega \in \mathbb{Z}$..." und
aus `4`"$\Omega = -\infty$"
folgt: $-\infty \in \mathbb{Z}$.

`6:` Es gilt `5`"$-\infty \in \mathbb{Z}$".
Via **166-1** gilt "$-\infty \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Minimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{Z})$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{Z})$"
folgt via **38-1(Def)**: $\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Minimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Minimum.

Beweis **176-2** `de)`

`1.e)`: Aus **176-1**"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$",
aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-11**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$.

`2.d)`: Aus `1.f)`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **36-1(Def)**: $+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$.

`f)`

`1`: Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{Z}$
$\vee$
$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{Z}$.

`2`: Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **38-6**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z})$.

`3`: Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$.

`4`: Aus `2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$" und
aus `3`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$"
folgt via **171-1**: $\Omega = +\infty$.

`5`: Aus `2`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `4`"$\Omega = +\infty$"
folgt: $+\infty \in \mathbb{Z}$.

`6`: Es gilt `5`"$+\infty \in \mathbb{Z}$".
Via **166-1** gilt "$+\infty \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Maximum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{Z})$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{Z})$"
folgt via **38-1(Def)**: $\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Maximum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Maximum.

$\square$

MMS$\mathbb{N}$: MinimumMaximumSatz $\mathbb{N}$.
MMS$\mathbb{Z}$: MinimumMaximumSatz $\mathbb{Z}$.

Ersterstellung: 11/05/12 **Letzte Änderung: 12/05/12**

177-1. Hat eine nichtleere TeilKlasse E von $\mathbb{Z}$ eine untere $\leq$ _Schranke ungleich $-\infty$, dann hat E ein $\leq$ _Minimum. Analoges gilt für nichtleere TeilKlassen von $\mathbb{Z}$, die eine obere $\leq$ _Schranke ungleich $+\infty$ haben:

177-1(Satz) (MMS$\mathbb{Z}$: MinimumMaximumSatz $\mathbb{Z}$)

a) *Aus* "$0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}$"
und "u *untere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$u \neq -\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ *_Minimum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$".

b) *Aus* "$0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}$"
und "o *obere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$o \neq +\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ *_Maximum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$".

Beweis **177-1** a)
VS gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (u$ untere $\leq$ _Schranke von $E) \wedge (u \neq -\infty)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{Z} \ldots$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathbb{R}$.

2: Aus VS gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus 1"$E \subseteq \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq E \subseteq \mathbb{R}$.

3: Aus 2"$0 \neq E \subseteq \mathbb{R}$",
aus VS gleich "$\ldots u$ untere $\leq$ _Schranke von $E \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots u \neq -\infty$"
folgt via **175-4**: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

...

Beweis **177-1** a)

VS gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (u \text{ untere } \leq \text{-Schranke von } E) \wedge (u \neq -\infty)$.

...

4.1: Es gilt: $(\Omega \in E) \vee (\Omega \notin E)$.

Fallunterscheidung

4.1.1.Fall $\Omega \in E$.

4.1.2.Fall $\Omega \notin E$.

5: Aus 3"... Ω ist $\leq$ -Infimum von E ...",
aus 4.1.2.Fall"$\Omega \notin E$",
aus 3"... $\Omega \in \mathbb{R}$" und
aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **173-5**: $\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < 1)$.

6.1: Aus 5"... $\xi \in E$ ..." und
aus VS gleich "... $E \subseteq \mathbb{Z}$ ..."
folgt via **0-4**: $\xi \in \mathbb{Z}$.

6.2: Aus 5"... $\eta \in E$ ..." und
aus VS gleich "... $E \subseteq \mathbb{Z}$ ..."
folgt via **0-4**: $\eta \in \mathbb{Z}$.

6.3: Aus 5"$0 < \xi - \eta < 1$"
folgt via **142-3**: $\xi - \eta \in]0|1[$.

7.1: Aus 6.1"$\xi \in \mathbb{Z}$" und
aus 6.2"$\eta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $\xi - \eta \in \mathbb{Z}$.

7.2: Aus **168-2**"$\mathbb{Z} \cap]0|1[= 0$" und
aus 6.3"$\xi - \eta \in]0|1[$"
folgt via **161-1**: $\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$.

8: Es gilt 7.1"$\xi - \eta \in \mathbb{Z}$".
Es gilt 7.2"$\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Omega \in E$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$\Omega \in E$"

...

Beweis **177-1** `a)`
`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (u \text{ untere } \leq\text{-Schranke von } E) \wedge (u \neq -\infty)$.

...

`4.2:` Aus `A1` gleich "$\Omega \in E$" und
aus `3`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Infimum von $E \ldots$"
folgt via **38-6**: Ω ist $\leq$-Minimum von E.

`4.3:` Aus `A1` gleich "$\Omega \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{Z}$.

`5:` aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4.2`"Ω ist $\leq$-Minimum von E" und
aus `4.3`"$\Omega \in \mathbb{Z}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq\text{-Minimum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$.

`b)`
`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (o \text{ obere } \leq\text{-Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{Z} \ldots$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `1`"$E \subseteq \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq E \subseteq \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq E \subseteq \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere $\leq$-Schranke von $E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o \neq +\infty$"
folgt via **175-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq\text{-Supremum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis **177-1**</u> `b)`

`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (o \text{ obere } \leq \text{-Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

...

`4.1:` Es gilt: $(\Omega \in E) \vee (\Omega \notin E)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $\Omega \in E$.

`4.1.2.Fall` $\Omega \notin E$.

`5:` Aus `3`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Supremum von $E \ldots$",
aus `4.1.2.Fall`"$\Omega \notin E$",
aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{R}$" und
aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **173-5**: $\exists \xi, \eta : (\xi \in E) \wedge (\eta \in E) \wedge (0 < \xi - \eta < 1)$.

`6.1:` Aus `5`"$\ldots \xi \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\xi \in \mathbb{Z}$.

`6.2:` Aus `5`"$\ldots \eta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\eta \in \mathbb{Z}$.

`6.3:` Aus `5`"$0 < \xi - \eta < 1$"
folgt via **142-3**: $\xi - \eta \in]0|1[$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\xi \in \mathbb{Z}$" und
aus `6.2`"$\eta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $\xi - \eta \in \mathbb{Z}$.

`7.2:` Aus **168-2**"$\mathbb{Z} \cap]0|1[= 0$" und
aus `6.3`"$\xi - \eta \in]0|1[$"
folgt via **161-1**: $\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$.

`8:` Es gilt `7.1`"$\xi - \eta \in \mathbb{Z}$".
Es gilt `7.2`"$\xi - \eta \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Omega \in E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\Omega \in E$"

...

<u>Beweis **177-1**</u> `b)`

`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (o \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

...

`4.2:` Aus `A1` gleich "$\Omega \in E$" und
aus `3`"... Ω ist $\leq$ _Supremum von E ..."
folgt via **38-7**: Ω ist $\leq$ _Maximum von E.

`4.3:` Aus `A1` gleich "$\Omega \in E$" und
aus `VS` gleich "... $E \subseteq \mathbb{Z}$ ..."
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{Z}$.

`5:` aus `3`"$\exists \Omega$ ...",
aus `4.2`"Ω ist $\leq$ _Maximum von E" und
aus `4.3`"$\Omega \in \mathbb{Z}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$.

□

177-2. Jede nichtleere TeilKlasse von $\mathbb{N}$ hat ein $\leq$ _Minimum. Jede nichtleere TeilKlasse E von $\mathbb{N}$, die eine obere $\leq$ _Schranke ungleich $+\infty$ hat, hat ein $\leq$ _Minimum aus $\mathbb{N}$:

177-2(Satz) (MMS$\mathbb{N}$: MinimumMaximumSatz $\mathbb{N}$)

a) *Aus* "$0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ *_Minimum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$".

b) *Aus* "$0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$"
und "o *obere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$o \neq +\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ *_Maximum von* $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$".

Beweis **177-2** a) VS gleich $0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$.

1: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus VS gleich "$0 \neq E \ldots$",
aus 1"$E \subseteq \mathbb{Z}$",
aus **176-1**"0 untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{N}$" und
aus **95-7**"$0 \neq -\infty$"
folgt via **MMS$\mathbb{Z}$**: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $E \ldots$"
folgt via **38-6**: $\Omega \in E$.

4: Aus 3"$\Omega \in E$" und
aus VS gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{N}$.

5: Aus 2"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $E \ldots$" und
aus 4"$\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

<u>Beweis **177-2**</u> `b)`

`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{N}) \wedge (o \text{ obere } \leq\text{-Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$",
aus `1`"$E \subseteq \mathbb{Z}$",
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere $\leq$-Schranke von $E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o \neq +\infty$"
folgt via **MMS**$\mathbb{Z}$: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq\text{-Maximum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Maximum von $E \ldots$"
folgt via **38-7**: $\Omega \in E$.

`4:` Aus `3`"$\Omega \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Maximum von $E \ldots$" und
aus `4`"$\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq\text{-Maximum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

□

Einiges über *keine* untere ≤ -Schranken.
Einigs über *keine* oberen ≤ -Schranken.

Ersterstellung: 15/05/12 **Letzte Änderung: 15/05/12**

178-1. Falls x, y sreell sind und falls $\neg(x \leq y)$, dann folgt $y < x$. Ähnlich folgt aus $x, y \in \mathbb{S}$ und $\neg(x < y)$ die Ungleichung $y \leq x$:

178-1(Satz)

`a)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *und* "$\neg(x \leq y)$" *folgt* "$y < x$".

`b)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *und* "$\neg(x < y)$" *folgt* "$y \leq x$".

$\leq$-Notation,

Beweis **178-1** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (\neg(x \leq y))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-14**: $(x \leq y) \vee (y < x)$.

`2:` Aus `1` "$(x \leq y) \vee (y < x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x \leq y)$"
folgt: $y < x$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (\neg(x < y))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-14**: $(x < y) \vee (y \leq x)$.

`2:` Aus `1` "$(x < y) \vee (y \leq x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x < y)$"
folgt: $y \leq x$.

$\square$

178-2. Falls $x \in \mathbb{S}$ *keine* untere $\leq$ _Schranke einer TeilKlasse E von $\mathbb{S}$ ist, dann gibt es $\Omega \in E$ mit $\Omega < x$ - und konsequenter Weise ist E nichtleer. Eine analoge Aussage gilt für x, wenn x *keine* obere $\leq$ _Schranke von E ist:

178-2(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$"
und "x *keine untere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt "$0 \neq E$" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega < x)$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$"
und "x *keine obere* $\leq$ *_Schranke von* E"
und "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt "$0 \neq E$" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x < \Omega)$".

$\leq$-Notation.

Beweis **178-2** `a)`

`VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x$ keine untere $\leq$ _Schranke von $E) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ keine untere $\leq$ _Schranke von $E \ldots$"
folgt via **37-6**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \neq x) \wedge (\neg(x \leq \Omega))$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$",
aus `3.2`"$\Omega \in \mathbb{S}$" und
aus `2`"$\ldots \neg(x \leq \Omega)$"
folgt via **178-1**: $\Omega < x$.

`5:` aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4`"$\Omega < x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega < x)$.

`6:` Aus `3.1`"$0 \neq E$" und
aus `5`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega < x)$"
folgt: $(0 \neq E) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega < x))$.

Beweis **178-2** `b)`
`VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \text{ keine obere } \leq \text{-Schranke von } E) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ keine obere $\leq$ -Schranke von $E \ldots$"
folgt via **37-6**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \neq x) \wedge (\neg(\Omega \leq x))$.

`3.1:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2` "$\Omega \in \mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2` "$\ldots \neg(\Omega \leq x)$"
folgt via **178-1**: $x < \Omega$.

`5:` aus `2` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4` "$x < \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x < \Omega)$.

`6:` Aus `3.1` "$0 \neq E$" und
aus `5` "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x < \Omega)$"
folgt: $(0 \neq E) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x < \Omega))$.

$\square$

Archimedes I.
Archimedes II.

Ersterstellung: 15/05/12 **Letzte Änderung: 16/06/12**

179-1. In **Archimedes I** wird unter anderem fest gestellt, dass es zu jeder reellen Zahl x ganze Zahlen l, m mit $l < x < m$ gibt:

179-1(Satz) (Archimedes I)

a) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *folgt* “$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$”.

b) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *folgt* “$\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < x)$”.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **179-1**

`RECH`-**Notation**.

Beweis **179-1** `a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Es gilt: x obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$ $\vee$ $\neg(x$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` x obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$

`2:` Aus **176-2**"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$" und
aus `1.1.1.Fall`"x obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$"
folgt via **157-9**: $x = +\infty$.

`3:` Aus `2`"$x = +\infty$"
folgt via **95-18**: $x \notin \mathbb{R}$.

`4:` Es gilt `3`"$x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: x keine obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$.

`1.1.2.Fall` $\neg(x$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z})$.

Aus `1.1.2.Fall`"$\neg(x$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z})$"
folgt via **35-1(Def)**: x keine obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "x keine obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$",
aus `A1` gleich "x keine obere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **178-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$.

<u>Beweis **179-1**</u> `b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (-x < \Omega)$.

`3.1:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = -\Omega$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-8**: $-\Omega \in \mathbb{Z}$.

`3.3:` Aus `2`"$\ldots -x < \Omega$"
folgt via **165-1**: $-\Omega < x$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\ldots \Psi = -\Omega$" und
aus `3.2`"$-\Omega \in \mathbb{Z}$"
folgt: $\Psi \in \mathbb{Z}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\ldots \Psi = -\Omega$" und
aus `3.3`"$-\Omega < x$"
folgt: $\Psi < x$.

`5:` Aus `3.1`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `4.1`"$\Psi \in \mathbb{Z}$" und
aus `4.2`"$\Psi < x$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < x)$.

$\square$

179-2. Nun wird **Archimedes I** zu **Archimedes II** für natürliche an Stelle ganzer Zahlen modifiziert:

179-2(Satz) (Archimedes II)

a) *Aus* "$0 \leq x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x < \Omega)$".

b) *Aus* "$\mathbb{R} \ni x \leq 0$" *folgt* "$\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (-\Psi < x)$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **179-2** VS gleich $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes I**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$.

2: Aus VS gleich "$0 \leq x \ldots$" und
aus 1"$\ldots x < \Omega$"
folgt via **107-8**: $0 < \Omega$.

3: Aus 2"$0 < \Omega$"
folgt via **41-3**: $0 \leq \Omega$.

4: Aus 1"$\ldots \Omega \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus 3"$0 \leq \Omega$"
folgt via **164-6**: $\Omega \in \mathbb{N}$.

5: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$",
aus 4"$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus 1"$\ldots x < \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x < \Omega)$.

Beweis **179-2** `VS` gleich $\mathbb{R} \ni x \leq 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni x \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `1.2`"$0 \leq -x$" und
aus `2`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (-x < \Psi)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots -x < \Psi$"
folgt via **165-1**: $-\Psi < x$.

`5:` Aus `3`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Psi \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `4`"$-\Psi < x$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (-\Psi < x)$.

$\square$

179-3. Die Implikation von **Archimedes I** kann leicht auf sreelle x mit $x \neq +\infty$ (in `a)`) oder mit $x \neq -\infty$ (in `b)`) ausgedehnt werden:

179-3(Satz)

`a)` *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$x \neq +\infty$” *folgt* “$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$”.

`b)` *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$x \neq -\infty$” *folgt* “$\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < x)$”.

≤-Notation.

Beweis **179-3** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \neq +\infty$”
folgt via **95-19**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **Archimedes I**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$.

`1.2.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Aus **107-6**“$-\infty < 0$” und
aus `1.2.Fall`“$x = -\infty$”
folgt: $x < 0$.

`3:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`4.1:` Aus **166-1**“$0 \in \mathbb{Z}$” und
aus `3`“$\ldots \Omega = 0$”
folgt: $\Omega \in \mathbb{Z}$.

`4.2:` Aus `2`“$x < 0$” und
aus `3`“$\ldots \Omega = 0$”
folgt: $x < \Omega$.

`5:` Aus `3`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `4.1`“$\Omega \in \mathbb{Z}$” und
aus `4.2`“$x < \Omega$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$.

Beweis **179-3** `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq -\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \neq -\infty$"
folgt via **95-19**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes I**: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < x)$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus **107-6** "$0 < +\infty$" und
aus `1.2.Fall` "$x = +\infty$"
folgt: $0 < x$.

`3:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = 0$.

`4.1:` Aus **166-1** "$0 \in \mathbb{Z}$" und
aus `3` "$\ldots \Psi = 0$"
folgt: $\Psi \in \mathbb{Z}$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Psi = 0$" und
aus `2` "$0 < x$"
folgt: $\Psi < x$.

`5:` Aus `3` "$\exists \Psi \ldots$",
aus `4.1` "$\Psi \in \mathbb{Z}$" und
aus `4.2` "$x < \Psi$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < x)$.

□

179-4. Falls $0 < x \in \mathbb{R}$, dann gibt es $\Omega \in \mathbb{N}$ mit $0 < 1 : \Omega < x$ und falls $\mathbb{R} \ni x < 0$, dann gibt es $\Psi \in \mathbb{N}$ mit $x < -1 : \Psi < 0$:

179-4(Satz)

a) *Aus* "$0 < x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$".

b) *Aus* "$\mathbb{R} \ni x < 0$" *folgt* "$\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (x < -1 : \Psi < 0)$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **179-4** `a)` `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $x = 1 : (1 : x)$.

`2.2:` Aus `1`"$0 < 1 : x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq 1 : x$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \leq 1 : x \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes II**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 : x < \Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `1.2`"$0 < 1 : x \ldots$",
aus `3`"$\ldots 1 : x < \Omega$" und
aus `4`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < 1 : x < \Omega \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`"$0 < 1 : x < \Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-5**: $0 < 1 : \Omega < 1 : (1 : x)$.

`7:` Aus `6`"$0 < 1 : \Omega < 1 : (1 : x)$" und
aus `2.1`"$x = 1 : (1 : x)$"
folgt: $0 < 1 : \Omega < x$.

`8:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `7`"$0 < 1 : \Omega < x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$.

Beweis **179-4** `b)` `VS` gleich $\mathbb{R} \ni x < 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni x \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{R}.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -x.$

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}.$

`3:` Aus `1.2`"$0 < -x$" und
aus `2`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Psi < -x).$

`4.1:` Aus `3`"$\ldots 0 < 1 : \Psi \ldots$"
folgt via **109-16**: $-1 : \Psi < 0.$

`4.2:` Aus `3`"$\ldots 1 : \Psi < -x$"
folgt via **165-1**: $x < -1 : \Psi.$

`5:` Aus `4.2`"$x < -1 : \Psi$" und
aus `4.1`"$-1 : \Psi < 0$"
folgt: $x < -1 : \Psi < 0.$

`6:` Aus `3`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Psi \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `5`"$x < -1 : \Psi < 0$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (x < -1 : \Psi < 0).$

$\square$

179-5. Basierend auf **Archimedes I,II** steht Hinreichendes für $x = -\infty$, zur Verfügung. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - d) - a) - c) - e) - f)`:

179-5(Satz)

`a)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \le -\alpha)$" *folgt* "$x = -\infty$".

`b)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \le \alpha)$" *folgt* "$x = -\infty$".

`c)` *Aus* "$-\infty < y$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (x \le -\alpha)$" *folgt* "$x = -\infty$".

`d)` *Aus* "$-\infty < y$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (x \le \alpha)$" *folgt* "$x = -\infty$".

`e)` *Aus* "$y < +\infty$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (x \le -\alpha)$" *folgt* "$x = -\infty$".

`f)` *Aus* "$y < +\infty$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (x \le -\alpha)$" *folgt* "$x = -\infty$".

Beweis **179-5** `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \leq \alpha)$.

`1:` Aus **166-1**“$0 \in \mathbb{Z}$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \leq \alpha)$”
folgt: $x \leq 0$.

`2:` Aus `1`“$x \leq 0$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Es gilt: $(x = -\infty) \vee (x \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = -\infty$.

`3.2.Fall` $x \neq -\infty$.

`4:` Aus `2`“$x \in \mathbb{S}$” und
aus `3.2.Fall`“$x \neq -\infty$”
folgt via **179-3**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega < x)$.

`5.1:` Aus `4`“$\ldots\Omega < x$”
folgt via **107-13**: $\neg(x \leq \Omega)$.

`5.2:` Aus `4`“$\ldots\Omega \in \mathbb{Z}\ldots$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \leq \alpha)$”
folgt: $x \leq \Omega$.

`6:` Es gilt `5.1`“$\neg(x \leq \Omega)$”.
Es gilt `5.2`“$x \leq \Omega$”.
Ex falso quodlibet folgt: $x = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = -\infty$.

`d)` `VS` gleich $(-\infty < y) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (x \leq \alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-\infty < y\ldots$”
folgt via **107-10**: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

`2:` Aus `1`“$(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$”
folgt via **179-3**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega < y)$.

`3.1:` Aus `2`“$\ldots(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega < y)$” und
aus `VS` gleich “$\ldots\forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (x \leq \alpha)$”
folgt: $x \leq \Omega$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots\Omega \in \mathbb{Z}\ldots$”
folgt via **164-5**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **179-5** `d)` `VS` gleich $(-\infty < y) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (x \leq \alpha))$.

...

`Thema4.1` $\beta \in \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `Thema4.1`"$\beta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $\beta \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5`"$\beta \in \mathbb{S}$" und
aus `3`"$\Omega \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(\beta \leq \Omega) \vee (\Omega \leq \beta)$.

`6.1.Fall` $\beta \leq \Omega$.

`7:` Aus `6.1.Fall`"$\beta \leq \Omega$" und
aus `2`"$\ldots \Omega < y$"
folgt via **107-8**: $\beta < y$.

`8:` Aus `Thema4.1`"$\beta \in \mathbb{Z}$",
aus `7`"$\beta < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (x \leq \alpha)$"
folgt: $x \leq \beta$.

`6.2.Fall` $\Omega \leq \beta$.

Aus `3.1`"$x \leq \Omega$" und
aus `6.2.Fall`"$\Omega \leq \beta$"
folgt via **107-8**: $x \leq \beta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq \beta$.

Ergo `Thema4.1`: `A1` "$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \leq \beta)$"

`4.2:` Aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \leq \beta)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x = -\infty$.

<u>Beweis **179-5**</u> `a)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \leq -\alpha).$

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < 0)$

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: β Zahl.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < 0)$"
folgt via **164-7**: $-\beta \in \mathbb{N}.$

`3.1:` Aus `2.1` "β Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-\beta) = \beta.$

`3.2:` Aus `2.2` "$-\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \leq -\alpha)$"
folgt: $x \leq -(-\beta).$

`4:` Aus `3.2` "$x \leq -(-\beta)$" und
aus `3.1` "$-(-\beta) = \beta$"
folgt: $x \leq \beta.$

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall\beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < 0)) \Rightarrow (x \leq \beta)$"

`1.2:` Aus **107-6** "$-\infty < 0$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < 0)) \Rightarrow (x \leq \beta)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x = -\infty.$

Beweis **179-5** `c)` `VS` gleich $(-\infty < y) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (x \leq -\alpha))$.

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-6**: $(\beta \in \mathbb{N}) \vee (-\beta \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$\beta \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq \beta$.

`4:` Aus `3` "$0 \leq \beta$"
folgt via **165-1**: $-\beta \leq \beta$.

`5:` Aus `4` "$-\beta \leq \beta$" und
aus `Thema1.1` "$\ldots \beta < y$"
folgt via **107-8**: $-\beta < y$.

`6:` Aus `2.1.Fall` "$\beta \in \mathbb{N}$",
aus `5` "$-\beta < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y))$
$\Rightarrow (x \leq -\alpha)$"
folgt: $x \leq -\beta$.

`7:` Aus `6` "$x \leq -\beta$" und
aus `4` "$-\beta \leq \beta$"
folgt via **107-8**: $x \leq \beta$.

...

...

<u>Beweis **179-5**</u> `c)` `VS` gleich $(-\infty < y) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (x \leq -\alpha))$.

...

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $-\beta \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: β Zahl.

`4:` Aus `3`"β Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-\beta) = \beta$.

`5:` Aus `4`"$-(-\beta) = \beta$" und
aus `Thema1.1`"$\ldots \beta < y$"
folgt: $-(-\beta) < y$.

`6:` Aus `2.2.Fall`"$-\beta \in \mathbb{N}$",
aus `5`"$-(-\beta) < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y))$
$\Rightarrow (x \leq -\alpha)$"
folgt: $x \leq -(-\beta)$.

`7:` Aus `6`"$x \leq -(-\beta)$" und
aus `4`"$-(-\beta) = \beta$"
folgt: $x \leq \beta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq \beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (x \leq \beta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\infty < y \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (x \leq \beta)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x = -\infty$.

Beweis **179-5** `e)` `VS` gleich $(y < +\infty) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (x \leq -\alpha))$.

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-\beta < -y)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots -\beta < -y$"
folgt via **109-14**: $y < \beta$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `2`"$y < \beta$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (x \leq -\alpha)$"
folgt: $x \leq -\beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-\beta < -y)) \Rightarrow (x \leq -\beta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y < +\infty \ldots$"
folgt via **109-14**: $-(+\infty) < -y$.

`2:` Aus **AAVI**"$-(+\infty) = -\infty$" und
aus `1.2`"$-(+\infty) < -y$"
folgt: $-\infty < -y$.

`3:` Aus `2`"$-\infty < -y$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-\beta < -y)) \Rightarrow (x \leq -\beta)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x = -\infty$.

Beweis **179-5** `f)` `VS` gleich $(y < +\infty) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (x \leq -\alpha))$.

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2`"$\beta \in \mathbb{Z}$",
aus `Thema1.1`"$\ldots y < \beta$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (x \leq -\alpha)$"
folgt: $x \leq -\beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)) \Rightarrow (x \leq -\beta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y < +\infty \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)) \Rightarrow (x \leq -\beta)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x = -\infty$.

□

179-6. Nun wird, basierend auf **Archimedes I,II** und stützend auf **179-5**, Hinreichendes für $x = +\infty$ bewiesen:

179-6(Satz)

a) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \leq x)$" *folgt* "$x = +\infty$".

b) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \leq x)$" *folgt* "$x = +\infty$".

c) *Aus* "$y < +\infty$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$" *folgt* "$x = +\infty$".

d) *Aus* "$y < +\infty$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$" *folgt* "$x = +\infty$".

e) *Aus* "$-\infty < y$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$" *folgt* "$x = +\infty$".

f) *Aus* "$-\infty < y$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$" *folgt* "$x = +\infty$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis</u> **179-6** `a)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \le x)$.

> `Thema1.1` $\beta \in \mathbb{N}$.
>
> `2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \mathbb{N}$” und
> aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \le x)$”
> folgt: $\beta \le x$.
>
> `3:` Aus `2`“$\beta \le x$”
> folgt via **109-15**: $-x \le -\beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (-x \le -\beta)$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (-x \le -\beta)$”
folgt via **179-5**: $-x = -\infty$.

`2:` Aus `1.2`“$-x = -\infty$”
folgt via **100-13**: $x = +\infty$.

`b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \le x)$.

> `Thema1.1` $\beta \in \mathbb{N}$.
>
> `2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \mathbb{N}$”
> folgt via **164-6**: $\beta \in \mathbb{Z}$.
>
> `3:` Aus `2`“$\beta \in \mathbb{Z}$” und
> aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \le x)$”
> folgt: $\beta \le x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\beta \le x)$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\beta \le x)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x = +\infty$.

Beweis **179-6** `c)` `VS` gleich $(y < +\infty) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (\alpha \leq x))$.

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$"
folgt: $\beta \leq x$.

`3:` Aus 2"$\beta \leq x$"
folgt via **109-15**: $-x \leq -\beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall\beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)) \Rightarrow (-x \leq -\beta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y < +\infty \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)) \Rightarrow (-x \leq -\beta)$"
folgt via **179-5**: $-x = -\infty$.

`2:` Aus `1.2`"$-x = -\infty$"
folgt via **100-13**: $x = +\infty$.

`d)` `VS` gleich $(y < +\infty) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (\alpha \leq x))$.

`Thema1.1` $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus 2"$\beta \in \mathbb{Z}$",
aus `Thema1.1`"$\ldots y < \beta$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (y < \alpha)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$"
folgt: $\beta \leq x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` gleich "$\forall\beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)) \Rightarrow (\beta \leq x)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y < +\infty \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (y < \beta)) \Rightarrow (\beta \leq x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x = +\infty$.

Beweis **179-6** `e)` `VS` gleich $(-\infty < y) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (\alpha \leq x))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-y < \beta)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots - y < \beta$"
folgt via **165-1**: $-\beta < y$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `2`"$-\beta < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$"
folgt: $\beta \leq x$.

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-y < \beta)) \Rightarrow (\beta \leq x)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\infty < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -(-\infty)$.

`2:` Aus `1.2`"$-y < -(-\infty)$" und
aus **AAVI**"$-(-\infty) = +\infty$"
folgt: $-y < +\infty$.

`3:` Aus `2`"$-y < +\infty$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-y < \beta)) \Rightarrow (\beta \leq x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x = +\infty$.

Beweis **179-6** `f)` `VS` gleich $(-\infty < y) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (\alpha \leq x))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-\beta < y)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2`"$\beta \in \mathbb{Z}$",
aus `Thema1.1`"$\ldots -\beta < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (-\alpha < y)) \Rightarrow (\alpha \leq x)$"
folgt: $\beta \leq x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-\beta < y)) \Rightarrow (\beta \leq x)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\infty < y \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N}) \wedge (-\beta < y)) \Rightarrow (\beta \leq x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x = +\infty$.

$\square$

Untere und obere $\leq$ _Schranken von $\{x, \ldots, y\}$, $\{x, \ldots\}$, $\{\ldots, y\}$.
$\leq$ _Infimum und $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$, $\{x, \ldots\}$, $\{\ldots, y\}$.
$\leq$ _Minimum von $\{x, \ldots, y\}$, $\{x, \ldots\}$.
$\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$, $\{\ldots, y\}$.
Kriterium für $\{x, \ldots\} = 0$.
Kriterium für $\{\ldots, y\} = 0$.

Ersterstellung: 14/05/12 **Letzte Änderung: 18/06/12**

180-1. Für jede der Klassen $\{x,\dots,y\},\{x,\dots\},\{\dots,y\}$ ist die Existenz von $\leq$ _Infimum und $\leq$ _Supremum gesichert und es liegen mit $-\infty$ und $+\infty$ untere und obere $\leq$ _Schranken vor:

180-1(Satz)

a) $-\infty$ *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x,\dots,y\}$.

b) $+\infty$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x,\dots,y\}$.

c) $\exists\Omega:\Omega$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\{x,\dots,y\}$.

d) $\exists\Psi:\Psi$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\{x,\dots,y\}$.

e) $-\infty$ *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x,\dots\}$.

f) $+\infty$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x,\dots\}$.

g) $\exists\Omega:\Omega$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\{x,\dots\}$.

h) $\exists\Psi:\Psi$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\{x,\dots\}$.

i) $-\infty$ *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\{\dots,y\}$.

j) $+\infty$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\{\dots,y\}$.

k) $\exists\Omega:\Omega$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\{\dots,y\}$.

l) $\exists\Psi:\Psi$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\{\dots,y\}$.

<u>Beweis **180-1**</u> `abcd)`

`1:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4** "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$.

`3.a):` Aus `2` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`3.b):` Aus `2` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`3.c):` Aus `2` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

`3.d):` Aus `2` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`efgh)`

`1:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4** "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{S}$.

`3.e):` Aus `2` "$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$.

`3.f):` Aus `2` "$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$.

`3.g):` Aus `2` "$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

`3.h):` Aus `2` "$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$.

Beweis **180-1** `ijkl)`

`1:` Via **169-4** gilt: $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$.

`3.i):` Aus `2`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$.

`3.j):` Aus `2`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$.

`3.k):` Aus `2`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

`3.l):` Aus `2`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-4**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

$\square$

180-2. Nun wird der Frage nach gegangen, unter welcher Bedingung x eine untere $\leq$ _Schranke von $\{x,\ldots,y\}$ ist. Dies ist interessanter Weise genau dann der Fall, wenn $x\in\mathbb{S}$ *und* wenn x eine untere $\leq$ _Schranke von $\{x,\ldots\}$ ist:

180-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x\in\mathbb{S}$.

`ii)` x *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x,\ldots,y\}$.

`iii)` x *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x,\ldots\}$.

Beweis **180-2**

$\leq$-Notation.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x\in\mathbb{S}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha\in\{x,\ldots,y\}$.

Aus `Thema1.1` "$\alpha\in\{x,\ldots,y\}$"
folgt via **169-2**: $x\leq\alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall\alpha:(\alpha\in\{x,\ldots,y\})\Rightarrow(x\leq\alpha)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x\in\mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha:(\alpha\in\{x,\ldots,y\})\Rightarrow(x\leq\alpha)$"
folgt via **157-7**: x untere $\leq$ _Schranke von $\{x,\ldots,y\}$.

Beweis **180-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $x \in \mathbb{S}$.

> `Thema1.2` $\alpha \in \{x, \ldots\}$.
>
> Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{x, \ldots\}$"
> folgt via **169-2**: $x \leq \alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots\}) \Rightarrow (x \leq \alpha)$"

`1.3:` Aus `1.1` "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots\}) \Rightarrow (x \leq \alpha)$"
folgt via **157-7**: x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$.

Aus `VS` gleich "x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$"
folgt via **157-3**: $x \in \mathbb{S}$.

$\square$

180-3. Ähnlich wie bei unteren $\leq$ _Schranken ist y genau dann obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$, wenn wenn $y \in \mathbb{S}$ *und* wenn y eine obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$ ist:

180-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $y \in \mathbb{S}$.

`ii)` y *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\{x, \ldots, y\}$.

`iii)` y *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\{\ldots, y\}$.

Beweis **180-3**

$\leq$-Notation.

`i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $y \in \mathbb{S}$.

`Thema1.1` $\alpha \in \{x, \ldots, y\}$.

Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $\alpha \leq y$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \leq y)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \leq y)$"
folgt via **157-7**: y obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

Beweis **180-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich y obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "y obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $y \in \mathbb{S}$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\ldots, y\}$.
>
> Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\ldots, y\}$"
> folgt via **169-2**: $\alpha \leq y$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall\alpha : (\alpha \in \{\ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \leq y)\text{”}}$

`1.3:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \{\ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \leq y)$"
folgt via **157-7**: y obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich y obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$.

Aus `VS` gleich "y obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $y \in \mathbb{S}$.

$\square$

180-4. Nun wird der Frage nachgegangen, unter welchen Voraussetzungen x ein $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$ ist:

<u>180-4(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.*

`ii)` *"$x = +\infty$" oder "$x = -\infty$" oder "$x \in \mathbb{Z}$".*

Beweis **180-4** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

1: Aus `VS` gleich "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$"
folgt via **157-3**: $x \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = +\infty$.

`2.2.Fall` $x = -\infty$.

`2.3.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

3: Es gilt: $(x \in \mathbb{Z}) \vee (x \notin \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \in \mathbb{Z}$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{Z}$.

4: Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

5: Aus `3.2.Fall`"$x \notin \mathbb{Z}$" und
aus 4"$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $x \notin \{x, \ldots\}$.

6: Aus `VS` gleich "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$",
aus 5"$x \notin \{x, \ldots\}$" und
aus `2.3.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\{x, \ldots\} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

7: Aus 6
folgt via **0-3**: $\neg(\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z})$.

8: Es gilt 7"$\neg(\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt 4"$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{Z})$.

<u>Beweis **180-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{Z})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus **169-8**"$\{+\infty, \ldots\} = 0$" und
aus **157-5**"$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von 0"
folgt: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{+\infty, \ldots\}$.

`3:` Aus 2"$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{+\infty, \ldots\}$" und
aus `1.1.Fall`"$x = +\infty$"
folgt: x ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

`1.2.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Aus **169-8**"$\{-\infty, \ldots\} = \mathbb{Z}$" und
aus **176-2**"$-\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\mathbb{Z}$"
folgt: $-\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{-\infty, \ldots\}$.

`3:` Aus 2"$-\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{-\infty, \ldots\}$" und
aus `1.2.Fall`"$x = -\infty$"
folgt: x ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

`1.3.Fall` $x \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.3.Fall`"$x \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus 2"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \le x$.

`3.2:` Aus 2"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **180-2**: x untere $\le$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$.

`4:` Aus `1.3.Fall`"$x \in \mathbb{Z}$" und
aus 3.1"$x \le x$"
folgt via **169-2**: $x \in \{x, \ldots\}$.

`5:` Aus Aus 4"$x \in \{x, \ldots\}$" und
aus 3.2"x untere $\le$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$"
folgt via **38-6**: x ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

x ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

□

180-5. Dass $+\infty$ ein $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$ ist gilt unter anderem genau dann, wenn $0 \neq \{x,\ldots\}$. Interessanter Weise ist $0 \neq \{x,\ldots\}$ *äquivalent* zu $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$:

180-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $+\infty$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\{x,\ldots\}$.

`ii)` $0 \neq \{x,\ldots\}$.

`iii)` *"$x \in \mathbb{S}$" und "$x \neq +\infty$".*

Beweis **180-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$.

`1:` Es gilt: $(\{x,\ldots\} = 0) \vee (0 \neq \{x,\ldots\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{x,\ldots\} = 0$.

`2:` Aus **157-5** "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0" und aus `1.1.Fall` "$\{x,\ldots\} = 0$" folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$.

`3:` Aus `2` "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$" und aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$" folgt via **171-1**: $-\infty = +\infty$.

`4:` Es gilt `3` "$-\infty = +\infty$". Es gilt **107-6** "$-\infty \neq +\infty$". Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq \{x,\ldots\}$.

`1.2.Fall` $0 \neq \{x,\ldots\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq \{x,\ldots\}$.

<u>Beweis **180-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \{x, \ldots\}$.

Aus `VS` gleich “$0 \neq \{x, \ldots\}$”
folgt via **169-6**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

`1`: Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \neq +\infty$”
folgt via **179-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \Omega)$.

`2`: Aus `1`“$\ldots x < \Omega$”
folgt via **41-3**: $x \leq \Omega$.

`3`: Aus `1`“$\ldots \Omega \in \mathbb{Z} \ldots$” und
aus `2`“$x \leq \Omega$”
folgt via **169-2**: $\Omega \in \{x, \ldots\}$.

`4`: Via **180-1** gilt: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$.

`5`: Aus `4`“$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$” und
aus `3`“$\Omega \in \{x, \ldots\}$”
folgt via **36-4**: $\Omega \leq \Psi$.

`6`: Aus `1`“$\ldots x < \Omega$” und
aus `5`“$\Omega \leq \Psi$”
folgt via **107-8**: $x < \Psi$.

...

Beweis **180-5** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

...

7.1: Aus 6"$x < \Psi$"
folgt via **107-9**: $(\Psi \in \mathbb{R}) \vee (\Psi = +\infty)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{7.1.1.Fall}}$ $\Psi \in \mathbb{R}$.

8: Aus 7.1.1.Fall"$\Psi \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes I**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Psi < \Phi)$.

9.1: Aus 8"$\ldots \Psi < \Phi$"
folgt via **107-13**: $\neg(\Phi \leq \Psi)$.

9.2: Aus 6"$x < \Psi$" und
aus 8"$\ldots \Psi < \Phi$"
folgt via **107-8**: $x < \Phi$.

10: Aus 9.2"$x < \Phi$"
folgt via **41-3**: $x \leq \Phi$.

11: Aus 8"$\ldots \Phi \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus 10"$x \leq \Phi$"
folgt via **169-2**: $\Phi \in \{x, \ldots\}$.

12: Aus 4"$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$" und
aus 11"$\Phi \in \{x, \ldots\}$"
folgt via **36-4**: $\Phi \leq \Psi$.

13: Es gilt 12"$\Phi \leq \Psi$".
Es gilt 9.1"$\neg(\Phi \leq \Psi)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Psi = +\infty$.

$\boxed{\texttt{7.1.2.Fall}}$ $\Psi = +\infty$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\Psi = +\infty\text{"}}$

7.2: Aus 4"$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$" und
aus A1 gleich "$\Psi = +\infty$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$.

$\square$

180-6. Dass $-\infty$ ein $\leq$ _Infimum von $\{\ldots,y\}$ ist gilt unter anderem genau dann, wenn $0 \neq \{\ldots,y\}$. Interessanter Weise ist $0 \neq \{\ldots,y\}$ *äquivalent* zu $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$:

180-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-\infty$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\{\ldots,y\}$.

`ii)` $0 \neq \{\ldots,y\}$.

`iii)` *"$y \in \mathbb{S}$" und "$y \neq -\infty$".*

Beweis **180-6** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots,y\}$.

`1:` Es gilt: $(\{\ldots,y\} = 0) \vee (0 \neq \{\ldots,y\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{\ldots,y\} = 0$.

`2:` Aus **157-5**"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von 0" und aus `1.1.Fall`"$\{\ldots,y\} = 0$" folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots,y\}$.

`3:` Aus 2"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots,y\}$" und aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots,y\}$" folgt via **171-1**: $+\infty = +\infty$.

`4:` Es gilt 3"$+\infty = -\infty$".
Es gilt **107-6**"$+\infty \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq \{\ldots,y\}$.

`1.2.Fall` $0 \neq \{\ldots,y\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq \{\ldots,y\}$.

<u>Beweis **180-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \{\ldots, y\}$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\ldots, y\}$"
folgt via **169-6**: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

1: Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq -\infty$"
folgt via **179-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega < y)$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega < y$"
folgt via **41-3**: $\Omega \leq y$.

3: Aus 1"$\ldots \Omega \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus 2"$\Omega \leq y$"
folgt via **169-2**: $\Omega \in \{\ldots, y\}$.

4: Via **180-1** gilt: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

5: Aus 4"$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$" und
aus 3"$\Omega \in \{\ldots, y\}$"
folgt via **36-3**: $\Psi \leq \Omega$.

6: Aus 5"$\Psi \leq \Omega$" und
aus 1"$\ldots \Omega < y$"
folgt via **107-8**: $\Psi < y$.

...

Beweis **180-6** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

...

`7.1:` Aus `6`"$\Psi < y$"
folgt via **107-9**: $(\Psi \in \mathbb{R}) \vee (\Psi = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.1.Fall` $\Psi \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7.1.1.Fall`"$\Psi \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes I**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{Z}) \wedge (\Phi < \Psi)$.

`9.1:` Aus `8`"$\ldots \Phi < \Psi$"
folgt via **107-13**: $\neg(\Psi \leq \Phi)$.

`9.2:` Aus `8`"$\ldots \Phi < \Psi$" und
aus `6`"$\Psi < y$"
folgt via **107-8**: $\Phi < y$.

`10:` Aus `9.2`"$\Phi < y$"
folgt via **41-3**: $\Phi \leq y$.

`11:` Aus `8`"$\ldots \Phi \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `10`"$\Phi \leq y$"
folgt via **169-2**: $\Phi \in \{\ldots, y\}$.

`12:` Aus `4`"$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$" und
aus `11`"$\Phi \in \{\ldots, y\}$"
folgt via **36-3**: $\Psi \leq \Phi$.

`13:` Es gilt `12`"$\Psi \leq \Phi$".
Es gilt `9.1`"$\neg(\Psi \leq \Phi)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Psi = -\infty$.

`7.1.2.Fall` $\Psi = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\Psi = -\infty$"

`7.2:` Aus `4`"$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$" und
aus `A1` gleich "$\Psi = -\infty$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

□

180-7. Nun wird der Frage nachgegangen, unter welchen Voraussetzungen y ein $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$ ist:

180-7(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) *y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.*

ii) *"$y = +\infty$" oder "$y = -\infty$" oder "$y \in \mathbb{Z}$".*

Beweis **180-7** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y = +\infty$.

`2.2.Fall` $y = -\infty$.

`2.3.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`3:` Es gilt: $(y \in \mathbb{Z}) \vee (y \notin \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $y \in \mathbb{Z}$.

`3.2.Fall` $y \notin \mathbb{Z}$.

`4:` Via **169-4** gilt: $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$y \notin \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $y \notin \{\ldots, y\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$",
aus `5`"$y \notin \{\ldots, y\}$" und
aus `2.3.Fall`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\{\ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`7:` Aus `6`
folgt via **0-3**: $\neg(\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$.

`8:` Es gilt `7`"$\neg(\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt `4`"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{Z})$.

<u>Beweis **180-7**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{Z})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y = +\infty$.

`2:` Aus **169-8**“$\{\ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$” und
aus **176-2**“$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{Z}$”
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, +\infty\}$.

`3:` Aus 2“$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, +\infty\}$” und
aus `1.1.Fall`“$y = +\infty$”
folgt: y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`1.2.Fall` $y = -\infty$.

`2:` Aus **169-8**“$\{\ldots, -\infty\} = 0$” und
aus **157-5**“$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0”
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, -\infty\}$.

`3:` Aus 2“$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, -\infty\}$” und
aus `1.2.Fall`“$y = -\infty$”
folgt: y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`1.3.Fall` $y \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.3.Fall`“$y \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-5**: $y \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus 2“$y \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $y \leq y$.

`3.2:` Aus 2“$y \in \mathbb{S}$”
folgt via **180-3**: y obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$.

`4:` Aus `1.3.Fall`“$y \in \mathbb{Z}$” und
aus `3.1`“$x \leq y$”
folgt via **169-2**: $y \in \{\ldots, y\}$.

`5:` Aus Aus 4“$y \in \{\ldots, y\}$” und
aus `3.2`“y obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$”
folgt via **38-7**: y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

□

180-8. Die Frage, unter welchen Bedingungen x ein $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$ ist, gestaltet sich ein wenig mehrschichtiger als die Diskussion wann x eine untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$ ist:

180-8(Satz)

a) *Aus "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"*
folgt "$x = +\infty$" oder "$x = -\infty$" oder "$x \in \mathbb{Z}$".

b) *Aus "$x = +\infty$" folgt "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$".*

c) *Aus "$x = -\infty$" und "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"*
folgt "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$".

d) *Aus "$x \in \mathbb{Z}$" und "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"*
folgt "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$".

Beweis **180-8**

$\leq$-Notation.

...

Beweis **180-8** `a)` `VS` gleich x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = +\infty$.

`2.2.Fall` $x = -\infty$.

`2.3.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Es gilt: $(x \in \mathbb{Z}) \vee (x \notin \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \in \mathbb{Z}$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{Z}$.

`4:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$x \notin \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $x \notin \{x, \ldots, y\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$",
aus `5`"$x \notin \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.3.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\{x, \ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`7:` Aus `6`"$\{x, \ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-3**: $\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$.

`8:` Es gilt `7`"$\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{Z})$.

<u>Beweis</u> **180-8** `b)` `VS` gleich $x = +\infty.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x = +\infty$”
folgt: $\{x, \ldots, y\} = \{+\infty, \ldots, y\}.$

`1.2:` Via **169-8** gilt: $\{+\infty, \ldots, y\} = 0.$

`2:` Aus `1.1`“$\{x, \ldots, y\} = \{+\infty, \ldots, y\}$” und
aus `1.2`“$\{+\infty, \ldots, y\} = 0$”
folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0.$

`3:` Aus `2`“$\{x, \ldots, y\} = 0$” und
aus **157-5**“$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von 0”
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}.$

`4:` Aus `VS` gleich “$x = +\infty$” und
aus `3`“$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$”
folgt: x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}.$

`c)` `VS` gleich $(x = -\infty) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\}).$

`1:` Aus `VS` gleich “$x = -\infty \ldots$”
folgt: $\{x, \ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}.$

`2.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$” und
aus `1`“$\{x, \ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$”
folgt: $0 \neq \{-\infty, \ldots, y\}.$

`2.2:` Via **169-8** gilt: $\{-\infty, \ldots, y\} = \{\ldots, y\}.$

`3:` Aus `2.1`“$\ldots 0 \neq \{-\infty, \ldots, y\}$” und
aus `2.2`“$\{-\infty, \ldots, y\} = \{\ldots, y\}$”
folgt: $0 \neq \{\ldots, y\}.$

`4:` Aus `3`“$0 \neq \{\ldots, y\}$”
folgt via **180-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}.$

`5:` Aus `4`“$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$” und
aus `2.2`“$\{-\infty, \ldots, y\} = \{\ldots, y\}$”
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{-\infty, \ldots, y\}.$

`6:` Aus `5`“$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{-\infty, \ldots, y\}$” und
aus `VS` gleich “$x = -\infty \ldots$”
folgt: x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}.$

<u>Beweis **180-8**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-7**: $x \leq y$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \leq x$.

`2.2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **180-2**: x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `2.1`"$x \leq x$" und
aus `1.2`"$x \leq y$"
folgt via **169-2**: $x \in \{x, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.2`"x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **38-6**: x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

□

180-9. Die Frage, unter welchen Bedingungen y ein $\leq$ _Supremum von $\{x,\dots,y\}$ ist, gestaltet sich ein wenig mehrschichtiger als die Diskussion wann y eine obere $\leq$ _Schranke von $\{x,\dots,y\}$ ist:

180-9(Satz)

a) *Aus "y ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\dots,y\}$" folgt "$y=+\infty$" oder "$y=-\infty$" oder "$y\in\mathbb{Z}$".*

b) *Aus "$y=+\infty$" und "$0\neq\{x,\dots,y\}$" folgt "y ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\dots,y\}$".*

c) *Aus "$y=-\infty$" folgt "y ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\dots,y\}$".*

d) *Aus "$y\in\mathbb{Z}$" und "$0\neq\{x,\dots,y\}$" folgt "y ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\dots,y\}$".*

Beweis **180-9** `a)` `VS` gleich y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1`: Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2`: Aus `1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y = +\infty$.

`2.2.Fall` $y = -\infty$.

`2.3.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`3`: Es gilt: $(y \in \mathbb{Z}) \vee (y \notin \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $y \in \mathbb{Z}$.

`3.2.Fall` $y \notin \mathbb{Z}$.

`4`: Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`5`: Aus `3.2.Fall`"$y \notin \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $y \notin \{x, \ldots, y\}$.

`6`: Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$",
aus `5`"$y \notin \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.3.Fall`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\{x, \ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`7`: Aus `6`"$\{x, \ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-3**: $\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$.

`8`: Es gilt `7`"$\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{Z})$.

<u>Beweis **180-9**</u> `b)` `VS` gleich $(y = +\infty) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y = +\infty \ldots$"
folgt: $\{x, \ldots, y\} = \{x, \ldots, +\infty\}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$" und
aus `1`"$\{x, \ldots, y\} = \{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt: $0 \neq \{x, \ldots, +\infty\}$.

`2.2:` Via **169-8** gilt: $\{x, \ldots, +\infty\} = \{x, \ldots\}$.

`3:` Aus `2.1`"$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, +\infty\}$" und
aus `2.2`"$\{x, \ldots, +\infty\} = \{x, \ldots\}$"
folgt: $0 \neq \{x. \ldots\}$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq \{x, \ldots\}$"
folgt via **180-5**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$.

`5:` Aus `4`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots\}$" und
aus `2.2`"$\{x, \ldots, +\infty\} = \{x, \ldots\}$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, +\infty\}$.

`6:` Aus `5`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, +\infty\}$" und
aus `VS` gleich "$y = +\infty \ldots$"
folgt: y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`c)` `VS` gleich $y = -\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y = -\infty$"
folgt: $\{x, \ldots, y\} = \{x, \ldots, -\infty\}$.

`1.2:` Via **169-8** gilt: $\{x, \ldots, -\infty\} = 0$.

`2:` Aus `1.1`"$\{x, \ldots, y\} = \{x, \ldots, -\infty\}$" und
aus `1.2`"$\{x, \ldots, -\infty\} = 0$"
folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`3:` Aus `2`"$\{x, \ldots, y\} = 0$" und
aus **157-5**"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$y = -\infty$" und
aus `3`"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt: y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

<u>Beweis **180-9**</u> `d)` `VS` gleich $(y \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-7**: $x \leq y$.

`2.1:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq y$.

`2.2:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **180-3**: y obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, y\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `1.2`"$x \leq y$" und
aus `2.1`"$y \leq y$"
folgt via **169-2**: $y \in \{x, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.2`"y obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **38-7**: y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

□

180-10. In erwarteter Weise ist x genau dann ein $\leq$ _Minimum von $\{x,\ldots\}$, wenn $x \in \mathbb{Z}$. Genau so ist y genau dann $\leq$ _Maximum von $\{\ldots,y\}$, wenn $y \in \mathbb{Z}$:

180-10(Satz)

a) *“x ist $\leq$ _Minimum von $\{x,\ldots\}$” genau dann, wenn “$x \in \mathbb{Z}$”.*

b) *“y ist $\leq$ _Maximum von $\{\ldots,y\}$” genau dann, wenn “$y \in \mathbb{Z}$”.*

Beweis **180-10** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich x ist $\leq$ _Minimum von $\{x,\ldots\}$.

`1:` Aus `VS` gleich “x ist $\leq$ _Minimum von $\{x,\ldots\}$”
folgt via **38-6**: $x \in \{x,\ldots\}$.

`2:` Aus `1`“$x \in \{x,\ldots\}$”
folgt via **169-2**: $x \in \mathbb{Z}$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-5**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{Z}$”
folgt via **180-4**: x ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots\}$.

`2:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $x \leq x$.

`3:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{Z}$” und
aus `2`“$x \leq x$”
folgt via **169-2**: $x \in \{x,\ldots\}$.

`4:` Aus `3`“$x \in \{x,\ldots\}$” und
aus `1.2`“x ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots\}$”
folgt via **38-6**: x ist $\leq$ _Minimum von $\{x,\ldots\}$.

Beweis **180-10** `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich y ist $\leq$ _Maximum von $\{\ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Maximum von $\{\ldots, y\}$"
folgt via **38-7**: $y \in \{\ldots, y\}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \{\ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $y \in \mathbb{Z}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $y \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z}$"
folgt via **180-7**: y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`2:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq y$.

`3:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z}$" und
aus `2`"$y \leq y$"
folgt via **169-2**: $y \in \{\ldots, y\}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \{\ldots, y\}$" und
aus `1.2`"y ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$"
folgt via **38-7**: y ist $\leq$ _Maximum von $\{\ldots, y\}$.

□

180-11. Das $\leq$ -Minimum von $\{x, \ldots, y\}$ ist genau dann x, wenn $x \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq \{x, \ldots, y\}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in \mathbb{Z}$ und $x \leq y$. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `i)`:

180-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *x ist $\leq$ -Minimum von $\{x, \ldots, y\}$.*

`ii)` *"$x \in \mathbb{Z}$" und "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$".*

`iii)` *"$x \in \mathbb{Z}$" und "$x \leq y$".*

$\leq$-Notation.

Beweis **180-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich x ist $\leq$ -Minimum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "x ist $\leq$ -Minimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **38-6**: $x \in \{x, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \leq x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `2`"$x \leq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **169-2**: $x \in \{x, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `4`"$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt: $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

<u>Beweis **180-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **180-8**: x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

`2.1:` Aus `1.1`"x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **36-3**: $x \leq x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $x \leq \Omega \leq y$.

`3:` Aus `2`"$x \leq \Omega \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \leq y$"
folgt via **107-8**: $x \leq y$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `2.1`"$x \leq x$" und
aus `3`"$x \leq y$"
folgt via **169-2**: $x \in \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus `1.1`"x ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **38-6**: x ist $\leq$ _Minimum von $\{x, \ldots, y\}$.

$\square$

180-12. Das $\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$ ist genau dann y, wenn $y \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq \{x, \ldots, y\}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $y \in \mathbb{Z}$ und $x \leq y$. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `i)`:

180-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *y ist $\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$.*

`ii)` *"$y \in \mathbb{Z}$" und "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$".*

`iii)` *"$y \in \mathbb{Z}$" und "$x \leq y$".*

$\leq$-Notation.

Beweis **180-12** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich y ist $\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **38-7**: $y \in \{x, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(y \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq y$.

`3:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$" und
aus `2`"$y \leq y$"
folgt via **169-2**: $y \in \{x, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `4`"$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt: $(y \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

<u>Beweis **180-12**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **180-9**: y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

`2.1:` Aus `1.1`"y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **36-4**: $y \leq y$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $x \leq \Omega \leq y$.

`3:` Aus `2`"$x \leq \Omega \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \leq y$"
folgt via **107-8**: $x \leq y$.

`4:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `3`"$x \leq y$" und
aus `2.1`"$y \leq y$"
folgt via **169-2**: $y \in \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `4`"$y \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus `1.1`"y ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **38-7**: y ist $\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$.

$\square$

180-13. Nun wird die Frage nach speziellen $\leq$ _Infima von $\{x, \ldots, y\}$ thematisiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - d)`:

180-13(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"*
und "$inf \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" und "$x \in \mathbb{R}$".

b) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"*
und "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
und "$x \in \mathbb{R}$"
folgt $inf \in \mathbb{R}$.

c) *"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$\{x, \ldots, y\} = 0$".

d) *"$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$x = -\infty$" und "$-\infty < y$".

Beweis **180-13**

$\leq$-Notation.

Beweis **180-13** `a)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots, y\}) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots, y\}) \wedge (inf \in \mathbb{R})$”
folgt via **175-2**: $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `1`“$0 \neq \{x, \ldots, y\}$”
folgt via **169-6**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

`3.1:` Aus `2`“$(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$”
folgt via **95-19**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3.1.2.Fall` $x = -\infty$.

`4:` Aus `3.1.2.Fall`“$x = -\infty$” und
aus `1`“$0 \neq \{x, \ldots, y\}$”
folgt via **180-8**: $x \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `VS` gleich “$inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots, y\}$” und
aus `4`“$x \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots, y\}$”
folgt via **171-1**: $inf = x$.

`6:` Aus `VS` gleich “$\ldots inf \in \mathbb{R}$” und
aus `5`“$inf = x$”
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` “$x \in \mathbb{R}$”

`3.2:` Aus `1`“$0 \neq \{x, \ldots, y\}$” und
aus `A1` gleich “$x \in \mathbb{R}$”
folgt: $(0 \neq \{x, \ldots, y\}) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

Beweis **180-13** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

1: Aus VS gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-9**: $(\{x, \ldots, y\} = 0) \vee (\{x, \ldots, y\} = \{+\infty\})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\{x, \ldots, y\} = 0$.

1.2.Fall $\{x, \ldots, y\} = \{+\infty\}$.

2.1: Aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt via **1-3**: $+\infty \in \{+\infty\}$.

2.2: Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

3: Aus 2.1 "$+\infty \in \{+\infty\}$" und
aus 1.2.Fall "$\{x, \ldots, y\} = \{+\infty\}$"
folgt: $+\infty \in \{x, \ldots, y\}$.

4: Aus 3 "$+\infty \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus 2.2 "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{Z}$.

5: Es gilt 4 "$+\infty \in \mathbb{Z}$".
Es gilt **166-1** "$+\infty \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\{x, \ldots, y\} = 0$.

Aus **157-5** "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von 0" und
aus VS gleich "$\{x, \ldots, y\} = 0$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

Beweis **180-13** `b)`
`VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots, y\}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\}) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **180-2**: x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\} \ldots$" und
aus `2`"x untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **36-1(Def)**: $x \leq inf$.

`4:` Aus `1.1`"$-\infty < x$" und
aus `3`"$x \leq inf$"
folgt via **107-8**: $-\infty < inf$.

`5:` Aus `4`"$-\infty < inf$"
folgt via **107-10**: $(inf \in \mathbb{R}) \vee (inf = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $inf \in \mathbb{R}$.

`5.2.Fall` $inf = +\infty$.

`6:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\} \ldots$" und
aus `5.2.Fall`"$inf = +\infty$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

`7:` Aus `6`"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`8:` Es gilt `7`"$\{x, \ldots, y\} = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\} \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $inf \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $inf \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **180-13**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots,y\}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots,y\}$" und
aus **107-6**"$-\infty \neq +\infty$"
folgt via **175-5**: $0 \neq \{x,\ldots,y\}$.

`2.1`: Aus `1`"$0 \neq \{x,\ldots,y\}$"
folgt via **169-9**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

`2.2`: Aus `1`"$0 \neq \{x,\ldots,y\}$"
folgt via **169-9**: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

`3.1`: Aus `2.1`"$(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$"
folgt via **95-19**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`4`: Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots,y\}$",
aus `1`"$0 \neq \{x,\ldots,y\}$" und
aus `3.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-\infty \in \mathbb{R}$.

`5`: Es gilt `4`"$-\infty \in \mathbb{R}$".
Via **AAI** gilt "$-\infty \notin \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x = -\infty$.

`3.1.2.Fall` $x = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x = -\infty$"

`3.2`: Aus `2.2`"$(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$"
folgt via **107-10**: $-\infty < y$.

`4`: Aus `A1` gleich "$x = -\infty$" und
aus `3.2`"$-\infty < y$"
folgt: $(x = -\infty) \wedge (-\infty < y)$.

Beweis **180-13** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x = -\infty) \wedge (-\infty < y)$.

`Thema1.1` α untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`Thema2.1` $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)$.

`3.1:` Aus `Thema2.1` "$\ldots \beta < y$"
folgt via **107-9**: $\beta \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `Thema2.1` "$\ldots \beta < y$"
folgt via **41-3**: $\beta \leq y$.

`4:` Aus `3.1` "$\beta \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq \beta$.

`5:` Aus `Thema2.1` "$\beta \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `4` "$-\infty \leq \beta$" und
aus `3.2` "$\beta \leq y$"
folgt via **169-2**: $\beta \in \{-\infty, \ldots, y\}$.

`6:` Aus `5` "$\beta \in \{-\infty, \ldots, y\}$" und
aus `VS` gleich "$x = -\infty \ldots$"
folgt: $\beta \in \{x, \ldots, y\}$.

`7:` Aus `Thema1.1` "α untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$" und
aus `6` "$\beta \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \leq \beta$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)$"

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -\infty < y$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)$"
folgt via **179-5**: $\alpha = -\infty$.

Ergo `Thema1.1`:

`A2` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$"

...

Beweis **180-13** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x = -\infty) \wedge (-\infty < y)$.

...

`1.2:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.2`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$"
folgt via **157-9**: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

$\square$

180-14. Nun wird die Frage nach speziellen $\leq$ _Suprema von $\{x, \ldots, y\}$ thematisiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - b) - c)`:

180-14(Satz)

`a)` *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"*
und "sup $\in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" und "$y \in \mathbb{R}$".

`b)` *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"*
und "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
und "$y \in \mathbb{R}$"
folgt sup $\in \mathbb{R}$.

`c)` *"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$x < +\infty$" und "$y = +\infty$".

`d)` *"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$\{x, \ldots, y\} = 0$".

Beweis **180-14**

$\leq$**-Notation**.

<u>Beweis **180-14**</u> `a)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots, y\}) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots, y\}) \wedge (sup \in \mathbb{R})$”
folgt via **175-3**: $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `1`“$0 \neq \{x, \ldots, y\}$”
folgt via **169-6**: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

`3.1:` Aus `2`“$(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$”
folgt via **95-19**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`3.1.2.Fall` $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.1.2.Fall`“$y = +\infty$” und
aus `1`“$0 \neq \{x, \ldots, y\}$”
folgt via **180-9**: $y \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `VS` gleich “$sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots, y\}$” und
aus `4`“$y \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots, y\}$”
folgt via **171-1**: $sup = y$.

`6:` Aus `VS` gleich “$\ldots sup \in \mathbb{R}$” und
aus `5`“$sup = y$”
folgt: $y \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$y \in \mathbb{R}$”

`3.2:` Aus `1`“$0 \neq \{x, \ldots, y\}$” und
aus `A1` gleich “$y \in \mathbb{R}$”
folgt: $(0 \neq \{x, \ldots, y\}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **180-14**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-9**: $(\{x, \ldots, y\} = 0) \vee (\{x, \ldots, y\} = \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`1.2.Fall` $\{x, \ldots, y\} = \{-\infty\}$.

`2.1:` Aus **95-3** "$-\infty$ Menge"
folgt via **1-3**: $-\infty \in \{-\infty\}$.

`2.2:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2.1` "$-\infty \in \{-\infty\}$" und
aus `1.2.Fall` "$\{x, \ldots, y\} = \{-\infty\}$"
folgt: $-\infty \in \{x, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `3` "$-\infty \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.2` "$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $-\infty \in \mathbb{Z}$.

`5:` Es gilt `4` "$-\infty \in \mathbb{Z}$".
Es gilt **166-1** "$+\infty \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\{x, \ldots, y\} = 0$.

Aus **157-5** "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0" und
aus `VS` gleich "$\{x, \ldots, y\} = 0$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

Beweis **180-14** `b)`
`VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots, y\}) \wedge (0 \neq \{x, \ldots, y\}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $y < +\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **180-3**: y obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\} \ldots$" und
aus `2`"y obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup \leq y$.

`4:` Aus `3`"$sup \leq y$" und
aus `1.1`"$y < +\infty$"
folgt via **107-8**: $sup < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$sup < +\infty$"
folgt via **107-11**: $(sup \in \mathbb{R}) \vee (sup = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $sup \in \mathbb{R}$.

`5.2.Fall` $sup = -\infty$.

`6:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\} \ldots$" und
aus `5.2.Fall`"$sup = -\infty$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`7:` Aus `6`"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`8:` Es gilt `7`"$\{x, \ldots, y\} = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \{x, \ldots, y\} \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $sup \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $sup \in \mathbb{R}$.

Beweis **180-14** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $+\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{x,\ldots,y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{x,\ldots,y\}$" und
aus **107-6**"$+\infty \neq -\infty$"
folgt via **175-5**: $0 \neq \{x,\ldots,y\}$.

`2.1:` Aus `1`"$0 \neq \{x,\ldots,y\}$"
folgt via **169-6**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

`2.2:` Aus `1`"$0 \neq \{x,\ldots,y\}$"
folgt via **169-6**: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$"
folgt via **95-19**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{x,\ldots,y\}$",
aus `1`"$0 \neq \{x,\ldots,y\}$" und
aus `3.1.1.Fall`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $+\infty \in \mathbb{R}$.

`5:` Es gilt `4`"$+\infty \in \mathbb{R}$".
Via **AAI** gilt "$+\infty \notin \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $y = +\infty$.

`3.1.2.Fall` $y = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$y = +\infty$"

`3.2:` Aus `2.1`"$(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$"
folgt via **107-11**: $x < +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$x < +\infty$" und
aus `A1` gleich "$y = +\infty$"
folgt: $(x < +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

Beweis **180-14** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x < +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`Thema1.1` α obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$.

`Thema2.1` $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \beta)$.

`3.1`: Aus `Thema2.1` "$\ldots x < \beta$"
folgt via **107-9**: $\beta \in \mathbb{S}$.

`3.2`: Aus `Thema2.1` "$\ldots x < \beta$"
folgt via **41-3**: $x \leq \beta$.

`4`: Aus `3.1` "$\beta \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\beta \leq +\infty$.

`5`: Aus `Thema2.1` "$\beta \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `3.2` "$x \leq \beta$" und
aus `4` "$\beta \leq +\infty$"
folgt via **169-2**: $\beta \in \{x, \ldots, +\infty\}$.

`6`: Aus `5` "$\beta \in \{x, \ldots, +\infty\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = +\infty$"
folgt: $\beta \in \{x, \ldots, y\}$.

`7`: Aus `Thema1.1` "α obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}$" und
aus `6` "$\beta \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **35-1(Def)**: $\beta \leq \alpha$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \beta)) \Rightarrow (\beta \leq \alpha)$"

`2.2`: Aus `VS` gleich "$x < +\infty \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (x < \beta)) \Rightarrow (\beta \leq \alpha)$"
folgt via **179-6**: $\alpha = +\infty$.

Ergo `Thema1.1`:

`A2` "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$"

...

Beweis **180-14** `c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(x < +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

...

`1.2:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.2`“$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$” und
aus **164-4**“$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **0-6**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{S}$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $\{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$”
folgt via **157-9**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

$\square$

180-15. Hier wird die Frage nach speziellen $\leq$ _Infima von $\{x, \ldots\}$ thematisiert. Beim Beweis wird auf **180-13** zurück gegriffen:

180-15(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$"*
und "$inf \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq \{x, \ldots\}$" und "$x \in \mathbb{R}$".

b) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$"*
und "$x \in \mathbb{R}$"
folgt $inf \in \mathbb{R}$.

c) *"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$"*
genau dann, wenn "$\{x, \ldots\} = 0$".

d) *"$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$"*
genau dann, wenn "$x = -\infty$".

Beweis **180-15**

$\leq$-Notation.

---

a) VS gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{x, \ldots\}) \wedge (inf \in \mathbb{R})$.

1: Via **169-8** gilt: $\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$.

2: Aus VS gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\} \ldots$" und
aus 1 "$\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt: inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, +\infty\}$.

3: Aus 2 "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, +\infty\}$" und
aus VS gleich "$\ldots inf \in \mathbb{R}$"
folgt via **180-13**: $(0 \neq \{x, \ldots, +\infty\}) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

4: Aus 3 "$(0 \neq \{x, \ldots, +\infty\}) \wedge (x \in \mathbb{R})$" und
aus 1 "$\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt: $(0 \neq \{x, \ldots\}) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **180-15**</u> `b)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } \{x,\ldots\}) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Via **169-8** gilt: $\{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty) \wedge (x \neq -\infty)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $\{x,\ldots\}\ldots$" und
aus `1.1`"$\{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$"
folgt: inf ist $\le$ _Infimum von $\{x,\ldots,+\infty\}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)\ldots$"
folgt via **180-5**: $0 \neq \{x,\ldots\}$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \neq \{x,\ldots\}$" und
aus `1.1`"$\{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$"
folgt: $0 \neq \{x,\ldots,+\infty\}$.

`4:` Aus `2.1`"inf ist $\le$ _Infimum von $\{x,\ldots,+\infty\}$",
aus `3`"$0 \neq \{x,\ldots,+\infty\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **180-13**: $inf \in \mathbb{R}$.

`c)`

`1:` Via **169-8** gilt: $\{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$.

`2:` Via **180-13** gilt:
$(+\infty \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } \{x,\ldots,+\infty\}) \Leftrightarrow (\{x,\ldots,+\infty\} = 0)$.

`3:` Aus `2`"$(+\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{x,\ldots,+\infty\})$
$\Leftrightarrow (\{x,\ldots,+\infty\} = 0)$" und
aus `1`"$\{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$"
folgt: $(+\infty \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } \{x,\ldots\}) \Leftrightarrow (\{x,\ldots\} = 0)$.

<u>Beweis **180-15**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

`1:` Via **169-8** gilt: $\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$" und
aus `1` "$\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, +\infty\}$.

`3:` Aus `2` "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt via **180-13**: $x = -\infty$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = -\infty$" und
aus **107-6** "$-\infty < +\infty$"
folgt via **180-13**: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, +\infty\}$.

`2:` Via **169-8** gilt: $\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$.

`3:` Aus `1` "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots, +\infty\}$" und
aus `2` "$\{x, \ldots\} = \{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x, \ldots\}$.

□

180-16. Genau $+\infty$ und $-\infty$ kommen unter überschaubaren Bedingungen als $\le$_Suprema von $\{x,\ldots\}$ in Frage:

180-16(Satz)

a) *“$+\infty$ ist $\le$_Supremum von $\{x,\ldots\}$”*
genau dann, wenn “$0 \neq \{x,\ldots\}$”.

b) *“$-\infty$ ist $\le$_Supremum von $\{x,\ldots\}$”*
genau dann, wenn “$\{x,\ldots\} = 0$”.

Beweis **180-16** `a)`

Via **180-5** gilt: $(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\}) \Leftrightarrow (0 \neq \{x, \ldots\})$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\}$"
folgt via **157-9**: $(\{x, \ldots\} = 0) \vee (\{x, \ldots\} = \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{x, \ldots\} = 0$.

`1.2.Fall` $\{x, \ldots\} = \{-\infty\}$.

`3:` Aus **95-3** "$-\infty$ Menge"
folgt via **1-3**: $-\infty \in \{-\infty\}$.

`4:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `3` "$-\infty \in \{-\infty\}$" und
aus `VS` gleich "$\{x, \ldots\} = \{-\infty\}$"
folgt: $-\infty \in \{x, \ldots\}$.

`6:` Aus `5` "$-\infty \in \{x, \ldots\}$" und
aus `4` "$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $-\infty \in \mathbb{Z}$.

`7:` Es gilt `6` "$-\infty \in \mathbb{Z}$".
Es gilt **166-1** "$-\infty \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{x, \ldots\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{x, \ldots\} = 0$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\{x, \ldots\} = 0$.

Aus **157-5** "$-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } 0$" und
aus `VS` gleich "$\{x, \ldots\} = 0$"
folgt: $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\}$.

□

180-17. Genau $+\infty$ und $-\infty$ kommen unter überschaubaren Bedingungen als $\leq$ _Infima von $\{\ldots, y\}$ in Frage:

180-17(Satz)

a) *"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$\{\ldots, y\} = 0$".

b) *"$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$0 \neq \{\ldots, y\}$".

Beweis **180-17** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

1: Aus VS gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$"
folgt via **157-9**: $(\{\ldots, y\} = 0) \vee (\{\ldots, y\} = \{+\infty\})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\{\ldots, y\} = 0$.

1.2.Fall $\{\ldots, y\} = \{+\infty\}$.

3: Aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt via **1-3**: $+\infty \in \{+\infty\}$.

4: Via **169-4** gilt: $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

5: Aus 3 "$+\infty \in \{+\infty\}$" und
aus VS gleich "$\{\ldots, y\} = \{+\infty\}$"
folgt: $+\infty \in \{\ldots, y\}$.

6: Aus 5 "$+\infty \in \{\ldots, y\}$" und
aus 4 "$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{Z}$.

7: Es gilt 6 "$+\infty \in \mathbb{Z}$".
Es gilt **166-1** "$+\infty \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{\ldots, y\} = 0$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{\ldots, y\} = 0$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\{\ldots, y\} = 0$.

Aus **157-5** "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von 0" und
aus VS gleich "$\{\ldots, y\} = 0$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

b)

Via **180-6** gilt: $(-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}) \Leftrightarrow (0 \neq \{\ldots, y\})$.

□

180-18. Hier wird die Frage nach speziellen $\leq$ _Suprema von $\{\ldots, y\}$ thematisiert. Beim Beweis wird auf **180-14** zurück gegriffen:

180-18(Satz)

a) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$"*
und "$sup \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq \{\ldots, y\}$" und "$y \in \mathbb{R}$".

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$"*
und "$y \in \mathbb{R}$"
folgt $sup \in \mathbb{R}$.

c) *"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$y = +\infty$".

d) *"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$"*
genau dann, wenn "$\{\ldots, y\} = 0$".

Beweis **180-18**

$\leq$-Notation.

---

a) VS gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{\ldots, y\}) \wedge (sup \in \mathbb{R})$.

1: Via **169-8** gilt: $\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$.

2: Aus VS gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}\ldots$" und
aus 1"$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt: sup ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$.

3: Aus 2"sup ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$" und
aus VS gleich "$\ldots sup \in \mathbb{R}$"
folgt via **180-14**: $(0 \neq \{-\infty, \ldots, y\}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

4: Aus 3"$(0 \neq \{-\infty, \ldots, y\}) \wedge (y \in \mathbb{R})$" und
aus 1"$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt: $(0 \neq \{\ldots, y\}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **180-18**</u> `b)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{\ldots, y\}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Via **169-8** gilt: $\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq +\infty) \wedge (y \neq -\infty)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\} \ldots$" und
aus `1.1`"$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt: sup ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots y \neq -\infty$"
folgt via **180-6**: $0 \neq \{\ldots, y\}$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \neq \{\ldots, y\}$" und
aus `1.1`"$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt: $0 \neq \{-\infty, \ldots, y\}$.

`4:` Aus `2.1`"sup ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$",
aus `3`"$0 \neq \{-\infty, \ldots, y\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **180-14**: $sup \in \mathbb{R}$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`1:` Via **169-8** gilt: $\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$" und
aus `1`"$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$.

`3:` Aus `2`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt via **180-14**: $y = +\infty$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y = +\infty$.

`1:` Aus **107-6**"$-\infty < +\infty$" und
aus `VS` gleich "$y = +\infty$"
folgt via **180-14**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$.

`2:` Via **169-8** gilt: $\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$.

`3:` Aus `1`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$" und
aus `2`"$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

<u>Beweis **180-18** `d)`</u>

`1:` Via **169-8** gilt: $\{\ldots,y\} = \{-\infty,\ldots,y\}$.

`2:` Via **180-14** gilt:
$(-\infty \text{ ist } \leq \_\text{Supremum von } \{-\infty,\ldots,y\}) \Leftrightarrow (\{-\infty,\ldots,y\} = 0)$.

`3:` Aus `2`"$(-\infty \text{ ist } \leq \_\text{Supremum von } \{-\infty,\ldots,y\})$
$\Leftrightarrow (\{-\infty,\ldots,y\} = 0)$" und
aus `1`"$\{\ldots,y\} = \{-\infty,\ldots,y\}$"
folgt: $(-\infty \text{ ist } \leq \_\text{Supremum von } \{\ldots,y\}) \Leftrightarrow (\{\ldots,y\} = 0)$.

□

180-19. Via **180-5** ist ein Kriterium für $\{x, \ldots\} = 0$ verfügbar:

180-19(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\{x, \ldots\} = 0$.

`ii)` "$x \notin \mathbb{S}$" *oder* "$x = +\infty$".

`iii)` $\neg(+\infty$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\{x, \ldots\})$.

Beweis **180-19**

`1:` Via **180-5** gilt:

$$(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\}) \Leftrightarrow (0 \neq \{x, \ldots\}) \Leftrightarrow ((x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\neg(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\})) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq \{x, \ldots\})) \Leftrightarrow (\neg((x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty))).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$(\neg(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\})) \Leftrightarrow (\{x, \ldots\} = 0) \Leftrightarrow (\neg((x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty))).$$

`4:` Aus `3` folgt:

$$(\neg(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\})) \Leftrightarrow (\{x, \ldots\} = 0) \Leftrightarrow ((x \notin \mathbb{S}) \vee (\neg(x \neq +\infty))).$$

`5:` Aus `4` folgt:

$$(\neg(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\})) \Leftrightarrow (\{x, \ldots\} = 0) \Leftrightarrow ((x \notin \mathbb{S}) \vee (x = +\infty)).$$

`6:` Aus `5` folgt:

$$\{x, \ldots\} = 0 \Leftrightarrow ((x \notin \mathbb{S}) \vee (x = +\infty)) \Leftrightarrow (\neg(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{x, \ldots\})).$$

□

180-20. Via **180-6** ist ein Kriterium für $\{\ldots, y\} = 0$ verfügbar:

180-20(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $\{\ldots, y\} = 0$.

ii) *“$y \notin \mathbb{S}$” oder “$y = -\infty$”.*

iii) $\neg(-\infty$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\{\ldots, y\})$.

Beweis **180-20**

1: Via **180-6** gilt:

$$(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\ldots, y\}) \Leftrightarrow (0 \neq \{\ldots, y\}) \Leftrightarrow ((y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)).$$

2: Aus 1 folgt:

$$(\neg(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\ldots, y\})) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq \{\ldots, y\})) \Leftrightarrow (\neg((y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty))).$$

3: Aus 2 folgt:

$$(\neg(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\ldots, y\})) \Leftrightarrow (\{\ldots, y\} = 0) \Leftrightarrow (\neg((y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty))).$$

4: Aus 3 folgt:

$$(\neg(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\ldots, y\})) \Leftrightarrow (\{\ldots, y\} = 0) \Leftrightarrow ((y \notin \mathbb{S}) \vee (\neg(y \neq -\infty))).$$

5: Aus 4 folgt:

$$(\neg(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\ldots, y\})) \Leftrightarrow (\{\ldots, y\} = 0) \Leftrightarrow ((y \notin \mathbb{S}) \vee (y = -\infty)).$$

6: Aus 5 folgt:

$$\{\ldots, y\} = 0 \Leftrightarrow ((y \notin \mathbb{S}) \vee (y = -\infty)) \Leftrightarrow (\neg(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\ldots, y\})).$$

□

$\overset{M}{\text{eus.}}$ $\overset{M}{\text{eos.}}$

$\overset{M}{\text{us.}}$ $\overset{M}{\text{os.}}$

Ersterstellung: 16/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

181-1. Mit den vorliegenden Definitionen werden den Klassen aller *Mengen*, die eine untere M_Schranke, eine obere M_Schranke, haben, eigene Bezeichnungen gegeben:

181-1(Definition)

a) $\overset{M}{\mathsf{eus}}$

$$= \mathsf{181.0}(M) = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \omega)\}.$$

b) $\overset{M}{\mathsf{eos}}$

$$= \mathsf{181.1}(M) = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \omega)\}.$$

181-2. Hier werden die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{eus}}$ und von $\overset{M}{\mathsf{eos}}$ thematisiert:

181-2(Satz)

a) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$"
folgt "*x Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *untere M_Schranke von x*".

b) *Aus* "*x Menge*" *und* "*u untere M_Schranke von x*"
folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$"
folgt "*x Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *obere M_Schranke von x*".

d) *Aus* "*x Menge*" *und* "*o obere M_Schranke von x*"
folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$".

Beweis **181-2** `a)` `VS` gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{eus}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $\omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $\omega)\}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $\omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x"
folgt: (x Menge) $\wedge$ ($\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x).

Beweis **181-2** `b)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (u \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x).$

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = u.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere M_Schranke von x" und
aus `1`"$\ldots \Omega = u$"
folgt: Ω untere M_Schranke von x.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω untere M_Schranke von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x.

`4:` Aus `3`"$\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "x Menge..."
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}.$

`5:` Aus `4`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\_\text{Schranke von } \omega)\} = \overset{M}{\mathsf{eus}}$"
folgt: $x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}.$

`c)` `VS` gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{eos}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}.$

`2:` Aus `1.2`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x).$

<u>Beweis **181-2**</u> `d)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = o$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere M_Schranke von x" und
aus `1` "$\ldots \Omega = o$"
folgt: Ω obere M_Schranke von x.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2` "Ω obere M_Schranke von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von x.

`4:` Aus `3` "$\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4` "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } M\_\text{Schranke von } \omega)\} = \overset{M}{\mathsf{eos}}$"
folgt: $x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

$\square$

181-3. Da jede Klasse, die eine untere M_Schranke hat, eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\,M$ ist, ist $\overset{M}{\mathsf{eus}}$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$. Ähnlich ist $\overset{M}{\mathsf{eos}}$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$:

181-3(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{eus}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

b) $\overset{M}{\mathsf{eos}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

Beweis **181-3** a)

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

2: Aus `Thema1` “$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$”
folgt via **181-2**: $\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von α.

3: Aus 2 “… Ω untere M_Schranke von α”
folgt via **35-4**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\,M)$.

Konsequenz via **0-29**: $\overset{M}{\mathsf{eus}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

b)

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

2: Aus `Thema1` “$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$”
folgt via **181-2**: $\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von α.

3: Aus 2 “… Ω obere M_Schranke von α”
folgt via **35-5**: $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\,M)$.

Konsequenz via **0-29**: $\overset{M}{\mathsf{eos}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

□

181-4. Hier werden die "M_Schranken-Relationen" $\overset{M}{\mathsf{us}}$ und $\overset{M}{\mathsf{os}}$ in die Essays eingeführt. Dass es sich hierbei in der Tat um Relationen handelt, wird später thematisiert:

181-4(Definition)

a) $\overset{M}{\mathsf{us}}$

$$= \mathsf{181.2}(M) \; = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

b) $\overset{M}{\mathsf{os}}$

$$= \mathsf{181.3}(M) \; = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

181-5. Nun werden einige Aussagen über die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{us}}$ und $\overset{M}{\mathsf{os}}$ getroffen. Als Vereinfachung werden ab sofort bei Beweisen von Existenz-Aussagen die Terme der Eigenschaften der als existend zu beweisenden Klassen nicht mehr unbedingt einzeln und mit ... angegeben, sondern wenn möglich oder sinvoll vereint stehen gelassen. So lautet etwa der letzte Beweis-Schritt von `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ nicht mehr "Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$", aus `4`"$\Omega$ Menge", aus `2`"$\ldots \Psi$ untere M_Schranke von $\Omega \ldots$" und aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$" folgt "$\exists \Omega, \Psi$: (Ω Menge) $\wedge$ (Ψ untere M_Schranke von Ω) $\wedge$ ($w = (\Omega, \Psi)$)"", sondern kürzer "Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi$: (Ψ untere M_Schranke von Ω) $\wedge$ ($w = (\Omega, \Psi)$)" und aus `4`"Ω Menge" folgt $\exists \Omega, \Psi$: (Ω Menge) $\wedge$ (Ψ untere M_Schranke von Ω) $\wedge$ ($w = (\Omega, \Psi)$)". Wie häufig bei Abkürzungen von Beweisen ist ein höherer Konzentrationsaufwand beim Lesen - im vorliegenden Fall wird die Reihenfolge der Eigenschaften von Ω, Ψ durcheinander gewirbelt - erforderlich:

181-5(Satz)

`a)` *"$w \in \overset{M}{\mathsf{us}}$" genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi$: (Ω Menge) $\wedge$ (Ψ untere M_Schranke von Ω)
$\wedge$($w = (\Omega, \Psi)$)".

`b)` *"$w \in \overset{M}{\mathsf{os}}$" genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi$: (Ω Menge) $\wedge$ (Ψ obere M_Schranke von Ω)
$\wedge$($w = (\Omega, \Psi)$)".

`c)` *"$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$" genau dann, wenn*
"x Menge" und "q untere M_Schranke von x".

`d)` *"$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$" genau dann, wenn*
"x Menge" und "q obere M_Schranke von x".

<u>Beweis **181-5**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{us}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{us}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega)$
$\wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus `4`"Ω Menge"
folgt:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

Beweis **181-5** `a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ untere }M\text{\_Schranke von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ untere M_Schranke von $\Omega\ldots$"
folgt via **35-4**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge…" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi\text{ untere }M\text{\_Schranke von }\Omega)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ untere }M\text{\_Schranke von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ untere }M\text{\_Schranke von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ untere }M\text{\_Schranke von }\Omega\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}=\overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt:
$w\in\overset{M}{\mathsf{us}}$.

Beweis **181-5** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\qquad w \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

1.1: Aus VS gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\qquad w$ Menge.

1.2: Aus VS gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{os}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{os}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\qquad w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

2: Aus 1.2"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\qquad \exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 1.1"w Menge" und
aus 2"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\qquad (\Omega, \Psi)$ Menge.

4: Aus 3"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\qquad \Omega$ Menge.

5: Aus 2"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus 4"Ω Menge"
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

Beweis **181-5** b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ obere }M\_\text{Schranke von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

1: Aus VS gleich "… Ψ obere M_Schranke von Ω …"
folgt via **35-5**: Ψ Menge.

2: Aus VS gleich "… Ω Menge… " und
aus 1"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

3: Aus VS gleich "… $w=(\Omega,\Psi)$" und
aus 2"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

4: Aus VS gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi\text{ obere }M\_\text{Schranke von }\Omega)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus 3"w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ obere }M\_\text{Schranke von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

5: Aus 4"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ obere }M\_\text{Schranke von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ obere }M\_\text{Schranke von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}=\overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt:

$w\in\overset{M}{\mathsf{os}}$.

Beweis **181-5** c) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $(x,q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

1.1: Aus VS gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x,q) Menge.

1.2: Aus VS gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via des bereits bewiesenen a):
$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ untere M_Schranke von $\Omega) \wedge ((x,q) = (\Omega,\Psi))$.

2: Aus 1.2"$\ldots (x,q) = (\Omega,\Psi)$" und
aus 1.1"(x,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (x$ Menge$)$.

3: Aus 1.2"$\ldots \Psi$ untere M_Schranke von $\Omega \ldots$" und
aus 2"$x = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ untere M_Schranke von x.

4: Aus 3"Ψ untere M_Schranke von x" und
aus 2"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q untere M_Schranke von x.

5: Aus 2"$\ldots x$ Menge" und
aus 4"q untere M_Schranke von x"
folgt: $(x$ Menge$) \wedge (q$ untere M_Schranke von $x)$.

Beweis **181-5** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ untere } M\_\text{Schranke von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ untere M_Schranke von x"
folgt via **35-4**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ untere M_Schranke von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q untere M_Schranke von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q untere M_Schranke von Ω"
folgt: Ψ untere M_Schranke von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ untere M_Schranke von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ untere } M\_\text{Schranke von } \Omega)$
$\wedge((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ untere } M\_\text{Schranke von } \Omega)$
$\wedge((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x, q) \in \overset{M}{\texttt{us}}$.

<u>Beweis **181-5**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x,q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ obere M_Schranke von $\Omega) \wedge ((x,q) = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (x,q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `1.1`"(x,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (x$ Menge$)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi$ obere M_Schranke von $\Omega \ldots$" und
aus `2`"$x = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ obere M_Schranke von x.

`4:` Aus `3`"Ψ obere M_Schranke von x" und
aus `2`"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q obere M_Schranke von x.

`5:` Aus `2`"$\ldots x$ Menge" und
aus `4`"q obere M_Schranke von x"
folgt: $(x$ Menge$) \wedge (q$ obere M_Schranke von $x)$.

Beweis **181-5** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ obere } M\text{\_Schranke von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ obere M_Schranke von x"
folgt via **35-5**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ obere M_Schranke von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q obere M_Schranke von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q obere M_Schranke von Ω"
folgt: Ψ obere M_Schranke von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists\Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ obere M_Schranke von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega)$
$\wedge((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Omega)$
$\wedge((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x, q) \in \overset{M}{\texttt{os}}$.

$\square$

181-6. Wenig überraschend sind $\overset{M}{\mathsf{us}}$ und $\overset{M}{\mathsf{os}}$ Relationen:

181-6(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{us}}$ *Relation.*

b) $\overset{M}{\mathsf{os}}$ *Relation.*

Beweis **181-6** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{us}}$

Aus `Thema1`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **181-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{us}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{us}}$ Relation.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{os}}$

Aus `Thema1`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via **181-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{os}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{os}}$ Relation.

$\square$

181-7. Nun werden einige Aussagen über Definitions- und Bild-Bereiche von $\overset{M}{\mathsf{us}}$ und $\overset{M}{\mathsf{os}}$ getroffen:

<u>**181-7(Satz)**</u>

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) = \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) = \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

c) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

d) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

e) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

f) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

<u>Beweis **181-7**</u> a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$.

2.1: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

2.2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

3: Aus 2.2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **181-5**: Ω untere M_Schranke von α.

4: Aus 2.1 "α Menge" und
aus 3 "Ω untere M_Schranke von α"
folgt via **181-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$"

...

<u>Beweis **181-7**</u> `a)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$"
folgt via **181-2**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha)$.

`3:` Aus `2`"α Menge..." und
aus `2`"...Ω untere M_Schranke von α"
folgt via **181-5**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M}{\mathsf{eus}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M}{\mathsf{eus}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) = \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

Beweis **181-7** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$ ”
folgt via **ElementAxiom**: $\qquad \alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$ ”
folgt via **7-7**: $\qquad \exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

`3:` Aus `2.2`“ $\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$ ”
folgt via **181-5**: $\qquad \Omega$ obere M_Schranke von α.

`4:` Aus `2.1`“ α Menge ” und
aus `3`“ Ω obere M_Schranke von α ”
folgt via **181-2**: $\qquad \alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` | “ $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$ ”

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad \alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$ ”
folgt via **181-2**:
$(\alpha$ Menge$) \wedge (\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`3:` Aus `2`“ α Menge… ” und
aus `2`“ $\ldots \Omega$ obere M_Schranke von α ”
folgt via **181-5**: $\qquad (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

`4:` Aus `3`“ $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$ ”
folgt via **7-5**: $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A2` | “ $\overset{M}{\mathsf{eos}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$ ”

…

<u>Beweis</u> **181-7** `b)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M}{\mathsf{eos}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) = \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) = \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`2:` Via **181-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{eus}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) = \overset{M}{\mathsf{eus}}$" und
aus `2`"$\overset{M}{\mathsf{eus}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) = \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

`2:` Via **181-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{eos}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) = \overset{M}{\mathsf{eos}}$" und
aus `2`"$\overset{M}{\mathsf{eos}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

`e)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **181-5**: α untere M_Schranke von Ω.

`4:` Aus `3`"α untere M_Schranke von Ω"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,M$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}) \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

<u>Beweis **181-7**</u> `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via **181-5**: α obere M_Schranke von Ω.

`4:` Aus `3` "α obere M_Schranke von Ω"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,M$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}) \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

$\square$

181-8. Sind für M weitere Aussagen verfügbar, so kann unter Umständen mehr über $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$ und $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$ ausgesagt werden:

181-8(Satz)

a) *Aus "*p_M_p*" folgt "*$p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$*".*

b) *Aus "*p_M_p*" folgt "*$p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$*".*

c) *Aus "*M *reflexiv in* E*" folgt "*$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$*".*

d) *Aus "*M *reflexiv in* E*" folgt "*$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$*".*

e) *Aus "*r *Relation in* x*" und "*r *reflexiv in* x*" folgt "*$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}}) = x$*".*

f) *Aus "*r *Relation in* x*" und "*r *reflexiv in* x*" folgt "*$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}}) = x$*".*

Beweis **181-8** a) VS gleich p_M_p.

1.1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

1.2: Aus VS gleich "p_M_p" folgt via **38-23**: p ist M_Minimum von $\{p\}$.

2: Aus 1.2 "p ist M_Minimum von $\{p\}$" folgt via **38-6**: p untere M_Schranke von $\{p\}$.

3: Aus 1.1 "$\{p\}$ Menge" und aus 2 "p untere M_Schranke von $\{p\}$" folgt via **181-5**: $(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

4: Aus 3 "$(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$" folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$.

Beweis **181-8** `b)` `VS` gleich p_M_p.

`1.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p_M_p"
folgt via **38-23**: p ist M_Maximum von $\{p\}$.

`2:` Aus `1.2`"p ist M_Maximum von $\{p\}$"
folgt via **38-7**: p obere M_Schranke von $\{p\}$.

`3:` Aus `1.1`"$\{p\}$ Menge" und
aus `2`"p obere M_Schranke von $\{p\}$"
folgt via **181-5**: $(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

`4:` Aus `3`"$(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$.

`c)` `VS` gleich M reflexiv in E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus `2`"α_M_α"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{us}})$.

Beweis **181-8** `d)` `VS` gleich M reflexiv in E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2`: Aus `VS` gleich "M reflexiv in E" und aus `Thema1`"$\alpha \in E$" folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3`: Aus `2`"α_M_α" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{os}})$.

<u>Beweis **181-8**</u> `ef)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ reflexiv in } x)$.

`1.1:` Via **181-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}}) \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

`1.2:` Via **181-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}}) \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $(\mathsf{dom}\, r = x) \wedge (\mathsf{ran}\, r = x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}}) \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus `1.3`"$\mathsf{dom}\, r = x \ldots$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}}) \subseteq x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}}) \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus `1.3`"$\ldots \mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}}) \subseteq x$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}})$.

`2.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}})$.

`3.e):` Aus `2.1`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}}) \subseteq x$" und
aus `2.3`"$x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{us}}) = x$.

`3.f):` Aus `2.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}}) \subseteq x$" und
aus `2.4`"$x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{os}}) = x$.

$\square$

181-9. Nun werden $\overset{M}{\mathsf{eus}}, \overset{M}{\mathsf{eos}}, \overset{M}{\mathsf{us}}, \overset{M}{\mathsf{os}}$ in Bezug auf $y \subseteq x$ - wobei x unterschiedliche Rollen spielt - untersucht:

181-9(Satz)

a) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$" *folgt* "$y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$".

b) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$" *folgt* "$y \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$".

c) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$" *folgt* "$(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$".

d) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$" *folgt* "$(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$".

<u>Beweis</u> **181-9** `a)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \in \overset{M}{\mathsf{eus}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$"
folgt via **181-2**: $(x$ Menge$) \wedge (\exists \Omega : \Omega$ untere M_Schranke von $x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1` "x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \Omega$ untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **35-6**: Ω untere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1` "y Menge" und
aus `2.2` "Ω untere M_Schranke von y"
folgt via **181-2**: $y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`b)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \in \overset{M}{\mathsf{eos}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$"
folgt via **181-2**: $(x$ Menge$) \wedge (\exists \Omega : \Omega$ obere M_Schranke von $x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1` "x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \Omega$ obere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **35-6**: Ω obere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1` "y Menge" und
aus `2.2` "Ω obere M_Schranke von y"
folgt via **181-2**: $y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

<u>Beweis **181-9**</u> `c)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge ((x,q) \in \overset{M}{\mathsf{us}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x,y) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **181-5**: (x Menge) $\wedge$ (q untere M_Schranke von x).

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots q$ untere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **35-6**: q untere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"q untere M_Schranke von y"
folgt via **181-5**: $(y,q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`d)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge ((x,q) \in \overset{M}{\mathsf{os}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x,y) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$"
folgt via **181-5**: (x Menge) $\wedge$ (q obere M_Schranke von x).

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots q$ obere M_Schranke von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **35-6**: q obere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"q obere M_Schranke von y"
folgt via **181-5**: $(y,q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

$\square$

$$\overset{M}{\mathsf{einf.}}\ \overset{M}{\mathsf{esup.}}$$

$$\overset{M}{\mathsf{inf.}}\ \overset{M}{\mathsf{sup.}}$$

Ersterstellung: 16/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

182-1. Mit den vorliegenden Definitionen werden den Klassen aller *Mengen*, die ein M_Infimum, ein M_Supremum haben, eigene Bezeichnungen gegeben:

182-1(Definition)

a) $\overset{M}{\mathsf{einf}}$

$$= \mathsf{182.0}(M) = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\}.$$

b) $\overset{M}{\mathsf{esup}}$

$$= \mathsf{182.1}(M) = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \omega)\}.$$

182-2. Hier werden die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{einf}}$ und von $\overset{M}{\mathsf{esup}}$ thematisiert:

<u>**182-2(Satz)**</u>

a) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"

folgt "x *Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* M_*Infimum von* x".

b) *Aus* "x *Menge*" *und* "inf *ist* M_*Infimum von* x"

folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"

folgt "x *Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* M_*Supremum von* x".

d) *Aus* "x *Menge*" *und* "sup *ist* M_*Supremum von* x"

folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$".

<u>Beweis **182-2**</u> `a)` `VS` gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{einf}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x.

`3:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

Beweis **182-2** `b)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = inf$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von x" und
aus `1` "$\ldots \Omega = inf$"
folgt: Ω ist M_Infimum von x.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2` "Ω ist M_Infimum von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x.

`4:` Aus `3` "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von x" und
aus `VS` gleich "x Menge..."
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4` "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \omega)\} = \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt: $x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{esup}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \omega)\}$.

`2:` Aus `1.2` "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von x.

`3:` Aus `1.1` "x Menge" und
aus `2` "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } x)$.

<u>Beweis **182-2**</u> `d)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (sup \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = sup$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von x" und
aus `1` "$\ldots \Omega = sup$"
folgt: Ω ist M_Supremum von x.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2` "Ω ist M_Supremum von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von x.

`4:` Aus `3` "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von x" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4` "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \omega)\} = \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt: $x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

$\square$

182-3. Die Klasse $\overset{M}{\mathsf{einf}}$ ist eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$ und $\overset{M}{\mathsf{esup}}$ ist eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$. Genauer gilt $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$ und $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$:

182-3(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

b) $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

c) $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

d) $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

Beweis **182-3** a)

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$”
folgt via **182-2**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

3: Aus 2“$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von α”
folgt via **36-1(Def)**: Ω untere M_Schranke von α.

4: Aus 3“Ω untere M_Schranke von α”
folgt via **35-4**: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\,M)$.

Konsequenz via **0-29**: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

Beweis **182-3** b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **182-2**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

3: Aus 2 "... Ω ist M_Supremum von α"
folgt via **36-1(Def)**: Ω obere M_Schranke von α.

4: Aus 3 "Ω obere M_Schranke von α"
folgt via **35-5**: $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

Konsequenz via **0-29**: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

c)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **182-2**:
$(\alpha$ Menge$) \wedge (\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

3: Aus 2 "... Ω ist M_Infimum von α"
folgt via **36-1(Def)**: Ω untere M_Schranke von α.

4: Aus 2 "α Menge..." und
aus 3 "Ω untere M_Schranke von α"
folgt via **181-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

<u>Beweis</u> **182-3** `d)`

`Thema1` $\alpha\in\overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha\in\overset{M}{\mathsf{esup}}$”
folgt via **182-2**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \alpha)$.

`3:` Aus `2`“...Ω ist M_Supremum von α”
folgt via **36-1(Def)**: Ω obere M_Schranke von α.

`4:` Aus `2`“α Menge... ” und
aus `3`“Ω obere M_Schranke von α”
folgt via **181-2**: $\alpha\in\overset{M}{\mathsf{eos}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha\in\overset{M}{\mathsf{esup}}) \Rightarrow (\alpha\in\overset{M}{\mathsf{eos}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{esup}}\subseteq\overset{M}{\mathsf{eos}}$.

$\square$

182-4. Nun werden die Relationen der M_Infima und M_Suprema in die Essays eingeführt. Dass es sich hierbei um Relationen handelt, wird später thematisiert. Die Abkürzungen cd) zur Auswertung von $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ in x werden stets ohne expliziten Bezug zu **182-4(Def)** eingesetzt und finden hauptsächlich dann Verwendung, wenn $\overset{M}{\mathsf{inf}}$, wenn $\overset{M}{\mathsf{sup}}$, eine Funktion ist:

182-4(Definition)

a) $\overset{M}{\mathsf{inf}}$

$$= \mathsf{182.2}(M) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

b) $\overset{M}{\mathsf{sup}}$

$$= \mathsf{182.3}(M) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

c) $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(x)$.

d) $\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x = \overset{M}{\mathsf{sup}}\,(x)$.

182-5. Hier werden einige Aussagen über die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ angegeben:

182-5(Satz)

a) "$w \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$" *genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Psi$ *ist M_Infimum von* $\Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Psi))$".

b) "$w \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" *genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Psi$ *ist M_Supremum von* $\Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Psi))$".

c) "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$" *genau dann, wenn*
"x *Menge*" *und* "q *ist M_Infimum von* x".

d) "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" *genau dann, wenn*
"x *Menge*" *und* "q *ist M_Supremum von* x".

Beweis **182-5** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

1.1: Aus VS gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

1.2: Aus VS gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{inf}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

2: Aus 1.2"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 1.1"w Menge" und
aus 2"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

4: Aus 3"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

5: Aus 2"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus 4"Ω Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge})$
$\wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots \Psi$ ist M_Infimum von $\Omega \ldots$"
folgt via **36-3**: Ψ Menge.

2: Aus VS gleich "$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" und
aus 1"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Ψ) Menge.

3: Aus VS gleich "$\ldots w = (\Omega, \Psi)$" und
aus 2"(Ω, Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

4: Aus VS gleich "$\exists \Omega, \Psi : \ldots (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus 3"w Menge"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega)$
$\wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

5: Aus 4"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega \wedge (w = (\Omega, \Psi)))\} = \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt: $w \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

Beweis **182-5** `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{sup}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus `4`"Ω Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

<u>Beweis **182-5**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ ist M_Supremum von $\Omega\ldots$"
folgt via **36-4**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }\Omega)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}$
$=\overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt: $w\in\overset{M}{\mathsf{sup}}$.

Beweis **182-5** c) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

1.1: Aus VS gleich "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x, q) Menge.

1.2: Aus VS gleich "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen a):
$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_Infimum von $\Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

2: Aus 1.2"$\ldots (x, q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus 1.1"(x, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (x$ Menge$)$.

3: Aus 1.2"$\ldots \Psi$ ist M_Infimum von $\Omega \ldots$" und
aus 2"$x = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ ist M_Infimum von x.

4: Aus 3"Ψ ist M_Infimum von x" und
aus 2"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q ist M_Infimum von x.

5: Aus 2"$\ldots x$ Menge" und
aus 4"q ist M_Infimum von x"
folgt: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Infimum von $x)$.

Beweis **182-5** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\_\text{Infimum von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Infimum von x"
folgt via **36-3**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Infimum von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q ist M_Infimum von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_Infimum von Ω"
folgt: Ψ ist M_Infimum von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_Infimum von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Infimum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

Beweis **182-5** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_Supremum von $\Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (x, q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `1.1`"(x, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (x$ Menge$)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi$ ist M_Supremum von $\Omega \ldots$" und
aus `2`"$x = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ ist M_Supremum von x.

`4:` Aus `3`"Ψ ist M_Supremum von x" und
aus `2`"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q ist M_Supremum von x.

`5:` Aus `2`"$\ldots x$ Menge" und
aus `4`"q ist M_Supremum von x"
folgt: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Supremum von $x)$.

<u>Beweis **182-5**</u> `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\_\text{Supremum von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Supremum von x"
folgt via **36-4**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Supremum von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q ist M_Supremum von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_Supremum von Ω"
folgt: Ψ ist M_Supremum von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_Supremum von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

$\square$

182-6. Wenig überraschend sind $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Relationen:

182-6(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Relation.*

b) $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Relation.*

Beweis **182-6** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$

Aus `Thema1` “$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$”
folgt via **182-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Relation.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$

Aus `Thema1` “$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$”
folgt via **182-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Relation.

$\square$

182-7. Nun werden einige Aussagen über Definitions- und Bild-Bereiche von $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ getroffen:

182-7(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

c) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

d) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

e) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

f) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

<u>Beweis</u> **182-7** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **182-5**: Ω ist M_Infimum von α.

`4:` Aus `2.1` "α Menge" und
aus `3` "Ω ist M_Infimum von α"
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}\text{”}}$

...

Beweis **182-7** a)

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad \alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

2: Aus Thema1.2 “$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$”
folgt via **182-2**:
$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha).$$

3: Aus 2 “α Menge...” und
aus 2 “...Ω ist M_Infimum von α”
folgt via **182-5**: $\qquad (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

4: Aus 3 “$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$”
folgt via **7-5**: $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

Ergo Thema1.2: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})\text{”}}$

1.3: Aus A1 gleich “$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$” und
aus A2 gleich “$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\qquad \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

<u>Beweis</u> **182-7** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$"
folgt via **ElementAxiom**: $\qquad \alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$"
folgt via **7-7**: $\qquad \exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **182-5**: $\qquad \Omega$ ist M_Supremum von α.

`4:` Aus `2.1` "α Menge" und
aus `3` "Ω ist M_Supremum von α"
folgt via **182-2**: $\qquad \alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$"

...

<u>Beweis **182-7**</u> `b)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **182-2**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)$.

`3:` Aus 2"α Menge... " und
aus 2"... Ω ist M_Supremum von α"
folgt via **182-5**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`4:` Aus 3"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus 1"$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$" und
aus 2"$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

<u>Beweis **182-7**</u> `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

`3:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \overset{M}{\mathsf{esup}}$” und
aus `2`“$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

`e)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$”
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$”
folgt via **182-5**: α ist M_Infimum von Ω.

`4:` Aus `3`“α ist M_Infimum von Ω”
folgt via **36-3**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Beweis **182-7** `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.
`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$" folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" folgt via **182-5**:	α ist M_Supremum von Ω.
`4:` Aus `3` "α ist M_Supremum von Ω" folgt via **36-4**:	$\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

182-8. Sind für M weitere Aussagen verfügbar, so kann unter Umständen mehr über $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$ und $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$ ausgesagt werden:

182-8(Satz)

a) *Aus* “p_M_p” *folgt* “$p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$”.

b) *Aus* “p_M_p” *folgt* “$p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$”.

c) *Aus* “M *reflexiv in* E” *folgt* “$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$”.

d) *Aus* “M *reflexiv in* E” *folgt* “$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$”.

e) *Aus* “r *Relation in* x” *und* “r *reflexiv in* x” *folgt* “$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}}) = x$”.

f) *Aus* “r *Relation in* x” *und* “r *reflexiv in* x” *folgt* “$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}}) = x$”.

Beweis **182-8** a) VS gleich p_M_p.

1.1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

1.2: Aus VS gleich “p_M_p”
folgt via **38-23**: p ist M_Minimum von $\{p\}$.

2: Aus 1.2 “p ist M_Minimum von $\{p\}$”
folgt via **38-6**: p ist M_Infimum von $\{p\}$.

3: Aus 1.1 “$\{p\}$ Menge” und
aus 2 “p ist M_Infimum von $\{p\}$”
folgt via **182-5**: $(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

4: Aus 3 “$(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$”
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

Beweis **182-8** `b)` `VS` gleich p_M_p.

`1.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p_M_p"
folgt via **38-23**: p ist M_Maximum von $\{p\}$.

`2:` Aus `1.2`"p ist M_Maximum von $\{p\}$"
folgt via **38-7**: p ist M_Supremum von $\{p\}$.

`3:` Aus `1.1`"$\{p\}$ Menge" und
aus `2`"p ist M_Supremum von $\{p\}$"
folgt via **182-5**: $(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`4:` Aus `3`"$(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`c)` `VS` gleich M reflexiv in E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus `2`"α_M_α"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

Beweis **182-8** `d)` `VS` gleich M reflexiv in E.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus 2"α_M_α"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

Beweis **182-8** `ef)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ reflexiv in } x)$.

`1.1:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r)$.

`1.2:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\,r = x$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\,r = x$.

`2.1:` $(\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r) \overset{1.3}{=} x \cap \mathsf{ran}\,r \overset{1.4}{=} x \cap x \overset{2-14}{=} x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}})$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}})$.

`3.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r)$" und
aus `2.1`"$(\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r) = \ldots = x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}}) \subseteq x$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r)$" und
aus `2.1`"$(\mathsf{dom}\,r) \cap (\mathsf{ran}\,r) = \ldots = x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}}) \subseteq x$.

`4.e):` Aus `3.1`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}}) \subseteq x$" und
aus `2.2`"$x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{inf}}) = x$.

`4.f):` Aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}}) \subseteq x$" und
aus `2.3`"$x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{sup}}) = x$.

□

182-9. Bekannter Weise ist ein M_Infimum, ein M_Supremum, von x eine untere M_Schranke, eine obere M_Schranke jeder TeilKlasse von x. Hieraus ergeben sich die vorliegenden Resultate:

182-9(Satz)

a) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$" *folgt* "$y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$".

b) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$" *folgt* "$y \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$".

c) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$" *folgt* "$(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$".

d) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" *folgt* "$(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$".

<u>Beweis **182-9**</u> `a)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **182-2**: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **36-5**: Ω untere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"Ω untere M_Schranke von y"
folgt via **181-2**: $y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`b)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \in \overset{M}{\mathsf{esup}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **182-2**: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **36-5**: Ω obere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"Ω obere M_Schranke von y"
folgt via **181-2**: $y \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

<u>Beweis **182-9**</u> `c)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge ((x,q) \in \overset{M}{\mathsf{inf}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x,y) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **182-5**: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Infimum von $x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots q$ ist M_Infimum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **36-5**: q untere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"q untere M_Schranke von y"
folgt via **181-5**: $(y,q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`d)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge ((x,q) \in \overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x,y) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **182-5**: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Supremum von $x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots q$ ist M_Supremum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **36-5**: q obere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"q obere M_Schranke von y"
folgt via **181-5**: $(y,q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

□

182-10. Es gilt $\overset{M}{\mathsf{inf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$:

182-10(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{inf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$.

b) $\overset{M}{\mathsf{sup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$.

Beweis **182-10** a)

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

2: Aus Thema1 “ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$ ”
folgt via **182-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 2 “ $\ldots \Psi$ ist M_Infimum von $\Omega \ldots$ ”
folgt via **36-1(Def)**: Ψ untere M_Schranke von Ω.

4: Aus 2 “ $\ldots \Omega$ Menge$\ldots$ ” und
aus 3 “ Ψ untere M_Schranke von Ω ”
folgt via **181-5**: $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

5: Aus 2 “ $\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus 4 “ $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$ ”
folgt: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{us}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$.

Beweis **182-10** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}.$
`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" folgt via **182-5**:	$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$
`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi$ ist M_Supremum von $\Omega \ldots$" folgt via **36-1(Def)**:	Ψ obere M_Schranke von Ω.
`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" und aus `3`"Ψ obere M_Schranke von Ω" folgt via **181-5**:	$(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{os}}.$
`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und aus `4`"$(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$" folgt:	$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{os}}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{os}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}.$

$\square$

182-11. Falls M antiSymmetrisch ist, dann handelt es sich bei $\overset{M}{\mathsf{inf}}$, bei $\overset{M}{\mathsf{sup}}$, unter anderem um Funktionen:

182-11(Satz)

a) *Aus "M antiSymmetrisch"*

folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}} : \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{inf}} \rightarrow (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

b) *Aus "M antiSymmetrisch"*

folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}} : \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{sup}} \rightarrow (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

<u>Beweis **182-11**</u> `a)` `VS` gleich M antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{inf}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` “$(\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{inf}}\ldots$”
folgt via **182-5**: β ist M_Infimum von α.

`2.2:` Aus `Thema1.1` “$\ldots(\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{inf}}$”
folgt via **182-5**: γ ist M_Infimum von α.

`3:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch”,
aus `2.1` “β ist M_Infimum von α” und
aus `2.2` “γ ist M_Infimum von α”
folgt via **46-2**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{inf}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{inf}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”

`1.2:` Via **182-6** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Relation.

`1.3:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})=\overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`1.4:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1.2` “$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{inf}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{inf}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`3:` Aus `2` “$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion”,
aus `1.3` “$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})=\overset{M}{\mathsf{einf}}$” und
aus `1.4` “$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}:\overset{M}{\mathsf{einf}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

Beweis **182-11** `b) VS` gleich M antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{sup}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{sup}}\ldots$”
folgt via **182-5**: β ist M_Supremum von α.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots(\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{sup}}$”
folgt via **182-5**: γ ist M_Supremum von α.

`3:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch”,
aus `2.1`“β ist M_Supremum von α” und
aus `2.2`“γ ist M_Supremum von α”
folgt via **46-3**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{sup}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{sup}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”

`1.2:` Via **182-6** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Relation.

`1.3:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})=\overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`1.4:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1.2`“$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{sup}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{sup}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`3:` Aus `2`“$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion”,
aus `1.3`“$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})=\overset{M}{\mathsf{esup}}$” und
aus `1.4`“$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}:\overset{M}{\mathsf{esup}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

$\square$

182-12. Falls M Vollständig ist, ist 0 die einzige Menge mit unterer M_Schranke, die *möglicherweise kein* M_Infimum hat. Analoges gilt für obere M_Schranken:

182-12(Satz)

a) *Aus "M Vollständig" folgt* "$\overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$".

b) *Aus "M Vollständig" folgt* "$\overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$".

<u>Beweis **182-12**</u> `a)` `VS` gleich M Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

`Thema2.1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus\{0\}$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus\{0\}$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}}) \wedge (\alpha \notin \{0\})$.

`4.1:` Aus `3`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}} \ldots$"
folgt via **181-2**: $(\alpha$ Menge$)$
$\wedge(\exists\Psi : \Psi$ untere M_Schranke von $\alpha)$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \alpha \notin \{0\}$"
folgt via **1-7**: $(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$.

`5:` Aus `4.1`"α Menge…" und
aus `4.2`"$(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$"
folgt: $\alpha \neq 0$.

`6:` Aus `5`
folgt: $0 \neq \alpha$.

`7:` Aus `1`"M unten Vollständig",
aus `6`"$0 \neq \alpha$" und
aus `4.1`"$\ldots \Psi$ untere M_Schranke von α"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

`8:` Aus `4.1`"α Menge…" und
aus `7`"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von α"
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus\{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{"}\overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus\{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}\text{"}}$

`2.2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`3:` Aus `A1` gleich "$\overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus\{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$" und
aus `2.2`"$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$"
folgt: $\overset{M}{\mathsf{eus}} \setminus\{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

<u>Beweis **182-12**</u> `b) VS` gleich M Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\}$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\}$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}}) \wedge (\alpha \notin \{0\})$.

`4.1:` Aus `3`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}} \ldots$"
folgt via **181-2**: $(\alpha$ Menge$)$
$\wedge(\exists\Psi : \Psi$ obere M_Schranke von $\alpha)$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \alpha \notin \{0\}$"
folgt via **1-7**: $(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$.

`5:` Aus `4.1`"α Menge…" und
aus `4.2`"$(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$"
folgt: $\alpha \neq 0$.

`6:` Aus `5`
folgt: $0 \neq \alpha$.

`7:` Aus `1`"M oben Vollständig",
aus `6`"$0 \neq \alpha$" und
aus `4.1`"$\ldots \Psi$ obere M_Schranke von α"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

`8:` Aus `4.1`"α Menge…" und
aus `7`"$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von α"
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$"

`2.2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

`3:` Aus `A1` gleich "$\overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$" und
aus `2.2`"$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$"
folgt: $\overset{M}{\mathsf{eos}} \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

□

182-13. Falls M unten Stark Vollständig ist, ist 0 die einzige TeilMenge von $\mathsf{ran}\, M$, die *möglicherweise kein* M_Infimum hat. Analoges gilt wenn M oben Stark Vollständig:

182-13(Satz)

a) *Aus "M unten Stark Vollständig"*

folgt "$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$".

b) *Aus "M oben Stark Vollständig"*

folgt "$\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$".

<u>Beweis **182-13**</u> `a)` `VS` gleich M unten Stark Vollständig.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\}$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)) \wedge (\alpha \notin \{0\})$.

`3.1:` Aus `2`“$\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \ldots$”
folgt via **0-26**: $(\alpha$ Menge$) \wedge (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha \notin \{0\}$”
folgt via **1-7**: $(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$.

`4:` Aus `3.1`“α Menge$\ldots$” und
aus `3.2`“$(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$”
folgt: $\alpha \neq 0$.

`5:` Aus `4`
folgt: $0 \neq \alpha$.

`6:` Aus `VS` gleich “M unten Stark Vollständig”,
aus `5`“$0 \neq \alpha$” und
aus `3.1`“$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

`7:` Aus `3.1`“α Menge$\ldots$” und
aus `6`“$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von α”
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$”

`2.2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$” und
aus `2.2`“$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$”
folgt: $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

Beweis **182-13** `b) VS` gleich M oben Stark Vollständig.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\}$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)) \wedge (\alpha \notin \{0\})$.

`3.1:` Aus `2`“$\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \ldots$”
folgt via **0-26**: $(\alpha$ Menge$) \wedge (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha \notin \{0\}$”
folgt via **1-7**: $(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$.

`4:` Aus `3.1`“α Menge...” und
aus `3.2`“$(\alpha \neq 0) \vee (\alpha$ Unmenge$)$”
folgt: $\alpha \neq 0$.

`5:` Aus `4`
folgt: $0 \neq \alpha$.

`6:` Aus `VS` gleich “M oben Stark Vollständig”,
aus `5`“$0 \neq \alpha$” und
aus `3.1`“$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.

`7:` Aus `3.1`“α Menge...” und
aus `6`“$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von α”
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$”

`2.2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$” und
aus `2.2`“$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$”
folgt: $\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

$\square$

182-14. Falls M Total Vollständig ist, dann gilt sowohl $\overset{M}{\mathsf{einf}} = \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$ als auch $\overset{M}{\mathsf{esup}} = \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$:

182-14(Satz)

a) *Aus "M Total Vollständig" folgt "$\overset{M}{\mathsf{einf}} = \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$".*

b) *Aus "M Total Vollständig" folgt "$\overset{M}{\mathsf{esup}} = \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$".*

Beweis **182-14** a) `VS` gleich M Total Vollständig.

1: Aus `VS` gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

`Thema2.1` $\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

3: Aus `Thema2.1` "$\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-26**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

4: Aus 1 "M unten Total Vollständig" und
aus 3 "$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von α.

5: Aus 3 "α Menge…" und
aus 4 "$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von α"
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$"

2.2: Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

3: Aus 2.2 "$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `A1` gleich "$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{M}{\mathsf{einf}} = \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

<u>Beweis **182-14**</u> `b)` `VS` gleich M Total Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich “M Total Vollständig”
folgt via **51-1(Def)**: M oben Total Vollständig.

> `Thema2.1` $\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.
>
> `3:` Aus `Thema2.1`“$\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$”
> folgt via **0-26**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.
>
> `4:` Aus `1`“M oben Total Vollständig” und
> aus `3`“$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
> folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von α.
>
> `5:` Aus `3`“α Menge...” und
> aus `4`“$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von α”
> folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$”

`2.2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`3:` Aus `2.2`“$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$” und
aus `A1` gleich “$\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{M}{\mathsf{esup}} = \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

$\square$

$\overset{M}{\mathsf{emin.}}$ $\overset{M}{\mathsf{emax.}}$

$\overset{M}{\mathsf{min.}}$ $\overset{M}{\mathsf{max.}}$

Ersterstellung: 17/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

183-1. Mit den vorliegenden Definitionen werden den Klassen aller *Mengen*, die ein M_Minimum, ein M_Maximum haben, eigene Bezeichnungen gegeben:

183-1(Definition)

a) $\overset{M}{\mathsf{emin}}$

$$= \mathsf{183.0}(M) = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \omega)\}.$$

b) $\overset{M}{\mathsf{emax}}$

$$= \mathsf{183.1}(M) = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \omega)\}.$$

183-2. Hier werden die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{emin}}$ und von $\overset{M}{\mathsf{emax}}$ thematisiert:

183-2(Satz)

a) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$"
folgt "*x Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist M_Minimum von x*".

b) *Aus* "*x Menge*" *und* "*min ist M_Minimum von x*"
folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$"
folgt "*x Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist M_Maximum von x*".

d) *Aus* "*x Menge*" *und* "*max ist M_Maximum von x*"
folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$".

Beweis **183-2** a) VS gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

1.1: Aus VS gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

1.2: Aus VS gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{emin}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Minimum von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Minimum von } \omega)\}$.

2: Aus 1.2 "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Minimum von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

3: Aus 1.1 "x Menge" und
aus 2 "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Minimum von } x)$.

<u>Beweis **183-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (min \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = min$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots min$ ist M_Minimum von x" und
aus `1`"$\ldots \Omega = min$"
folgt: Ω ist M_Minimum von x.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_Minimum von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x.

`4:` Aus `3`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von x" und
aus `VS` gleich "x Menge..."
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \omega)\} = \overset{M}{\mathsf{emin}}$"
folgt: $x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{emax}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \omega)\}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von x.

`3:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } x)$.

<u>Beweis **183-2**</u> `d)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (max \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = max$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots max$ ist M_Maximum von x" und
aus `1` "$\ldots \Omega = max$"
folgt: Ω ist M_Maximum von x.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2` "Ω ist M_Maximum von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von x.

`4:` Aus `3` "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von x" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Maximum von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4` "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Maximum von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Maximum von } \omega)\} = \overset{M}{\mathsf{emax}}$"
folgt: $x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

$\square$

183-3. Die Klasse $\overset{M}{\mathsf{emin}}$ ist eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$ und $\overset{M}{\mathsf{emax}}$ ist eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$. Genauer gilt $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$, woraus auch $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$ und $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$ folgt. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - e) - b) - d) - f)`:

183-3(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

b) $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

c) $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

d) $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

e) $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

f) $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

<u>Beweis **183-3**</u> `ace)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$” folgt via **183-2**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \alpha)$.
`3:` Aus 2“$\ldots \Omega$ ist M_Minimum von α” folgt via **38-6**: Ω ist M_Infimum von α.
`4:` Aus 2“α Menge ...” und aus 3“Ω ist M_Infimum von α” folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}\text{”}}$

`1.2:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`1.3:` Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`2.a):` Aus `A1` gleich “$\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$” und aus `1.2`“$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$” folgt via **0-6**: $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`2.c):` Aus `A1` folgt: $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`2.e):` Aus `A1` gleich “$\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$” und aus `1.3`“$\overset{M}{\mathsf{einf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$” folgt via **0-6**: $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

<u>Beweis **183-3** `bdf`)</u>

`Thema1.1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

`2`: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$"
folgt via **183-2**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \alpha)$.

`3`: Aus `2`"$\ldots \Omega$ ist M_Maximum von α"
folgt via **38-7**: Ω ist M_Supremum von α.

`4`: Aus `2`"α Menge ..." und
aus `3`"Ω ist M_Supremum von α"
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{esup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$"

`1.2`: Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`1.3`: Via **182-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

`2.a)`: Aus `A1` gleich "$\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$" und
aus `1.2`"$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$"
folgt via **0-6**: $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`2.c)`: Aus `A1`
folgt: $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`2.e)`: Aus `A1` gleich "$\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$" und
aus `1.3`"$\overset{M}{\mathsf{esup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$"
folgt via **0-6**: $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

□

183-4. Nun werden die Relationen der M_Minima und M_Maxima in die Essays eingeführt. Dass es sich hierbei um Relationen handelt, wird später thematisiert. Die Abkürzungen von `cd)` werden stets ohnen expliziten Bezug zu **183-4** eingesetzt und kommen hauptsächlich dann zur Verwendung, wenn $\overset{M}{\mathsf{min}}$, wenn $\overset{M}{\mathsf{max}}$, eine Funktion ist:

183-4(Definition)

a) $\overset{M}{\mathsf{min}}$

$$= \mathsf{183.2}(M) \;= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

b) $\overset{M}{\mathsf{max}}$

$$= \mathsf{183.3}(M) \;= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

c) $\overset{M}{\mathsf{min}}\, x = \overset{M}{\mathsf{min}}\, (x)$.

d) $\overset{M}{\mathsf{max}}\, x = \overset{M}{\mathsf{max}}\, (x)$.

183-5. Hier werden einige Aussagen über die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{min}}$ und $\overset{M}{\mathsf{max}}$ angegeben:

183-5(Satz)

a) *"$w \in \overset{M}{\mathsf{min}}$" genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ ist M_Minimum von $\Omega)$
$\wedge(w = (\Omega, \Psi))$".

b) *"$w \in \overset{M}{\mathsf{max}}$" genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ ist M_Maximum von $\Omega)$
$\wedge(w = (\Omega, \Psi))$".

c) *"$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$" genau dann, wenn*
"x Menge" und "q ist M_Minimum von x".

d) *"$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$" genau dann, wenn*
"x Menge" und "q ist M_Maximum von x".

<u>Beweis **183-5**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{min}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{min}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus `4`"Ω Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

<u>Beweis **183-5**</u> `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega \text{ Menge})$
$\wedge(\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ ist M_Minimum von $\Omega\ldots$"
folgt via **38-3**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}=\overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt: $w\in\overset{M}{\mathsf{min}}$.

Beweis **183-5** b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $w\in\overset{M}{\mathsf{max}}$.

1.1: Aus VS gleich "$w\in\overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

1.2: Aus VS gleich "$w\in\overset{M}{\mathsf{max}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{max}}=\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

2: Aus 1.2"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$"
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

3: Aus 1.1"w Menge" und
aus 2"$\ldots w=(\Omega,\Psi)$"
folgt: (Ω,Ψ) Menge.

4: Aus 3"(Ω,Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

5: Aus 2"$\exists\Omega,\Psi:(\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus 4"Ω Menge"
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega \text{ Menge})\wedge(\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

Beweis **183-5** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ ist }M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ ist M_Maximum von $\Omega\ldots$"
folgt via **38-4**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi\text{ ist }M\text{\_Maximum von }\Omega)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Maximum von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Maximum von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}$
$=\overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt: $w\in\overset{M}{\mathsf{max}}$.

<u>Beweis **183-5**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x,q)\in\overset{M}{\mathsf{min}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(x,q)\in\overset{M}{\mathsf{min}}$”
folgt via **ElementAxiom**: (x,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(x,q)\in\overset{M}{\mathsf{min}}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists\Omega,\Psi:(\Psi$ ist M_Minimum von $\Omega)\wedge((x,q)=(\Omega,\Psi))$.

`2:` Aus `1.2`“$\ldots(x,q)=(\Omega,\Psi)$” und
aus `1.1`“(x,q) Menge”
folgt via **IGP**: $(x=\Omega)\wedge(q=\Psi)\wedge(x$ Menge$)$.

`3:` Aus `1.2`“$\ldots\Psi$ ist M_Minimum von $\Omega\ldots$” und
aus `2`“$x=\Omega\ldots$”
folgt: Ψ ist M_Minimum von x.

`4:` Aus `3`“Ψ ist M_Minimum von x” und
aus `2`“$\ldots q=\Psi\ldots$”
folgt: q ist M_Minimum von x.

`5:` Aus `2`“$\ldots x$ Menge” und
aus `4`“q ist M_Minimum von x”
folgt: $(x$ Menge$)\wedge(q$ ist M_Minimum von $x)$.

Beweis **183-5** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Minimum von x"
folgt via **36-3**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Minimum von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q ist M_Minimum von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_Minimum von Ω"
folgt: Ψ ist M_Minimum von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_Minimum von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

<u>Beweis **183-5**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x,q)\in\overset{M}{\mathsf{max}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,q)\in\overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,q)\in\overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\_\text{Maximum von }\Omega)\wedge((x,q)=(\Omega,\Psi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots(x,q)=(\Omega,\Psi)$" und
aus `1.1`"(x,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x=\Omega)\wedge(q=\Psi)\wedge(x\text{ Menge})$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots\Psi$ ist M_Maximum von $\Omega\ldots$" und
aus `2`"$x=\Omega\ldots$"
folgt: Ψ ist M_Maximum von x.

`4:` Aus `3`"Ψ ist M_Maximum von x" und
aus `2`"$\ldots q=\Psi\ldots$"
folgt: q ist M_Maximum von x.

`5:` Aus `2`"$\ldots x$ Menge" und
aus `4`"q ist M_Maximum von x"
folgt: $(x\text{ Menge})\wedge(q\text{ ist }M\_\text{Maximum von }x)$.

Beweis **183-5** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\_\text{Maximum von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Maximum von x"
folgt via **36-4**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Maximum von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q ist M_Maximum von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_Maximum von Ω"
folgt: Ψ ist M_Maximum von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_Maximum von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Maximum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\_\text{Maximum von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

$\square$

183-6. Wenig überraschend sind $\overset{M}{\mathsf{min}}$ und $\overset{M}{\mathsf{max}}$ Relationen:

183-6(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{min}}$ *Relation.*

b) $\overset{M}{\mathsf{max}}$ *Relation.*

Beweis **183-6** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}$

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{min}}$ Relation.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}$

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **183-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{max}}$ Relation.

□

183-7. Nun werden einige Aussagen über Definitions- und Bild-Bereiche von $\overset{M}{\mathsf{min}}$ und $\overset{M}{\mathsf{max}}$ getroffen:

183-7(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{min}}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{max}}$.

c) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,M)$.

d) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

e) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

f) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

<u>Beweis</u> **183-7** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: Ω ist M_Minimum von α.

`4:` Aus `2.1` "α Menge" und
aus `3` "Ω ist M_Minimum von α"
folgt via **183-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{emin}}$"

...

<u>Beweis **183-7**</u> `a)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$"
folgt via **183-2**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \alpha)$.

`3:` Aus 2"α Menge…" und
aus 2"…Ω ist M_Minimum von α"
folgt via **183-5**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

`4:` Aus 3"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{emin}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) = \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

<u>Beweis</u> **183-7** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$”
folgt via **183-5**: Ω ist M_Maximum von α.

`4:` Aus `2.1`“α Menge” und
aus `3`“Ω ist M_Maximum von α”
folgt via **183-2**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{emax}}$”

...

<u>Beweis **183-7**</u> b)

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$.
2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$" folgt via **183-2**:	$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \alpha)$.
3: Aus 2 "α Menge..." und aus 2 "...Ω ist M_Maximum von α" folgt via **183-5**:	$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.
4: Aus 3 "$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})\text{”}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{emax}}$" und
aus A2 gleich "$\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

c)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) = \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

2: Via **183-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

3: Aus 1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) = \overset{M}{\mathsf{emin}}$" und
aus 2 "$\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

<u>Beweis</u> **183-7** `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

`2:` Via **183-3** gilt: $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$" und
aus `2`"$\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,M)$.

`e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: α ist M_Minimum von Ω.

`4:` Aus `3`"α ist M_Minimum von Ω"
folgt via **38-3**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

<u>Beweis</u> **183-7** `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$.

`2:` Aus `Thema1`“ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$ ”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`3:` Aus `2`“ $\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$ ”
folgt via **183-5**: α ist M_Maximum von Ω.

`4:` Aus `3`“ α ist M_Maximum von Ω ”
folgt via **38-4**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

183-8. Sind für M weitere Aussagen verfügbar, so kann unter Umständen mehr über $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$ und $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$ ausgesagt werden:

183-8(Satz)

a) *Aus* “p_M_p” *folgt* “$p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$”.

b) *Aus* “p_M_p” *folgt* “$p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$”.

c) *Aus* “M *reflexiv in* E” *folgt* “$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$”.

d) *Aus* “M *reflexiv in* E” *folgt* “$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$”.

e) *Aus* “r *Relation in* x” *und* “r *reflexiv in* x” *folgt* “$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}}) = x$”.

f) *Aus* “r *Relation in* x” *und* “r *reflexiv in* x” *folgt* “$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}}) = x$”.

Beweis **183-8** a) VS gleich p_M_p.

1.1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

1.2: Aus VS gleich “p_M_p” folgt via **38-23**: p ist M_Minimum von $\{p\}$.

2: Aus 1.1“$\{p\}$ Menge” und aus 1.2“p ist M_Minimum von $\{p\}$” folgt via **183-5**: $(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

3: Aus 2“$(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$” folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$.

Beweis **183-8** `b)` `VS` gleich p_M_p.

`1.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p_M_p"
folgt via **38-23**: p ist M_Maximum von $\{p\}$.

`2:` Aus `1.1`"$\{p\}$ Menge" und
aus `1.2`"p ist M_Maximum von $\{p\}$"
folgt via **183-5**: $(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`3:` Aus `2`"$(\{p\}, p) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$.

`c)` `VS` gleich M reflexiv in E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in E" und
aus `Thema1`"$\alpha \in E$"
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus `2`"α_M_α"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})$.

<u>Beweis **183-8**</u> `d)` `VS` gleich M reflexiv in E.

`Thema1`	$\alpha \in E$.
`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in E" und aus `Thema1`"$\alpha \in E$" folgt via **30-17(Def)**:	α_M_α.
`3:` Aus 2"α_M_α" folgt via des bereits bewiesenen `b)`:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}})$.

<u>Beweis **183-8**</u> `ef)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ reflexiv in } x)$.

`1.1:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$.

`1.2:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

`2.1:` $(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) \overset{1.3}{=} x \cap \mathsf{ran}\, r \overset{1.4}{=} x \cap x \overset{\mathbf{2-14}}{=} x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}})$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ reflexiv in x"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}})$.

`3.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus `2.1`"$(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) = \ldots = x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}}) \subseteq x$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus `2.1`"$(\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) = \ldots = x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}}) \subseteq x$.

`4.e):` Aus `3.1`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}}) \subseteq x$" und
aus `2.2`"$x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{min}}) = x$.

`4.f):` Aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}}) \subseteq x$" und
aus `2.3`"$x \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{r}{\mathsf{max}}) = x$.

□

183-9. Bekannter Weise ist ein M_Minimum, ein M_Maximum, von x eine untere M_Schranke, eine obere M_Schranke jeder TeilKlasse von x. Hieraus ergeben sich die vorliegenden Resultate:

183-9(Satz)

a) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$" *folgt* "$y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$".

b) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$" *folgt* "$y \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$".

c) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$" *folgt* "$(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$".

d) *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$(x, q) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$" *folgt* "$(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$".

<u>Beweis **183-9**</u> `a)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \in \overset{M}{\mathsf{emin}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$"
folgt via **183-2**: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist M_Minimum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **38-5**: Ω untere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"Ω untere M_Schranke von y"
folgt via **181-2**: $y \in \overset{M}{\mathsf{eus}}$.

`b)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \in \overset{M}{\mathsf{emax}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$"
folgt via **183-2**: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist M_Maximum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **38-5**: Ω obere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"Ω obere M_Schranke von y"
folgt via **181-2**: $y \in \overset{M}{\mathsf{eos}}$.

<u>Beweis **183-9**</u> `c)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge ((x, q) \in \overset{M}{\mathsf{min}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x, y) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Minimum von $x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"…q ist M_Minimum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **38-5**: q untere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"q untere M_Schranke von y"
folgt via **181-5**: $(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`d)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge ((x, q) \in \overset{M}{\mathsf{max}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x, y) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **183-5**: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Maximum von $x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x Menge…"
folgt via **TeilMengenAxiom**: y Menge.

`2.2:` Aus `1`"…q ist M_Maximum von x" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **38-5**: q obere M_Schranke von y.

`3:` Aus `2.1`"y Menge" und
aus `2.2`"q obere M_Schranke von y"
folgt via **181-5**: $(y, q) \in \overset{M}{\mathsf{os}}$.

□

183-10. Es gilt $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}$, $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$ und $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}$, $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$:

183-10(Satz)

a) $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

b) $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

c) $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$.

d) $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$.

Beweis **183-10** a)

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 2 "… Ψ ist M_Minimum von Ω …"
folgt via **38-6**: Ψ ist M_Infimum von Ω.

4: Aus 2 "… Ω Menge… " und
aus 3 "Ψ ist M_Infimum von Ω"
folgt via **182-5**: $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

5: Aus 2 "… $\alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus 4 "$(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

<u>Beweis **183-10**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **183-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge})$
$\wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi$ ist M_Maximum von $\Omega \ldots$"
folgt via **38-7**: Ψ ist M_Supremum von Ω.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `3`"Ψ ist M_Supremum von Ω"
folgt via **182-5**: $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `4`"$(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`1.2:` Via **182-10** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$.

`2:` Aus `1.1`"$\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}$" und
aus `1.2`"$\overset{M}{\mathsf{inf}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$"
folgt via **0-6**: $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{us}}$.

<u>Beweis **183-10**</u> `d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`1.2:` Via **182-10** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$.

`2:` Aus `1.1`“$\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}$” und
aus `1.2`“$\overset{M}{\mathsf{sup}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$”
folgt via **0-6**: $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{os}}$.

$\square$

183-11. Falls M antiSymmetrisch ist, dann handelt es sich bei $\overset{M}{\mathsf{min}}$, bei $\overset{M}{\mathsf{max}}$, unter anderem um Funktionen:

183-11(Satz)

a) *Aus "M antiSymmetrisch"*

folgt "$\overset{M}{\mathsf{min}} : \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{min}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

b) *Aus "M antiSymmetrisch"*

folgt "$\overset{M}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{max}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

Beweis **183-11** `a)` `VS` gleich M antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{min}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{min}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` “$(\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{min}}\ldots$”
folgt via **183-5**: β ist M_Minimum von α.

`2.2:` Aus `Thema1.1` “$\ldots(\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{min}}$”
folgt via **183-5**: γ ist M_Minimum von α.

`3:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch”,
aus `2.1` “β ist M_Minimum von α” und
aus `2.2` “γ ist M_Minimum von α”
folgt via **155-5**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{min}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{min}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”

`1.2:` Via **183-6** gilt: $\overset{M}{\mathsf{min}}$ Relation.

`1.3:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})=\overset{M}{\mathsf{emin}}$.

`1.4:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1.2` “$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M}{\mathsf{min}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M}{\mathsf{min}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion.

`3:` Aus `2` “$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion”,
aus `1.3` “$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})=\overset{M}{\mathsf{emin}}$” und
aus `1.4` “$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{min}}:\overset{M}{\mathsf{emin}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

<u>Beweis **183-11**</u> `b)` `VS` gleich M antiSymmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $((\alpha, \beta) \in \overset{M}{\mathsf{max}}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{max}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha, \beta) \in \overset{M}{\mathsf{max}} \ldots$”
folgt via **183-5**: β ist M_Maximum von α.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$”
folgt via **183-5**: γ ist M_Maximum von α.

`3:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch”,
aus `2.1`“β ist M_Maximum von α” und
aus `2.2`“γ ist M_Maximum von α”
folgt via **155-5**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	“$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \overset{M}{\mathsf{max}}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{max}})) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”

`1.2:` Via **183-6** gilt: $\overset{M}{\mathsf{max}}$ Relation.

`1.3:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

`1.4:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1.2`“$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \overset{M}{\mathsf{max}}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{max}})) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion.

`3:` Aus `2`“$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion”,
aus `1.3`“$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$” und
aus `1.4`“$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{max}} : \overset{M}{\mathsf{emax}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

$\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in.}$ $\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax.}$

$\overset{M}{\mu}\mathsf{in.}$ $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax.}$

Ersterstellung: 17/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

184-1. Mit den vorliegenden Definitionen werden den Klassen aller *Mengen*, die ein M_minimales Element, ein M_maximales Element, haben, eigene Bezeichnungen gegeben. Die zu Grunde liegenden Klassen wurden bereits in **#39**, wo ihnen läßlicher Weise *kein* Name gegeben wurde, eingeführt:

184-1(Definition)

a) $\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}.$$

b) $\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}.$$

39-19(Def) $\{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$
39-19(Def) $\{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$.

184-2. Hier werden die Elemente von $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$ und von $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$ thematisiert:

184-2(Satz)

a) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$"
folgt "*x Menge*" *und* "$\exists\Omega : \Omega$ *ist M_minimales Element von x*".

b) *Aus* "*x Menge*" *und* "*μin ist M_minimales Element von x*"
folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$"
folgt "*x Menge*" *und* "$\exists\Omega : \Omega$ *ist M_maximales Element von x*".

d) *Aus* "*x Menge*" *und* "*μax ist M_maximales Element von x*"
folgt "$x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$".

Beweis **184-2** a) VS gleich $x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$.

1.1: Aus VS gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

1.2: Aus VS gleich "$x \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$" und
aus "$\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}} = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

2: Aus 1.2"$x \in \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x.

3: Aus 1.1"x Menge" und
aus 2"$\exists\Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x)$.

<u>Beweis **184-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (\mu in \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \mu in$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mu in$ ist M_minimales Element von x" und
aus `1`"$\ldots \Omega = \mu in$"
folgt: Ω ist M_minimales Element von x.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_minimales Element von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x.

`4:` Aus `3`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von x" und
aus `VS` gleich "x Menge…"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \omega)\} = \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt: $x \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$" und
aus "$\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x.

`3:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } x)$.

<u>Beweis **184-2**</u> `d)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (\mu ax \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } x)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \mu ax$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mu ax$ ist M_maximales Element von x" und
aus `1` "$\ldots \Omega = \mu ax$"
folgt: Ω ist M_maximales Element von x.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2` "Ω ist M_maximales Element von x"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x.

`4:` Aus `3` "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von x" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$.

`5:` Aus `4` "$x \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \omega)\} = \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt: $x \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

□

184-3. Sowohl $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$ als auch $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$ sind auf Grund der vorliegenden Aussagen Unmengen. Da bekannter Weise jedes M_Minimum, jedes M_Maximum, von E ein M_minimales Element, ein M_maximales Element, von E ist, ist $\overset{M}{\mathsf{emin}}$ eine TeilKlasse von $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$, ist $\overset{M}{\mathsf{emax}}$ eine TeilKlasse von $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$:

184-3(Satz)

a) $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$.

b) $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$.

c) $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$.

d) $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$.

Beweis **184-3** a)

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$”
folgt via **27-6**: $\exists\Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

3: Aus 2“$\ldots\Omega$ Menge”
folgt via **39-14**: Ω ist M_minimales Element von $\{\Omega\}$.

4: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

5: Aus 4“$\{\Omega\}$ Menge” und
aus 3“Ω ist M_minimales Element von $\{\Omega\}$”
folgt via **184-2**: $\{\Omega\} \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$.

6: Aus 2“$\ldots\alpha = \{\Omega\}\ldots$” und
aus 5“$\{\Omega\} \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$”
folgt: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$.

Beweis **184-3** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$”
folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega$ Menge”
folgt via **39-14**: Ω ist M_maximales Element von $\{\Omega\}$.

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

`5:` Aus `4`“$\{\Omega\}$ Menge” und
aus `3`“Ω ist M_maximales Element von $\{\Omega\}$”
folgt via **184-2**: $\{\Omega\} \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$” und
aus `5`“$\{\Omega\} \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$”
folgt: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

<u>Beweis</u> **184-3** c)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}$"
folgt via **183-2**:
$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \alpha).$$

3: Aus 2"$\ldots \Omega$ ist M_Minimum von α"
folgt via **40-1**: Ω ist M_minimales Element von α.

4: Aus 2"α Menge$\ldots$" und
aus 3"Ω ist M_minimales Element von α"
folgt via **184-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emin}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

d)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}$"
folgt via **183-2**:
$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \alpha).$$

3: Aus 2"$\ldots \Omega$ ist M_Maximum von α"
folgt via **40-1**: Ω ist M_maximales Element von α.

4: Aus 2"α Menge$\ldots$" und
aus 3"Ω ist M_maximales Element von α"
folgt via **184-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{emax}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{emax}} \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

$\square$

184-4. Die Relationen der M_minimalen Elemente, der M_maximalen Elemente, in die Essays eingeführt. Dass es sich hierbei um Relationen handelt, wird später thematisiert:

184-4(Definition)

a) $\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$

$$= \mathsf{184.0}(M)$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

b) $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$

$$= \mathsf{184.1}(M)$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

184-5. Hier werden einige Aussagen über die Elemente von $\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$ und $\overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$ angegeben:

184-5(Satz)

a) *"$w \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$" genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega)$
$\wedge(w = (\Omega, \Psi))$".

b) *"$w \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$" genau dann, wenn*
"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega)$
$\wedge(w = (\Omega, \Psi))$".

c) *"$(x, q) \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$" genau dann, wenn*
"x Menge" und "q ist M_minimales Element von x".

d) *"$(x, q) \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$" genau dann, wenn*
"x Menge" und "q ist M_maximales Element von x".

Beweis **184-5** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $w \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

1.1: Aus VS gleich "$w \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

1.2: Aus VS gleich "$w \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$" und
aus "$\overset{M}{\mu}\mathsf{in} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt:
$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

2: Aus 1.2 "$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 1.1 "w Menge" und
aus 2 "$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

4: Aus 3 "(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

5: Aus 2 "$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus 4 "Ω Menge"
folgt:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

<u>Beweis **184-5**</u> `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ ist }M\text{\_minimales Element von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega\ldots$"
folgt via **39-3**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt:
$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_minimales Element von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}$
$=\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$"
folgt: $w\in\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$.

Beweis **184-5** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$" und
aus "$\overset{M}{\mu}\mathsf{ax} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega)$
$\wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt:
$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2`: Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega)$
$\wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3`: Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4`: Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5`: Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus `4`"Ω Menge"
folgt:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

Beweis **184-5** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ ist }M\text{\_maximales Element von }\Omega)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega\ldots$"
folgt via **39-4**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi\text{ ist }M\text{\_maximales Element von }\Omega)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt:
$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_maximales Element von }\Omega)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_maximales Element von }\Omega)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_maximales Element von }\Omega\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}$
$=\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt: $w\in\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

<u>Beweis **184-5**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x,q) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega) \wedge ((x,q) = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (x,q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `1.1`"(x,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (x$ Menge$)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi$ ist M_minimales Element von $\Omega \ldots$" und
aus `2`"$x = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ ist M_minimales Element von x.

`4:` Aus `3`"Ψ ist M_minimales Element von x" und
aus `2`"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q ist M_minimales Element von x.

`5:` Aus `2`"$\ldots x$ Menge" und
aus `4`"q ist M_minimales Element von x"
folgt: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_minimales Element von $x)$.

<u>Beweis **184-5**</u> `c)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } x).$

`1.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = x.$

`1.2:` Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = q.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_minimales Element von x"
folgt via **39-3**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q).$

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_minimales Element von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q ist M_minimales Element von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi).$

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_minimales Element von Ω"
folgt: Ψ ist M_minimales Element von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists\Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_minimales Element von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega)$
$\wedge((x, q) = (\Omega, \Psi)).$

`5:` Aus `4`"$\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \Omega)$
$\wedge((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x, q) \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}}.$

Beweis **184-5** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x,q) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **ElementAxiom**: (x,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,q) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega, \Psi : (\Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega) \wedge ((x,q) = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (x,q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `1.1`"(x,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (x$ Menge$)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi$ ist M_maximales Element von $\Omega \ldots$" und
aus `2`"$x = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ ist M_maximales Element von x.

`4:` Aus `3`"Ψ ist M_maximales Element von x" und
aus `2`"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q ist M_maximales Element von x.

`5:` Aus `2`"$\ldots x$ Menge" und
aus `4`"q ist M_maximales Element von x"
folgt: $(x$ Menge$) \wedge (q$ ist M_maximales Element von $x)$.

Beweis **184-5** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } x)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_maximales Element von x"
folgt via **36-4**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (x, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_maximales Element von x" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = x$"
folgt: q ist M_maximales Element von Ω.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(x, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_maximales Element von Ω"
folgt: Ψ ist M_maximales Element von Ω.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_maximales Element von Ω" und
aus `3.1`"$(x, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_maximales Element von } \Omega) \wedge ((x, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x, q) \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$.

$\square$

184-6. Wenig überraschend sind $\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$ und $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$ Relationen:

184-6(Satz)

a) $\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$ *Relation.*

b) $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$ *Relation.*

Beweis **184-6** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$

Aus `Thema1`“$\alpha \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$”
folgt via **184-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$ Relation.

b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$

Aus `Thema1`“$\alpha \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$”
folgt via **184-5**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$ Relation.

$\square$

184-7. Nun werden einige Aussagen über die Definitions-Bereiche von $\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$, von $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$, getroffen. Die Bild-Bereiche sind jeweils gleich dem Universum. Damit sind sowohl Definitions- als auch Bildbereich von $\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$, von $\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$, Unmengen: Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - d) - e) - f)`:

184-7(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

c) $\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.

d) $\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

e) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) = \mathcal{U}$.

f) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}) = \mathcal{U}$.

Beweis **184-7** ac)

Thema1.1	$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.
2.1: Aus Thema1.1“ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$ ” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
2.2: Aus Thema1.1“ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$ ” folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.
3: Aus 2.2“ $\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$ ” folgt via **184-5**:	Ω ist M_minimales Element von α.
4: Aus 2.1“ α Menge ” und aus 3“ Ω ist M_minimales Element von α ” folgt via **184-2**:	$\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | “ $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$ ”

...

Beweis **184-7** `ac)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$”
folgt via **184-2**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_minimales Element von } \alpha)$.

`3:` Aus 2“α Menge...” und
aus 2“...Ω ist M_minimales Element von α”
folgt via **184-5**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`4:` Aus 3“$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$”

`1.a):` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$” und
aus `A2` gleich “$\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`2:` Via **184-3** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`3.c):` Aus 2“$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$” und
aus `1.a)`“$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{in}$”
folgt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.

Beweis **184-7** `bd)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **184-5**: Ω ist M_maximales Element von α.

`4:` Aus `2.1`"α Menge" und
aus `3`"Ω ist M_maximales Element von α"
folgt via **184-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}) \subseteq \mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"

...

<u>Beweis</u> **184-7** `bd)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha\in\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha\in\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **184-2**:
$(\alpha\text{ Menge})\wedge(\exists\Omega:\Omega\text{ ist }M\text{\_maximales Element von }\alpha)$.

`3:` Aus `2`"α Menge..." und
aus `2`"...Ω ist M_maximales Element von α"
folgt via **184-5**: $(\alpha,\Omega)\in\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha,\Omega)\in\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **7-5**: $\alpha\in\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})\Rightarrow(\alpha\in\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2}\,\Big|\text{ “}\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}\subseteq\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})\text{”}}$

`1.b):` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})\subseteq\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}\subseteq\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})=\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`2:` Via **184-3** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}\subseteq\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`3.d):` Aus `2`"$\mathcal{U}_{\text{sngltn}}\subseteq\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$" und
aus `1.a)`"$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})=\mathsf{e}\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}\subseteq\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

Beweis **184-7** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2`“α Menge”
folgt via **39-14**: α ist M_minimales Element von $\{\alpha\}$.

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\alpha\}$ Menge.

`5:` Aus `4`“$\{\alpha\}$ Menge” und
aus `3`“α ist M_minimales Element von $\{\alpha\}$”
folgt via **184-5**: $(\{\alpha\}, \alpha) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$.

`6:` Aus `5`“$(\{\alpha\}, \alpha) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{in}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{in}) = \mathcal{U}$.

Beweis **184-7** `f)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2`"α Menge"
folgt via **39-14**: α ist M_maximales Element von $\{\alpha\}$.

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\alpha\}$ Menge.

`5:` Aus `4`"$\{\alpha\}$ Menge" und
aus `3`"α ist M_maximales Element von $\{\alpha\}$"
folgt via **184-5**: $(\{\alpha\}, \alpha) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$.

`6:` Aus `5`"$(\{\alpha\}, \alpha) \in \overset{M}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax})$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mu}\mathsf{ax}) = \mathcal{U}$.

□

184-8. Von ähnlichem Geist wie in **184-3** stellt sich hier heraus, dass $\overset{M}{\mathsf{min}}$ eine Teilklasse von $\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$, dass $\overset{M}{\mathsf{max}}$ eine TeilKlasse von $\overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$, ist:

<u>**184-8(Satz)**</u>

a) $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$.

b) $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$.

<u>Beweis **184-8**</u> a)

`Thema1` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

2: Aus `Thema1` “ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}$ ”
folgt via **183-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Minimum von } \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 2 “ $\ldots \Psi$ ist M_Minimum von $\Omega \ldots$ ”
folgt via **40-1**: Ψ ist M_minimales Element von Ω.

4: Aus 2 “ $\ldots \Omega$ Menge$\ldots$ ” und
aus 3 “ Ψ ist M_minimales Element von Ω ”
folgt via **184-5**: $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$.

5: Aus 2 “ $\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus 4 “ $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$ ”
folgt: $\alpha \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{min}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mu\mathsf{in}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{min}} \subseteq \overset{M}{\mu\mathsf{in}}$.

Beweis **184-8** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **183-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Maximum von } \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2` "... Ψ ist M_Maximum von Ω ..."
folgt via **40-1**: Ψ ist M_maximales Element von Ω.

`4:` Aus `2` "... Ω Menge... " und
aus `3` "Ψ ist M_maximales Element von Ω"
folgt via **184-5**: $(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$.

`5:` Aus `2` "... $\alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `4` "$(\Omega, \Psi) \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$"
folgt: $\alpha \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{max}}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mu\mathsf{ax}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{max}} \subseteq \overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$.

$\square$

$$\overset{M,E}{\mathsf{efl}} . \overset{M,E}{\mathsf{floor}}.$$

$$\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} . \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}.$$

Ersterstellung: 16/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

185-1. Mit den vorliegenden Definitionen werden den Klassen aller *Mengen* p, für die $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$ ein M_Supremum, für die $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot \rangle$ ein M_Infimum hat, eigene Bezeichnungen gegeben:

185-1(Definition)

a) $\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$

$$= \mathsf{185.0}(M, E) = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\}.$$

b) $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$

$$= \mathsf{185.1}(M, E) = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot \rangle)\}.$$

185-2. Hier werden die Elemente von $\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$ und von $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$ thematisiert:

<u>**185-2(Satz)**</u>

a) *Aus* "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt "p *Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* M_*Supremum von* $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$".

b) *Aus* "p *Menge*" *und* "q *ist* M_*Supremum von* $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$".

c) *Aus* "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt "p *Menge*" *und* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* M_*Infimum von* $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot \rangle$".

d) *Aus* "p *Menge*" *und* "q *ist* M_*Infimum von* $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$".

<u>Beweis **185-2**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$" und
aus "$\overset{M,E}{\mathsf{efl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\}$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

`3:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p])$.

<u>Beweis **185-2**</u> `b)` `VS` gleich $\quad (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p])$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus `1`"$\ldots \Omega = q$"
folgt: Ω ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

`4:` Aus `3`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus `VS` gleich "p Menge$\ldots$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\}$.

`5:` Aus `4`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \omega])\} = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$" und
aus "$\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\}$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Beweis **185-2** `d)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `1`"$\ldots \Omega = q$"

folgt: Ω ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"Ω ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3`"$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `VS` gleich "p Menge$\ldots$"

folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\}$.

`5:` Aus `4`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\} = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"

folgt: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

$\square$

185-3. In Anlehnung an in `matlab` gebräuchliche Notationen werden die Relationen $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ in die Essays eingeführt. Dass es sich hierbei in der Tat um Relationen handelt, wird in **185-5** nachgewiesen:

185-3(Definition)

a) $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$

$$= \mathsf{185.2}(M,E) \quad = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

b) $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$

$$= \mathsf{185.3}(M,E) \quad = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

185-4. Hier werden einige Aussagen über die Elemente von $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ angegeben:

185-4(Satz)

a) "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$" *genau dann, wenn*

$$\text{“}\exists\Omega, \Psi : (\Omega \textit{ Menge}) \wedge (\Psi \textit{ ist } M\text{\_}\textit{Supremum von } E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (w = (\Omega, \Psi))\text{”}.$$

b) "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$" *genau dann, wenn*

$$\text{“}\exists\Omega, \Psi : (\Omega \textit{ Menge}) \wedge (\Psi \textit{ ist } M\text{\_}\textit{Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (w = (\Omega, \Psi))\text{”}.$$

c) "$(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$" *genau dann, wenn*

$$\text{“}p \textit{ Menge}\text{” } \textit{und } \text{“}q \textit{ ist } M\text{\_}\textit{Supremum von } E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]\text{”}.$$

d) "$(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$" *genau dann, wenn*

$$\text{“}p \textit{ Menge}\text{” } \textit{und } \text{“}q \textit{ ist } M\text{\_}\textit{Infimum von } E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle\text{”}.$$

Beweis **185-4** a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $w \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

1.1: Aus VS gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

1.2: Aus VS gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$" und
aus "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

2: Aus 1.2 "$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 1.1 "w Menge" und
aus 2 "$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

4: Aus 3 "(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

5: Aus 2 "$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus 4 "Ω Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

<u>Beweis **185-4**</u> `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\Omega])\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Psi$ ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\Omega]\ldots$"
folgt via **36-4**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi$ ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\Omega])$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3`"w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\Omega])$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\Omega])$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Supremum von }E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\Omega])\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}$
$=\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt: $w\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

<u>Beweis **185-4**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $w \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$" und
aus "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus `4`"Ω Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge(w = (\Omega, \Psi))$.

<u>Beweis **185-4**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})$
$\wedge(\Psi\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E\cap[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`1:` Aus `VS` gleich "… Ψ ist M_Infimum von $E\cap[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle$ …"
folgt via **36-3**: Ψ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "… Ω Menge… " und
aus `1` "Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "… $w=(\Omega,\Psi)$" und
aus `2` "(Ω,Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega,\Psi:\ldots(\Psi$ ist M_Infimum von $E\cap[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)$
$\wedge(w=(\Omega,\Psi))$" und
aus `3` "w Menge"
folgt: $w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E\cap[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$.

`5:` Aus `4` "$w\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E\cap[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)$
$\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Psi\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E\cap[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle)\wedge(w=(\Omega,\Psi)))\}$
$=\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt: $w\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

Beweis **185-4** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]) \wedge ((p,q) = (\Omega, \Psi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (p$ Menge$)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \Omega] \ldots$" und
aus `2`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

`4:` Aus `3`"Ψ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus `2`"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

`5:` Aus `2`"$\ldots p$ Menge" und
aus `4`"q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt: $(p$ Menge$) \wedge (q$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p])$.

<u>Beweis **185-4**</u> c) $\boxed{\Leftarrow}$

VS gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p])$.

1.1: Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = p$.

1.2: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = q$.

1.3: Aus VS gleich "$\ldots q$ ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **36-4**: q Menge.

2.1: Aus 1.1"$\ldots \Omega = p$" und
aus 1.2"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

2.2: Aus 1.1"$\ldots \Omega = p$" und
aus VS gleich "p Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

2.3: Aus VS gleich "$\ldots q$ ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus 1.1"$\ldots \Omega = p$"
folgt: q ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega]$.

3.1: Aus 2.1
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Psi)$.

3.2: Aus 1.2"$\ldots \Psi = q$" und
aus 2.3"q ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega]$"
folgt: Ψ ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega]$.

4: Aus 1.1"$\exists\Omega \ldots$",
aus 1.2"$\exists\Psi \ldots$",
aus 2.2"Ω Menge",
aus 3.2"Ψ ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega]$" und
aus 3.1"$(p, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega])$
$\wedge((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

5: Aus 4"$\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} \Omega])$
$\wedge((p, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

Beweis **185-4** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \text{ ist } M\_\text{Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p,q) = (\Omega, \Psi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (p \text{ Menge})$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi$ ist $M_$Infimum von $E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$" und
aus `2`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: Ψ ist $M_$Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3`"Ψ ist $M_$Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2`"$\ldots q = \Psi \ldots$"
folgt: y ist $M_$Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `2`"$\ldots p$ Menge" und
aus `4`"q ist $M_$Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\_\text{Infimum von } E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Beweis **185-4** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **36-3**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "p Menge$\ldots$"
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: q ist M_Infimum von $E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `2.3`"q ist M_Infimum von $E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: Ψ ist M_Infimum von $E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.2`"Ω Menge",
aus `3.2`"Ψ ist M_Infimum von $E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `3.1`"$(p, q) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E \cap [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

$\square$

185-5. Die Klassen $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ sind Relationen:

185-5(Satz)

a) $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Relation.*

b) $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Relation.*

Beweis **185-5** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$

Aus Thema1 "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **185-4**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Relation.

b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$

Aus Thema1 "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **185-4**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Relation.

$\square$

185-6. Der Definitions-Bereich von $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ ist $\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$, von $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ ist $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$, und die der Bild-Bereich von $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ ist eine TeilKlasse von $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$:

185-6(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

c) $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

d) $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Beweis **185-6** a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.

2.1: Aus `Thema1.1` “$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

2.2: Aus `Thema1.1` “$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

3: Aus 2.2 “$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$”
folgt via **185-4**: Ω ist M_Supremum von $\langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$.

4: Aus 2.1 “α Menge” und
aus 3 “Ω ist M_Supremum von $\langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$”
folgt via **185-2**: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$”

...

Beweis **185-6** a)

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt via **185-2**:

$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]).$$

3: Aus 2 "α Menge..." und
aus 2 "...Ω ist M_Supremum von $\langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$"
folgt via **185-4**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

4: Aus 3 "$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{"} \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$" und
aus A2 gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{efl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

Beweis **185-6** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **185-4**: Ω ist M_Infimum von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `2.1` "α Menge" und
aus `3` "Ω ist M_Infimum von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-2**: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}\text{"}}$

...

Beweis **185-6** `b)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **185-2**:

$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_Infimum von } [\alpha \overset{M}{|} \cdot \rangle).$$

`3:` Aus `2` "α Menge... " und
aus `2` "...Ω ist M_Infimum von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt via **185-4**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

Beweis **185-6** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$"

folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"

folgt via **182-5**: α ist M_Supremum von $\langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]$.

4: Aus 3 "α ist M_Supremum von $\langle \cdot \overset{M}{|} \Omega]$"
folgt via **36-4**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$"

folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"

folgt via **182-5**: α ist M_Infimum von $[\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

4: Aus 3 "α ist M_Infimum von $[\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt via **36-3**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

$\square$

185-7. Falls M antiSymmetrisch ist, sind $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktionen mit den erwarteten Definitions- und Bild-Bereichen:

185-7(Satz)

a) *Aus "M antiSymmetrisch"*

folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}} : \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

b) *Aus "M antiSymmetrisch"*

folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} : \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

<u>Beweis **185-7**</u> `a)` `VS` gleich M antiSymmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $((\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\ldots$"

folgt via **185-4**: β ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots(\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"

folgt via **185-4**: γ ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$.

`3:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch",

aus `2.1`"β ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$" und

aus `2.2`"γ ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$"

folgt via **46-3**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`1.2:` Via **185-5** gilt: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Relation.

`1.3:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})=\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`1.4:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1.2`"$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Relation" und

aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{floor}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

folgt via **18-18(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion",

aus `1.3`"$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})=\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$" und

aus `1.4`"$\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$"

folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}:\overset{M,E}{\mathsf{efl}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

Beweis **185-7** `b)` `VS` gleich M antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $((\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$(\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\ldots$"

folgt via **185-4**: β ist M_Infimum von $E\cap[\alpha\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\ldots(\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"

folgt via **185-4**: γ ist M_Infimum von $E\cap[\alpha\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

`3:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch",
aus `2.1` "β ist M_Infimum von $E\cap[\alpha\overset{M}{|}\cdot\rangle$" und
aus `2.2` "γ ist M_Infimum von $E\cap[\alpha\overset{M}{|}\cdot\rangle$"
folgt via **46-2**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`1.2:` Via **185-5** gilt: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Relation.

`1.3:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})=\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`1.4:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `1.2` "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})\wedge((\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion.

`3:` Aus `2` "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion",
aus `1.3` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})=\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$" und
aus `1.4` "$\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}:\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

□

185-8. Falls M Vollständig ist, kann Einiges über $\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$, über $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$, ausgesagt werden:

<u>**185-8(Satz)**</u>

a) *Aus "M Vollständig" und "$0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$" folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$".*

b) *Aus "M Vollständig" und "$0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$".*

<u>Beweis **185-8**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ Vollständig}) \wedge (0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M Vollständig…"
folgt via **49-3**: M oben Vollständig.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **2-18**: $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **41-43**: p obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`3.1:` Aus `2`"p obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **35-5**: p Menge.

`3.2:` Aus `1.1`"M oben Vollständig",
aus `VS` gleich "…$0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$…" und
aus `2`"p obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`4:` Aus `3.1`"p Menge" und
aus `3.2`"…Ω ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **185-2**: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

Beweis **185-8** `b) VS` gleich $(M \text{ Vollständig}) \wedge (0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M Vollständig…"
folgt via **49-3**: M unten Vollständig.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **2-18**: $0 \neq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \neq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-43**: p untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`3.1:` Aus `2`"p untere M_Schranke von $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **35-4**: p Menge.

`3.2:` Aus `1.1`"M unten Vollständig",
aus `VS` gleich "…$0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$…" und
aus `2`"p untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **49-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3.1`"p Menge" und
aus `3.2`"…Ω ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-2**: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

□

185-9. Interessanter Weise fällt mir bei unten/oben Stark Vollständigen Klassen M bezüglich **185-8** keine stärkere Schlussfolgerung ein:

185-9(Satz)

a) *Aus "M unten Stark Vollständig" und "$0 \neq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$".*

b) *Aus "M unten Stark Vollständig" und "$0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot \rangle$" folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$".*

c) *Aus "M oben Stark Vollständig" und "$0 \neq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$".*

d) *Aus "M oben Stark Vollständig" und "$0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot \rangle$" folgt "$p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$".*

<u>Beweis **185-9**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ unten Stark Vollständig}) \wedge (0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p])$.

`1:` Aus `VS` gleich "M unten Stark Vollständig..."
folgt via **50-2**: M Vollständig.

`2:` Aus `1` "M Vollständig" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **185-8**: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ unten Stark Vollständig}) \wedge (0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M unten Stark Vollständig..."
folgt via **50-2**: M Vollständig.

`2:` Aus `1` "M Vollständig" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-8**: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`c)` `VS` gleich $(M \text{ oben Stark Vollständig}) \wedge (0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p])$.

`1:` Aus `VS` gleich "M oben Stark Vollständig..."
folgt via **50-2**: M Vollständig.

`2:` Aus `1` "M Vollständig" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **185-8**: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`d)` `VS` gleich $(M \text{ oben Stark Vollständig}) \wedge (0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M oben Stark Vollständig..."
folgt via **50-2**: M Vollständig.

`2:` Aus `1` "M Vollständig" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-8**: $p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

$\square$

185-10. Mit *dieser* Konsequenz Totaler Vollständigkeit hätte ich nicht gerechnet:

185-10(Satz)

a) *Aus "M Total Vollständig" folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{efl}} = \mathcal{U}$".

b) *Aus "M Total Vollständig" folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} = \mathcal{U}$".

<u>Beweis **185-10**</u> `a)` `VS` gleich M Total Vollständig.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M oben Total Vollständig.

`1.2:` Aus `VS` gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-4**: M Vollständig.

`Thema2` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`3:` Es gilt: $(0 \neq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]) \vee (E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $0 \neq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$.

Aus `1.2`"M Vollständig" und
aus `3.1.Fall`"$0 \neq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$"
folgt via **185-8**: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`3.2.Fall` $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] = 0$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`4.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] = 0$" und
aus `4.2`"$0 \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`6:` Aus `1.1`"M oben Total Vollständig" und
aus `5`"$E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **51-1(Def)**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$.

`7:` Aus `4.1`"α Menge" und
aus `6`"$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$"
folgt via **185-2**: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

...

<u>Beweis **185-10**</u> `a)` `VS` gleich M Total Vollständig.

...

Ergo `Thema2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efl}}\, E)$.

Konsequenz via **0-19**: $\overset{M}{\mathsf{efl}}\, E = \mathcal{U}$.

`b)` `VS` gleich M Total Vollständig.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M Total Vollständig" folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

`1.2:` Aus `VS` gleich "M Total Vollständig" folgt via **51-4**: M Vollständig.

...

Beweis **185-10** `b) VS` gleich M Total Vollständig.

...

`Thema2` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`3:` Es gilt: $(0 \neq E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $0 \neq E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Aus `1.2`“M Vollständig” und
aus `3.1.Fall`“$0 \neq E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **185-8**: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`3.2.Fall` $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`4.1:` Aus `VS` gleich “$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`4.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`5:` Aus `3.2.Fall`“$E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$” und
aus `4.2`“$0 \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt: $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`6:` Aus `1.1`“M unten Total Vollständig” und
aus `5`“$E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{dom}\, M$”
folgt via **51-1(Def)**:

$$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\_\text{Infimum von } E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha].$$

`7:` Aus `4.1`“α Menge” und
aus `6`“$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$”
folgt via **185-2**: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}.$$

...

Beweis **185-10** `b)` `VS` gleich M Total Vollständig.

...

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{ecl}}\, E)$.

Konsequenz via **0-19**: $\overset{M}{\mathsf{ecl}}\, E = \mathcal{U}$.

$\square$

185-11. $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ ist M_verringernd auf $(\mathsf{ran}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ ist M_vermehrend auf $(\mathsf{dom}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$:

185-11(Satz)

a) $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *ist M_verringernd auf* $(\mathsf{ran}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

b) $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *ist M_vermehrend auf* $(\mathsf{dom}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

Beweis **185-11** a)

`Thema1.1` $\alpha\in(\mathsf{ran}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

2.1: Aus `Thema1.1` "$\alpha\in(\mathsf{ran}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

2.2: Aus `Thema1.1` "$\alpha\in(\mathsf{ran}\,M)\cap\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha\in\mathsf{ran}\,M)\wedge(\alpha\in\overset{M,E}{\mathsf{efl}})$.

3.1: Aus 2.2 "$\alpha\in\mathsf{ran}\,M\ldots$"
folgt via **41-45**: α obere M_Schranke von $\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$.

3.2: Aus 2.2 "$\alpha\in\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"
folgt via **185-2**:
$\exists\Omega:\Omega$ ist M_Supremum von $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$.

3.3: Via **2-7** gilt: $E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]\subseteq\langle\cdot\overset{M}{|}\alpha]$.

...

...

Beweis **185-11** `a)` ...

`Thema1.1` $\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

...

`4.1:` Aus `2.1`“α Menge” und
aus `3.2`“$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$”
folgt via **185-4**: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

`4.2:` Aus `3.1`“α obere M_Schranke von $\langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$” und
aus `3.3`“$E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$”
folgt via **35-6**: α obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$.

`5:` Aus `3.2`“$\ldots \Omega$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$” und
aus `4.2`“α obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$”
folgt via **36-1(Def)**: Ω_M_α.

`6:` Aus `3.2`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `4.1`“$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$” und
aus `5`“Ω_M_α”
folgt: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge (\Omega\_M\_\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$”

...

<u>Beweis</u> **185-11** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$(\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.
`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$" folgt via **2-2**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\, M$.
`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$" folgt via **185-4**:	β ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$.
`2.3:` Via **2-7** gilt:	$E \cap \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$.
`3:` Aus `2.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, M$" folgt via **41-45**:	α obere M_Schranke von $\langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$.
`4:` Aus `3` "α obere M_Schranke von $\langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$" und aus `2.3` "$E \cap \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$" folgt via **35-6**:	α obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$.
`5:` Aus `2.2` "β ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$" und aus `4` "$\alpha$ obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{\mid} \alpha]$" folgt via **36-1(Def)**:	β_M_α.

Ergo `Thema1.2`:

$$\boxed{\texttt{A2} \;\Big|\; \text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}})) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)\text{”}}$$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}})$

$\Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$" und

aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}))$

$\Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$"

folgt via **30-7(Def)**:

$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ ist M_verringernd auf $(\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

Beweis **185-11** `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}})$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **41-44**: α untere M_Schranke von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **185-2**: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3.3:` Via **2-7** gilt: $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4.1:` Aus `2.1`"α Menge" und
aus `3.2`"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-4**: $(\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`4.2:` Aus `3.1`"α untere M_Schranke von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `3.3`"$E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **35-6**: α untere M_Schranke von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `3.2`"$\ldots \Omega$ ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `4.2`"α untere M_Schranke von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **36-1(Def)**: α_M_Ω.

...

...

Beweis **185-11** `b)` ...

`Thema1.1` $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

...

`6:` Aus `3.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4.1`"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$" und
aus `5`"$\alpha \_ M \_ \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge (\alpha \_ M \_ \Omega)$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge (\alpha \_ M \_ \Omega))$"

...

Beweis **185-11** `b)` ...

`Thema1.2` $(\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **185-4**: β ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.3:` Via **2-7** gilt: $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: α untere M_Schranke von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3` "α untere M_Schranke von $[\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2.3` "$E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **35-6**: α untere M_Schranke von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `2.2` "β ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `4` "α untere M_Schranke von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **36-1(Def)**: α_M_β.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \Rightarrow (\alpha$_$M$_$\beta)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}})$
$\Rightarrow (\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge (\alpha$_$M$_$\Omega))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}))$
$\Rightarrow (\alpha$_M_$\beta)$"
folgt via **30-7(Def)**:
$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ ist M_vermehrend auf $(\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

□

185-12. Wenn ein geordnetes Paar (p,q) Element von $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$, von $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$, ist, dann hat q entsprechend der Definition von $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$, von $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$, unter anderem die nun vorliegendenen " Approximations-Eigenschaften" :

185-12(Satz)

a) *Aus* "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$" *und* "$w \in E$" *und* "$w\_M\_p$"
folgt "w_M_q".

b) *Aus* "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
und "$v \in \mathsf{ran}\, M$"
und "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)$"
folgt "q_M_v".

c) *Aus* "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$" *und* "$w \in E$" *und* "$p\_M\_w$"
folgt "q_M_w".

d) *Aus* "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
und "$v \in \mathsf{dom}\, M$"
und "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha)$"
folgt "v_M_q".

Beweis **185-12** a) VS gleich $((p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge (w \in E) \wedge (w\_M\_p)$.

1.1: Aus VS gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}} \ldots$"
folgt via **185-4**: q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots w\_M\_p$"
folgt via **41-25**: $w \in \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

2: Aus VS gleich "$\ldots w \in E \ldots$" und
aus 1.2 "$w \in \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **2-2**: $w \in E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

3: Aus 1.1 "q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus 2 "$w \in E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **36-4**: w_M_q.

<u>Beweis **185-12**</u> `b)` `VS` gleich $((p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge (v \in \mathsf{ran}\, M)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v))$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}} \ldots$"
folgt via **185-4**: q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$.

> `Thema1.2` $\beta \in E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$"
> folgt via **2-2**: $(\beta \in E) \wedge (\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|}\, p])$.
>
> `3:` Aus `2`"$\ldots \beta \in \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$"
> folgt via **41-25**: β_M_p.
>
> `4:` Aus `2`"$\beta \in E \ldots$",
> aus `3`"β_M_p" und
> aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)$"
> folgt: β_M_v.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]) \Rightarrow (\beta\_M\_v)$"

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots v \in \mathsf{ran}\, M \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]) \Rightarrow (\beta\_M\_v)$"
folgt via **35-1(Def)**: v obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$.

`3:` Aus `1.1`"q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$" und
aus `2`"v obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p]$"
folgt via **36-1(Def)**: q_M_v.

<u>Beweis **185-12**</u> `c)` `VS` gleich $((p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge (w \in E) \wedge (p\_M\_w)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}} \ldots$"

folgt via **185-4**: q ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_w$"

folgt via **41-25**: $w \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in E \ldots$" und

aus `1.2`"$w \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **2-2**: $w \in E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1.1`"q ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus `2`"$w \in E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **36-3**: q_M_w.

<u>Beweis **185-12**</u> `d)` `VS` gleich $((p,q)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})\wedge(v\in\mathsf{dom}\,M)$
$\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in E)\wedge(p\_M\_\alpha))\Rightarrow(v\_M\_\alpha))$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\ldots$"

folgt via **185-4**: q ist M_Infimum von $E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta\in E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta\in E\cap\langle\cdot\overset{M}{|}p]$"

folgt via **2-2**: $(\beta\in E)\wedge(\beta\in[p\overset{M}{|}\cdot\rangle)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots\beta\in[p\overset{M}{|}\cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: p_M_β.

`4:` Aus `2`"$\beta\in E\ldots$",
aus `3`"p_M_β" und
aus `VS` gleich "$\ldots\forall\alpha:((\alpha\in E)\wedge(p\_M\_\alpha))\Rightarrow(v\_M\_\alpha)$"
folgt: v_M_β.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1}\,\big|\ \text{“}\forall\beta:(\beta\in E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle)\Rightarrow(v\_M\_\beta)\text{”}}$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots v\in\mathsf{dom}\,M\ldots$" und

aus `A1` gleich "$\forall\beta:(\beta\in E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle)\Rightarrow(v\_M\_\beta)$"

folgt via **35-1(Def)**: v untere M_Schranke von $E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

`3:` Aus `1.1`"q ist M_Infmum von $E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle$" und

aus `2`"v untere M_Schranke von $E\cap[p\overset{M}{|}\cdot\rangle$"
folgt via **36-1(Def)**: v_M_q.

□

185-13. Falls $p \in \mathsf{ran}\, M$ und $(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$, falls $p \in \mathsf{dom}\, M$ und $(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$, so gilt q_M_p, so gilt p_M_q. Aus p_M_p und $p \in E$ folgt $(p,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $(p,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$:

185-13(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{ran}\, M$" *und* "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$" *folgt* "$q\_M\_p$".

b) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\, M$" *und* "$(p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$" *folgt* "$p\_M\_q$".

c) *Aus* "p_M_p" *und* "$p \in E$" *folgt* "$(p,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$".

d) *Aus* "p_M_p" *und* "$p \in E$" *folgt* "$(p,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$".

Beweis **185-13** a) VS gleich $(p \in \mathsf{ran}\, M) \wedge ((p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{ran}\, M \ldots$"
folgt via **41-45**: p obere M_Schranke von $\langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

1.2: Via **2-7** gilt: $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

1.3: Aus VS gleich "$\ldots (p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **185-4**: q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

2: Aus 1.1"p obere M_Schranke von $\langle \cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus 1.2"$E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **35-6**: p obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$.

3: Aus 1.3"q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$" und
aus 2"p obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **36-1(Def)**: q_M_p.

<u>Beweis **185-13**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{dom}\, M) \wedge ((p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, M \ldots$"

folgt via **41-44**: p untere M_Schranke von $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"

folgt via **185-4**: q ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1`"p untere M_Schranke von $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus `1.2`"$E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **35-6**: p untere M_Schranke von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1.3`"q ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus `2`"p untere M_Schranke von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **36-1(Def)**: p_M_q.

<u>Beweis **185-13**</u> `c)` `VS` gleich $(p\_M\_p) \wedge (p \in E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p\_M\_p \ldots$”
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{ran}\, M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p\_M\_p \ldots$”
folgt via **41-25**: $p \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \in E$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.1:` Aus `1.1`“$p \in \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **41-45**: p obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \in E$” und
aus `1.2`“$p \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]$”
folgt via **2-2**: $p \in E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`2.3:` Via **2-7** gilt: $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`3:` Aus `1.1`“p obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} p]$” und
aus `1.2`“$E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$”
folgt via **35-6**: p obere M_Schranke von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`4:` Aus `2.2`“$p \in E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$” und
aus `3`“p obere M_Schranke von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$”
folgt via **38-7**: p ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`5:` Aus `1.3`“p Menge” und
aus `4`“p ist M_Supremum von $E \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p]$”
folgt via **185-4**: $(p, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

<u>Beweis **185-13**</u> `d)` `VS` gleich $(p\_M\_p) \wedge (p \in E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_p\ldots$"
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_p\ldots$"
folgt via **41-25**: $p \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.1:` Aus `1.1` "$p \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: p untere M_Schranke von $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in E$" und
aus `1.2` "$p \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **2-2**: $p \in E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.3:` Via **2-7** gilt: $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1.1` "p untere M_Schranke von $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `1.2` "$E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **35-6**: p untere M_Schranke von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `2.2` "$p \in E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `3` "p untere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **38-6**: p ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `1.3` "p Menge" und
aus `4` "p ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-4**: $(p, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

□

Einiges über M_Intervalle mit transitivem M.

Ersterstellung: 18/05/12 **Letzte Änderung: 18/05/12**

186-1. Falls M transitiv ist haben die M_Intervalle die nun vorliegenden, erwarteten Inklusions-Eigenschaften:

186-1(Satz)

Aus "M transitiv" und ...

a) ... *aus* "d_M_a" *folgt* "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [d \overset{M}{|} b]$".

b) ... *aus* "d_M_a" *folgt* "$]a \overset{M}{|} b[\subseteq [d \overset{M}{|} b[$".

c) ... *aus* "d_M_a" *folgt* "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [d \overset{M}{|} b]$".

d) ... *aus* "d_M_a" *folgt* "$[a \overset{M}{|} b[\subseteq [d \overset{M}{|} b[$".

e) ... *aus* "d_M_a" *folgt* "$\langle\cdot \overset{M}{|} d] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} a]$".

f) ... *aus* "d_M_a" *folgt* "$\langle\cdot \overset{M}{|} d[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} a]$".

g) ... *aus* "d_M_b" *folgt* "$[b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

h) ... *aus* "d_M_b" *folgt* "$]b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

i) ... *aus* "b_M_c" *folgt* "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} c]$".

j) ... *aus* "b_M_c" *folgt* "$]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} c]$".

k) ... *aus* "b_M_c" *folgt* "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{M}{|} c]$".

l) ... *aus* "b_M_c" *folgt* "$[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} c]$".

Beweis **186-1** `a)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_a)$.

`Thema1` $\beta \in [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_b)$.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `VS` gleich "…d_M_a" und
aus `2` "a_M_β…"
folgt via **30-38**: d_M_β.

`4:` Aus `3` "d_M_β" und
aus `2` "…β_M_b"
folgt via **41-25**: $\beta \in [d \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\beta \in [d \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [d \overset{M}{|} b]$.

Beweis **186-1** `b)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_a)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \,]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in \,]a \overset{M}{|} b[$" folgt via **41-25**: $(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\beta) \wedge (\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv…", aus `VS` gleich "…d_M_a" und aus `2` "$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\beta$…" folgt via **44-1**: d_M_β.

`4:` Aus `3` "d_M_β" und aus `2` "…$\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$" folgt via **41-25**: $\beta \in [d \overset{M}{|} b[$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\beta \in [d \overset{M}{|} b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{M}{|} b[\,\subseteq [d \overset{M}{|} b[$.

`c)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_a)$.

`1.1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "M transitiv…" und aus `VS` gleich "…d_M_a" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [d \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.1` "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und aus `1.2` "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [d \overset{M}{|} b]$" folgt via **0-6**: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [d \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **186-1**</u> `d)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d \_M\_ a)$.

`Thema1` $\beta \in [a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a \_M\_ \beta) \wedge (\beta \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)$.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `VS` gleich "…$d \_M\_ a$" und
aus `2` "$a \_M\_ \beta$…"
folgt via **44-1**: $d \_M\_ \beta$.

`4:` Aus `3` "$d \_M\_ \beta$" und
aus `2` "…$\beta \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$"
folgt via **41-25**: $\beta \in [d \overset{M}{|} b[$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\beta \in [d \overset{M}{|} b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [d \overset{M}{|} b[$.

<u>Beweis **186-1**</u> `e)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_a)$.

`Thema1` $\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} d]$.

`2:` Aus `Thema1` “$\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} d]$”
folgt via **41-25**: β_M_d.

`3:` Aus `VS` gleich “M transitiv…”,
aus `2`“β_M_d” und
aus `VS` gleich “…d_M_a”
folgt via **30-38**: β_M_a.

`4:` Aus `3`“β_M_a”
folgt via **41-25**: $\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} a]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} d]) \Rightarrow (\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} a])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle \cdot \overset{M}{|} d] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} a]$.

`f)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_a)$.

`1.1:` Via **41-27** gilt: $\langle \cdot \overset{M}{|} d[\subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} d]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “M transitiv…” und
aus `VS` gleich “…d_M_a”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\langle \cdot \overset{M}{|} d] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} a]$.

`2:` Aus `1.1`“$\langle \cdot \overset{M}{|} d[\subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} d]$” und
aus `1.2`“$\langle \cdot \overset{M}{|} d] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} a]$”
folgt via **0-6**: $\langle \cdot \overset{M}{|} d[\subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} a]$.

Beweis **186-1** `g)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_b)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in [b \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1`“$\beta \in [b \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: b_M_β.

`3:` Aus `VS` gleich “M transitiv…”,
aus `VS` gleich “…d_M_b” und
aus `2`“b_M_β”
folgt via **30-38**: d_M_β.

`4:` Aus `3`“d_M_β”
folgt via **41-25**: $\beta \in [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in [b \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\beta \in [d \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`h)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (d\_M\_b)$.

`1.1:` Via **41-27** gilt: $]b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [b \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “M transitiv…” und
aus `VS` gleich “…d_M_b”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $[b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1`“$]b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [b \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `1.2`“$[b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **0-6**: $]b \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [d \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **186-1** `i)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (b\_M\_c)$.

`Thema1` $\beta \in [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_b)$.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `2` "…β_M_b" und
aus `VS` gleich "…b_M_c"
folgt via **30-38**: β_M_c.

`4:` Aus `2` "a_M_β…" und
aus `3` "β_M_c"
folgt via **41-25**: $\beta \in [a \overset{M}{|} c]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\beta \in [a \overset{M}{|} c])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} c]$.

Beweis **186-1** `j)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (b\_M\_c)$.

`Thema1` $\beta \in \,]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in \,]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\beta) \wedge (\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `2` "$\ldots \beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\_M\_c$"
folgt via **44-1**: β_M_c.

`4:` Aus `2` "$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\beta \ldots$" und
aus `3` "β_M_c"
folgt via **41-25**: $\beta \in \,]a \overset{M}{|} c]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\beta \in \,]a \overset{M}{|} c])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq \,]a \overset{M}{|} c]$.

Beweis **186-1** `k)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (b\_M\_c)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in \,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta) \wedge (\beta\_M\_b)$.

`3:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `2` "…β_M_b" und
aus `VS` gleich "…b_M_c"
folgt via **30-38**: β_M_c.

`4:` Aus `2` "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta$…" und
aus `3` "β_M_c"
folgt via **41-25**: $\beta \in \,]a \overset{M}{|} c]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \,]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\beta \in \,]a \overset{M}{|} c])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} c]$.

`l)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (b\_M\_c)$.

`1.1:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b[\, \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "M transitiv…" und
aus `VS` gleich "…b_M_c"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} c]$.

`2:` Aus `1.1` "$[a \overset{M}{|} b[\, \subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und
aus `1.2` "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} c]$"
folgt via **0-6**: $[a \overset{M}{|} b[\, \subseteq [a \overset{M}{|} c]$.

$\square$

Einiges über $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ bei transitivem M.

Ersterstellung: 18/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

187-1. Falls M transitiv ist, sind sowohl $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ als auch $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ auf ihren Definitions-Bereichen M_isoton:

<u>187-1(Satz)</u>

a) *Aus "M transitiv" folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ ist M_isoton auf $\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$".*

b) *Aus "M transitiv" folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ ist M_isoton auf $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$".*

<u>Beweis **187-1**</u> `a)` `VS` gleich M transitiv.

`1.1:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $$(\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}\,) \wedge (\beta \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}\,) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge ((\beta, \delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}).$$

`2.1:` Aus `VS` gleich “ M transitiv ” und
aus `Thema1.2`“ $\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$ ” folgt via **186-1**:
$$\langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \beta].$$

`2.2:` Aus `Thema1.2`“ $\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}} \ldots$ ”
folgt via **185-4**: γ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`“ $\ldots (\beta, \delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}} \ldots$ ”
folgt via **185-4**: δ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \beta]$.

`3:` Aus `2.1`“ $\langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \beta]$ ”
folgt via **158-4**: $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \beta]$.

`4:` Aus `2.3`“ δ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \beta]$ ” und
aus `3`“ $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha] \subseteq E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \beta]$ ”
folgt via **36-5**: δ obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$.

`5:` Aus `2.2`“ γ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$ ” und
aus `4`“ δ obere M_Schranke von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} \alpha]$ ”
folgt via **36-1(Def)**: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | “ $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}\,) \wedge (\beta \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}\,) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge ((\beta, \delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}})) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$ ”

...

Beweis **187-1** `a)` `VS` gleich $.M$ transitiv

...

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$"

folgt via **0-6**: $\overset{M,E}{\mathsf{efl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$.

`3:` Aus `2`"$\overset{M,E}{\mathsf{efl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{floor}})$" und

aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \wedge (\beta \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}) \wedge (\alpha \_M\_ \beta)$

$\wedge((\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \wedge ((\beta, \delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}})) \Rightarrow (\gamma \_M\_ \delta)$"

folgt via **81-2**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ ist M_isoton auf $\overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

<u>Beweis **187-1**</u> `b) VS` gleich M transitiv.

`1.1:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge (\beta \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha,\gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge ((\beta,\delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “M transitiv” und
aus `Thema1.2`“$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$” folgt via **186-1**:
$[\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha,\gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}} \ldots$”
folgt via **185-4**: γ ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta,\delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}} \ldots$”
folgt via **185-4**: δ ist M_Infimum von $E \cap [\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2.1`“$[\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **158-4**: $E \cap [\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `2.2`“γ ist M_Infimum von $E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `3`“$E \cap [\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq E \cap [\alpha \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **36-5**: γ untere M_Schranke von $E \cap [\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `2.3`“δ ist M_Infimum von $E \cap [\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `4`“γ untere M_Schranke von $E \cap [\beta \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **36-1(Def)**: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | “$\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta : ((\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge (\beta \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha,\gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge ((\beta,\delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}))$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$”

...

<u>Beweis **187-1**</u> `b)` `VS` gleich M transitiv.

...

`2:` Aus `1.1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"

folgt via **0-6**: $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$.

`3:` Aus `2` "$\overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}})$" und

aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge (\beta \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}) \wedge (\alpha\_M\_\beta)$
$\wedge((\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \wedge ((\beta, \delta) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}})) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

folgt via **81-2**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ ist M_isoton auf $\overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

□

Eine Ergänzung zu geordneten Paaren.
Eine Ergänzung zu Funktionen.
Eine Ergänzung zu $f : D \to B$.

Ersterstellung: 22/05/12 **Letzte Änderung: 22/05/12**

188-1. Das vorliegende Resultat ist in **188-2** verwoben und kommt ohne Bezug auf Funktionen aus:

188-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $(x,y) \in E$.

Dann folgt:

a) x *Menge.*

b) y *Menge.*

c) $x \neq \mathcal{U}$.

d) $y \neq \mathcal{U}$.

Beweis **188-1**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$(x,y) \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: (x,y) Menge.

2.a): Aus 1 "(x,y) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: x Menge.

2.b): Aus 1 "(x,y) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: y Menge.

3.c): Aus 2.a) "x Menge"
folgt via **0-17**: $x \neq \mathcal{U}$.

3.d): Aus 2.b) "y Menge"
folgt via **0-17**: $y \neq \mathcal{U}$.

□

188-2. Für Funktionen f können einige Aussagen von **#7**, **#17**, **#18** zusammengefasst werden:

188-2(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *äquivalent:*

`i)` $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`ii)` $f(x)$ *Menge.*

`iii)` $f(x) \neq \mathcal{U}$.

`iv)` $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`v)` $(x, f(x)) \in f$.

Beweis **188-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathsf{dom}\, f$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-5**: $f(x)$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $f(x)$ Menge.

Aus `VS` gleich "$f(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $f(x) \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $f(x) \neq \mathcal{U}$.

1: Aus `VS` gleich "$f(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus 1 "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

1: Aus `VS` gleich "$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **ElementAxiom**: $f(x)$ Menge.

2: Aus 1 "$f(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus →) "f Funktion" und
aus 2 "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x, f(x)) \in f$.

Aus `VS` gleich "$(x, f(x)) \in f$"
folgt via **7-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

□

188-3. Mit der nunmehrigen Aussage werden gelegentlich unpassende Umwege vermieden:

188-3(Satz)

Aus "$f : D \to B$" *und* "$x \in D$" *folgt* "$(x, f(x)) \in f$".

Beweis **188-3** VS gleich $(f : D \to B) \wedge (x \in D)$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots x \in D$" und
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus 1"f Funktion…" und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

□

$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ als Funktion. $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ als Funktion.

$\overset{M}{\mathsf{min}}$ als Funktion. $\overset{M}{\mathsf{max}}$ als Funktion.

$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ als Funktion. $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ als Funktion.

Ersterstellung: 22/05/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

189-1. Falls $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ eine **Funktion**, falls $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ eine Funkton ist, dann können durch Funktions-Auswertung von $\overset{M}{\mathsf{inf}}$, von $\overset{M}{\mathsf{sup}}$, etliche M_Infima, etliche M_Suprema, dargestellt werden:

189-1(Satz)

a) *"*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion"*

genau dann, wenn "$\overset{M}{\mathsf{inf}} : \overset{M}{\mathsf{einf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$*".*

b) *"*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion"*

genau dann, wenn "$\overset{M}{\mathsf{sup}} : \overset{M}{\mathsf{esup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$*".*

c) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion" und "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ *Menge"*

folgt "x *Menge" und "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ *ist* M*_Infimum von* x*".*

d) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion" und "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \neq \mathcal{U}$*"*

folgt "x *Menge" und "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ *ist* M*_Infimum von* x*".*

e) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion"*
und "x *Menge"*
und "inf *ist* M*_Infimum von* x*"*

folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ *ist* M*_Infimum von* x*"*
und "$inf = \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$*".*

f) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion" und "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$ *Menge"*

folgt "x *Menge" und "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$ *ist* M*_Supremum von* x*".*

g) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion" und "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x \neq \mathcal{U}$*"*

folgt "x *Menge" und "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$ *ist* M*_Supremum von* x*".*

h) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion"*
und "x *Menge"*
und "sup *ist* M*_Supremum von* x*"*

folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$ *ist* M*_Supremum von* x*"*
und "$sup = \overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$*".*

<u>Beweis **189-1**</u> a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

1.1: Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

1.2: Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}} : \overset{M}{\mathsf{einf}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{inf}} : \overset{M}{\mathsf{einf}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}} : \overset{M}{\mathsf{einf}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

1.1: Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

1.2: Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \overset{M}{\mathsf{esup}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}} : \overset{M}{\mathsf{esup}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{sup}} : \overset{M}{\mathsf{esup}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}} : \overset{M}{\mathsf{esup}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

<u>Beweis **189-1**</u> `c)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion... " und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ Menge"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`2:` Aus `1`"$(x, \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **182-5**: $(x \text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

`d)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \neq \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion... " und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`2:` Aus `1`"$(x, \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **182-5**: $(x \text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

`e)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\text{ Funktion}) \wedge (x \text{ Menge}) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... x Menge... " und
aus `VS` gleich "... inf ist M_Infimum von x"
folgt via **182-5**: $(x, inf) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion... " und
aus `1`"$(x, inf) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **18-20**: $inf = \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich "... inf ist M_Infimum von x" und
aus `2`"$inf = \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$"
folgt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ ist M_Infimum von x.

`4:` Aus `3`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$ ist M_Infimum von x" und
aus `2`"$inf = \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x$"
folgt: $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\, x \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x) \wedge (inf = \overset{M}{\mathsf{inf}}\, x)$.

Beweis **189-1** `f)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,x\text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion. . . " und
aus `VS` gleich ". . . $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,x$ Menge"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{sup}}\,x) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`2:` Aus `1`"$(x, \overset{M}{\mathsf{sup}}\,x) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **182-5**: $(x\text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,x\text{ ist }M\text{\_Supremum von }x)$.

`g)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,x \neq \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion. . . " und
aus `VS` gleich ". . . $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{sup}}\,x) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`2:` Aus `1`"$(x, \overset{M}{\mathsf{sup}}\,x) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **182-5**: $(x\text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,x\text{ ist }M\text{\_Supremum von }x)$.

Beweis **189-1** `h)`

`VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion}) \wedge (x\text{ Menge}) \wedge (sup\text{ ist }M\_\text{Supremum von }x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von x"
folgt via **182-5**: $(x, sup) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `1`"$(x, sup) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **18-20**: $sup = \overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von x" und
aus `2`"$sup = \overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$"
folgt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$ ist M_Supremum von x.

`4:` Aus `3`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$ ist M_Supremum von x" und
aus `2`"$sup = \overset{M}{\mathsf{sup}}\, x$"
folgt: $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\, x\text{ ist }M\_\text{Supremum von }x) \wedge (sup = \overset{M}{\mathsf{sup}}\, x)$.

$\square$

189-2. Falls $\overset{M}{\mathsf{min}}$ eine Funktion, falls $\overset{M}{\mathsf{max}}$ eine Funkton ist, dann können durch Funktions-Auswertung von $\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$, von $\overset{M}{\mathsf{max}}$, etliche M_Minima, etliche M_Maxima, dargestellt werden:

189-2(Satz)

a) *“$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion”*

genau dann, wenn “$\overset{M}{\mathsf{min}} : \overset{M}{\mathsf{emin}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”.

b) *“$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion”*

genau dann, wenn “$\overset{M}{\mathsf{max}} : \overset{M}{\mathsf{emax}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”.

c) *Aus “$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion” und “$\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ Menge”*

folgt “x Menge” und “$\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von x”.

d) *Aus “$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion” und “$\overset{M}{\mathsf{min}}\, x \neq \mathcal{U}$”*

folgt “x Menge” und “$\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von x”.

e) *Aus “$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion”*
und “x Menge”
und “min ist M_Minimum von x”

folgt “$\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von x”
und “$min = \overset{M}{\mathsf{min}}\, x$”.

f) *Aus “$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion” und “$\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ Menge”*

folgt “x Menge” und “$\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von x”.

g) *Aus “$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion” und “$\overset{M}{\mathsf{max}}\, x \neq \mathcal{U}$”*

folgt “x Menge” und “$\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von x”.

h) *Aus “$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion”*
und “x Menge”
und “max ist M_Maximum von x”

folgt “$\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von x”
und “$max = \overset{M}{\mathsf{max}}\, x$”.

Beweis **189-2** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion.

1.1: Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) = \overset{M}{\mathsf{emin}}$.

1.2: Via **183-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) = \overset{M}{\mathsf{emin}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{min}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{min}} : \overset{M}{\mathsf{emin}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{min}} : \overset{M}{\mathsf{emin}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{min}} : \overset{M}{\mathsf{emin}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion.

1.1: Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$.

1.2: Via **183-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) = \overset{M}{\mathsf{emax}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{max}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{max}} : \overset{M}{\mathsf{emax}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Beweis **189-2** b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{max}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{max}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion.

c) VS gleich $(\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion... " und
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ Menge"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{min}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

2: Aus 1"$(x, \overset{M}{\mathsf{min}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: $(x$ Menge$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von $x)$.

d) VS gleich $(\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{min}}\, x \neq \mathcal{U})$.

1: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion... " und
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{min}}\, x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{min}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

2: Aus 1"$(x, \overset{M}{\mathsf{min}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **183-5**: $(x$ Menge$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von $x)$.

<u>Beweis</u> **189-2** `e)`

`VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion$) \wedge (x$ Menge$) \wedge (min$ ist M_Minimum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots min$ ist M_Minimum von x"
folgt via **183-5**: $(x, min) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{min}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `1` "$(x, min) \in \overset{M}{\mathsf{min}}$"
folgt via **18-20**: $min = \overset{M}{\mathsf{min}}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots min$ ist M_Minimum von x" und
aus `2` "$min = \overset{M}{\mathsf{min}}\, x$"
folgt: $\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von x.

`4:` Aus `3` "$\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von x" und
aus `2` "$min = \overset{M}{\mathsf{min}}\, x$"
folgt: $(\overset{M}{\mathsf{min}}\, x$ ist M_Minimum von $x) \wedge (min = \overset{M}{\mathsf{min}}\, x)$.

`f)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ Menge"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{max}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`2:` Aus `1` "$(x, \overset{M}{\mathsf{max}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **183-5**: $(x$ Menge$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von $x)$.

`g)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{max}}\, x \neq \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{max}}\, x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **188-2**: $(x, \overset{M}{\mathsf{max}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`2:` Aus `1` "$(x, \overset{M}{\mathsf{max}}\, x) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **183-5**: $(x$ Menge$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von $x)$.

<u>Beweis **189-2** `h)`</u>

`VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{max}}\text{ Funktion}) \wedge (x\text{ Menge}) \wedge (max\text{ ist }M\text{\_Maximum von }x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... x Menge... " und
aus `VS` gleich "... max ist M_Maximum von x"
folgt via **183-5**: $(x, max) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{max}}$ Funktion... " und
aus `1` "$(x, max) \in \overset{M}{\mathsf{max}}$"
folgt via **18-20**: $max = \overset{M}{\mathsf{max}}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich "... max ist M_Maximum von x" und
aus `2` "$max = \overset{M}{\mathsf{max}}\, x$"
folgt: $\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von x.

`4:` Aus `3` "$\overset{M}{\mathsf{max}}\, x$ ist M_Maximum von x" und
aus `2` "$max = \overset{M}{\mathsf{max}}\, x$"
folgt: $(\overset{M}{\mathsf{max}}\, x\text{ ist }M\text{\_Maximum von }x) \wedge (max = \overset{M}{\mathsf{max}}\, x)$.

□

189-3. Hier wird erstmalig der Fall $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion, der Fall $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion, thematisiert:

<u>189-3(Satz)</u>

a) *“$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion” genau dann, wenn*

$$\text{“}\overset{M,E}{\mathsf{floor}}: \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)\text{”}.$$

b) *Aus “$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion” und “$p \in (\mathsf{ran}\,M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$”*

$$\textit{folgt } \text{“}\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)\_M\_p\text{”}.$$

c) *Aus “$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion” und “p_M_p” und “$p \in E$”*

$$\textit{folgt } \text{“}p = \overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)\text{”}.$$

d) *“$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion” genau dann, wenn*

$$\text{“}\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}: \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)\text{”}.$$

e) *Aus “$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion” und “$p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$”*

$$\textit{folgt } \text{“}p\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)\text{”}.$$

f) *Aus “$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion” und “p_M_p” und “$p \in E$”*

$$\textit{folgt } \text{“}p = \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)\text{”}.$$

<u>Beweis</u> **189-3** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion.

1.1: Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$.

1.2: Via **185-6** gilt: $\mathsf{ran}(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus VS gleich “$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion”,
aus 1.1 “$\mathsf{dom}(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) = \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$” und
aus 1.2 “$\mathsf{ran}(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}: \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

<u>Beweis **189-3**</u> a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{M,E}{\mathsf{floor}} : \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Aus VS gleich " $\overset{M,E}{\mathsf{floor}} : \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ "

folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion.

b) VS gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\ \text{Funktion}) \wedge (p \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}})$.

1.1: Aus VS gleich " $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion… "
folgt via des bereits bewiesenen a):
$\overset{M,E}{\mathsf{floor}} : \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

1.2: Aus VS gleich " $\ldots p \in (\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$ "
folgt via **2-2**: $(p \in \mathsf{ran}\, M) \wedge (p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}})$.

2: Aus 1.1 " $\overset{M,E}{\mathsf{floor}} : \overset{M,E}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ " und
aus 1.2 " $\ldots p \in \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$ "
folgt via **188-3**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

3: Aus 1.2 " $p \in \mathsf{ran}\, M \ldots$ " und
aus 2 " $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ "
folgt via **185-13**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)\_M\_p$.

c) VS gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\ \text{Funktion}) \wedge (p\_M\_p) \wedge (p \in E)$.

1: Aus VS gleich " $\ldots p\_M\_p \ldots$ " und
aus VS gleich " $\ldots p \in E$ "
folgt via **185-13**: $(p, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

2: Aus VS gleich " $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion… " und
aus 1 " $(p, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ "
folgt via **18-20**: $p = \overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$.

<u>Beweis **189-3**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion.

`1.1:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

`1.2:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion",
aus `1.1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$" und
aus `1.2` "$\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} : \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} : \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} : \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion.

`e)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion$) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} : \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **2-2**: $(p \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}})$.

`2:` Aus `1.1` "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} : \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$" und
aus `1.2` "$\ldots p \in \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **188-3**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`3:` Aus `1.2` "$p \in \mathsf{dom}\,M \ldots$" und
aus `2` "$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **185-13**: $p\_M\_\,\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)$.

<u>Beweis **189-3**</u> `f)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}} \text{ Funktion}) \wedge (p\_M\_p) \wedge (p \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_p \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in E$"

folgt via **185-13**: $(p, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `1` "$(p, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"

folgt via **18-20**: $p = \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$.

□

189-4. Falls $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ eine Funktion ist, dann treffen auf $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$ unter Umständen einige der in **#185** formulierten Aussagen über $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ zu:

189-4(Satz)

a) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$ *Menge*" *und* "$w \in E$" *und* "w_M_p"

folgt "$w\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$".

b) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p) \neq \mathcal{U}$" *und* "$w \in E$" *und* "$w\_M\_p$"

folgt "$w\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$".

c) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$ *Menge*" *und* "$v \in \mathsf{ran}\, M$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)$"

folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)\_M\_v$".

d) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p) \neq \mathcal{U}$" *und* "$v \in \mathsf{ran}\, M$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)$"

folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)\_M\_v$".

e) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$ *Menge*"

folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$ *ist* M*_Supremum von* $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$".

f) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p) \neq \mathcal{U}$"

folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$ *ist* M*_Supremum von* $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$".

g) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ *Funktion*" *und* "p *Menge*" *und* "q *ist* M*_Supremum von* $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"

folgt "$q = \overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$".

<u>Beweis **189-4**</u> `a)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)\text{ Menge})$
$\wedge(w \in E) \wedge (w\_M\_p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge…"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

`2:` Aus `1`"$(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$",
aus `VS` gleich "… $w \in E$ …" und
aus `VS` gleich "… w_M_p"
folgt via **185-12**: $w\_M\_\,\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$.

`b)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p) \neq \mathcal{U})$
$\wedge(w \in E) \wedge (w\_M\_p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p) \neq \mathcal{U}$ …"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

`2:` Aus `1`"$(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$",
aus `VS` gleich "… $w \in E$ …" und
aus `VS` gleich "… w_M_p"
folgt via **185-12**: $w\_M\_\,\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$.

`c)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)\text{ Menge}) \wedge (v \in \mathsf{ran}\,M)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge…"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

`2:` Aus `1`"$(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$",
aus `VS` gleich "… $v \in \mathsf{ran}\,M$ …" und
aus `VS` gleich "… $\forall\alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)$"
folgt via **185-12**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)\_M\_v$.

<u>Beweis **189-4**</u> `d)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p) \neq \mathcal{U}) \wedge (v \in \mathsf{ran}\, M)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p) \neq \mathcal{U}$ …"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}.$

`2:` Aus `1` "$(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$",
aus `VS` gleich "… $v \in \mathsf{ran}\, M$ …" und
aus `VS` gleich "… $\forall\alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (\alpha\_M\_v)$"
folgt via **185-12**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)\_M\_v.$

`e)` `VS` gleich "$(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)\text{ Menge})$"

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}.$

`2:` Aus `1` "$(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **185-4**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p].$

`f)` `VS` gleich "$(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p) \neq \mathcal{U})$"

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}.$

`2:` Aus `1` "$(p, \overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **185-4**: $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|}\, p].$

<u>Beweis **189-4**</u> `g)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{floor}}\ \text{Funktion}) \wedge (p\ \text{Menge})$
$\wedge (q\ \text{ist}\ M\text{\_Supremum von}\ E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p])$.

`1:` Aus `VS` gleich "… p Menge… " und
aus `VS` gleich "… q ist M_Supremum von $E \cap \langle \cdot \overset{M}{|} p]$"
folgt via **185-4**: $(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ Funktion… " und
aus `1` "$(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **18-20**: $q = \overset{M,E}{\mathsf{floor}}(p)$.

□

189-5. Falls $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ eine Funktion ist, dann treffen auf $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ unter Umständen einige der in **#185** formulierten Aussagen über $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ zu:

189-5(Satz)

a) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ *Menge*"
und "$w \in E$" *und* "p_M_w"
folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)\_M\_w$".

b) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U}$"
und "$w \in E$" *und* "p_M_w"
folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)\_M\_w$".

c) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ *Menge*"
und "$v \in \mathsf{dom}\, M$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha)$"
folgt "$v\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$".

d) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U}$"
und "$v \in \mathsf{dom}\, M$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha)$"
folgt "$v\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$".

e) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ *Menge*"
folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ *ist* M*_Infimum von* $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

f) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U}$"
folgt "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ *ist* M*_Infimum von* $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

g) *Aus* "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion*"
und "p *Menge*" *und* "q *ist* M*_Infimum von* $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt "$q = \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$".

Beweis **189-5** a) VS gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)\text{ Menge}) \wedge (w \in E) \wedge (p\_M\_w)$.

1: Aus VS gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion…" und
aus VS gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ Menge…"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

2: Aus 1"$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$",
aus VS gleich "…$w \in E$…" und
aus VS gleich "…p_M_w"
folgt via **185-12**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)\_M\_w$.

b) VS gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p) \neq \mathcal{U}) \wedge (w \in E) \wedge (p\_M\_w)$.

1: Aus VS gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion…" und
aus VS gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p) \neq \mathcal{U}$…"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

2: Aus 1"$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$",
aus VS gleich "…$w \in E$…" und
aus VS gleich "…p_M_w"
folgt via **185-12**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)\_M\_w$.

c) VS gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)\text{ Menge}) \wedge (v \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha))$.

1: Aus VS gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion…" und
aus VS gleich "… $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ Menge…"
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

2: Aus 1"$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$",
aus VS gleich "…$v \in \mathsf{dom}\,M$…" und
aus VS gleich "…$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha)$"
folgt via **185-12**: $v\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\,(p)$.

<u>Beweis **189-5**</u> `d)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U}) \wedge (v \in \mathsf{dom}\, M)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion… ” und
aus `VS` gleich “… $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U}$ …”
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`2:` Aus `1`“$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$”,
aus `VS` gleich “… $v \in \mathsf{dom}\, M$ …” und
aus `VS` gleich “… $\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (v\_M\_\alpha)$”
folgt via **185-12**: $v\_M\_\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$.

`e)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)\text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion… ” und
aus `VS` gleich “… $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge”
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`2:` Aus `1`“$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$”
folgt via **185-4**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`f)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion… ” und
aus `VS` gleich “… $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p) \neq \mathcal{U}$”
folgt via **188-2**: $(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`2:` Aus `1`“$(p, \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$”
folgt via **185-4**: $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **189-5**</u> `g)` `VS` gleich $(\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}\text{ Funktion}) \wedge (p\text{ Menge})$
$\wedge(q\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist M_Infimum von $E \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **185-4**: $(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `1`"$(p, q) \in \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **18-20**: $q = \overset{M,E}{\mathsf{ceil}}(p)$.

□

$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}.\ \overset{\leq}{\mathsf{sup}}.$

Ersterstellung: 05/06/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

190-1. Im Hinblick auf die speziellen Eigenschaften von $\leq$ ist es nicht verwunderlich, dass auch $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ bemerkenswertes Verhalten zeigen:

190-1(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

b) $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathbb{S}$.

c) $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ *Funktion.*

d) $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\colon \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$.

e) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

f) $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathbb{S}$.

g) $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ *Funktion.*

h) $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\colon \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$.

Beweis **190-1** a)

1: Aus **AAVII**"$\leq$ Total Vollständig"
folgt via **182-14**: $\overset{\leq}{\mathsf{einf}} = \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,(\leq))$.

2.1: Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \overset{\leq}{\mathsf{einf}}$.

2.2: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

3: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) \overset{2.1}{=} \overset{\leq}{\mathsf{einf}} \overset{1}{=} \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,(\leq)) \overset{2.2}{=} \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

<u>Beweis</u> **190-1** `b)`

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`“$\leq$ Relation in $\mathbb{S}\ldots$” und
aus `1`“$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$”
folgt via **182-8**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathbb{S}$.

`cd)`

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **182-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\!\rightarrow (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$.

`3.c):` Aus `2`“$\overset{\leq}{\mathsf{inf}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\!\rightarrow (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`4.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`4.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathbb{S}$.

`5.d):` Aus `3.c)`“$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ Funktion”,
aus `4.1`“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus `4.2`“$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathbb{S}$”
folgt via **21-2**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}} : \mathcal{P}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{S}$.

Beweis **190-1** `e)`

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ Total Vollständig"
folgt via **182-14**: $\mathsf{es}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p} = \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,(\leq))$.

`2.1:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{s}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p}) = \mathsf{es}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p}$.

`2.2:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`3:` $\mathsf{dom}\,(\mathsf{s}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p}) \overset{2.1}{=} \mathsf{es}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p} \overset{1}{=} \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,(\leq)) \overset{2.2}{=} \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{s}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`f)`

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}\ldots$" und
aus `1`"$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$"
folgt via **182-8**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{s}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{u}}}\mathsf{p}) = \mathbb{S}$.

<u>Beweis</u> **190-1** `gh)`

`1:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1` "$\leq$ antiSymmetrisch"
folgt via **182-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\!\to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$.

`3.g):` Aus `2` "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\!\to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`4.1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`4.2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathbb{S}$.

`5.h):` Aus `3.g)` "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `4.1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus `4.2` "$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathbb{S}$"
folgt via **21-2**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$.

$\square$

190-2. Falls inf ein $\leq$ _Infimum von E ist, falls sup ein $\leq$ _Supremum von E ist, dann gilt unter anderem $inf = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$, $sup = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$:

190-2(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E"*
folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge" und "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$"
und "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E"
und "$inf = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$".

b) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E"*
folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge" und "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$"
und "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von E"
und "$sup = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$".

<u>Beweis **190-2**</u> `a)` `VS` gleich inf ist $\leq$ _Infimum von E.

`1.1:` Via **190-1** gilt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus `2.2`"E Menge" und
aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **189-1**: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von $E) \wedge (inf = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E)$.

`4:` Aus `3`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$"
folgt via **36-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge.

`5:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge"
folgt via **0-17**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$.

`6:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge",
aus `5`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$" und
aus `3`"$(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von $E) \wedge (inf = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E)$"
folgt: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge$) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U})$
$\wedge(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von $E) \wedge (inf = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E)$.

<u>Beweis **190-2**</u> `b)` `VS` gleich $\qquad sup$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`1.1:` Via **190-1** gilt: $\qquad \overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **157-3**: $\qquad E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\qquad E$ Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `2.2`"E Menge" und
aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **189-1**: $\qquad (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von $E) \wedge (sup = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E)$.

`4:` Aus `5`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$"
folgt via **36-4**: $\qquad \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge.

`5:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge"
folgt via **0-17**: $\qquad \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$.

`6:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge",
aus `5`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$" und
aus `3`"$(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von $E) \wedge (sup = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E)$"
folgt: $\qquad (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge$) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U})$
$\wedge(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von $E) \wedge (sup = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E)$.

$\square$

190-3. Interessanter Weise ist $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(E)$ genau dann das $\leq$ _Infimum von E, wenn $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,(E)$ das $\leq$ _Supremum von E ist und dies ist unter anderem genau dann der Fall, wenn E eine TeilKlasse von $\mathbb{S}$ ist:

190-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \subseteq \mathbb{S}$.

`ii)` $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* E.

`iii)` $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ *Menge.*

`iv)` $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E \neq \mathcal{U}$.

`v)` $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,E$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* E.

`vi)` $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,E$ *Menge.*

`vii)` $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,E \neq \mathcal{U}$.

<u>Beweis **190-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $E \subseteq \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich “$E \subseteq \mathbb{S}$” und
aus **95-9**“$\mathbb{S}$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

2: Aus VS gleich “$E \subseteq \mathbb{S}$” und
aus 1.3“E Menge”
folgt via **0-26**: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

3: Aus 2“$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus **190-1**“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$.

4: Aus 3“$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$”
folgt via **17-5**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ Menge.

5: Aus **190-1**“$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ Funktion” und
aus 4“$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ Menge”
folgt via **189-1**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ ist $\leq$ _Infimum von E.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ ist $\leq$ _Infimum von E.

Aus VS gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ ist $\leq$ _Infimum von E”
folgt via **36-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ Menge.

Aus VS gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E$ Menge”
folgt via **0-17**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,E \neq \mathcal{U}$.

<u>Beweis **190-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$”
folgt via **17-5**: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$.

2: Aus 1“$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$” und
aus **190-1**“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

3: Aus 2“$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus **190-1**“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$.

4: Aus 3“$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$”
folgt via **17-5**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge.

5: Aus **190-1**“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ Funktion” und
aus 4“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge”
folgt via **189-1**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ -Supremum von E.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ -Supremum von E.

Aus VS gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ -Supremum von E”
folgt via **36-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge.

Aus VS gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge”
folgt via **0-17**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$.

Beweis **190-3** $\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{<}{\mathsf{sup}})$.

2: Aus 1"$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{<}{\mathsf{sup}})$" und
aus **190-1**"$\mathsf{dom}\,(\overset{<}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

3: Aus 2"$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt via **0-26**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

$\square$

$\overset{\leq}{\text{min}}.\ \overset{\leq}{\text{max}}.$

Ersterstellung: 06/06/12 **Letzte Änderung: 07/06/12**

191-1. Bei $\overset{\leq}{\mathsf{min}}$ und $\overset{\leq}{\mathsf{max}}$ handelt es sich unter anderem um Funktionen:

<u>**191-1(Satz)**</u>

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

c) $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathbb{S}$.

d) $\overset{\leq}{\mathsf{min}}$ *Funktion.*

e) $\overset{\leq}{\mathsf{min}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}} \to \mathbb{S}$.

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}}$.

g) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

h) $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathbb{S}$.

i) $\overset{\leq}{\mathsf{max}}$ *Funktion.*

j) $\overset{\leq}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}} \to \mathbb{S}$.

<u>Beweis **191-1**</u> a)

Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}}$.

b)

1: Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,(\leq))$.

2: Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

3: Aus 1“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,(\leq))$” und
aus 2“$\mathsf{ran}\,(\leq) = \mathbb{S}$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

<u>Beweis</u> **191-1** `c)`

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`“$\leq$ Relation in $\mathbb{S}\ldots$” und
aus `1`“$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$”
folgt via **183-8**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathbb{S}$.

`de)`

`1:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **183-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$.

`3.d):` Aus `2`“$\overset{\leq}{\mathsf{min}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}}$ Funktion.

`3.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}}$.

`3.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathbb{S}$.

`4.e):` Aus `3.d)`“$\overset{\leq}{\mathsf{min}}$ Funktion”,
aus `3.1`“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}}$” und
aus `3.2`“$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \mathbb{S}$”
folgt via **21-2**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{min}} \to \mathbb{S}$.

`f)`

Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}}$.

`g)`

`1:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,(\leq))$.

`2:` Aus **AAVII**“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`3:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,(\leq))$” und
aus `2`“$\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

Beweis **191-1** `h)`

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}\ldots$" und
aus `1`"$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$"
folgt via **183-8**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathbb{S}$.

`ij)`

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch"
folgt via **183-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$.

`3.i):` Aus `2`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cap (\mathsf{ran}\,(\leq))$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}$ Funktion.

`3.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}}$.

`3.2:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathbb{S}$.

`4.j):` Aus `3.i)`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}}$ Funktion",
aus `3.1`"$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}}$" und
aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq}{\mathsf{max}}) = \mathbb{S}$"
folgt via **21-2**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}} : \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{max}} \to \mathbb{S}$.

$\square$

191-2. Falls min ein $\leq$ _Minimum von E ist, falls max ein $\leq$ _Maximum von E ist, dann gilt unter anderem $min = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$, $max = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E$:

191-2(Satz)

a) *Aus “min ist $\leq$ _Minimum von E”*
folgt “$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ Menge” und “$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E \neq \mathcal{U}$”
und “$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ ist $\leq$ _Minimum von E”
und “$min = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$”.

b) *Aus “max ist $\leq$ _Maximum von E”*
folgt “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E$ Menge” und “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E \neq \mathcal{U}$”
und “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E$ ist $\leq$ _Maximum von E”
und “$max = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E$”.

<u>Beweis **191-2**</u> `a)` `VS` gleich min ist $\leq$ _Minimum von E.

`1.1:` Via **191-1** gilt: $\overset{\leq}{\mathsf{min}}$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "min ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\overset{\leq}{\mathsf{min}}$ Funktion",
aus `2.2`"E Menge" und
aus `VS` gleich "min ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **189-2**: $(\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (min = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E)$.

`4:` Aus `3`"$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ ist $\leq$ _Minimum von $E\ldots$"
folgt via **38-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ Menge.

`5:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ Menge"
folgt via **0-17**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E \neq \mathcal{U}$.

`6:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ Menge",
aus `5`"$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E \neq \mathcal{U}$" und
aus `3`"$(\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (min = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E)$"
folgt: $(\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ Menge$) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E \neq \mathcal{U})$
$\wedge(\overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (min = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E)$.

<u>Beweis **191-2**</u> `b) VS` gleich max ist $\leq$ _Maximum von E.

`1.1:` Via **191-1** gilt: $\overset{<}{\mathsf{max}}$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "max ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\overset{<}{\mathsf{max}}$ Funktion",
aus `2.2`"E Menge" und
aus `VS` gleich "max ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **189-2**: $(\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ ist $\leq$ _Maximum von $E) \wedge (max = \overset{<}{\mathsf{max}}\ E)$.

`4:` Aus `5`"$\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ ist $\leq$ _Maximum von $E \ldots$"
folgt via **38-4**: $\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ Menge.

`5:` Aus `4`"$\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ Menge"
folgt via **0-17**: $\overset{<}{\mathsf{max}}\ E \neq \mathcal{U}$.

`6:` Aus `4`"$\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ Menge",
aus `5`"$\overset{<}{\mathsf{max}}\ E \neq \mathcal{U}$" und
aus `3`"$(\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ ist $\leq$ _Maximum von $E) \wedge (max = \overset{<}{\mathsf{max}}\ E)$"
folgt: $(\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ Menge$) \wedge (\overset{<}{\mathsf{max}}\ E \neq \mathcal{U})$
$\wedge(\overset{<}{\mathsf{max}}\ E$ ist $\leq$ _Maximum von $E) \wedge (max = \overset{<}{\mathsf{max}}\ E)$.

□

191-3. Falls E eine nichtleere, endliche TeilKlasse E von $\mathbb{S}$ ist, dann ist $\overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$ das $\leq$ _Minimum von E, dann ist $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$ das $\leq$ _Maximum von E. Die Beweis-Reihenfolge ist `e) - f) - a) - b) - c) - d)`:

191-3(Satz)

`a)` *Aus "$p \in \mathbb{S}$" folgt "p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$" und "$p = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, \{p\}$".*

`b)` *Aus "$p \in \mathbb{S}$" folgt "p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$" und "$p = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p\}$".*

`c)` *Aus "$p \in \mathbb{S}$" und "$q \in \mathbb{S}$" folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\, \{p, q\}$ ist $\leq$ _Minimum von $\{p, q\}$".*

`d)` *Aus "$p \in \mathbb{S}$" und "$q \in \mathbb{S}$" folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p, q\}$ ist $\leq$ _Maximum von $\{p, q\}$".*

`e)` *Aus "$0 \neq E \subseteq \mathbb{S}$" und "$E$ endlich" folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$ ist $\leq$ _Minimum von E".*

`f)` *Aus "$0 \neq E \subseteq \mathbb{S}$" und "$E$ endlich" folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$ ist $\leq$ _Maximum von E".*

Beweis **191-3** `e)` `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \subseteq \mathbb{S} \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich" folgt via $\leq$ _**Satz vom Minimum**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von E.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Minium von E" folgt via **191-2**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$ ist $\leq$ _Minimum von E.

`f)` `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \subseteq \mathbb{S} \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich" folgt via $\leq$ _**Satz vom Maximum**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von E.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Maxium von E" folgt via **191-2**: $\overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$ ist $\leq$ _Maximum von E.

<u>Beweis **191-3**</u> `ab)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$.

`2.1:` Aus `1.1` "p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$"
folgt via **191-2**: $p = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, \{p\}$.

`2.2:` Aus `1.2` "p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$"
folgt via **191-2**: $p = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p\}$.

`3.a):` Aus `1.1` "p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$" und
aus `2.1` "$p = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, \{p\}$"
folgt: (p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}) \wedge (p = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, \{p\})$.

`3.b):` Aus `1.2` "p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$" und
aus `2.2` "$p = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p\}$"
folgt: (p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}) \wedge (p = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p\})$.

<u>Beweis **191-3**</u> `cd)` `VS` gleich $(p \in \mathbb{S}) \wedge (q \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathbb{S}$"
folgt via **4-14**: $\{p, q\} \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.3:` Via **28-8** gilt: $\{p, q\}$ endlich.

`2:` Aus `1.2`"p Menge"
folgt via **4-10**: $0 \neq \{p, q\}$.

`3.c):` Aus `2`"$0 \neq \{p, q\}$",
aus `1.1`"$\{p, q\} \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `1.3`"$\{p, q\}$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$\overset{\leq}{\mathsf{min}}\, \{p, q\}$ ist $\leq$ _Minimum von $\{p, q\}$.

`3.d):` Aus `2`"$0 \neq \{p, q\}$",
aus `1.1`"$\{p, q\} \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `1.3`"$\{p, q\}$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:
$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p, q\}$ ist $\leq$ _Maximum von $\{p, q\}$.

$\square$

Falls $p \in E \setminus \mathsf{ran}\, M$, dann ist p ein M_minimales Element von E.
Falls $p \in E \setminus \mathsf{dom}\, M$, dann ist p ein M_maximales Element von E.

Ersterstellung: 08/06/12 **Letzte Änderung: 08/06/12**

192-1. Jedes Element aus $E \setminus \mathsf{ran}\, M$ ist M_minimales Element von E. Jedes Element aus $E \setminus \mathsf{dom}\, M$ ist M_maximales Element von E:

192-1(Satz)

a) *Aus "$p \in E \setminus \mathsf{ran}\, M$" folgt "$p$ ist M_minimales Element von E".*

b) *Aus "$p \in E \setminus \mathsf{dom}\, M$" folgt "$p$ ist M_maximales Element von E".*

Beweis **192-1** a) VS gleich $p \in E \setminus \mathsf{ran}\, M$.

1: Aus VS gleich "$p \in E \setminus \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **5-3**: $(p \in E) \wedge (p \notin \mathsf{ran}\, M)$.

Thema2.1 $(\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)$.

3: Aus Thema2.1"$\ldots \alpha\_M\_p$"
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{ran}\, M$.

4: Es gilt 3"$p \in \mathsf{ran}\, M$".
Es gilt 1"$\ldots p \notin \mathsf{ran}\, M$".
Ex falso quodlibet folgt: p_M_α.

Ergo Thema2.1: A1 "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

2.2: Aus 1"$p \in E \ldots$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_p)) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: p ist M_minimales Element von E.

<u>Beweis **192-1**</u> `b) VS` gleich $p \in E \setminus \mathsf{dom}\, M.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \setminus \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **5-3**: $(p \in E) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, M).$

`Thema2.1` $(\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha).$
`3:` Aus `Thema2.1`"$\ldots p\_M\_\alpha$" folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{dom}\, M.$
`4:` Es gilt `3`"$p \in \mathsf{dom}\, M$". Es gilt `1`"$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, M$". Ex falso quodlibet folgt: $\alpha\_M\_p.$

Ergo `Thema2.1`: `A1` "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"

`2.2:` Aus `1`"$p \in E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
folgt via **39-1(Def)**: p ist M_maximales Element von $E.$

□

$\overset{\leq}{\mu}$in. $\overset{\leq}{\mu}$ax.

Ersterstellung: 08/06/12 **Letzte Änderung: 08/06/12**

193-1. Die Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$, die Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$, ist eine Funktion:

193-1(Satz)

a) *Aus "f Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" folgt "f Funktion".*

b) *Aus "f Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" folgt "f Funktion".*

c) *Aus "$E \subseteq \mathbb{S}$" und "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$"*
folgt "$\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$" ist $\leq$ _minimales Element von E".

d) *Aus "$E \subseteq \mathbb{S}$" und "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}$"*
folgt "$\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$" ist $\leq$ _maximales Element von E".

<u>Beweis **193-1**</u> `a)` `VS` gleich f Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$ $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ auf "
folgt via **15-3**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} f \text{ Relation"}}$

> `Thema1.2` $((\alpha, \beta) \in f) \wedge ((\alpha, \gamma) \in f)$.
>
> `2.1:` Aus `VS` gleich "f Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
> aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \in f \ldots$"
> folgt via **15-5**: $(\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{S})) \wedge ((\alpha, \beta) \in \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}})$.
>
> `2.2:` Aus `VS` gleich "f Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
> aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in f$"
> folgt via **15-5**: $(\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{S})) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}})$.
>
> `3.1:` Aus `2.1`"$\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{S}) \ldots$"
> folgt via **0-26**: $\alpha \subseteq \mathbb{S}$.
>
> `3.2:` Aus `2.1`"$\ldots (\alpha, \beta) \in \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$"
> folgt via **184-5**: β ist $\leq$ -minimales Element von α.
>
> `3.3:` Aus `2.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$"
> folgt via **184-5**: γ ist $\leq$ -minimales Element von α.
>
> `4:` Aus `3.1`"β ist $\leq$ -minimales Element von α",
> aus `3.3`"γ ist $\leq$ -minimales Element von α" und
> aus `3.1`"$\alpha \subseteq \mathbb{S}$"
> folgt via **171-4**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in f) \wedge ((\alpha, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "f Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in f) \wedge ((\alpha, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: f Funktion.

<u>Beweis **193-1**</u> `b) VS` gleich f Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}\,\mathcal{P}(\mathbb{S})$ auf "
folgt via **15-3**: `A1` | "f Relation"

`Thema1.2` $((\alpha,\beta)\in f)\wedge((\alpha,\gamma)\in f)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha,\beta)\in f\ldots$"
folgt via **15-5**: $(\alpha\in\mathcal{P}(\mathbb{S}))\wedge((\alpha,\beta)\in\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x})$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots(\alpha,\gamma)\in f$"
folgt via **15-5**: $(\alpha\in\mathcal{P}(\mathbb{S}))\wedge((\alpha,\gamma)\in\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x})$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\alpha\in\mathcal{P}(\mathbb{S})\ldots$"
folgt via **0-26**: $\alpha\subseteq\mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots(\alpha,\beta)\in\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$"
folgt via **184-5**: β ist $\leq$ -maximales Element von α.

`3.3:` Aus `2.2`"$\ldots(\alpha,\gamma)\in\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$"
folgt via **184-5**: γ ist $\leq$ -maximales Element von α.

`4:` Aus `3.1`"β ist $\leq$ -maximales Element von α",
aus `3.3`"γ ist $\leq$ -maximales Element von α" und
aus `3.1`"$\alpha\subseteq\mathbb{S}$"
folgt via **171-4**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in f)\wedge((\alpha,\gamma)\in f))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "f Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in f)\wedge((\alpha,\gamma)\in f))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: f Funktion.

<u>Beweis **193-1**</u> `c)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **184-2**:
$(E \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{-minimales Element von } E)$.

`2:` Aus `1`"E Menge…" und
aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -minimales Element von E"
folgt via **184-5**: $(E, \Omega) \in \overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"E Menge…"
folgt via **0-26**: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`3.2:` Es gilt: $\exists \Psi$: Ψ Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`4.1:` Aus `3.2`"Ψ Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$",
aus `3.1`"$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus `2`"$(E, \Omega) \in \overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **15-5**: $(E, \Omega) \in \Psi$.

`4.2:` Aus `3.2`"Ψ Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: Ψ Funktion.

`4.3:` Aus `3.2`"Ψ Einschränkung von $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus `3.1`"$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt via **ES**: $\Psi(E) = \overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}\,(E)$.

`5:` Aus `4.2`"Ψ Funktion" und
aus `4.1`"$(E, \Omega) \in \Psi$"
folgt via **18-20**: $\Omega = \Psi(E)$.

`6:` Aus `5`"$\Omega = \Psi(E)$" und
aus `4.3`"$\Psi(E) = \overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}\,(E)$"
folgt: $\Omega = \overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}\,(E)$.

`7:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -minimales Element von E" und
aus `6`"$\Omega = \overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}\,(E)$"
folgt: $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}\,(E)$ ist $\leq$ -minimales Element von E.

Beweis **193-1** `d)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$”
folgt via **184-2**:
$(E \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq$_maximales Element von $E)$.

`2:` Aus `1`“E Menge…” und
aus `1`“$\ldots \Omega$ ist $\leq$_maximales Element von E”
folgt via **184-5**: $(E, \Omega) \in \mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$” und
aus `1`“E Menge…”
folgt via **0-26**: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`3.2:` Es gilt: $\exists \Psi$: Ψ Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`4.1:` Aus `3.2`“Ψ Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$”,
aus `3.1`“$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus `2`“$(E, \Omega) \in \mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$”
folgt via **15-5**: $(E, \Omega) \in \Psi$.

`4.2:` Aus `3.2`“Ψ Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: Ψ Funktion.

`4.3:` Aus `3.2`“Ψ Einschränkung von $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus `3.1`“$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt via **ES**: $\Psi(E) = \mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}\,(E)$.

`5:` Aus `4.2`“Ψ Funktion” und
aus `4.1`“$(E, \Omega) \in \Psi$”
folgt via **18-20**: $\Omega = \Psi(E)$.

`6:` Aus `5`“$\Omega = \Psi(E)$” und
aus `4.3`“$\Psi(E) = \mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}\,(E)$”
folgt: $\Omega = \mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}\,(E)$.

`7:` Aus `1`“$\ldots \Omega$ ist $\leq$_maximales Element von E” und
aus `6`“$\Omega = \mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}\,(E)$”
folgt: $\mu\overset{\leq}{\mathsf{a}}\mathsf{x}\,(E)$ ist $\leq$_maximales Element von E.

$\square$

193-2. Für TeilKlassen von $\mathbb{S}$ sind $\leq$ _minimale Elemente und $\leq$ _Minima, sind $\leq$ _maximale Elemente und $\leq$ _Maxima, identisch:

193-2(Satz)

a) *Aus "$E \subseteq \mathbb{S}$" und "μin ist $\leq$ _minimales Element von E"*
folgt "$\mu in = \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$" und "$\mu in = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$"
und "$\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\,E$.

b) *Aus "$E \subseteq \mathbb{S}$" und "μax ist $\leq$ _maximales Element von E"*
folgt "$\mu ax = \overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$" und "$\mu ax = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E$"
und "$\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,E$.

Beweis **193-2** `a)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\mu in$ ist $\leq$ _minimales Element von $E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mu in$ ist $\leq$ _minimales Element von E" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **171-3**: μin ist $\leq$ _Minimum von E.

`1.2:` Aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`2:` Aus `1.2`"E Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mu in$ ist $\leq$ _minimales Element von E"
folgt via **184-2**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$.

`3.1:` Aus `1.1`"μin ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **191-2**: $\mu in = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2`"$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}$"
folgt via **193-1**: $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$ ist $\leq$ _minimales Element von E.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mu in$ ist $\leq$ _minimales Element von E",
aus `3`"$\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$ ist $\leq$ _minimales Element von E" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **171-4**: $\mu in = \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$.

`5:` Aus `4`"$\mu in = \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$" und
aus `3.1`"$\mu in = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$"
folgt: $\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$.

`6:` Aus `1.1`"μin ist $\leq$ _Minimum von E",
aus `4`"$\mu in = \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)$",
aus `3.1`"$\mu in = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$" und
aus `5`"$\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E$"
folgt: $(\mu in$ ist $\leq$ _Minimum von $E)$
$\wedge(\mu in = \overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E)) \wedge (\mu in = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E) \wedge (\overset{\leq}{\mu\mathsf{in}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{min}}\, E)$.

Beweis **193-2** `b)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\mu ax \text{ ist } \leq \text{\_maximales Element von } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "... μax ist $\leq$ _maximales Element von E" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$ ..."
folgt via **171-3**: μax ist $\leq$ _Maximum von E.

`1.2:` Aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$ ..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: E Menge.

`2:` Aus `1.2`"E Menge" und
aus `VS` gleich "... μax ist $\leq$ _maximales Element von E"
folgt via **184-2**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$.

`3.1:` Aus `1.1`"μax ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **191-2**: $\mu ax = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$ ..." und
aus `2`"$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **193-1**: $\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$ ist $\leq$ _maximales Element von E.

`4:` Aus `VS` gleich "... μax ist $\leq$ _maximales Element von E",
aus `3`"$\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$ ist $\leq$ _maximales Element von E" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$ ..."
folgt via **171-4**: $\mu ax = \overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$.

`5:` Aus `4`"$\mu ax = \overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$" und
aus `3.1`"$\mu ax = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$"
folgt: $\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$.

`6:` Aus `1.1`"μax ist $\leq$ _Maximum von E",
aus `4`"$\mu ax = \overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)$",
aus `3.1`"$\mu ax = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$" und
aus `5`"$\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E$"
folgt: $(\mu ax \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } E)$
$\wedge(\mu ax = \overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E)) \wedge (\mu ax = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E) \wedge (\overset{\leq}{\mu\mathsf{ax}}\,(E) = \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, E)$.

$\square$

193-3. Nun wird der Definitions-Bereich $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$ von $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$ untersucht. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - e) - d)`:

193-3(Satz)

a) *Aus "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$" folgt "$E \in \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$".*

b) *Aus "$E \in \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$" folgt "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$".*

c) *Aus "E Menge" und "$E \not\subseteq \mathbb{S}$" folgt "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$".*

d) $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$.

e) $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} = \overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

Beweis **193-3** `a)` `VS` gleich $(E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

1: Aus `VS` gleich "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \ldots$"
folgt via **184-2**: $(E \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{-minimales Element von } E)$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-minimales Element von E" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **171-3**: Ω ist $\leq$-Minimum von E.

3: Aus 1"E Menge$\ldots$" und
aus 2"Ω ist $\leq$-Minimum von E"
folgt via **183-2**: $E \in \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$.

`b)` `VS` gleich $E \in \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$.

1: Via **184-3** gilt: $\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

2: Aus `VS` gleich "$E \in \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$" und
aus 1"$\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **0-4**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

Beweis **193-3** `c)` `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \not\subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \mathbb{S})$.

`2:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \notin \mathbb{S}$" und
aus `2`"$\mathsf{ran}\,(\leq) = \mathbb{S}$"
folgt: $\Omega \notin \mathsf{ran}\,(\leq)$.

`4:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `3`"$\Omega \notin \mathsf{ran}\,(\leq)$"
folgt via **5-3**: $\Omega \in E \setminus \mathsf{ran}\,(\leq)$.

`5:` Aus `4`"$\Omega \in E \setminus \mathsf{ran}\,(\leq)$"
folgt via **192-1**: Ω ist $\leq$ _minimales Element von E.

`6:` Aus `VS` gleich "E Menge$\ldots$" und
aus `5`"Ω ist $\leq$ _minimales Element von E"
folgt via **184-2**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

`de)`

`1.1:` Via **184-3** gilt: `A1` | "$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"

> `Thema1.2` $\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$"
> folgt via **158-2**: $(\alpha \not\subseteq \mathbb{S}) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.
>
> `3:` Aus `2`"$\ldots \alpha$ Menge" und
> aus `2`"$\alpha \not\subseteq \mathbb{S} \ldots$"
> folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$(\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"

...

Beweis **193-3** `de)` ...

`Thema1.3` $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

`2:` Es gilt: $(\alpha \subseteq \mathbb{S}) \vee (\neg(\alpha \subseteq \mathbb{S}))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \subseteq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$” und
aus `2.1.Fall`“$\alpha \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in}$.

`4:` Aus `3`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`2.2.Fall` $\neg(\alpha \subseteq \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.2:` Aus `2.2`“$\neg(\alpha \subseteq \mathbb{S})$”
folgt via **0-3**: $\alpha \not\subseteq \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.1`“α Menge” und
aus `3.2`“$\alpha \not\subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **158-2**: $\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C.$$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in} \cup ((\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` | “$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{in} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$”

...

Beweis **193-3** `de)` ...

`2:` Aus `A1` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$" und
aus `A2` gleich "$(\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **2-12**: $\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$.

`3.e):` Aus `A3` gleich "$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \subseteq \overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$" und
aus 2"$\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} = \overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`4:`
$$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})$$
$$\overset{\mathtt{3.e)}}{=} (\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C) \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})$$
$$\overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})) \cup ((\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}))$$
$$\overset{\mathbf{3-6}}{=} (\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})) \cup 0$$
$$\overset{\mathbf{2-17}}{=} \overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}).$$

`5:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$.

`6:` Via **191-1** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`7:` Aus 6"$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt via **2-10**: $(\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}})) \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}})$.

`8:` Aus 7"$(\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}})) \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}})$" und
aus 5"$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{min}}) = \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$.

`9.d):` Aus 4"$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \ldots = \overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus 8"$\overset{\leq}{\mathsf{emin}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$"
folgt: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{in} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \overset{\leq}{\mathsf{emin}}$.

□

193-4. Nun wird der Definitions-Bereich $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$ von $\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$ untersucht. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - e) - d)`:

193-4(Satz)

`a)` *Aus* "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$" *und* "$E \subseteq \mathbb{S}$" *folgt* "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$".

`b)` *Aus* "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$" *folgt* "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$".

`c)` *Aus* "E *Menge*" *und* "$E \not\subseteq \mathbb{S}$" *folgt* "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$".

`d)` $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$.

`e)` $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

Beweis **193-4** `a)` `VS` gleich $(E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \ldots$"
folgt via **184-2**: $(E \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{\_maximales Element von } E)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$_maximales Element von E" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **171-3**: Ω ist $\leq$_Maximum von E.

`3:` Aus `1`"E Menge$\ldots$" und
aus `2`"Ω ist $\leq$_Maximum von E"
folgt via **183-2**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$.

`b)` `VS` gleich $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$.

`1:` Via **184-3** gilt: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$" und
aus `1`"$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$"
folgt via **0-4**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$.

Beweis **193-4** `c)` `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \not\subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \mathbb{S})$.

`2:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \notin \mathbb{S}$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$"
folgt: $\Omega \notin \mathsf{dom}\,(\leq)$.

`4:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `3`"$\Omega \notin \mathsf{dom}\,(\leq)$"
folgt via **5-3**: $\Omega \in E \setminus \mathsf{dom}\,(\leq)$.

`5:` Aus `4`"$\Omega \in E \setminus \mathsf{dom}\,(\leq)$"
folgt via **192-1**: Ω ist $\leq$ _maximales Element von E.

`6:` Aus `VS` gleich "E Menge$\ldots$" und
aus `5`"Ω ist $\leq$ _maximales Element von E"
folgt via **184-2**: $E \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\overline{\mu}}\mathsf{ax}$.

`de)`

`1.1:` Via **184-3** gilt: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{"}\mathsf{e}\overset{\leq}{\overline{\mathsf{m}}}\mathsf{ax} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\overline{\mu}}\mathsf{ax}\text{"}}$

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$"
> folgt via **158-2**: $(\alpha \not\subseteq \mathbb{S}) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.
>
> `3:` Aus `2`"$\ldots \alpha$ Menge" und
> aus `2`"$\alpha \not\subseteq \mathbb{S} \ldots$"
> folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\overline{\mu}}\mathsf{ax}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\overline{\mu}}\mathsf{ax})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{"}(\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\overline{\mu}}\mathsf{ax}\text{"}}$

...

<u>Beweis **193-4**</u> `de)` ...

`Thema1.3` $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$.

`2:` Es gilt: $(\alpha \subseteq \mathbb{S}) \vee (\neg(\alpha \subseteq \mathbb{S}))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \subseteq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$” und
aus `2.1.Fall`“$\alpha \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$.

`4:` Aus `3`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`2.2.Fall` $\neg(\alpha \subseteq \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.2:` Aus `2.2`“$\neg(\alpha \subseteq \mathbb{S})$”
folgt via **0-3**: $\alpha \not\subseteq \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.1`“α Menge” und
aus `3.2`“$\alpha \not\subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **158-2**: $\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup ((\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` | “$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$”

...

Beweis **193-4** `de)` ...

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$” und
aus `A2` gleich “$(\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$”
folgt via **2-12**: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}.$

`3.e):` Aus `A3` gleich “$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C$” und
aus 2“$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \subseteq \mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C.$

`4:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})\\
\overset{\text{3.e)}}{=}\;& (\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C) \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})\\
\overset{\mathbf{DG}\cap\cup}{=}\;& (\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})) \cup ((\mathcal{P}(\mathbb{S}))^C \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}))\\
\overset{\mathbf{3-6}}{=}\;& (\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})) \cup 0\\
\overset{\mathbf{2-17}}{=}\;& \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}).
\end{aligned}$$

`5:` Via **183-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}.$

`6:` Via **191-1** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S}).$

`7:` Aus 6“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt via **2-10**: $(\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax})) \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}).$

`8:` Aus 7“$(\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax})) \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax})$” und
aus 5“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$”
folgt: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}.$

`9.d):` Aus 4“$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \ldots = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus 8“$\mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}$”
folgt: $\mathsf{e}\overset{\leq}{\mu}\mathsf{ax} \cap \mathcal{P}(\mathbb{S}) = \mathsf{e}\overset{\leq}{\mathsf{m}}\mathsf{ax}.$

$\square$

$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}.\ \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}.\ \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}.\ \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}.$

Ersterstellung: 11/06/12 **Letzte Änderung: 04/06/13**

194-1. Als Vorbereitung zur Betrachtung von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$ und $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$ werden hier zwei neue Klassen in die Essays eingeführt:

194-1(Definition)

1) $\mathtt{194.0}() = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{\_Supremum von } \{\ldots,\omega\})\}$.

2) $\mathtt{194.1}() = \{\omega : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{\_Infimum von } \{\omega,\ldots\})\}$.

194-2. Die in **194-1(Def)** eingeführten Klassen stellen sich als $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$ und $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$ heraus und diese Klassen sind via der Totalen Vollständigkeit von $\leq$ gleich dem Universum:

<u>**194-2(Satz)**</u>

a) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } \leq\text{-}\textit{Supremum von } \{\ldots, \omega\})\}$.

b) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } \leq\text{-}\textit{Infimum von } \{\omega, \ldots\})\}$.

c) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \mathcal{U}$.

d) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \mathcal{U}$.

e) *“$p \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$” genau dann, wenn “$p$ Menge”.*

f) *“$p \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$” genau dann, wenn “$p$ Menge”.*

194-1(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } \leq\text{-}\textit{Supremum von } \{\ldots, \omega\})\}$.
194-1(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : \Omega \textit{ ist } \leq\text{-}\textit{Infimum von } \{\omega, \ldots\})\}$.

<u>Beweis</u> **194-2** a)

1: Via **185-1(Def)** gilt:
$$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{-Supremum von } \mathbb{Z} \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|}\ \omega])\}.$$

2: Via **169-13** gilt: $$\mathbb{Z} \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|}\ \omega] = \{\ldots, \omega\}.$$

3: Aus 1“ $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{-Supremum von } \mathbb{Z} \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|}\ \omega])\}$ ” und
aus 2“ $\mathbb{Z} \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|}\ \omega] = \{\ldots, \omega\}$ ”
folgt: $$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq\text{-Supremum von } \{\ldots, \omega\})\}.$$

Beweis **194-2** `b)`

`1:` Via **185-1(Def)** gilt:
$$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \mathbb{Z} \cap [\omega \overset{\leq}{|} \cdot\rangle)\}.$$

`2:` Via **169-13** gilt:
$$\mathbb{Z} \cap [\omega \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = \{\omega, \ldots\}.$$

`3:` Aus `1`“$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \mathbb{Z} \cap [\omega \overset{\leq}{|} \cdot\rangle)\}$” und
aus `2`“$\mathbb{Z} \cap [\omega \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = \{\omega, \ldots\}$”
folgt:
$$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{\omega, \ldots\})\}.$$

`c)`

Aus **AAVII**“$\leq$ ist Total Vollständig”
folgt via **185-10**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \mathcal{U}$.

`d)`

Aus **AAVII**“$\leq$ ist Total Vollständig”
folgt via **185-10**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \mathcal{U}$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **0-22** gilt: $(p \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow (p \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}) \Leftrightarrow (p \text{ Menge})$.

`f)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **0-22** gilt: $(p \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow (p \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}) \Leftrightarrow (p \text{ Menge})$.

□

194-3. Vorbereitend zur Ermittlung von $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$, von $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$, wird nun **185-4** für $M = \leq$ und $E = \mathbb{Z}$ adaptiert:

194-3(Satz)

a) *"$(p,q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$" genau dann, wenn "$p$ Menge" und "q ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots,p\}$".*

b) *"$(p,q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$" genau dann, wenn "$p$ Menge" und "q ist $\leq$ _Infimum von $\{p,\ldots\}$".*

Beweis **194-3** a)

1.1: Via **185-4** gilt:

$$((p,q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \mathbb{Z} \cap \langle \cdot \overset{\leq}{|}\, p])).$$

1.2: Via **169-13** gilt: $$\mathbb{Z} \cap \langle \cdot \overset{\leq}{|}\, p] = \{\ldots,p\}.$$

2: Aus 1.1 und 1.2 folgt:

$$((p,q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{\ldots,p\})).$$

b)

1.1: Via **185-4** gilt:

$$((p,q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \mathbb{Z} \cap [p \overset{\leq}{|} \cdot\rangle)).$$

1.2: Via **169-13** gilt: $$\mathbb{Z} \cap [p \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = \{p,\ldots\}.$$

2: Aus 1.1 und 1.2 folgt:

$$((p,q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } \{p,\ldots\})).$$

$\square$

194-4. Auch das vorliegende, insgesamt ein wenig aus dem Kontext zu fallen scheinende Resultat liefert einen wichtigen Beitrag zur Ermittlung von $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$ und $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$:

194-4(Satz)

a) *Aus* "inf *ist* $\leq$ *-Infimum von* $\{x,\ldots,y\}$"
folgt "$(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty) \vee (inf \in \mathbb{Z})$".

b) *Aus* "sup *ist* $\leq$ *-Supremum von* $\{x,\ldots,y\}$"
folgt "$(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty) \vee (sup \in \mathbb{Z})$".

c) *Aus* "inf *ist* $\leq$ *-Infimum von* $\{x,\ldots\}$"
folgt "$(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty) \vee (inf \in \mathbb{Z})$".

d) *Aus* "sup *ist* $\leq$ *-Supremum von* $\{x,\ldots\}$"
folgt "$(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty)$".

e) *Aus* "inf *ist* $\leq$ *-Infimum von* $\{\ldots,y\}$"
folgt "$(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty)$".

f) *Aus* "sup *ist* $\leq$ *-Supremum von* $\{\ldots,y\}$"
folgt "$(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty) \vee (sup \in \mathbb{Z})$".

Beweis **194-4** `a)` `VS` gleich inf ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $inf \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$inf \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty) \vee (inf \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $inf = +\infty$.

`2.2.Fall` $inf = -\infty$.

`2.3.Fall` $inf \in \mathbb{R}$.

`3:` Es gilt: $(inf \in \mathbb{Z}) \vee (inf \notin \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $inf \in \mathbb{Z}$.

`3.2.Fall` $inf \notin \mathbb{Z}$.

`4:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$inf \notin \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $inf \notin \{x, \ldots, y\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "inf ist $\le$ _Infimum von $\{x, \ldots, y\}$",
aus `5`"$inf \notin \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.3.Fall`"$inf \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\{x, \ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`7:` Aus `6`
folgt via **0-3**: $\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$.

`8:` Es gilt `7`"$\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $inf \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $inf \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty) \vee (inf \in \mathbb{Z})$.

Beweis **194-4** `b)` `VS` gleich sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$"
folgt via **157-3**: $sup \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$sup \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty) \vee (sup \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $sup = +\infty$.

`2.2.Fall` $sup = -\infty$.

`2.3.Fall` $sup \in \mathbb{R}$.

`3:` Es gilt: $(sup \in \mathbb{Z}) \vee (sup \notin \mathbb{Z})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $sup \in \mathbb{Z}$.

`3.2.Fall` $sup \notin \mathbb{Z}$.

`4:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$sup \notin \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $sup \notin \{x, \ldots, y\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x, \ldots, y\}$",
aus `5`"$sup \notin \{x, \ldots, y\}$" und
aus `2.3.Fall`"$sup \in \mathbb{R}$"
folgt via **173-6**: $\{x, \ldots, y\} \not\subseteq \mathbb{Z}$.

`7:` Aus `6`
folgt via **0-3**: $\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$.

`8:` Es gilt `7`"$\neg(\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z})$".
Es gilt `4`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $sup \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $sup \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty) \vee (sup \in \mathbb{Z})$.

Beweis **194-4** `c)` `VS` gleich $\quad inf$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots\}$.

`1:` Via **169-8** gilt: $\quad \{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots\}$" und
aus `1`"$\{x,\ldots\} = \{x,\ldots,+\infty\}$"
folgt: $\quad inf$ ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots,+\infty\}$.

`3:` Aus `2`"inf ist $\leq$ _Infimum von $\{x,\ldots,+\infty\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty) \vee (inf \in \mathbb{Z}).$$

`d)` `VS` gleich $\quad sup$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$.

`1:` Es gilt: $\quad (\{x,\ldots\} = 0) \vee (0 \neq \{x,\ldots\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\quad \{x,\ldots\} = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\{x,\ldots\} = 0$"
folgt via **180-16**: $\quad -\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$" und
aus `2`"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$"
folgt via **171-1**: $\quad sup = -\infty$.

`1.2.Fall` $\quad 0 \neq \{x,\ldots\}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \{x,\ldots\}$"
folgt via **180-16**: $\quad +\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$" und
aus `2`"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{x,\ldots\}$"
folgt via **171-1**: $\quad sup = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty).$$

Beweis **194-4** `e)` `VS` gleich $\quad inf$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

`1:` Es gilt: $\quad (\{\ldots, y\} = 0) \vee (0 \neq \{\ldots, y\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\quad \{\ldots, y\} = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\{\ldots, y\} = 0$”
folgt via **180-17**: $\quad +\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

`3:` Aus `VS` gleich “inf ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$” und
aus `2`“$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$”
folgt via **171-1**: $\quad inf = +\infty$.

`1.2.Fall` $\quad 0 \neq \{\ldots, y\}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq \{\ldots, y\}$”
folgt via **180-17**: $\quad -\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$.

`3:` Aus `VS` gleich “inf ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$” und
aus `2`“$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\ldots, y\}$”
folgt via **171-1**: $\quad inf = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(inf = +\infty) \vee (inf = -\infty)$.

`f)` `VS` gleich $\quad sup$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$.

`1:` Via **169-8** gilt: $\quad \{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `VS` gleich “sup ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, y\}$” und
aus `1`“$\{\ldots, y\} = \{-\infty, \ldots, y\}$”
folgt: $\quad sup$ ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$.

`3:` Aus `2`“sup ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty, \ldots, y\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(sup = +\infty) \vee (sup = -\infty) \vee (sup \in \mathbb{Z})$.

$\square$

194-5. Vorbereitend für die Ermittlung von $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$ und $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$ wird die nunmehrige, auch an sich interessente Äquivalenz bewiesen:

194-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`ii)` $(p,p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`iii)` $(p,p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

Beweis **194-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **94-8**: $(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{Z})$.

`2:` Aus `1.2`"$(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{Z})$"
folgt via **180-7**: p ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`3:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `2`"p ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt via **194-3**: $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **194-3**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } \{\ldots, p\})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots p$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt via **180-7**: $(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{Z})$.

`3:` Aus `2`"$(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{Z})$"
folgt via **180-4**: p ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`4:` Aus `1`"p Menge…" und
aus `3`"p ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **194-3**: $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **194-3**: p ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`2:` Aus `1`"p ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **180-4**: $(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{Z})$.

`3:` Aus `2`"$(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{Z})$"
folgt via **94-8**: $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

$\square$

194-6. Bei $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$, bei $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$, handelt es sich um eine Funktion mit Definitions-Bereich= $\mathcal{U}$ und Bild-Bereich= $\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$:

194-6(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \mathcal{U}$.

b) $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

c) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ *Funktion.*

d) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

e) $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \mathcal{U}$.

f) $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

g) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ *Funktion.*

h) $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

Beweis **194-6**

≤-Notation.

---

a)

1.1: Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$.

1.2: Via **194-3** gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \mathcal{U}$.

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **194-6**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`3:` Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **194-3**: α ist $\leq$ -Supremum von $\{\ldots, \Omega\}$.

`4:` Aus 3 "α ist $\leq$ -Supremum von $\{\ldots, \Omega\}$"
folgt via **193-4**: $(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty) \vee (\alpha \in \mathbb{Z})$.

`5:` Aus 4 "$(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty) \vee (\alpha \in \mathbb{Z})$"
folgt via **94-8**: $\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})) \Rightarrow (\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) \subseteq \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **194-5**: $(\alpha, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`3:` Aus 2 "$(\alpha, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$"

...

Beweis **194-6** `b)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) \subseteq \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$" und
aus `A2` gleich "$\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`c)`

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch"
folgt via **185-7**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} : \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cup (\mathsf{ran}\,(\leq))$.

`3:` Aus `2`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} : \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cup (\mathsf{ran}\,(\leq))$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.1`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \mathcal{U}$" und
aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **21-2**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`e)`

`1.1:` Via **185-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$.

`1.2:` Via **194-3** gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \mathcal{U}$.

Beweis **194-6** `f)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$"

folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"

folgt via **194-3**: α ist $\leq$ -Infimum von $\{\Omega, \ldots\}$.

4: Aus 3 "α ist $\leq$ -Infimum von $\{\Omega, \ldots\}$"

folgt via **193-4**: $(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty) \vee (\alpha \in \mathbb{Z})$.

5: Aus 4 "$(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty) \vee (\alpha \in \mathbb{Z})$"

folgt via **94-8**: $\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})) \Rightarrow (\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) \subseteq \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

2: Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"

folgt via **194-5**: $(\alpha, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

3: Aus 2 "$(\alpha, \alpha) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"

folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$.

Ergot `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$"

...

Beweis **194-6** `f)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) \subseteq \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$" und
aus `A2` gleich "$\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`g)`

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrisch"
folgt via **185-7**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} : \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cup (\mathsf{ran}\,(\leq))$.

`3:` Aus `2`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} : \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} \to (\mathsf{dom}\,(\leq)) \cup (\mathsf{ran}\,(\leq))$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion.

`h)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.1`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \mathcal{U}$" und
aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **21-2**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

$\square$

194-7. Da es sich via **194-6** bei $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ um Funktionen hat, gelingt die nun vorliegende Re-Formulierung von **194-5**:

194-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`ii)` p *Fixpunkt von* $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`iii)` p *Fixpunkt von* $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

Beweis **194-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$"
folgt via **194-5**: $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`2:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion" und
aus `1.2`"$(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **18-20**: $p = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) = p$.

`4:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `3`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) = p$"
folgt via **53-2**: p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

<u>Beweis **194-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})) \wedge (\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **53-2**: p Menge.

`2.1:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion" und
aus `1`"$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}) \ldots$"
folgt via **18-22**: $(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)) = (p, p)$.

`3:` Aus `2.1`"$(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$" und
aus `2.2`"$(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)) = (p, p)$"
folgt: $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`4:` Aus `3`"$(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **194-5**: $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

`5:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion" und
aus `4`"$(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **18-20**: $p = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = p$.

`7:` Aus `1.2`"p Menge" und
aus `6`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = p$"
folgt via **53-2**: p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

Beweis **194-7** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

1: Aus VS gleich "p Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **53-1(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})) \wedge (\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = p)$.

2.1: Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion" und
aus 1"$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}) \ldots$"
folgt via **18-22**: $(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

2.2: Aus 1"$\ldots \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)) = (p, p)$.

3: Aus 2.1"$(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$" und
aus 2.2"$(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)) = (p, p)$"
folgt: $(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

4: Aus 3"$(p, p) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **194-5**: $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

$\square$

194-8. Für jede Menge p ist $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ das $\leq$ _Supremum von $\{\ldots,p\}$, ist $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ das $\leq$ _Infimum von $\{p,\ldots\}$:

194-8(Satz)

a) *Aus "p Menge" folgt "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots,p\}$".*

b) *Aus "p Menge" folgt "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p,\ldots\}$".*

c) *"p Menge" und "q ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots,p\}$"*
genau dann, wenn "q Menge" und "$q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$".

d) *"p Menge" und "q ist $\leq$ _Infimum von $\{p,\ldots\}$"*
genau dann, wenn "q Menge" und "$q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$".

e) *"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) \leq p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{S}$".*

f) *Aus "$\mathbb{Z} \ni l \leq p$" folgt "$l \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) \leq p$".*

g) *Aus "$p \leq l \in \mathbb{Z}$" folgt "$p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) \leq l$".*

$\leq$-Notation.

Beweis **194-8** `a)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$" und
aus `1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **188-3**: $(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`3:` Aus `2`"$(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **194-3**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`b)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$" und
aus `1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **188-3**: $(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

`3:` Aus `2`"$(p, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **194-3**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(p$ Menge$) \wedge (q$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt via **36-4**: q Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p$ Menge$) \wedge (q$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\})$"
folgt via **194-3**: $(p, q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$.

`2:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion" und
aus `1.2`"$(p, q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$"
folgt via **18-20**: $q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$.

`3:` Aus `1.1`"q Menge" und
aus `2`"$q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$"
folgt: $(q$ Menge$) \wedge (q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p))$.

Beweis **194-8** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$" und
aus VS gleich "q Menge…"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge.

2: Aus 1"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge"
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$.

3: Aus 2"$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}})$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

4: Aus 3"p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen a):
$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

5: Aus VS gleich "$\ldots q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$" und
aus 4"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt: q ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

6: Aus 3"p Menge" und
aus 5"q ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\})$.

d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\})$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots q$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **36-3**: q Menge.

1.2: Aus VS gleich "$(p \text{ Menge}) \wedge (q$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\})$"
folgt via **194-3**: $(p, q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$.

2: Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion" und
aus 1.2"$(p, q) \in \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$"
folgt via **18-20**: $q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$.

3: Aus 1.1"q Menge" und
aus 2"$q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$"
folgt: $(q \text{ Menge}) \wedge (q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p))$.

Beweis **194-8** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$" und
aus `VS` gleich "q Menge…"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ Menge"
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$.

`3:` Aus `2`"$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}})$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`4:` Aus `3`"p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$" und
aus `4`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt: q ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`6:` Aus `3`"p Menge" und
aus `5`"q ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\})$.

<u>Beweis **194-8**</u> `e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$.

Aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p \ldots$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`e)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\leq$ ist antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}(\leq) = \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus **AAVII**"$\leq$ ist antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}(\leq) = \mathbb{S}$.

`2.1:` $(\mathsf{ran}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} \overset{1.2}{=} \mathbb{S} \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} \overset{\mathbf{194-2}}{=} \mathbb{S} \cap \mathcal{U} \overset{\mathbf{2-17}}{=} \mathbb{S}$.

`2.2:` $(\mathsf{dom}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} \overset{1.1}{=} \mathbb{S} \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} \overset{\mathbf{194-2}}{=} \mathbb{S} \cap \mathcal{U} \overset{\mathbf{2-17}}{=} \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$" und
aus `2.1`"$(\mathsf{ran}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}} = \mathbb{S}$"
folgt: $p \in (\mathsf{ran}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{dom}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}} = \mathbb{S}$"
folgt: $p \in (\mathsf{dom}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$.

`4.1:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion" und
aus `3.1`"$p \in (\mathsf{ran}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{efl}}$"
folgt via **189-3**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p$.

`4.2:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion" und
aus `3.2`"$p \in (\mathsf{dom}(\leq)) \cap \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ecl}}$"
folgt via **189-3**: $p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$.

<u>Beweis **194-8**</u> `f)` `VS` gleich $\mathbb{Z} \ni l \leq p$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \leq p$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \leq p$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"p Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p$.

`3:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$" und
aus `2.1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ Menge.

`4:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$ Funktion",
aus `3`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\mathbb{Z} \ni l \leq p$"
folgt via **189-4**: $l \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$.

`5:` Aus `4`"$l \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$" und
aus `2.2`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p$"
folgt: $l \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \leq p$.

<u>Beweis **194-8**</u> `g)` `VS` gleich $p \leq l \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \leq l \ldots$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \leq l \ldots$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"p Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$.

`3:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} : \mathcal{U} \to \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$" und
aus `2.1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge.

`4:` Aus **194-6**"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ Funktion",
aus `3`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge" und
aus `VS` gleich "$p \leq l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **189-5**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \leq l$.

`5:` Aus `2.2`"$p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$" und
aus `4`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \leq l$"
folgt: $p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \leq l$.

□

194-9. Im Prinzip wird $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$ und $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{Z}$ erwartet. Hier wird fest gestellt, dass beide Aussagen genau dann zutreffen, wenn $p \in \mathbb{R}$:

194-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathbb{R}$.

`ii)` $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$.

`iii)` $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis **194-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{R}$”
folgt via **95-17**: $(p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $p \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Via **169-4** gilt: $\{\ldots, p\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2.1:` Aus `1.2`“$p \in \mathbb{S}$” und
aus `1.1`“$\ldots p \neq -\infty$”
folgt via **180-6**: $0 \neq \{\ldots, p\}$.

`2.2:` Aus `1.2`“$p \in \mathbb{S}$”
folgt via **180-3**: p obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, p\}$.

`2.3:` Aus `1.2`“$p \in \mathbb{S}$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3:` Aus `2.1`“$0 \neq \{\ldots, p\}$” und
aus `1.3`“$\{\ldots, p\} \subseteq \mathbb{Z}$”
folgt: $0 \neq \{\ldots, p\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`4:` Aus `3`“$0 \neq \{\ldots, p\} \subseteq \mathbb{Z}$”,
aus `2.2`“p obere $\leq$ _Schranke von $\{\ldots, p\}$” und
aus `1.1`“$p \neq +\infty \ldots$”
folgt via **MMS**$\mathbb{Z}$: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\{\ldots, p\}) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$.

`5:` Aus `4`“$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $\{\ldots, p\} \ldots$”
folgt via **38-7**: Ω ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`6:` Aus `2.3`“p Menge” und
aus `5`“Ω ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$”
folgt via **194-8**: $\Omega = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$.

`7:` Aus `4`“$\ldots \Omega \in \mathbb{Z}$” und
aus `6`“$\Omega = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$”
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis **194-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ Menge.

`2:` Aus `1`“$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ Menge” und
aus “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$”
folgt via **194-8**: $(p$ Menge$) \wedge (\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\})$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-5**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$” und
aus `3`“$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}} \in \mathbb{R}$”
folgt via **180-18**: $p \in \mathbb{R}$.

`5.1:` Aus `4`“$p \in \mathbb{R}$”
folgt via **95-17**: $(p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

`5.2:` Aus `4`“$p \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $p \in \mathbb{S}$.

`5.3:` Via **169-4** gilt: $\{p, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`6.1:` Aus `5.2`“$p \in \mathbb{S}$” und
aus `5.1`“$p \neq +\infty \ldots$”
folgt via **180-5**: $0 \neq \{p, \ldots\}$.

`6.2:` Aus `5.2`“$p \in \mathbb{S}$”
folgt via **180-2**: p untere $\leq$ _Schranke von $\{p, \ldots\}$.

`7:` Aus `6.1`“$0 \neq \{p, \ldots\}$” und
aus `5.3`“$\{p, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$”
folgt: $0 \neq \{p, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`8:` Aus `7`“$0 \neq \{p, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$”,
aus `6.2`“p untere $\leq$ _Schranke von $\{p, \ldots\}$” und
aus `5.1`“$\ldots p \neq -\infty$”
folgt via **MMS**$\mathbb{Z}$: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\{p, \ldots\}) \wedge (\Omega \in \mathbb{Z})$.

...

<u>Beweis **194-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) \in \mathbb{Z}$.

...

`9:` Aus `8`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $\{\ldots, p\} \ldots$"
folgt via **38-6**: Ω ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`10:` Aus `2`"p Menge..." und
aus `9`"Ω ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **194-8**: $\Omega = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$.

`11:` Aus `8`"$\ldots \Omega \in \mathbb{Z}$" und
aus `10`"$\Omega = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{Z}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{Z}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge" und
aus "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$"
folgt via **194-8**: $(p$ Menge$) \wedge (\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$" und
aus `3`"$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}} \in \mathbb{R}$"
folgt via **180-15**: $p \in \mathbb{R}$.

$\square$

194-10. Nun werden Kriterien dafür formuliert, dass $+\infty$ und $-\infty$ als Funktionswerte von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$, von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$, auftreten:

194-10(Satz)

a) “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = +\infty$” *genau dann, wenn* “$p = +\infty$”.

b) “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$”
genau dann, wenn “$p = -\infty$” *oder* “$(p$ *Menge*$) \wedge (p \notin \mathbb{S})$”.

c) “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$”
genau dann, wenn “$p = +\infty$” *oder* “$(p$ *Menge*$) \wedge (p \notin \mathbb{S})$”.

d) “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = -\infty$” *genau dann, wenn* “$p = -\infty$”.

Beweis **194-10** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = +\infty$.

1: Aus VS gleich “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = +\infty$” und
aus **95-3**“$+\infty$ Menge”
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge.

2: Aus 1“$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge”
folgt via **17-3**: p Menge.

3: Aus 2“p Menge”
folgt via **194-8**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$-Supremum von $\{\ldots, p\}$.

4: Aus 3“$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$-Supremum von $\{\ldots, p\}$” und
aus VS gleich “$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = +\infty$”
folgt: $+\infty$ ist $\leq$-Supremum von $\{\ldots, p\}$.

5: Aus 4“$+\infty$ ist $\leq$-Supremum von $\{\ldots, p\}$”
folgt via **180-18**: $p = +\infty$.

<u>Beweis **194-10**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $p = +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p = +\infty$" und
aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p = +\infty$"
folgt via **180-17**: p ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`2:` Aus `1.1` "p Menge" und
aus `1.2` "p ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt via **194-8**: $p = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p = +\infty$" und
aus `2` "$p = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p)$"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}(p) = +\infty$.

Beweis **194-10** `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$" und
aus **95-3** "$-\infty$ Menge"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge.

`2:` Aus `1` "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`3:` Aus `2` "p Menge"
folgt via **194-8**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`4:` Aus `3` "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$" und
aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`5:` Aus `4` "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$"
folgt via **180-18**: $\{\ldots, p\} = 0$.

`6:` Aus `5` "$\{\ldots, p\} = 0$"
folgt via **180-20**: $(p \notin \mathbb{S}) \vee (p = -\infty)$.

`7:` Aus `2` "p Menge" und
aus `6` "$(p \notin \mathbb{S}) \vee (p = -\infty)$"
folgt: $((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S})) \vee (p = -\infty)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(p = -\infty) \vee ((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S}))$.

<u>Beweis **194-10**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p = -\infty) \vee ((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p = -\infty) \vee ((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = -\infty$.

`2.1:` Aus **95-3**“$-\infty$ Menge” und
aus `1.1.Fall`“$p = -\infty$”
folgt: p Menge.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$p = -\infty$”
folgt via **180-20**: $\{\ldots, p\} = 0$.

`3:` Aus `2.2`“$\{\ldots, p\} = 0$”
folgt via **180-18**: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`4:` Aus `2.1`“p Menge” und
aus `3`“$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$”
folgt via **194-8**: $-\infty = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$.

`1.2.Fall` $(p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots p \notin \mathbb{S}$”
folgt via **180-20**: $\{\ldots, p\} = 0$.

`3:` Aus `2`“$\{\ldots, p\} = 0$”
folgt via **157-9**: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$.

`4:` Aus `1.2.Fall`“p Menge” und
aus `3`“$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{\ldots, p\}$”
folgt via **194-8**: $-\infty = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\,(p) = -\infty$.

Beweis **194-10** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$.

1: Aus VS gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$" und
aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ Menge.

2: Aus 1 "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

3: Aus 2 "p Menge"
folgt via **194-8**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

4: Aus 3 "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$" und
aus VS gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

5: Aus 4 "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **180-15**: $\{p, \ldots\} = 0$.

6: Aus 5 "$\{p, \ldots\} = 0$"
folgt via **180-19**: $(p \notin \mathbb{S}) \vee (p = +\infty)$.

7: Aus 2 "p Menge" und
aus 6 "$(p \notin \mathbb{S}) \vee (p = +\infty)$"
folgt: $((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S})) \vee (p = +\infty)$.

8: Aus 7
folgt: $(p = +\infty) \vee ((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S}))$.

Beweis **194-10** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p = +\infty) \vee ((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S}))$.

1: Nach VS gilt: $(p = +\infty) \vee ((p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S}))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p = +\infty$.

2.1: Aus **95-3**"$+\infty$ Menge" und aus 1.1.Fall"$p = +\infty$" folgt: p Menge.

2.2: Aus 1.1.Fall"$p = +\infty$" folgt via **180-19**: $\{p, \ldots\} = 0$.

3: Aus 2.2"$\{p, \ldots\} = 0$" folgt via **157-9**: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

4: Aus 2.1"p Menge" und aus 3"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$" folgt via **194-8**: $+\infty = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$.

5: Aus 4 folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$.

1.2.Fall $(p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathbb{S})$.

2: Aus 1.2.Fall"$\ldots p \notin \mathbb{S}$" folgt via **180-19**: $\{p, \ldots\} = 0$.

3: Aus 2"$\{p, \ldots\} = 0$" folgt via **180-15**: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

4: Aus 1.2.Fall"p Menge" und aus 3"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$" folgt via **194-8**: $+\infty = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p)$.

5: Aus 4 folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\,(p) = +\infty$.

<u>Beweis **194-10**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) = -\infty$" und
aus **95-3** "$-\infty$ Menge"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge.

`2:` Aus `1` "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`3:` Aus `2` "p Menge"
folgt via **194-8**: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`4:` Aus `3` "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$" und
aus `VS` gleich "$\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) = -\infty$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`5:` Aus `4` "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **180-15**: $p = -\infty$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $p = -\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p = -\infty$" und
aus **95-3** "$-\infty$ Menge"
folgt: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p = -\infty$"
folgt via **180-14**: p ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$.

`2:` Aus `1.1` "p Menge" und
aus `1.2` "p ist $\leq$ _Infimum von $\{p, \ldots\}$"
folgt via **194-8**: $p = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p = -\infty$" und
aus `2` "$p = \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p)$"
folgt: $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}(p) = -\infty$.

$\square$

- **F. Erwe**, *Differential- und Integralrechnung. Band 1*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1962.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- `matlab Version 7.2.0.294 (R2006a) 27.01.2006`, *Dokumentation.*
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).