Suite III - Die Elementare

Teil 4: Essays 208 - 219

o ist $\Box$neutral auf Q. Klassen-Sequenzen. Ungeordnete Tupel. Geordnete Tupel. $\Box$ kommutativ auf Q. $\Box$ assoziativ auf Q. func. ${}^{?}B$. ${}^{D}\supseteq^{?}B$. ${}^{D}B$. $c^{\mathbf{on}}D$. $c^{\mathbf{on}}\{p\}$. $\mathsf{215.0}(K, D)$. $\mathsf{217.0}(D, c)$. Einige Klassen konstanter Funktionen.

Andreas Unterreiter

22. August 2013

o ist □neutral auf Q.

Ersterstellung: 07/08/12 **Letzte Änderung: 07/08/12**

208-1. Neutrale Elemente bezüglich einer "binären Operation" $\Box$ spielen nicht nur in der klassischen Algebra eine grosse Rolle:

208-1(Definition)

"o **ist** $\Box$**neutral auf** Q" genau dann, wenn gilt:

$o \in Q$.

$\wedge$

$\forall \alpha : (\alpha \in Q) \Rightarrow (o{\_}\Box{\_}\alpha = \alpha{\_}\Box{\_}o = \alpha)$.

ALG-**Notation**.

208-2. Falls o ein $\Box$neutrales Element auf Q ist, dann ist o eine Menge, Q ist nicht leer und es gilt $o\_\Box\_o = o$:

208-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *o ist $\Box$neutral auf Q.*

Dann folgt:

a) *o Menge.*

b) $0 \neq Q$.

c) $o\_\Box\_o = o$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **208-2** `VS` gleich o ist $\Box$neutral auf Q.

1: Aus `VS` gleich "o ist $\Box$neutral auf Q"
folgt via **208-1(Def)**: $o \in Q$.

2.a): Aus 1"$o \in Q$"
folgt via **ElementAxiom**: o Menge.

2.b): Aus 1"$o \in Q$"
folgt via **0-20**: $0 \neq Q$.

2.c): Aus `VS` gleich "o ist $\Box$neutral auf Q" und
aus 1"$o \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $o\_\Box\_o = o$.

$\Box$

208-3. Falls o ein $\Box$neutrales Element auf Q ist und falls p ein $\Box$neutrales Element auf P ist und falls - wechselseitig - $o \in P$ und $p \in Q$ gilt, dann ist $o = p$ und o ist $\Box$neutral auf P und p ist $\Box$neutral auf Q:

208-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *o ist $\Box$neutral auf Q.*

$\rightarrow$) *p ist $\Box$neutral auf P.*

$\rightarrow$) *$o \in P$.*

$\rightarrow$) *$p \in Q$.*

Dann folgt:

a) *$o = p$.*

b) *o ist $\Box$neutral auf P.*

c) *p ist $\Box$neutral auf Q.*

Beweis **208-3**

`ALG`-**Notation**.

`1.1:` Aus →) "o ist $\Box$neutral auf Q" und
aus →) "$p \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $o\_\Box\_p = p$.

`1.2:` Aus →) "p ist $\Box$neutral auf P" und
aus →) "$o \in P$"
folgt via **208-1(Def)**: $o\_\Box\_p = o$.

`2.a):` Aus `1.1` "$o\_\Box\_p = p$" und
aus `1.2` "$o\_\Box\_p = o$"
folgt: $p = o$.

`3.b):` Aus `2.a)` "$p = o$" und
aus →) "p ist $\Box$neutral auf P"
folgt: o ist $\Box$neutral auf P.

`3.c):` Aus `2.a)` "$p = o$" und
aus →) "o ist $\Box$neutral auf Q"
folgt: p ist $\Box$neutral auf Q.

□

208-4. Falls o ein $\Box$neutrales Element auf Q ist und falls $o \in P \subseteq Q$ gilt, dann ist o ein $\Box$neutrales Element auf P:

208-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *o ist $\Box$neutral auf Q.*

$\rightarrow)$ *$o \in P \subseteq Q$.*

Dann folgt "o ist $\Box$neutral auf P".

Beweis **208-4**

`ALG`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in P$.

`2`: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in P$" und
aus $\rightarrow)$ "$\ldots P \subseteq Q$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in Q$.

`3`: Aus $\rightarrow)$ "o ist $\Box$neutral auf Q" und
aus `2` "$\alpha \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $o\_\Box\_\alpha = \alpha\_\Box\_o = \alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in P) \Rightarrow (o\_\Box\_\alpha = \alpha\_\Box\_o = \alpha)$"

`1.2`: Aus $\rightarrow)$ "$o \in P \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in P) \Rightarrow (o\_\Box\_\alpha = \alpha\_\Box\_o = \alpha)$"
folgt via **208-1(Def)**: o ist $\Box$neutral auf P.

$\Box$

208-5. Fall $o.p$ jeweils $\Box$neutrale Elemente auf Q sind, so gilt $o = p$:

208-5(Satz)

Aus "o ist $\Box$neutral auf Q"
und "p ist $\Box$neutral auf Q" *folgt "$o = p$".*

Beweis **208-5** `VS` gleich $(o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } Q) \wedge (p \text{ ist } \Box\text{neutral auf } Q)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "o ist $\Box$neutral auf $Q \ldots$"
folgt via **208-1(Def)**: $o \in Q$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $\Box$neutral auf Q"
folgt via **208-1(Def)**: $p \in Q$.

`2:` Aus `VS` gleich "o ist $\Box$neutral auf $Q \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $\Box$neutral auf Q",
aus `1.1`"$o \in Q$" und
aus `1.2`"$p \in Q$"
folgt via **208-3**: $o = p$.

$\Box$

Klassen-Sequenzen. Ungeordnete Tupel. Geordnete Tupel.

Ersterstellung: 07/08/12 **Letzte Änderung: 05/04/13**

209-1. Mit der Einführung von “Klassen-Sequenzen ” nimmt die Arbeit am LebensWerk gehörig an Fahrt auf - zumindest meiner gegenwärtigen (08.08.2o12) Einschätzung nach. Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass es bei der Formulierung von Aussagen gelegentlich von Vorteil ist, mehrere Klassen gleichzeitig zu betrachten. Etwa werden schon früh bei der Definition von Funktionen in **18-18(Def)** *drei* - nicht notwendiger Weise verschiedene - Klassen α, β, γ betrachtet und mit dieser, zwei Kommata beinhaltenden Schreibweise wird an dortiger Stelle unterschwellig eine “Klassen-Sequenz ” in den Essays verwendet. Bislang achte ich sorgfältig darauf, dass diese “Klassen-Sequenzen ” nur nach Allquantoren eingesetzt werden. Diese Sorgfalt soll ab nun zu Gunsten einer kürzeren Schreibweise aufgegeben werden. Stehen nämlich “Klassen-Sequenzen ” bei der Formulierung von Aussagen zur Verfügung, so können Ausdrücke wie (x Zahl) $\wedge$ (y Zahl) $\wedge$ (z Zahl) nun kürzer als x, y, z Zahl formuliert werden.

Auch wird der Weg zu “ungeordneten Tupeln” und “geordneten Tupeln” eröffnet.

Da für “Klassen-Sequenzen ” in den Essays keine eigenen Variablen zum Einsatz kommen, werden in der nun folgenden Sprachregelung “Klassen-Sequenzen ” mit Hilfe ansonsten nicht verwendeter Symbole wie “&, §, %, $, @, #” angesprochen. Da nicht anzunehmen ist, dass jede “Klassen-Sequenz eine Klasse ist”, müsste streng genommen ein eigenes, neues Symbol für die Gleichheit eingebracht werden. Darauf wird, da es sich um eine konservative Erweiterung handelt, verzichtet.

Klassen-Sequenzen

1) Jede Klasse ist eine Klassen-Sequenz.

2) Ist “#” eine Klassen-Sequenz und
ist “@” eine Klassen-Sequenz,
so ist “#, @” eine Klassen-Sequenz.

3) Eine Klassen-Sequenz “# ” ist genau dann *keine* Klasse,
wenn es eine Klassen-Sequenz “@ ” und eine Klasse “§ ” gibt,
so dass $\# = @, §$.

209-2. Nun wird thematisiert, wann eine Klasse x in einer Klassen-Sequenz vorkommt:

Klassen-Sequenzen: Vorkommen von Klassen

1) Ist "& " eine Klasse,
so kommt x in & vor,
genau dann, wenn $x = \&$.

2) Ist "#" eine Klassen-Sequenz und
ist "@" eine Klassen-Sequenz,
so kommt x in #, @ vor,
genau dann, wenn x kommt in # vor oder x kommt in @ vor.

209-3. Ein notationeller Vorteil, der durch die Benützung von Klassen-Sequenzen entsteht, besteht darin, dass ähnliche, durch Konjunktion verbundene Aussagen durch eine einzige, Klassen-Sequenzen beinhaltende “ Aussage ” ersetzt werden können:

<u>Klassen-Sequenzen: Aussagen</u>

Eine Zeichenkette,
die aus einer Aussage “ `A` ”
durch Ersetzung einer freien Variablen “ x ”
durch eine Klassen-Sequenz “ # ” entsteht,
ist die Konjunktion all jener Aussagen,
die aus `A` jeweils dadurch entstehen,
indem x durch jede einzelne Klasse, die in # vorkommt, ersetzt wird.

209-4. Nun wird die Gleichheit von Klassen in Bezug auf Klassen-Sequenzen erweitert:

Klassen-Sequenzen: Gleichheit

1) Ist "& " eine Klasse und ist "# " eine Klassen-Sequenz,
so gilt $\& = \#$
genau dann, wenn # eine Klasse ist und wenn $\& = \#$.

2) Ist "# " eine Klassen-Sequenz, ist "& " eine Klasse,
ist "@ " eine Klassen-Sequenz und ist "§ " eine Klasse,
so gilt $\#, \& = @, \S$, genau dann, wenn
$\# = @$ und $\& = \S$.

3) Ist "# " eine Klassen-Sequenz und
ist "@ " eine Klassen-Sequenz,
so gilt $\# = @$, genau dann, wenn $@ = \#$.

4) Ist "# " eine Klassen-Sequenz, so gilt $\# = \#$.

5) Ist "# " eine Klassen-Sequenz, ist "@ " eine Klassen-Sequenz,
ist "\$ " eine Klassen-Sequenz und gilt $\# = @$ und $@ = \$$,
so gilt auch $\# = \$$.

209-5. Ist jede Klasse, die in einer Klassen-Sequenz vorkommt, eine Menge, so heißt die Klassen-Sequenz “mengenartig”:

Klassen-Sequenzen: Mengenartigkeit

1) Ist “&” eine Klasse, so ist & mengenartig,
genau dann, wenn & Menge.

2) Ist “#” eine Klassen-Sequenz und
ist “@” eine Klassen-Sequenz,
so ist #, @ mengenartig,
genau dann, wenn # mengenartig und @ mengenartig.

3) Ist “#” eine Klassen-Sequenz,
so ist # mengenartig, genau dann, wenn für alle α gilt:
α kommt *nicht* in # vor oder α Menge.

209-6. In konservativer Verallgemeinerung von Singeltons und ungeordneten Paaren - so dass keine Notwendigkeit besteht, neue Notationen einzusetzen - werden nun " ungeordnete Tupel " in die Essays eingeführt. Die Begriffsbildung verwendet Klassen-Sequenzen, so dass eine " klassische Definition " wie in **Suite I - Die StrukturGebende** *nicht* möglich ist:

Ungeordnete Tupel

1) Jedes ungeordnete Tupel ist eine Menge.

2) Ist " # " eine Klassen-Sequenz,
so ist " $\{\#\}$ " ein ungeordnetes Tupel.

3) Ist " x " ein ungeordnetes Tupel,
so gibt es eine Klassen-Sequenz " # " ,
so dass $x = \{\#\}$.

4) Ist " # " eine Klassen-Sequenz,
so gilt $x \in \{\#\}$,
genau dann, wenn x Menge und x kommt in # vor.

209-7. Nun wird die Inklusion und die Gleichheit ungeordneter Tupel thematisiert. Wäre für Klassen-Sequenzen die Mathematik der Essays verfügbar - was nicht ist, da Klassen-Sequenzen nich unbedingt Klassen sind - so wären diese Aussagen auf der Basis von **209-6** und den bisherigen Resultaten beweisbar. In 3) wird fest gestellt, dass sich die allgemeine Ersetzungs-Regel, wonach gleiche Klassen durch gleiche Klassen ersetzt werden können, auch für Klassen-Sequenzen in ungeordneten Tupeln gilt. Der Nachweis, dass die Gleichheit von ungeordneten Tupeln transitiv ist, erübrigt sich, da die Gleichheit von ungeordneten Tupeln die Gleichheit von Klassen ist. Die hier vorliegenden Aussagen setzen in konservativer Weise Entsprechendes von Singeltons und ungeordneten Paare für ungeordnete Tupel fort:

Ungeordnete Tupel: Inklusion und Gleichheit

1) Ist "# " eine Klassen-Sequenz und ist "@ " eine Klassen-Sequenz,
so gilt $\{\#\} \subseteq @$ genau dann, wenn für alle α gilt:
Falls α Menge und α kommt in # vor,
dann α kommt in @ vor.

2) Ist "# " eine Klassen-Sequenz und
ist "@ " eine Klassen-Sequenz,
so gilt $\{\#\} = \{@\}$, genau dann, wenn für alle α gilt:
α Menge und α kommt in # vor
genau dann, wenn
α Menge und α kommt in @ vor.

3) Ist "# " eine Klassen-Sequenz,
ist "@ " eine Klassen-Sequenz und
gilt $\# = @$,
so gilt auch $\{\#\} = \{@\}$.

4) Ist "# " eine Klassen-Sequenz,
so gilt $\{\#\} = \{\#\}$.

209-8. Nun werden “ geordnete Tupel ” in die Essays eingeführt. Geordnete Tupel haben de facto alle - natürlich geeignet modifizierte - Eigenschaften, die geordnete Paare haben. Dennoch ist zwischen dem geordneten Paar (x, y) und dem geordneten Tupel $[x, y]$ - speziell, wenn es sich bei x, y um Mengen handelt - zu unterscheiden. Das geordnete Paar (x, y) wird als nicht näher modellierter Bestandteil der Essays akzeptiert. Sind x, y Mengen, so handelt es sich bei $[x, y]$ um die *Funktion* $\{(0, x), (1, y)\}$, die als *Funktion* auf das Vorhandensein geordneter Paare angewiesen ist. Würde nun die Gleichung $(x, y) = [x, y]$ bestehen - es wird weiter von Mengen x, y ausgegangen -, so gäbe es einen Abgrund von Gleichungen, von denen hier die ersten angegeben werden: $(x, y) = [x, y] = \{(0, x), (1, y)\}$, woraus wegen $(0, x) = [0, x]$ und $(1, y) = [1, y]$ weiter die Gleichung $(x, y) = \{\{(0, 0), (1, x)\}, \{(0, 1), (1, y)\}\}$ folgt, woraus sich auf ähnliche Weise die Gleichung $(x, y) = \{\{\{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, x)\}\}, \{\{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, y)\}\}\}$ ergibt. Hier ist im Ansatz zu sehen, dass sich zu schlechter Letzt (x, y) als beliebig tief ineinander geschachtelte Menge entpuppt. So soll es natürlich nicht sein und dies ist Grund genug, geordneten Paaren weiterhin eine eigene Existenz zuzubilligen. In geordneten Tupeln Funktionen zu sehen vereinfacht später Einiges - so muss etwa nicht mehr zwischen der Summe von geordneten Tupeln und der Summe von Funktionen unterschieden werden:

Geordnete Tupel

1) Jedes geordnete Tupel ist eine Klasse.

2) Ist “ # ” eine Klassen-Sequenz,
so ist “ [#] ” ein geordnetes Tupel.

3) Ist “ x ” ein geordnetes Tupel,
so gibt es eine Klassen-Sequenz “ # ” ,
so dass $x = [\#]$.

209-9. Bei geordneten Tupeln, die auf mengenartige Klassen-Sequenzen zurück gehen, handelt es sich um spezielle Funktionen. Insbesondere wird implizit gesagt, dass zumindest die mengenartigen Klassen-Sequenzen "endliche Länge" haben. Schliesslich wird fest gestellt, dass ein geordnetes Tupel *genau dann* eine Menge ist, wenn # mengenartig ist:

Geordnete Tupel: Mengenartigkeit

1) Ist "$\#$" eine mengenartige Klassen-Sequenz, so ist
$[\#]$ eine Funktion mit
$0 \neq \mathsf{dom}\,([\#]) \in \mathbb{N}$ und
$\mathsf{ran}\,([\#]) = \{\#\}$.

2) Ist "$\&$" eine Klasse und ist $\&$ Menge,
so gilt $[\&] = \{(0, \&)\}$ und $[\&] : 1 \to \{\&\}$ und $[\&](0) = \&$.

3) Ist "$\#$" eine mengenartige Klassen-Sequenz und ist $\&$ Menge,
so gilt $[\#, \&] = [\#] \cup \{(\mathsf{dom}\,([\#]), \&)\}$ und
$\mathsf{dom}\,([\#, \&]) = 1 + \mathsf{dom}\,([\#])$ und
$[\#]$ ist die Einschränkung von $[\#, \&]$ auf $\mathsf{dom}\,([\#])$ und
für alle α gilt: Falls $\alpha \in \mathsf{dom}\,([\#])$, dann $[\#](\alpha) = [\#, \&](\alpha)$.

4) Ist "$\#$" eine Klassen-Sequenz,
so ist $[\#]$ Menge genau dann, wenn $\#$ mengenartig ist.

5) Ist "$\#$" eine Klassen-Sequenz,
so ist $[\#]$ Unmenge genau dann, wenn
$\#$ *nicht* mengenartig ist.

209-10. Nun geht es um die Gleichheit von geordneten Tupeln. Etliches hiervon ist von den geordneten Paaren vertraut. Auf Basis der "Funktions-Eigenschaft" geordneter Tupel mengenartiger Klassen-Sequenzen scheinen etliche Aussagen beweisbar - wenn eine Sprache, die Klassen-Sequenzen umfasst, zur Verfügung stünde. Auf jeden Fall gelten die vertrauten Ersetzungs-Regeln und geordnete Tupel sind stets $\neq 0$:

Geordnete Tupel: Gleichheit

1) Ist "#" eine Klassen-Sequenz, so gilt $[\#] = [\#]$.

2) Ist "#" eine Klassen-Sequenz,
ist "@" eine Klassen-Sequenz und
gilt $\# = @$,
so gilt auch $[\#] = [@]$.

3) Ist "&" eine Klasse, ist "§" eine Klasse und
gilt (& Menge oder § Menge) und $[\&] = [\S]$,
so gilt $\& = \S$ und & Menge und § Menge.

4) Ist "#" eine Klassen-Sequenz,
ist "@" eine Klassen-Sequenz und
gilt (# Klasse oder @ Klasse)
und (# mengenartig oder @ mengenartig) und $[\#] = [@]$,
so gilt $\# = @$ und # Menge und @ Menge.

5) Ist "#" eine Klassen-Sequenz, ist "@" eine Klassen-Sequenz,
ist "&" eine Klasse, ist "§" eine Klasse und
gilt ($\#, \&$ mengenartig oder $@, \S$ mengenartig)
und $[\#, \&] = [@, \S]$,
so folgt $[\#] = [@]$ und $\& = \S$ und
mengenartig und @ mengenartig und
& Menge und § Menge.

6) Ist "#" eine Klassen-Sequenz,
so gilt $0 \neq [\#]$.

□ **kommutativ auf Q.**

Ersterstellung: 07/08/12 **Letzte Änderung: 09/08/12**

210-1. Hier wird der Begriff "kommutativ " in die Essays eingeführt. Es wird *nicht* von einer Algebra auf Q ausgegangen. Erstmalig wird eine Klassen-Sequenz in einer Aussage - hier $\alpha, \beta \in Q$ - eingesetzt:

210-1(Definition)

"$\Box$ **kommutativ auf** Q" genau dann, wenn

$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta = \beta \_ \Box \_ \alpha).$$

ALG-**Notation**.

210-2. $\square$ ist auf 0 kommutativ und die Eigenschaft, auf Q kommutativ zu sein, "vererbt" sich auf Teil-Klassen von Q:

210-2(Satz)

a) $\square$ *kommutativ auf* 0.

b) *Aus* "$\square$ *kommutativ auf* Q" *und* "$P \subseteq Q$" *folgt* "$\square$ *kommutativ auf* P".

Beweis **210-2**

`ALG`-**Notation**.

---

a)

`Thema1` $\alpha, \beta \in 0.$

Es gilt `Thema1`“$\alpha \in 0 \ldots$” .
Via **0-19** gilt “$\alpha \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in 0) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha).$

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\square$ kommutativ auf 0.

`b)` `VS` gleich ($\square$ kommutativ auf Q) $\wedge$ ($P \subseteq Q$).

`Thema1` $\alpha, \beta \in P$

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in P \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots P \subseteq Q$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in Q.$

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta \in P$” und
aus `VS` gleich “$\ldots P \subseteq Q$”
folgt via **0-4**: $\beta \in Q.$

`3:` Aus `VS` gleich “$\square$ kommutativ auf $Q \ldots$” ,
aus `2.1`“$\alpha \in Q$” und
aus `2.2`“$\beta \in Q$”
folgt via **210-1(Def)**: $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in P) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha).$

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\square$ kommutativ auf P.

$\square$

□ **assoziativ auf Q.**

Ersterstellung: 09/08/12 **Letzte Änderung: 09/08/12**

211-1. Hier wird der Begriff "assoziativ" in die Essays eingeführt. Es wird *nicht* von einer Algebra auf Q ausgegangen:

211-1(Definition)

"$\Box$ **assoziativ auf** Q" genau dann, wenn

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ (\beta \_ \Box \_ \gamma) = (\alpha \_ \Box \_ \beta) \_ \Box \_ \gamma).$$

`ALG`-**Notation**.

211-2. $\square$ ist auf 0 assoziativ und die Eigenschaft, auf Q assoziativ zu sein, "vererbt" sich auf Teil-Klassen von Q:

211-2(Satz)

a) $\square$ *assoziativ auf* 0.

b) *Aus* "$\square$ *assoziativ auf* Q" *und* "$P \subseteq Q$" *folgt* "$\square$ *assoziativ auf* P".

Beweis **211-2**

`ALG`-Notation.

`a)`

> `Thema1` $\alpha, \beta, \gamma \in 0$.
>
> Es gilt `Thema1`"$\alpha \in 0 \ldots$".
> Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
> Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \_\square\_ (\beta \_\square\_ \gamma) = (\alpha \_\square\_ \beta) \_\square\_ \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in 0) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ (\beta \_\square\_ \gamma) = (\alpha \_\square\_ \beta) \_\square\_ \gamma)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: $\square$ assoziativ auf 0.

`b)` `VS` gleich $(\square$ assoziativ auf $Q) \wedge (P \subseteq Q)$.

> `Thema1` $\alpha, \beta, \gamma \in P$
>
> `2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in P \ldots$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots P \subseteq Q$"
> folgt via **0-4**: $\alpha \in Q$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1`"$\ldots \beta \in P \ldots$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots P \subseteq Q$"
> folgt via **0-4**: $\beta \in Q$.
>
> `2.3:` Aus `Thema1`"$\ldots \gamma \in P$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots P \subseteq Q$"
> folgt via **0-4**: $\gamma \in Q$.
>
> `3:` Aus `VS` gleich "$\square$ assoziativ auf $Q \ldots$",
> aus `2.1`"$\alpha \in Q$",
> aus `2.2`"$\beta \in Q$" und
> aus `2.3`"$\gamma \in Q$"
> folgt via **211-1(Def)**: $\alpha \_\square\_ (\beta \_\square\_ \gamma) = (\alpha \_\square\_ \beta) \_\square\_ \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in P) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ (\beta \_\square\_ \gamma) = (\alpha \_\square\_ \beta) \_\square\_ \gamma)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: $\square$ assoziativ auf P.

$\square$

func.

$$^{?}B.$$

$$^{D}\supseteq^{?}B.$$

$$^{D}B.$$

Ersterstellung: 09/08/12 **Letzte Änderung: 20/08/12**

212-1. Nun werden mit func ein neuer Parameter und weitere Klassen von Funktionen in die Essays eingeführt:

212-1(Definition)

a) func

$$= \mathsf{212.0}() = \{\omega : \omega \text{ Funktion}\}.$$

b) ${}^{\boldsymbol{?}}B$

$$= \mathsf{212.1}(B) = \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}.$$

c) ${}^{D\supseteq\boldsymbol{?}}B$

$$= \mathsf{212.2}(D,B) = \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}.$$

d) ${}^{D}B$

$$= \mathsf{212.3}(D,B) = \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}.$$

212-2. Hier wird die Zugehörigkeit zu func thematisiert:

212-2(Satz)

a) *"$f \in \mathsf{func}$" genau dann, wenn "f Menge" und "f Funktion".*

b) *"$f \in \mathsf{func}$" genau dann, wenn "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f$ Menge".*

c) *Aus "$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge" folgt "$f \notin \mathsf{func}$".*

d) *Aus "$f : D \to B$" und "D Menge" folgt "$f \in \mathsf{func}$".*

e) *Aus "$f : D \to B$" und "D Unmenge" folgt "$f \notin \mathsf{func}$".*

Beweis **212-2** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $f \in \mathsf{func}$.

1.1: Aus VS gleich "$f \in \mathsf{func}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{f \text{ Menge}}$

1.2: Aus VS gleich "$f \in \mathsf{func}$" und
aus "$\mathsf{func} = \{\omega : \omega \text{ Funktion}\}$"
folgt: $f \in \{\omega : \omega \text{ Funktion}\}$.

2: Aus 2"$f \in \{\omega : \omega \text{ Funktion}\}$"
folgt: $\boxed{f \text{ Funktion}}$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion})$.

1: Aus VS gleich "f Menge…" und
aus VS gleich "…f Funktion"
folgt: $f \in \{\omega : \omega \text{ Funktion}\}$.

2: Aus 1"$f \in \{\omega : \omega \text{ Funktion}\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \text{ Funktion}\} = \mathsf{func}$"
folgt: $f \in \mathsf{func}$.

Beweis **212-2** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in \mathsf{func}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in \mathsf{func}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: f Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in \mathsf{func}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{f \text{ Funktion}}$

`2:` Aus `1.1`"f Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\boxed{\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}}$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "…$\mathsf{dom}\, f$ Menge"
folgt via **26-3**: f Menge.

`2:` Aus `1`"f Menge" und
aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f \in \mathsf{func}$.

`c)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

`1:` Es gilt: $(f \in \mathsf{func}) \vee (f \notin \mathsf{func})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in \mathsf{func}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$f \in \mathsf{func}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`3:` Es gilt `2`"$\mathsf{dom}\, f$ Menge".
Es gilt `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin \mathsf{func}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin \mathsf{func}$.

Beweis **212-2** `d)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (D \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D$ Menge"
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`3:` Aus `1`"f Funktion. . . " und
aus `2`"$\mathsf{dom}\, f$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f \in \mathsf{func}$.

`e)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (D \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D$ Unmenge"
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $f \notin \mathsf{func}$.

$\square$

212-3. Hier wird die Zugehörigkeit zu $\,^{?}B$ diskutiert:

212-3(Satz)

a) *"$f \in \,^{?}B$" genau dann, wenn "f Menge" und "f Funktion" und "$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$".*

b) *"$f \in \,^{?}B$" genau dann, wenn "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und "$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$".*

c) *Aus "$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge" folgt "$f \notin \,^{?}B$".*

d) *Aus "$x \in \mathsf{dom}\, f$" und "$f(x) \notin B$" folgt "$f \notin \,^{?}B$".*

e) *Aus "$f : D \to B$" und "D Menge" folgt "$f \in \,^{?}B$".*

f) *Aus "$f : D \to E$" und "D Menge" und "$E \subseteq B$" folgt "$f \in \,^{?}B$".*

g) *Aus "$f : D \to E$" und "D Unmenge" folgt "$f \notin \,^{?}B$".*

h) *Aus "$f : D \to E$" und "$x \in D$" und "$f(x) \notin B$" folgt "$f \notin \,^{?}B$".*

Beweis **212-3** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in {}^{?}B$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{?}B$"

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{f \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{?}B$" und
aus "${}^{?}B = \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \omega \subseteq B)\}$"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \omega \subseteq B)\}$.

`2:` Aus `2`"$f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \omega \subseteq B)\}$"

folgt: $\boxed{(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)}$

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Menge…" und
aus `VS` gleich "…$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \omega \subseteq B)\}$.

`2:` Aus `1`"$f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \omega \subseteq B)\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \omega \subseteq B)\} = {}^{?}B$"
folgt: $f \in {}^{?}B$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in {}^{?}B$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{?}B$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: f Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{?}B$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)}$

`2:` Aus `1.1`"f Menge"

folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\boxed{\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}}$

Beweis **212-3** b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

1: Aus VS gleich "f Funktion…" und
aus VS gleich "…$\mathsf{dom}\, f$ Menge…"
folgt via **26-3**: f Menge.

2: Aus 1"f Menge",
aus VS gleich "f Funktion…" und
aus VS gleich "…$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $f \in {}^{?}B$.

c) VS gleich $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

1: Es gilt: $(f \in {}^{?}B) \vee (f \notin {}^{?}B)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $f \in {}^{?}B$.

2: Aus 1.1.Fall"$f \in {}^{?}B$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

3: Es gilt 2"$\mathsf{dom}\, f$ Menge".
Es gilt VS gleich "$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^{?}B$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^{?}B$.

<u>Beweis **212-3**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(x) \notin B)$.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^{\boldsymbol{?}}B) \vee (f \notin {}^{\boldsymbol{?}}B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^{\boldsymbol{?}}B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$f \in {}^{\boldsymbol{?}}B$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`3:` Aus `2`“f Funktion...” und
aus `VS` gleich “$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$”
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `3`“$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$” und
aus `2`“$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$”
folgt via **0-4**: $f(x) \in B$.

`5:` Es gilt `4`“$f(x) \in B$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots f(x) \notin B$”.
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^{\boldsymbol{?}}B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^{\boldsymbol{?}}B$.

`e)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (D \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f : D \to B \ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$” und
aus `VS` gleich “$\ldots D$ Menge”
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`3:` Aus `1`“f Funktion...”,
aus `2`“$\mathsf{dom}\, f$ Menge” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f \in {}^{\boldsymbol{?}}B$.

`f)` `VS` gleich $(f : D \to E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq B)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f : D \to E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq B$”
folgt via **21-5**: $f : D \to B$.

`2:` Aus `1`“$f : D \to B$” und
aus `VS` gleich “$\ldots D$ Menge...”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $f \in {}^{\boldsymbol{?}}B$.

Beweis **212-3** `g)` `VS` gleich $(f : D \to E) \wedge (D \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to E \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D$ Unmenge"
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $f \notin^{?} B$.

`h)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (x \in D) \wedge (f(x) \notin B)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in D \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots f(x) \notin B$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $f \notin^{?} B$.

□

212-4. Hier wird die Zugehörigkeit zu ${}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$ diskutiert:

<u>212-4(Satz)</u>

a) *“$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$” genau dann, wenn*
“f Menge” und “f Funktion” und “$\mathsf{dom}\,f\subseteq D$” und “$\mathsf{ran}\,f\subseteq B$”.

b) *“$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$” genau dann, wenn*
“f Funktion” und “$\mathsf{dom}\,f$ Menge” und
“$\mathsf{dom}\,f\subseteq D$” und “$\mathsf{ran}\,f\subseteq B$”.

c) *Aus “D Menge” und “f Funktion”*
und “$\mathsf{dom}\,f\subseteq D$” und “$\mathsf{ran}\,f\subseteq B$”
folgt “$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.

d) *Aus “$\mathsf{dom}\,f$ Unmenge” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

e) *Aus “$x\in\mathsf{dom}\,f$” und “$f(x)\notin B$” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

f) *Aus “$\mathsf{dom}\,f\not\subseteq D$” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

g) *Aus “$x\in\mathsf{dom}\,f$” und “$x\notin D$” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

h) *Aus “$f:C\to E$” und “C Menge” und “$C\subseteq D$” und “$E\subseteq B$”*
folgt “$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.

i) *Aus “$f:D\to E$” und “D Menge” und “$E\subseteq B$”*
folgt “$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.

j) *Aus “$f:C\to B$” und “C Menge” und “$C\subseteq D$”*
folgt “$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.

k) *Aus “$f:D\to B$” und “D Menge” folgt “$f\in{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

l) *Aus “$f:C\to E$” und “C Unmenge” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

m) *Aus “$f:C\to E$” und “$x\in C$” und “$f(x)\notin B$” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

n) *Aus “$f:C\to E$” und “$C\not\subseteq D$” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

o) *Aus “$f:C\to E$” und “$x\in C$” und “$x\notin D$” folgt “$f\notin{}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$”.*

<u>Beweis **212-4**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in {}^{D \supseteq ?}B.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{D \supseteq ?}B$"

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{f \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{D \supseteq ?}B$" und
aus "${}^{D \supseteq ?}B = \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}.$

`2:` Aus `2`"$f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$"

folgt: $\boxed{(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)}$

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B).$

`1:` Aus `VS` gleich "f Menge…" und
aus `VS` gleich "…$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}.$

`2:` Aus `1`"$f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\} = {}^{D \supseteq ?}B$"
folgt: $f \in {}^{D \supseteq ?}B.$

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in {}^{D \supseteq ?}B.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{D \supseteq ?}B$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: f Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{D \supseteq ?}B$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$\boxed{(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)}$

`2:` Aus `1.1`"f Menge"

folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\boxed{\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}}$

Beweis **212-4** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`1:` Aus `VS` gleich “ f Funktion. . . ” und
aus `VS` gleich “ . . . $\mathsf{dom}\, f$ Menge. . . ”
folgt via **26-3**: f Menge.

`2:` Aus `1`“ f Menge” ,
aus `VS` gleich “ f Funktion. . . ” und
aus `VS` gleich “ . . . $(\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f \in {}^{D}\supseteq^{?} B$.

`c)` `VS` gleich $(D \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`1:` Aus `VS` gleich “ . . . $\mathsf{dom}\, f \subseteq D$ . . . ” und
aus `VS` gleich “ D Menge. . . ”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “ . . . f Funktion. . . ” ,
aus `1`“ $\mathsf{dom}\, f$ Menge” und
aus `VS` gleich “ . . . $(\mathsf{dom}\, f \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f \in {}^{D}\supseteq^{?} B$.

`d)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^{D}\supseteq^{?} B) \vee (f \notin {}^{D}\supseteq^{?} B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^{D}\supseteq^{?} B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“ $f \in {}^{D}\supseteq^{?} B$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`3:` Es gilt `2`“ $\mathsf{dom}\, f$ Menge” .
Es gilt `VS` gleich “ $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge” .
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^{D}\supseteq^{?} B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^{D}\supseteq^{?} B$.

Beweis **212-4** `e)` `VS` gleich $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(x) \notin B)$.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^D\!\supseteq^{?} B) \vee (f \notin {}^D\!\supseteq^{?} B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^D\!\supseteq^{?} B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$f \in {}^D\!\supseteq^{?} B$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`3:` Aus `2`“f Funktion…” und
aus `VS` gleich “$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$”
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `3`“$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$” und
aus `2`“$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$”
folgt via **0-4**: $f(x) \in B$.

`5:` Es gilt `4`“$f(x) \in B$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots f(x) \notin B$”.
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^D\!\supseteq^{?} B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^D\!\supseteq^{?} B$.

`f)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, f \not\subseteq D$.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^D\!\supseteq^{?} B) \vee (f \notin {}^D\!\supseteq^{?} B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^D\!\supseteq^{?} B$.

`2.1:` Aus `2.1.Fall`“$f \in {}^D\!\supseteq^{?} B$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, f \subseteq D$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{dom}\, f \not\subseteq D$”
folgt via **0-3**: $\neg(\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$.

`3:` Es gilt `2.1`“$\mathsf{dom}\, f \subseteq D$”.
Es gilt `2.2`“$\neg(\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^D\!\supseteq^{?} B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^D\!\supseteq^{?} B$.

Beweis **212-4** `g)` `VS` gleich $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (x \notin D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \notin D$"
folgt via **0-5**: $\mathsf{dom}\, f \not\subseteq D$.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{dom}\, f \not\subseteq D$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $f \notin {}^{D}\!\supseteq^{?} B$.

`h)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (C \text{ Menge}) \wedge (C \subseteq D) \wedge (E \subseteq B)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : C \to E$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = C) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq E)$.

`2.1:` Aus `1` "$\ldots \mathsf{dom}\, f = C \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots C$ Menge…"
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \mathsf{dom}\, f = C \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots C \subseteq D \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\, f \subseteq D$.

`2.3:` Aus `1` "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

`3:` Aus `1` "f Funktion…",
aus `2.1` "$\mathsf{dom}\, f$ Menge",
aus `2.2` "$\mathsf{dom}\, f \subseteq D$" und
aus `2.3` "$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f \in {}^{D}\!\supseteq^{?} B$.

`i)` `VS` gleich $(f : D \to E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq B)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $D \subseteq D$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(f : D \to E) \wedge (D \text{ Menge}) \ldots$",
aus `1` "$D \subseteq D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq B$"
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $f \in {}^{D}\!\supseteq^{?} B$.

<u>Beweis **212-4**</u> `j)` `VS` gleich $(f:C\to B)\wedge(C\text{ Menge})\wedge(C\subseteq D)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $B\subseteq B$.

`2:` Aus `VS` gleich “$(f:C\to B)\wedge(C\text{ Menge})\wedge(C\subseteq D)$” und
aus `1`“$B\subseteq B$”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $f\in{}^{D}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

`k)` `VS` gleich $(f:D\to B)\wedge(D\text{ Menge})$.

`1:` Via **0-6** gilt: $B\subseteq B$.

`2:` Aus `VS` gleich “$(f:D\to B)\wedge(D\text{ Menge})$” und
aus `1`“$B\subseteq B$”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $f\in{}^{D}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

`l)` `VS` gleich $(f:C\to E)\wedge(C\text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f:C\to E\ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,f=C$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,f=C$” und
aus `VS` gleich “$\ldots C$ Unmenge”
folgt: $\mathsf{dom}\,f$ Unmenge.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{dom}\,f$ Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $f\notin{}^{D}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

`m)` `VS` gleich $(f:C\to E)\wedge(x\in C)\wedge(f(x)\notin B)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f:C\to E\ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,f=C$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x\in C\ldots$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\,f=C$”
folgt: $x\in\mathsf{dom}\,f$.

`3:` Aus `2`“$x\in\mathsf{dom}\,f$” und
aus `VS` gleich “$\ldots f(x)\notin B$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $f\notin{}^{D}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

<u>Beweis</u> **212-4** `n)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (C \not\subseteq D)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f : C \to E \ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = C$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, f = C$” und
aus `VS` gleich “$\ldots C \not\subseteq D$”
folgt: $\mathsf{dom}\, f \not\subseteq D$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{dom}\, f \not\subseteq D$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $f \notin {}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$.

`o)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (x \in C) \wedge (x \notin D)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in C \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \notin D$”
folgt via **0-5**: $C \not\subseteq D$.

`2:` Aus `VS` gleich “$f : C \to E \ldots$” und
aus `1`“$C \not\subseteq D$”
folgt via des bereits bewiesenen `n)`: $f \notin {}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$.

□

212-5. Die Zugehörigkeit zu ${}^D B$ stellt sich recht einfach dar. Insbesondere gilt ${}^D B = 0$ für jede *Unmenge* D:

212-5(Satz)

a) *"$f \in {}^D B$" genau dann, wenn "f Menge" und "$f : D \to B$".*

b) *"$f \in {}^D B$" genau dann, wenn "D Menge" und "$f : D \to B$".*

c) *Aus "D Unmenge" folgt "${}^D B = 0$".*

d) *Aus "$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge" folgt "$f \notin {}^D B$".*

e) *Aus "$\mathsf{dom}\, f \neq D$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

f) *Aus "$x \in \mathsf{dom}\, f$" und "$x \notin D$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

g) *Aus "$x \in D$" und "$x \notin \mathsf{dom}\, f$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

h) *Aus "$x \in \mathsf{dom}\, f$" und "$f(x) \notin B$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

i) *Aus "$f : C \to E$" und "C Unmenge" folgt "$f \notin {}^D B$".*

j) *Aus "$f : C \to E$" und "$C \neq D$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

k) *Aus "$f : C \to E$" und "$x \in C$" und "$x \notin D$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

l) *Aus "$f : C \to E$" und "$x \in D$" und "$x \notin C$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

m) *Aus "$f : C \to E$" und "$x \in C$" und "$f(x) \notin B$" folgt "$f \notin {}^D B$".*

Beweis **212-5** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $f \in {}^D B$.

1.1: Aus VS gleich "$f \in {}^D B$"

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{f \text{ Menge}}$

1.2: Aus VS gleich "$f \in {}^D B$" und
aus "${}^D B = \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$.

2: Aus 2"$f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$"
folgt: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,f = D) \wedge (\mathsf{ran}\,f \subseteq B)$.

3: Aus 2"f Funktion ...",
aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,f = D \ldots$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{ran}\,f \subseteq B$"

folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{f : D \to B}$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (f : D \to B)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,f = D) \wedge (\mathsf{ran}\,f \subseteq D)$.

2: Aus VS gleich "f Menge..." und
aus 1"$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,f = D) \wedge (\mathsf{ran}\,f \subseteq B)$"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$.

3: Aus 2"$f \in \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\}$" und
aus "$\{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\omega \subseteq B)\} = {}^D B$"
folgt: $f \in {}^D B$.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $f \in {}^D B$.

1.1: Aus VS gleich "$f \in {}^D B$"
folgt via des bereits bewiesenen a): f Menge.

1.2: Aus VS gleich "$f \in {}^D B$"

folgt via des bereits bewiesenen a): $\boxed{f : D \to B}$

2: Aus 1.1"$f : D \to B$" und
aus 1.1"f Menge"

folgt via **26-5**: $\boxed{D \text{ Menge}}$

<u>Beweis **212-5**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D \text{ Menge}) \wedge (f : D \to B)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f : D \to B$" und
aus `VS` gleich "D Menge$\ldots$"
folgt via **26-5**: f Menge.

`2:` Aus `1`"f Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots f : D \to B$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f \in {}^D B$.

`c)` `VS` gleich D Unmenge.

`1:` Es gilt: $({}^D B = 0) \vee (0 \neq {}^D B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq {}^D B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq {}^D B$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in {}^D B$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in {}^D B$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: D Menge.

`4:` Es gilt `3`"D Menge".
Es gilt `VS` gleich "D Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: ${}^D B = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: ${}^D B = 0$.

`d)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^D B) \vee (f \notin {}^D B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^D B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$f \in {}^D B$"
folgt via **ElementAxiom**: f Menge.

`3:` Aus `2`"f Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`4:` Es gilt `3`"$\mathsf{dom}\, f$ Menge".
Es gilt `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^D B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^D B$.

Beweis **212-5** `e)` `VS` gleich $\text{dom}\, f \neq D$.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^D B) \vee (f \notin {}^D B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^D B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$f \in {}^D B$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f : D \to B$.

`3:` Aus `2`“$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $\text{dom}\, f = D$.

`4:` Es gilt `3`“$\text{dom}\, f = D$”.
Es gilt `VS` gleich “$\text{dom}\, f \neq D$”.
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^D B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^D B$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \text{dom}\, f) \wedge (x \notin D)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \text{dom}\, f \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \notin D$”
folgt via **0-10**: $\text{dom}\, f \neq D$.

`2:` Aus `1`“$\text{dom}\, f \neq D$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $f \notin {}^D B$.

`g)` `VS` gleich $(x \in D) \wedge (x \notin \text{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in D \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \notin \text{dom}\, f$”
folgt via **0-10**: $D \neq \text{dom}\, f$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\text{dom}\, f \neq D$.

`3:` Aus `2`“$\text{dom}\, f \neq D$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $f \notin {}^D B$.

<u>Beweis **212-5**</u> `h)` `VS` gleich $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(x) \notin B)$.

`1:` Es gilt: $(f \in {}^D B) \vee (f \notin {}^D B)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f \in {}^D B$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$f \in {}^D B$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f : D \to B$.

`3:` Aus `2`“$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`4:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$” und
aus `3`“$\mathsf{dom}\, f = D$”
folgt: $x \in D$.

`5:` Aus `2`“$f : D \to B$” und
aus `4`“$x \in D$”
folgt via **21-4**: $f(x) \in B$.

`6:` Es gilt `5`“$f(x) \in B$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots f(x) \notin B$”.
Ex falso quodlibet folgt: $f \notin {}^D B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \notin {}^D B$.

`i)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (C \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f : C \to E \ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = C$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, f = C$” und
aus `VS` gleich “$\ldots C$ Unmenge”
folgt: $\mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{dom}\, f$ Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $f \notin {}^D B$.

`j)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (C \neq D)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$f : C \to E \ldots$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = C$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, f = C$” und
aus `VS` gleich “$\ldots C \neq D$”
folgt: $\mathsf{dom}\, f \neq D$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{dom}\, f \neq D$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $f \notin {}^D B$.

Beweis **212-5** `k)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (x \in C) \wedge (x \notin D)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\dots x \in C \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots x \notin D$"
folgt via **0-10**: $C \neq D$.

`2`: Aus `VS` gleich "$f : C \to E \dots$" und
aus `1`"$C \neq D$"
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $f \notin {}^D B$.

`l)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (x \in D) \wedge (x \notin C)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\dots x \in D \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots x \notin C$"
folgt via **0-10**: $D \neq C$.

`2`: Aus `1`
folgt: $C \neq D$.

`3`: Aus `VS` gleich "$f : C \to E \dots$" und
aus `2`"$C \neq D$"
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $f \notin {}^D B$.

`m)` `VS` gleich $(f : C \to E) \wedge (x \in C) \wedge (f(x) \notin B)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$f : C \to E \dots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = C$.

`2`: Aus `VS` gleich "$\dots x \in C \dots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, f = C$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3`: Aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\dots f(x) \notin B$"
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $f \notin {}^D B$.

□

212-6. Die nun vorliegenden Inklusionen folgen leicht aus den bisherigen Charakterisierungen der Elemente von func, ${}^{?}B$, ${}^{D\supseteq ?}B$, ${}^{D}B$. Zur Vereinfachung der Notation wird beim Beweis von `b)` die ab sofort stets eingesetzte Vereinfachung getroffen, dass wenn eine von mehreren durch Konjunktion verknüpfte, zu beweisenden Aussage als eigene Aussage - hier `A1` nach Diskussion eines Themas - im Beweis erscheint, diese Aussage - natürlich - als bereits bewiesen gilt und nicht weiter erwähnt wird. Ähnlich wird bereits beim Einsatz von $\boxed{\;\ldots\;}$ vorgegangen:

212-6(Satz)

`a)` ${}^{?}B \subseteq \mathsf{func}$.

`b)` *"*${}^{D\supseteq ?}B \subseteq {}^{?}B$*" und "*${}^{D\supseteq ?}B \subseteq \mathsf{func}$*".*

`c)` *"*${}^{D}B \subseteq {}^{D\supseteq ?}B$*" und "*${}^{D}B \subseteq {}^{?}B$*" und "*${}^{D}B \subseteq \mathsf{func}$*".*

Beweis **212-6** `a)`

`Thema1` $\alpha \in {}^{?}B$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in {}^{?}B$"
folgt via **212-3**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$.

`3:` Aus 2"α Menge..." und
aus 2"...α Funktion"
folgt via **212-2**: $\alpha \in \mathsf{func}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^{?}B) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{func})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: ${}^{?}B \subseteq \mathsf{func}$.

<u>Beweis **212-6** `b)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in {}^{D\supseteq}{}^{?}B.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in {}^{D\supseteq}{}^{?}B$”
folgt via **212-4**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B)$.

`3:` Aus 2“α Menge...”,
aus 2“...α Funktion...” und
aus 2“...$\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$”
folgt via **212-3**: $\alpha \in {}^{?}B.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^{D\supseteq}{}^{?}B) \Rightarrow (\alpha \in {}^{?}B).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “${}^{D\supseteq}{}^{?}B \subseteq {}^{?}B$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: ${}^{?}B \subseteq \mathsf{func}.$

`2:` Aus `A1` gleich “${}^{D\supseteq}{}^{?}B \subseteq {}^{?}B$” und
aus `1.2`“${}^{?}B \subseteq \mathsf{func}$”

folgt via **0-6**: $\boxed{{}^{D\supseteq}{}^{?}B \subseteq \mathsf{func}}$

<u>Beweis **212-6**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in {}^D B$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in {}^D B$”
folgt via **212-5**: $(D \text{ Menge}) \wedge (\alpha : D \to B)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha : D \to B$” und
aus `2`“D Menge$\ldots$”
folgt via **212-4**: $\alpha \in {}^{D \supseteq ?} B$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^D B) \Rightarrow (\alpha \in {}^{D \supseteq ?} B)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}{}^D B \subseteq {}^{D \supseteq ?} B\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: ${}^{D \supseteq ?} B \subseteq {}^? B$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: ${}^{D \supseteq ?} B \subseteq \mathsf{func}$.

`2.1:` Aus `A1` gleich “${}^D B \subseteq {}^{D \supseteq ?} B$” und
aus `1.2`“${}^{D \supseteq ?} B \subseteq {}^? B$”

folgt via **0-6**: $\boxed{{}^D B \subseteq {}^? B}$

`2.2:` Aus `A1` gleich “${}^D B \subseteq {}^{D \supseteq ?} B$” und
aus `1.3`“${}^{D \supseteq ?} B \subseteq \mathsf{func}$”

folgt via **0-6**: $\boxed{{}^D B \subseteq \mathsf{func}}$

$\square$

212-7. Nun wird unter anderem untersucht, in welchen der in **212-1(Def)** eingeführten Funktionen-Klassen die 0 liegt. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - b) - a) - d) - e) - f)`:

212-7(Satz)

a) $0 \in \mathsf{func}$.

b) $0 \in {}^{\boldsymbol{?}}B$.

c) $0 \in {}^{D\supseteq\boldsymbol{?}}B$.

d) *"$0 \in {}^{D}B$" genau dann, wenn "$D = 0$".*

e) *"$0 \notin {}^{D}B$" genau dann, wenn "$0 \neq D$".*

f) $0 \in {}^{0}B$.

<u>Beweis **212-7**</u> `abc)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq D$.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq B$.

`2.1:` Aus **7-11** "$\mathsf{dom}\, 0 = 0$" und
aus `1.1` "$0 \subseteq D$"
folgt: $\mathsf{dom}\, 0 \subseteq D$.

`2.2:` Aus **7-11** "$\mathsf{ran}\, 0 = 0$" und
aus `1.2` "$0 \subseteq B$"
folgt: $\mathsf{ran}\, 0 \subseteq B$.

`3.c):` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge",
aus **18-51** "0 Funktion",
aus `2.1` "$\mathsf{dom}\, 0 \subseteq D$" und
aus `2.2` "$\mathsf{ran}\, 0 \subseteq B$"
folgt via **212-4**: $0 \in {}^{D\supseteq ?}B$.

`4.1:` Via **212-6** gilt: ${}^{D\supseteq ?}B \subseteq {}^{?}B$.

`4.2:` Via **212-6** gilt: ${}^{D\supseteq ?}B \subseteq \mathsf{func}$.

`5.b):` Aus `3.c)` "$0 \in {}^{D\supseteq ?}B$" und
aus `4.1` "${}^{D\supseteq ?}B \subseteq {}^{?}B$"
folgt via **0-4**: $0 \in {}^{?}B$.

`5.a):` Aus `3.c)` "$0 \in {}^{D\supseteq ?}B$" und
aus `4.2` "${}^{D\supseteq ?}B \subseteq \mathsf{func}$"
folgt via **0-4**: $0 \in \mathsf{func}$.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \in {}^{D}B$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \in {}^{D}B$"
folgt via **212-5**: $0 : D \to B$.

`2:` Aus `1` "$0 : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, 0 = D$.

`3:` Aus `2` "$\mathsf{dom}\, 0 = D$" und
aus **7-11** "$\mathsf{dom}\, 0 = 0$"
folgt: $D = 0$.

<u>Beweis **212-7**</u> `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $D = 0.$

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq B.$

`2:` Aus **93-14**"$0 : 0 \to 0$" und
aus `1`"$0 \subseteq B$"
folgt via **21-5**: $0 : 0 \to B.$

`3:` Aus 0$\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `2`"$0 : 0 \to B$"
folgt via **212-5**: $0 \in {}^0B.$

`4:` Aus `3`"$0 \in {}^0B$" und
aus `VS` gleich "$D = 0$"
folgt: $0 \in {}^DB.$

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $(0 \in {}^DB) \Leftrightarrow (D = 0).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(0 \in {}^DB)) \Leftrightarrow (\neg(D = 0)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(0 \notin {}^DB)) \Leftrightarrow (D \neq 0).$

`f)`

Aus "$0 = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 \in {}^0B.$

$\square$

212-8. Nun werden einige spezielle, auf 0 und $\mathcal{U}$ abzielende Funktions-Klassen wie in **212-1(Def)** untersucht:

212-8(Satz)

a) ${}^{?}0 = \{0\}$.

b) ${}^{?}\mathcal{U} = \mathsf{func}$.

c) ${}^{0\supseteq ?}B = \{0\}$.

d) ${}^{\mathcal{U}\supseteq ?}B = {}^{?}B$.

e) ${}^{D\supseteq ?}0 = \{0\}$.

f) ${}^{0\supseteq ?}0 = \{0\}$.

g) ${}^{0\supseteq ?}\mathcal{U} = \{0\}$.

h) ${}^{\mathcal{U}\supseteq ?}0 = \{0\}$.

i) ${}^{\mathcal{U}\supseteq ?}\mathcal{U} = \mathsf{func}$.

j) ${}^{0}B = \{0\}$.

k) ${}^{\mathcal{U}}B = 0$.

l) "${}^{D}0 = 0$" *genau dann, wenn* "$0 \neq D$".

m) "${}^{D}0 = \{0\}$" *genau dann, wenn* "$D = 0$".

n) ${}^{0}0 = \{0\}$.

o) ${}^{0}\mathcal{U} = \{0\}$.

p) ${}^{\mathcal{U}}0 = 0$.

q) ${}^{\mathcal{U}}\mathcal{U} = 0$.

Beweis **212-8** `a)`

`1.1:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{?}0.$

> `Thema1.2` $\alpha \in {}^{?}0.$
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in {}^{?}0$"
> folgt via **212-3**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq 0).$
>
> `3:` Aus 2"$\ldots \mathsf{ran}\,\alpha \subseteq 0$"
> folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\,\alpha = 0.$
>
> `4:` Aus 2"α Funktion…" und
> aus 3"$\mathsf{ran}\,\alpha = 0$"
> folgt via **92-5**: $\alpha = 0.$

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^{?}0) \Rightarrow (\alpha = 0)$"

`2:` Aus `1.1`"$0 \in {}^{?}0$"
folgt via **0-20**: $0 \neq {}^{?}0.$

`3:` Aus 2"$0 \neq {}^{?}0$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^{?}0) \Rightarrow (\alpha = 0)$"
folgt via **174-1**: ${}^{?}0 = \{0\}.$

<u>Beweis **212-8**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{func}$

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{func}$"
folgt via **212-2**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$.

3: Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq \mathcal{U}$.

4: Aus 2 "α Menge…",
aus 2 "…α Funktion" und
aus 3 "$\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **212-3**: $\alpha \in {}^{?}\mathcal{U}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{func}) \Rightarrow (\alpha \in {}^{?}\mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathsf{func} \subseteq {}^{?}\mathcal{U}\text{"}}$

1.2: Via **212-6** gilt: ${}^{?}\mathcal{U} \subseteq \mathsf{func}$.

2: Aus 1.2 "${}^{?}\mathcal{U} \subseteq \mathsf{func}$" und
aus A1 gleich "$\mathsf{func} \subseteq {}^{?}\mathcal{U}$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{{}^{?}\mathcal{U} = \mathsf{func}}$

<u>Beweis **212-8**</u> `c)`

`1.1`: Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{0}\!\supseteq^{?} B$.

`Thema1.2` $\alpha \in {}^{0}\!\supseteq^{?} B$.

`2`: Aus `Thema1.2`“$\alpha \in {}^{0}\!\supseteq^{?} B$”
folgt via **212-4**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha \subseteq 0)$.

`3`: Aus 2“$\ldots \mathsf{dom}\, \alpha \subseteq 0$”
folgt via **0-18**: $\mathsf{dom}\, \alpha = 0$.

`4`: Aus 2“α Funktion...” und
aus 3“$\mathsf{dom}\, \alpha = 0$”
folgt via **92-5**: $\alpha = 0$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in {}^{0}\!\supseteq^{?} B) \Rightarrow (\alpha = 0)$”

`2`: Aus `1.1`“$0 \in {}^{0}\!\supseteq^{?} B$”
folgt via **0-20**: $0 \neq {}^{0}\!\supseteq^{?} B$.

`3`: Aus 2“$0 \neq {}^{0}\!\supseteq^{?} B$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in {}^{0}\!\supseteq^{?} B) \Rightarrow (\alpha = 0)$”
folgt via **174-1**: ${}^{0}\!\supseteq^{?} B = \{0\}$.

<u>Beweis **212-8** `d)`</u>

`1.1:` Via **212-6** gilt: $^{\mathcal{U}\supseteq ?}B \subseteq {}^{?}B.$

> `Thema1.2` $\alpha \in {}^{?}B.$
>
> `2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in {}^{?}B$”
> folgt via **212-3**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B).$
>
> `3:` Via **0-18** gilt: $\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq \mathcal{U}.$
>
> `4:` Aus `2`“$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \ldots$”,
> aus `3`“$\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq \mathcal{U}$” und
> aus `2`“$\ldots \mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$”
> folgt via **212-4**: $\alpha \in {}^{\mathcal{U}\supseteq ?}B.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^{?}B) \Rightarrow (\alpha \in {}^{\mathcal{U}\supseteq ?}B).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$^{?}B \subseteq {}^{\mathcal{U}\supseteq ?}B$”

`2:` Aus `1.1`“$^{\mathcal{U}\supseteq ?}B \subseteq {}^{?}B$” und
aus `A1` gleich “$^{?}B \subseteq {}^{\mathcal{U}\supseteq ?}B$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $^{\mathcal{U}\supseteq ?}B = {}^{?}B.$

Beweis **212-8** `e)`

`1.1:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{D}\supseteq^{?} 0.$

> `Thema1.2` $\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} 0.$
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} 0$"
> folgt via **212-4**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq 0).$
>
> `3:` Aus 2"$\ldots \mathsf{ran}\,\alpha \subseteq 0$"
> folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\,\alpha = 0.$
>
> `4:` Aus 2"α Funktion…" und
> aus 3"$\mathsf{ran}\,\alpha = 0$"
> folgt via **92-5**: $\alpha = 0.$

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$"

`2:` Aus `1.1`"$0 \in {}^{D}\supseteq^{?} 0$"
folgt via **0-20**: $0 \neq {}^{D}\supseteq^{?} 0.$

`3:` Aus 2"$0 \neq {}^{D}\supseteq^{?} 0$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$"
folgt via **174-1**: ${}^{D}\supseteq^{?} 0 = \{0\}.$

`f)`

Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: ${}^{0}\supseteq^{?} 0 = \{0\}.$

`g)`

Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: ${}^{0}\supseteq^{?} \mathcal{U} = \{0\}.$

`h)`

Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: ${}^{\mathcal{U}}\supseteq^{?} 0 = \{0\}.$

`i)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: ${}^{\mathcal{U}}\supseteq^{?} \mathcal{U} = {}^{?}\mathcal{U}.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: ${}^{?}\mathcal{U} = \mathsf{func}.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: ${}^{\mathcal{U}}\supseteq^{?} \mathcal{U} = \mathsf{func}.$

<u>Beweis **212-8**</u> `j)`

`1.1:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^0B$.

> `Thema1.2` $\alpha \in {}^0B$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in {}^0B$"
> folgt via **212-5**: $\alpha : 0 \to B$.
>
> `3:` Aus `2` "$\alpha : 0 \to B$"
> folgt via **21-1(Def)**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = 0)$.
>
> `4:` Aus `3` "α Funktion…" und
> aus `3` "$\ldots \mathsf{dom}\,\alpha = 0$"
> folgt via **92-5**: $\alpha = 0$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^0B) \Rightarrow (\alpha = 0)$"

`2:` Aus `1.1` "$0 \in {}^0B$"
folgt via **0-20**: $0 \neq {}^0B$.

`3:` Aus `2` "$0 \neq {}^0B$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^0B) \Rightarrow (\alpha = 0)$"
folgt via **174-1**: ${}^0B = \{0\}$.

`k)`

Aus 0$\mathcal{U}$**Axiom**"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **212-5**: ${}^{\mathcal{U}}B = 0$.

Beweis **212-8** `1)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad {}^D0=0.$

`1:` Es gilt: $\qquad (D=0)\vee(0\neq D).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad D=0.$

`2:` Aus `1.1.Fall`“$D=0$”
folgt via **212-7**: $\qquad 0\in{}^D0.$

`3:` Aus `2`“$0\in{}^D0$”
folgt via **0-20**: $\qquad 0\neq{}^D0.$

`4:` Es gilt `3`“$0\neq{}^D0$” .
Es gilt `VS` gleich “${}^D0=0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad 0\neq D.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad 0\neq D.$

Beweis **212-8** `l)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq D$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in {}^D0$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in {}^D0$"
folgt via **212-5**: $\alpha : D \to 0$.

3: Aus 2 "$\alpha : D \to 0$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\mathsf{dom}\,\alpha = D) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq 0)$.

4: Aus 3 "$\ldots \mathsf{ran}\,\alpha \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\,\alpha = 0$.

5: Aus 4 "$\mathsf{ran}\,\alpha = 0$"
folgt via **7-7**: $\mathsf{dom}\,\alpha = 0$.

6: Aus 5 "$\mathsf{dom}\,\alpha = 0$" und
aus 3 "$\mathsf{dom}\,\alpha = D \ldots$"
folgt: $D = 0$.

7: Es gilt 6 "$D = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq D$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin {}^D0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^D0) \Rightarrow (\alpha \notin {}^D0)$.

Konsequenz via **0-19**: ${}^D0 = 0$.

`m)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich ${}^D0 = \{0\}$.

1: Aus **1-5** "$0 \in \{0\}$" und
aus `VS` gleich "${}^D0 = \{0\}$"
folgt: $0 \in {}^D0$.

2: Aus 1 "$0 \in {}^D0$"
folgt via **212-5**: $0 : D \to 0$.

3: Aus 2 "$0 : D \to 0$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,0 = D$.

4: Aus **7-11** "$\mathsf{dom}\,0 = 0$" und
aus 3 "$\mathsf{dom}\,0 = D$"
folgt: $D = 0$.

Beweis **212-8** `m)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $D = 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$D = 0$"
folgt via **212-7**: $0 \in {}^D 0.$

`Thema1.2` $\alpha \in {}^D 0.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in {}^D 0$"
folgt via **212-5**: $\alpha : D \to 0.$

`3:` Aus `2`"$\alpha : D \to 0$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, \alpha \subseteq 0).$

`4:` Aus `3`"$\ldots \mathsf{ran}\, \alpha \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\, \alpha = 0.$

`5:` Aus `3`"α Funktion…" und
aus `4`"$\mathsf{ran}\, \alpha = 0$"
folgt via **92-5**: $\alpha = 0.$

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^D 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$"

`2:` Aus `1.1`"$0 \in {}^D 0$"
folgt via **0-20**: $0 \neq {}^D 0.$

`3:` Aus `2`"$0 \neq {}^D 0$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in {}^D 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$"
folgt via **174-1**: ${}^D 0 = \{0\}.$

`n)`

Aus "$0 = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `m)`: ${}^0 0 = \{0\}.$

`o)`

Via des bereits bewiesenen `j)` gilt: ${}^0 \mathcal{U} = \{0\}.$

`p)`

Via des bereits bewiesenen `k)` gilt: ${}^\mathcal{U} 0 = 0.$

`q)`

Via des bereits bewiesenen `k)` gilt: ${}^\mathcal{U} \mathcal{U} = 0.$

□

212-9. Nun werden die Elemente von ${}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$ und ${}^{D}\mathcal{U}$ diskutiert:

<u>**212-9(Satz)**</u>

a) *"$f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$" genau dann, wenn*
"f Menge" und "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f \subseteq D$".

b) *"$f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$" genau dann, wenn*
"f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und "$\mathsf{dom}\, f \subseteq D$".

c) *Aus "D Menge" und "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f \subseteq D$"*
folgt "$f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$".

d) *"$f \in {}^{D}\mathcal{U}$" genau dann, wenn*
"f Menge" und "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f = D$".

e) *"$f \in {}^{D}\mathcal{U}$" genau dann, wenn*
"D Menge" und "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f = D$".

<u>Beweis **212-9**</u> a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$.

Aus VS gleich "$f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$"
folgt via **212-4**: $(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$.

1: Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$.

2: Aus VS gleich "$(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **212-4**: $f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$.

Aus VS gleich "$f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$"
folgt via **212-4**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$.

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$.

1: Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$.

2: Aus VS gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **212-4**: $f \in {}^{D\supseteq?}\mathcal{U}$.

Beweis **212-9** `c)` `VS` gleich $(D \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f \subseteq D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "D Menge…" und
aus `VS` gleich "… $\mathsf{dom}\, f \subseteq D$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "… f Funktion…",
aus `1`"$\mathsf{dom}\, f$ Menge" und
aus `VS` gleich "… $\mathsf{dom}\, f \subseteq D$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f \in {}^{D \supseteq ?}\mathcal{U}$.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in {}^{D}\mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{D}\mathcal{U}$"
folgt via **212-5**: $\boxed{f \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^{D}\mathcal{U}$"
folgt via **212-5**: $f : D \to \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2`"$f : D \to \mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)}$

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`1:` Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "… f Funktion…",
aus `VS` gleich "… $\mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `1`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Menge…" und
aus `2`"$f : D \to \mathcal{U}$"
folgt via **212-5**: $f \in {}^{D}\mathcal{U}$.

<u>Beweis **212-9**</u> `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $f \in {}^D\mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^D\mathcal{U}$"

folgt via **212-5**: $\boxed{D \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \in {}^D\mathcal{U}$"
folgt via **212-5**: $f : D \to \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2`"$f : D \to \mathcal{U}$"

folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)}$

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`1:` Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `1`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "D Menge$\ldots$" und
aus `2`"$f : D \to \mathcal{U}$"
folgt via **212-5**: $f \in {}^D\mathcal{U}$.

$\square$

212-10. Nun werden func, $^{\boldsymbol{?}}B$, $^{D\supseteq\boldsymbol{?}}B$, ^{D}B als TeilKlassen von PotenzKlassen geeigneter binär-cartesischer Produkte dargestellt:

<u>**212-10(Satz)**</u>

a) $\mathsf{func} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

b) $^{\boldsymbol{?}}B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U} \times B)$.

c) $^{D\supseteq\boldsymbol{?}}B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$.

d) $^{D}B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$.

<u>Beweis **212-10**</u> a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{func}$.

2: Aus Thema1 “$\alpha \in \mathsf{func}$”
folgt via **212-2**: α Funktion.

3: Aus 2 “α Funktion”
folgt via **18-18(Def)**: α Relation.

4: Aus 3 “α Relation”
folgt via **10-1(Def)**: $\alpha \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{func}) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-29**: $\mathsf{func} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

<u>Beweis **212-10**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in {}^{?}B$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in {}^{?}B$"
folgt via **212-3**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B)$.

`3.1:` Aus 2 "α Funktion ..."
folgt via **18-18(Def)**: α Relation.

`3.2:` Via **0-18** gilt: $\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1` "α Relation"
folgt via **10-4**: $\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha)$.

`5:` Aus `3.2` "$\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq \mathcal{U}$" und
aus 2 "$\ldots \mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$"
folgt via **6-7**: $(\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha) \subseteq \mathcal{U} \times B$.

`6:` Aus 4 "$\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha)$" und
aus 5 "$(\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha) \subseteq \mathcal{U} \times B$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathcal{U} \times B$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^{?}B) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathcal{U} \times B)$.

Konsequenz via **0-29**: ${}^{?}B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U} \times B)$.

Beweis **212-10** c)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} B.$

2: Aus Thema1 " $\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} B$ "
folgt via **212-4**:
$(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq D) \wedge (\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B).$

3: Aus 2 " α Funktion ... "
folgt via **18-18(Def)**: α Relation.

4: Aus 3 " α Relation "
folgt via **10-4**: $\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha).$

5: Aus 2 " $\dots \mathsf{dom}\,\alpha \subseteq D \dots$ " und
aus 2 " $\dots \mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$ "
folgt via **6-7**: $(\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha) \subseteq D \times B.$

6: Aus 4 " $\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha)$ " und
aus 5 " $(\mathsf{dom}\,\alpha) \times (\mathsf{ran}\,\alpha) \subseteq D \times B$ "
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq D \times B.$

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^{D}\supseteq^{?} B) \Rightarrow (\alpha \subseteq D \times B).$

Konsequenz via **0-29**: ${}^{D}\supseteq^{?} B \subseteq \mathcal{P}(D \times B).$

d)

1: Via **212-6** gilt: ${}^{D}B \subseteq {}^{D}\supseteq^{?} B.$

2: Via des bereits bewiesenen c) gilt: ${}^{D}\supseteq^{?} B \subseteq \mathcal{P}(D \times B).$

3: Aus 1 " ${}^{D}B \subseteq {}^{D}\supseteq^{?} B$ " und
aus 2 " ${}^{D}\supseteq^{?} B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$ "
folgt via **0-6**: ${}^{D}B \subseteq \mathcal{P}(D \times B).$

$\square$

Jede Funktion ist$\neq \mathcal{U}$.
p Menge und $\{p\} \subseteq x$ ist *äquivalent* zu $p \in x$.
$x \cup y$ ist *genau dann* Menge, wenn x, y Mengen sind.
Einige Transformationen $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \to$ endlich.
Eine andere Darstellung von $(x \cup y) \cup (z \cup w)$.
Eine andere Darstellung von $(x \cap y) \cap (z \cap w)$.
$x \subseteq y \cup (x \setminus y)$.
$x \subseteq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.
$x^{-1}[E] = 0$ genau dann, wenn $E \cap \mathsf{ran}\, x = 0$.
$0 \neq x^{-1}[E]$ genau dann, wenn $0 \neq E \cap \mathsf{ran}\, x$.
(Un)Mengen-Eigenschaften binärer Klassen-Differenzen.
$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.
Falls $p \neq r$ und $q \neq r$, dann $\{p, q\} \cap \{r\} = 0$.
Falls $p \neq q$ und $p \neq r$, dann $\{p\} \cap \{q, r\} = 0$.
$\{p, q, r\} = \{p, q\} \cup \{r\}$.
$\{p, q, r\} = \{p\} \cup \{q, r\}$.
$x \cap y = 0$ genau dann, wenn $x \setminus y = x$ genau dann, wenn $y \setminus x = y$.

Ersterstellung: 15/08/12 **Letzte Änderung: 12/06/13**

213-1. Das hier vorliegende, einfach zu beweisende Resultat hilft bei der Untersuchung einiger Funktionen:

213-1(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "g keine Funktion" folgt "$f \neq g$".*

b) *Aus "f keine Funktion" und "g Funktion" folgt "$f \neq g$".*

c) *Aus "f Funktion" folgt "$f \neq \mathcal{U}$".*

Beweis **213-1** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (g \text{ keine Funktion})$.

1: Es gilt: $(f = g) \vee (f \neq g)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $f = g$.

2: Aus 1.1.Fall "$f = g$" und
aus VS gleich "… g keine Funktion"
folgt: f keine Funktion.

3: Aus 2 "f keine Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: $\neg(f \text{ Funktion})$.

4: Es gilt 3 "$\neg(f \text{ Funktion})$".
Es gilt VS gleich "f Funktion…".
Ex falso quodlibet folgt: $f \neq g$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $f \neq g$.

b) VS gleich $(f \text{ keine Funktion}) \wedge (g \text{ Funktion})$.

1: Aus VS gleich "… g Funktion" und
aus VS gleich "f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen a): $g \neq f$.

2: Aus 1
folgt: $f \neq g$.

c) VS gleich f Funktion.

Aus VS gleich "f Funktion" und
aus **18-51** "$\mathcal{U}$ keine Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen a): $f \neq \mathcal{U}$.

□

213-2. Mit dem nunmehrigen Kriterium wird spät aber doch **1-8** verallgemeinert:

213-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x$.

`ii)` *“p Menge” und “*$\{p\} \subseteq x$*”*.

Beweis **213-2** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p \in x$”

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p \in x$”

folgt via **1-8**: $\boxed{\{p\} \subseteq x}$

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\{p\} \subseteq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “p Menge…”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \{p\}$” und
aus `VS` gleich “$\{p\} \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $p \in x$.

□

213-3. Via **TeilMengenAxiom** stellt sich das $\cup$**Axiom** als Kriterium heraus:

213-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cup y$ *Menge.*

`ii)` x, y *Menge.*

Beweis **213-3** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \cup y$ Menge.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \subseteq x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$y \subseteq x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\boxed{y \text{ Menge}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x, y Menge.

Aus `VS` gleich "$x \ldots$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $x \cup y$ Menge.

$\square$

213-4. Das nunmehrige Kriterium folgt ohne viel Mühe aus **213-3**:

213-4(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $x \cup y$ *Unmenge.*

ii) *“x Unmenge” oder “y Unmenge”.*

Beweis **213-4**

1: Via **213-3** gilt: $(x \cup y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x, y \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $(x \cup y \text{ Menge}) \Leftrightarrow ((x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge}))$.

3: Aus 2
folgt: $(\neg(x \cup y \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg((x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})))$.

4: Aus 3
folgt: $(x \cup y \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((\neg(x \text{ Menge})) \vee (\neg(y \text{ Menge})))$.

5: Aus 4
folgt: $(x \cup y \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge}))$.

□

213-5. In **#31** werden einige Aussagen über endliche Klassen via $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ formuliert. Diese Art der Formulierung ist stellenweise etwas umständlich. Hier werden einige Resultate unter Benützung von "endlich" an Stelle von "ist Element von $\mathcal{P}_{\text{endl}}$" wiedergegeben:

213-5(Satz)

a) *Aus "$e \subseteq E$" und "E endlich" folgt "e endlich".*

b) *Aus "E endlich" folgt "$e \cap E, E \cap e$ endlich".*

c) *Aus "E endlich" folgt "$E \setminus e$ endlich".*

d) *Aus "E endlich" und "e endlich" folgt "$E \cup e, e \cup E$ endlich".*

e) *Aus "E endlich" und "e endlich" folgt "$E \Delta e, e \Delta E$ endlich".*

Beweis **213-5** a) VS gleich $(e \subseteq E) \wedge (E \text{ endlich})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **28-7**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

2: Aus 1"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus VS gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **31-4**: $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

3: Aus 2"$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: e endlich.

b) VS gleich E endlich.

1.1: Via **2-7** gilt: $e \cap E \subseteq E$.

1.2: Via **2-7** gilt: $E \cap e \subseteq E$.

2.1: Aus 1.1"$e \cap E \subseteq E$" und
aus VS gleich "E endlich"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\boxed{e \cap E \text{ endlich}}$

2.2: Aus 1.2"$E \cap e \subseteq E$" und
aus VS gleich "E endlich"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\boxed{E \cap e \text{ endlich}}$

<u>Beweis</u> **213-5** `c)` `VS` gleich E endlich.

`1:` Via **5-5** gilt: $E \setminus e \subseteq E$.

`2:` Aus `1`"$E \setminus e \subseteq E$" und
aus `VS` gleich "E endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \setminus e$ endlich.

`d)` `VS` gleich (E endlich) $\wedge$ (e endlich).

`1.1:` Aus `VS` gleich "E endlich..."
folgt via **28-7**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...e endlich"
folgt via **28-7**: $e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `1.2`"$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-10**: $E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `1.1`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **31-10**: $e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$E \cup e \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: $\boxed{E \cup e \text{ endlich}}$

`3.2:` Aus `2.2`"$e \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: $\boxed{e \cup E \text{ endlich}}$

<u>Beweis **213-5**</u> `e)` `VS` gleich $(E \text{ endlich}) \wedge (e \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich “E endlich…” und
aus `VS` gleich “…e endlich”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \cup e$ endlich.

`2.1:` Via **5-28** gilt: $E\Delta e \subseteq E \cup e$.

`2.2:` Via **5-28** gilt: $e\Delta E \subseteq E \cup e$.

`3.1:` Aus `2.1`“$E\Delta e \subseteq E \cup e$” und
aus `1`“$E \cup e$ endlich”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{E\Delta e \text{ endlich}}$

`3.2:` Aus `2.2`“$e\Delta E \subseteq E \cup e$” und
aus `1`“$E \cup e$ endlich”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{e\Delta E \text{ endlich}}$

□

213-6. Ähnliche wie nunmehrigen Gleichungen sind in **2-38** zu finden. Im Folgenden sind jedoch die hier vorliegenden Gleichungen hilfreicher:

213-6(Satz)

a) $(x \cup y) \cup (z \cup w) = (x \cup z) \cup (y \cup w)$.

b) $(x \cap y) \cap (z \cap w) = (x \cap z) \cap (y \cap w)$.

Beweis **213-6** a)

1: $$(x \cup y) \cup (z \cup w) \stackrel{\mathbf{2-38}}{=} (x \cup z) \cup (w \cup y) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \cup z) \cup (y \cup w).$$

2: Aus 1 folgt: $$(x \cup y) \cup (z \cup w) = (x \cup z) \cup (y \cup w).$$

b)

1: $$(x \cap y) \cap (z \cap w) \stackrel{\mathbf{2-38}}{=} (x \cap z) \cap (w \cap y) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap z) \cap (y \cap w).$$

2: Aus 1 folgt: $$(x \cap y) \cap (z \cap w) = (x \cap z) \cap (y \cap w).$$

□

213-7. Das hier vorliegende Ergebnis hätte ich in **#5** erwartet. Dort ist es nicht zu finden:

213-7(Satz)

a) $x \subseteq y \cup (x \setminus y)$.

b) $x \subseteq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

Beweis **213-7** a)

1: $x \overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} x \cup y \overset{\mathbf{5-22}}{=} y \cup (x \setminus y)$.

2: Aus 1
folgt: $x \subseteq y \cup (x \setminus y)$.

b)

Via des bereits bewiesenen a) gilt: $x \subseteq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

□

213-8. Es überrascht vielleich nicht, in diesem "Aufräum-Essay" auch ein Resultat zu finden, das ganz gut in **#11** gepasst hätte:

213-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x^{-1}[E] = 0$.

`ii)` $E \cap \mathsf{ran}\, x = 0$.

Beweis **213-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x^{-1}[E] = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x^{-1}[E] = 0$"
folgt via **8-13**: $E \cap \mathsf{dom}\,(x^{-1}) = 0$.

`2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

`3:` Aus `1`"$E \cap \mathsf{dom}\,(x^{-1}) = 0$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $E \cap \mathsf{ran}\, x = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $E \cap \mathsf{ran}\, x = 0$.

`1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \cap \mathsf{ran}\, x = 0$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $E \cap \mathsf{dom}\,(x^{-1}) = 0$.

`3:` Aus `2`"$E \cap \mathsf{dom}\,(x^{-1}) = 0$"
folgt via **8-13**: $x^{-1}[E] = 0$.

$\square$

213-9. Via Negation ergibt sich aus **213-8** vorliegendes Kriterium für $0 \neq x^{-1}[E]$:

213-9(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x^{-1}[E]$.

ii) $0 \neq E \cap \mathsf{ran}\, x$.

Beweis **213-9**

1: Via **213-8** gilt: $(x^{-1}[E] = 0) \Leftrightarrow (E \cap \mathsf{ran}\, x = 0)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x^{-1}[E] = 0)) \Leftrightarrow (\neg(E \cap \mathsf{ran}\, x = 0))$.

3: Aus 2 folgt: $(0 \neq x^{-1}[E]) \Leftrightarrow (0 \neq E \cap \mathsf{ran}\, x)$.

□

213-10. In Weiterführung von **94-6** wird hier das “(Un)Mengen-Sein” von $x \setminus y$ und $x\Delta y$ besprochen.

213-10(Satz)

a) *Aus “x Menge” folgt “$x \setminus y$ Menge”.*

b) *Aus “x Unmenge” und “y Menge” folgt “$x \setminus y$ Unmenge”.*

c) *Aus “$x \setminus y$ Menge” und “y Menge” folgt “x Menge”.*

d) *Aus “$x \setminus y$ Unmenge” folgt “x Unmenge”.*

e) *Aus “x, y Menge” folgt “$x\Delta y, y\Delta x$ Menge”.*

f) *Aus “x Unmenge” und “y Menge” folgt “$x\Delta y, y\Delta x$ Unmenge”.*

g) *Aus “$x\Delta y$ Menge” und “x Menge” folgt “y Menge”.*

h) *Aus “$x\Delta y$ Menge” und “y Menge” folgt “x Menge”.*

i) *Aus “$x\Delta y$ Unmenge” folgt “x Unmenge” oder “y Unmenge”.*

Beweis **213-10** a) VS gleich x Menge.

Aus VS gleich “x Menge”
folgt via **94-6**: $x \setminus y$ Menge.

b) VS gleich $(x \text{ Unmenge}) \wedge (y \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich “x Unmenge...”
folgt via **213-4**: $x \cup y$ Unmenge.

2: Via **5-22** gilt: $x \cup y = y \cup (x \setminus y)$.

3: Aus 2“$x \cup y = y \cup (x \setminus y)$” und
aus 1“$x \cup y$ Unmenge”
folgt: $y \cup (x \setminus y)$ Unmenge.

4: Aus 3“$y \cup (x \setminus y)$ Unmenge”
folgt via **213-4**: $(y \text{ Unmenge}) \vee (x \setminus y \text{ Unmenge})$.

5: Aus 4“$(y \text{ Unmenge}) \vee (x \setminus y \text{ Unmenge})$” und
aus VS gleich “...y Menge”
folgt: $x \setminus y$ Unmenge.

<u>Beweis **213-10**</u> `c)` `VS` gleich $(x \setminus y \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge" und
aus `VS` gleich "$x \setminus y$ Menge$\ldots$"
folgt via $\cup$**Axiom**: $y \cup (x \setminus y)$ Menge.

`2:` Via **5-22** gilt: $y \cup (x \setminus y) = x \cup y$.

`3:` Aus `2`"$y \cup (x \setminus y) = x \cup y$" und
aus `1`"$y \cup (x \setminus y)$ Menge"
folgt: $x \cup y$ Menge.

`4:` Aus `3`"$x \cup y$ Menge"
folgt via **213-3**: x Menge.

`d)` `VS` gleich $x \setminus y$ Unmenge.

`1:` Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$x \setminus y \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$x \setminus y$ Unmenge"
folgt via **0-7**: x Unmenge.

`e)` `VS` gleich x, y Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \ldots$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $x \cup y$ Menge.

`2:` Via **5-28** gilt: $x \Delta y \subseteq x \cup y$.

`3:` Aus `2`"$x \Delta y \subseteq x \cup y$" und
aus `1`"$x \cup y$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\boxed{x \Delta y \text{ Menge}}$

`4:` Via **FS**Δ gilt: $y \Delta x = x \Delta y$.

`5:` Aus `4`"$y \Delta x = x \Delta y$" und
aus `3`"$x \Delta y$ Menge"
folgt: $\boxed{y \Delta x \text{ Menge}}$

<u>Beweis **213-10**</u> `f)` `VS` gleich $(x \text{ Unmenge}) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "x Unmenge…" und
aus `VS` gleich "…y Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \setminus y$ Unmenge.

`2:` Via **5-27** gilt: $x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

`3:` Aus `2`"$x \setminus y$ Unmenge"
folgt via **213-4**: $(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ Unmenge.

`4:` Aus `3`"$(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ Unmenge" und
aus `2`"$x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$"
folgt: $\boxed{x\Delta y \text{ Unmenge}}$

`5:` Via **FS**Δ gilt: $y\Delta x = x\Delta y$.

`6:` Aus `5`"$y\Delta x = x\Delta y$" und
aus `4`"$x\Delta y$ Unmenge"
folgt: $\boxed{y\Delta x \text{ Unmenge}}$

`g)` `VS` gleich $(x\Delta y \text{ Menge}) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1:` Via **5-27** gilt: $x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

`2:` Aus `1`"$x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$" und
aus `VS` gleich "$x\Delta y$ Menge…"
folgt: $(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ Menge"
folgt via **213-3**: $y \setminus x$ Menge.

`4:` Aus `3`"$y \setminus x$ Menge" und
aus `VS` gleich "…x Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: y Menge.

<u>Beweis **213-10**</u> `h)` `VS` gleich $(x\Delta y \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Via **FS**Δ gilt: $y\Delta x = x\Delta y$.

`2:` Aus `1`"$y\Delta x = x\Delta y$" und
aus `VS` gleich "$x\Delta y$ Menge…"
folgt: $y\Delta x$ Menge.

`3:` Aus `2`"$y\Delta x$ Menge" und
aus `VS` gleich "…y Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: x Menge.

`i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $(x, y \text{ Menge}) \Rightarrow (x\Delta y \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x\Delta y \text{ Menge})) \Rightarrow (\neg(x, y \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x\Delta y \text{ Menge})) \Rightarrow (\neg((x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x\Delta y \text{ Unmenge})) \Rightarrow ((\neg(x \text{ Menge})) \vee (\neg(y \text{ Menge})))$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(x\Delta y \text{ Unmenge})) \Rightarrow ((x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge}))$.

$\square$

213-11. Da jede endliche TeilKlasse eine TeilKlasse ist, überrascht Vorliegendes wenig:

213-11(Satz)

a) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

b) *Aus* "$y \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *folgt* "$y \in \mathcal{P}(x)$".

c) "$y \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *genau dann, wenn* "$y \in \mathcal{P}(x)$" *und* "$y$ *endlich*".

<u>Beweis **213-11**</u> `a)`

`1:` Via **32-3(Def)** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$.

`2:` Via **2-7** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x)$" und
aus `2`"$\mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`b)` `VS` gleich $y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-4**: $y \in \mathcal{P}(x)$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{y \in \mathcal{P}(x)}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: $\boxed{y \text{ endlich}}$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(y \in \mathcal{P}(x)) \wedge (y \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $y \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$y \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ endlich"
folgt via **32-4**: $y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

$\square$

213-12. Falls $p \neq r$ und $q \neq r$, dann $\{p,q\} \cap \{r\} = 0$. Unter ähnlichen Voraussetzungen folgt $\{p\} \cap \{q,r\} = 0$:

213-12(Satz)

a) *Aus* “$p \neq r$” *und* “$q \neq r$” *folgt* “$\{p,q\} \cap \{r\} = 0$”.

b) *Aus* “$p \neq q$” *und* “$p \neq r$” *folgt* “$\{p\} \cap \{q,r\} = 0$.”

Beweis **213-12** `a)` `VS` gleich $(p \neq r) \wedge (q \neq r)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{p,q\} \cap \{r\}$.

`2:` Aus `Thema1` “$\alpha \in \{p,q\} \cap \{r\}$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p,q\}) \wedge (\alpha \in \{r\})$.

`3:` Aus `2` “$\ldots \alpha \in \{r\}$”
folgt via **1-6**: $\alpha = r$.

`4:` Aus `3` “$\alpha = r$” und
aus `2` “$\alpha \in \{p,q\} \ldots$”
folgt: $r \in \{p,q\}$.

`5:` Aus `4` “$r \in \{p,q\}$”
folgt via **4-9**: $(r = p) \vee (r = q)$.

`6:` Aus `5` “$(r = p) \vee (r = q)$” und
aus `VS` gleich “$p \neq r \ldots$”
folgt: $r = q$.

`7:` Es gilt `6` “$r = q$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots q \neq r$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{p,q\} \cap \{r\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p,q\} \cap \{r\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{p,q\} \cap \{r\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{p,q\} \cap \{r\} = 0$.

Beweis **213-12** `b)` `VS` gleich $(p \neq q) \wedge (p \neq r)$.

`Thema1` $\alpha \in \{p\} \cap \{q, r\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{p\} \cap \{q, r\}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p\}) \wedge (\alpha \in \{q, r\})$.

`3:` Aus `2` "$\alpha \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\alpha = p$.

`4:` Aus `3` "$\alpha = p$" und
aus `2` "$\ldots \alpha \in \{q, r\}$"
folgt: $p \in \{q, r\}$.

`5:` Aus `4` "$p \in \{q, r\}$"
folgt via **4-9**: $(p = q) \vee (p = r)$.

`6:` Aus `5` "$(p = q) \vee (p = r)$" und
aus `VS` gleich "$p \neq q \ldots$"
folgt: $p = r$.

`7:` Es gilt `6` "$p = r$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots p \neq r$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{p\} \cap \{q, r\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\} \cap \{q, r\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{p\} \cap \{q, r\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{p\} \cap \{q, r\} = 0$.

$\square$

213-13. Nun werden erste Resultate über ungeordnete Tupel - hier handelt es sich um Tripel - bewiesen:

213-13(Satz)

a) *"$x \in \{p, q, r\}$"*
genau dann, wenn "x Menge" und "$(x = p) \vee (x = q) \vee (x = r)$".

b) $\{p, q, r\} = \{q, r, p\}$.

c) $\{p, q, r\} = \{p, q\} \cup \{r\}$.

d) $\{p, q, r\} = \{p\} \cup \{q, r\}$.

Beweis **213-13** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \in \{p, q, r\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \{p, q, r\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \{p, q, r\}$"
folgt: x kommt in p, q, r vor.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $(x \text{ kommt in } p, q \text{ vor}) \vee (x = r)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((x \text{ kommt in } p \text{ vor}) \vee (x = q)) \vee (x = r)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $((x = p) \vee (x = q)) \vee (x = r)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\boxed{(x = p) \vee (x = q) \vee (x = r)}$

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge ((x = p) \vee (x = q) \vee (x = r))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x = p) \vee (x = q) \vee (x = r)$"
folgt: $(x \text{ kommt in } p \text{ vor}) \vee (x = q) \vee (x = r)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((x \text{ kommt in } p \text{ vor}) \vee (x = q)) \vee (x = r)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \text{ kommt in } p, q \text{ vor}) \vee (x = r)$.

`4:` Aus `3`
folgt: x kommt in p, q, r vor.

`5:` Aus `VS` gleich "x Menge" und
aus `4`"x kommt in p, q, r vor"
folgt: $x \in \{p, q, r\}$.

<u>Beweis **213-13**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{p, q, r\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` “$\alpha \in \{p, q, r\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q) \vee (\alpha = r))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = q) \vee (\alpha = r) \vee (\alpha = p))$.

`4:` Aus `3` “$(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = q) \vee (\alpha = r) \vee (\alpha = p))$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \{q, r, p\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q, r\}) \Rightarrow (\alpha \in \{q, r, p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\{p, q, r\} \subseteq \{q, r, p\}\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{q, r, p\}$.

`2:` Aus `Thema1.2` “$\alpha \in \{q, r, p\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = q) \vee (\alpha = r) \vee (\alpha = p))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q) \vee (\alpha = r))$.

`4:` Aus `3` “$(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q) \vee (\alpha = r))$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \{p, q, r\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{q, r, p\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p, q, r\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\{q, r, p\} \subseteq \{p, q, r\}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\{p, q, r\} \subseteq \{q, r, p\}$” und
aus `A2` gleich “$\{q, r, p\} \subseteq \{p, q, r\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{p, q, r\} = \{q, r, p\}$.

Beweis **213-13** `c)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{p, q, r\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{p, q, r\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q) \vee (\alpha = r)).$$

`3:` Aus 2
folgt:
$$((\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q))) \vee ((\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = r)).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q))$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "α Menge..." und
aus `3.1.Fall` "...$(\alpha = p) \vee (\alpha = q)$"
folgt via **94-4**: $\alpha \in \{p, q\}$.

`5:` Aus 4 "$\alpha \in \{p, q\}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{p, q\} \cup \{r\}$.

`3.2.Fall` $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = r)$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "α Menge..." und
aus `3.2.Fall` "...$\alpha = r$"
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{r\}$.

`5:` Aus 4 "$\alpha \in \{r\}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{p, q\} \cup \{r\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\alpha \in \{p, q\} \cup \{r\}.$$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q, r\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p, q\} \cup \{r\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{p, q, r\} \subseteq \{p, q\} \cup \{r\}$"

...

Beweis **213-13** `c)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \{p,q\} \cup \{r\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“ $\alpha \in \{p,q\} \cup \{r\}$ ”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{p,q\}) \vee (\alpha \in \{r\})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \{p,q\}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“ $\alpha \in \{p,q\}$”
folgt via **94-4**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q))$.

`4:` Aus `3`“ $(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q))$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \{p,q,r\}$.

`2.2.Fall` $\alpha \in \{r\}$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“ $\alpha \in \{r\}$”
folgt via **1-6**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = r)$.

`4:` Aus `3`“ $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = r)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \{p,q,r\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\alpha \in \{p,q,r\}.$$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p,q\} \cup \{r\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p,q,r\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “ $\{p,q\} \cup \{r\} \subseteq \{p,q,r\}$ ”

`1.3:` Aus `A1` gleich “ $\{p,q,r\} \subseteq \{p,q\} \cup \{r\}$ ” und
aus `A2` gleich “ $\{p,q\} \cup \{r\} \subseteq \{p,q,r\}$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{p,q,r\} = \{p,q\} \cup \{r\}$.

`d)`

`1:` $$\{p,q,r\} \overset{\texttt{a)}}{=} \{q,r,p\} \overset{\texttt{c)}}{=} \{q,r\} \cup \{p\} \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} \{p\} \cup \{q,r\}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $\{p,q,r\} = \{p\} \cup \{q,r\}$.

□

213-14. Es gilt $x \cap y = 0$ genau dann, wenn $x \setminus y = x$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $y \setminus x = y$. Via **5-10** sind hierzu $x \cap y^C = x$ und $y \cap x^C = y$ äquivalent. Eine ähnliche Aussage ist bereits in **3-7** zu finden:

213-14(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cap y = 0$.

`ii)` $x \setminus y = x$.

`iii)` $y \setminus x = y$.

`iv)` $x \cap y^C = x$.

`v)` $y \cap x^C = y$.

Beweis **213-14** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cap y = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cap y = 0$"
folgt via **3-7**: $x \subseteq y^C$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq y^C$"
folgt via **2-10**: $x \cap y^C = x$.

`3:` $x \setminus y \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} x \cap y^C \stackrel{2}{=} x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \setminus y = x$.

<u>Beweis **213-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \setminus y = x$.

`1:` $x \cap y^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} x \setminus y \overset{\texttt{VS}}{=} x$.

`2:` Aus `1` "$x \cap y^C = x$"
folgt via **2-10**: $x \subseteq y^C$.

`3:` Aus `2` "$x \subseteq y^C$"
folgt via **3-7**: $y \subseteq x^C$.

`4:` Aus `3` "$y \subseteq x^C$"
folgt via **2-10**: $y \cap x^C = y$.

`5:` $y \setminus x \overset{\mathbf{5-10}}{=} y \cap x^C \overset{\mathtt{4}}{=} y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $y \setminus x = y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $y \setminus x = y$.

`1:` $y \cap x^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} y \setminus x \overset{\texttt{VS}}{=} y$.

`2:` Aus `1` "$y \cap x^C = y$"
folgt via **2-10**: $y \subseteq x^C$.

`3:` Aus `2` "$y \subseteq x^C$"
folgt via **3-7**: $x \subseteq y^C$.

`4:` Aus `3` "$x \subseteq y^C$"
folgt via **2-10**: $x \cap y^C = x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $x \cap y^C = x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cap y^C = x$"
folgt via **2-10**: $x \subseteq y^C$.

`2:` Aus `1` "$x \subseteq y^C$"
folgt via **3-7**: $y \subseteq x^C$.

`3:` Aus `2` "$y \subseteq x^C$"
folgt via **2-10**: $y \cap x^C = y$.

Beweis **213-14** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $y \cap x^C = y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$y \cap x^C = y$"
folgt via **2-10**: $y \subseteq x^C.$

`2:` Aus `1` "$y \subseteq x^C$"
folgt via **3-7**: $x \cap y = 0.$

$\square$

$c^{\mathbf{on}}D.$

Ersterstellung: 13/08/12 **Letzte Änderung: 13/06/13**

214-1. In Erweiterung der Nullfunktion zo_D, die jedem Element von D den Wert 0 zuordnet, werden nun die konstanten Funktionen in die Essays eingebracht. Da es hiervon erwartungsgemäß sehr viele gibt, kann nicht jede konstante Funktion mit einem eigenen Symbol bezeichnet werden. Statt dessen muss zu einer den konstanten Wert Bezug nehmenden und D berücksichtigenden Notation Zuflucht genommen werden:

214-1(Definition)

$c^{\mathbf{on}}D$

$$= \mathsf{214.0}(D, c) = \{(\lambda, c) : \lambda \in D\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\}.$$

214-2. Vorbereitend für das Folgende wird hier das "Elements-Sein " in $c^{\mathbf{on}}D$ thematisiert:

214-2(Satz)

a) *Aus* "$p \in c^{\mathbf{on}}D$" *folgt* "*c Menge*" *und* "$0 \neq D$" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (p = (\Omega, c))$".

b) *Aus* "$x \in D$" *und* "*c Menge*" *folgt* "$(x, c) \in c^{\mathbf{on}}D$".

c) *Aus* "$(x, y) \in c^{\mathbf{on}}D$" *folgt* "*c Menge*" *und* "$0 \neq D$" *und* "$x \in D$" *und* "$y = c$".

Beweis **214-2** a) VS gleich $p \in c^{\mathbf{on}}D$.

1: Aus VS gleich "$p \in c^{\mathbf{on}}D$" und
aus "$c^{\mathbf{on}}D = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\}$.

2: Aus 1"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\}$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (p = (\Omega, c))}$

3.1: Aus VS gleich "$p \in c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

3.2: Aus 2"$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq D}$

4: Aus 3.1"p Menge" und
aus 2"$\ldots p = (\Omega, c)$"
folgt: (Ω, c) Menge.

5: Aus 4"(Ω, c) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{c \text{ Menge}}$

<u>Beweis **214-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in D) \wedge (c \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge

`1.2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = x$.

`2.1:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots c$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (x, c) Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = x$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, c) = (x, c)$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS` gleich "$x \in D \ldots$"
folgt: $\Omega \in D$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.3`"$\Omega \in D$" und
aus `2.2`"$(\Omega, c) = (x, c)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge ((x, c) = (\Omega, c))$.

`4:` Aus `2.1`"(x, c) Menge" und
aus `3`"$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge ((x, c) = (\Omega, c))$"
folgt: $(x, c) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\}$.

`5:` Aus `4`"$(x, c) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = (\Omega, c)))\} = c^{\mathbf{on}} D$"
folgt: $(x, c) \in c^{\mathbf{on}} D$.

<u>Beweis</u> **214-2** `c)` `VS` gleich $(x,y)\in c^{\mathbf{on}}D$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(x,y)\in c^{\mathbf{on}}D$”

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{c \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(x,y)\in c^{\mathbf{on}}D$”

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{0\neq D}$

`1.3:` Aus `VS` gleich “$(x,y)\in c^{\mathbf{on}}D$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists\Omega:(\Omega\in D)\wedge((x,y)=(\Omega,c))$.

`2:` Aus `VS` gleich “$(x,y)\in c^{\mathbf{on}}D$”
folgt via **ElementAxiom**: (x,y) Menge.

`3.1:` Aus `1.3`“$\ldots(x,y)=(\Omega,c)$” und
aus `2`“(x,y) Menge”
folgt via **IGP**: $x=\Omega$.

`3.2:` Aus `1.3`“$\ldots(x,y)=(\Omega,c)$” und
aus `2`“(x,y) Menge”

folgt via **IGP**: $\boxed{y=c}$

`4:` Aus `3.1`“$x=\Omega$” und
aus `1.3`“$\ldots\Omega\in D\ldots$”

folgt: $\boxed{x\in D}$

□

214-3. Hier werden einige “ $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ -Eigenschaften ” von $c^{\mathbf{on}}D$ präsentiert:

214-3(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$.

b) “$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$” *genau dann, wenn* “$c$ *Menge*” *oder* “$D = 0$”.

c) “$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \neq D$” *genau dann, wenn* “$c$ *Unmenge*” *und* “$0 \neq D$”.

d) “$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$” *genau dann, wenn* “$c$ *Unmenge*” *oder* “$D = 0$”.

e) “$0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$” *genau dann, wenn* “$c$ *Menge*” *und* “$0 \neq D$”.

f) “$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$” *oder* “$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$”.

g) $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

h) “$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$” *genau dann, wenn* “$c$ *Unmenge*” *oder* “$0 \neq D$”.

i) “$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \neq \{c\}$” *genau dann, wenn* “$c$ *Menge*” *und* “$D = 0$”.

j) “$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$” *genau dann, wenn* “$c$ *Unmenge*” *oder* “$D = 0$”.

k) “$0 \neq \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)$” *genau dann, wenn* “$c$ *Menge*” *und* “$0 \neq D$”.

Beweis **214-3** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

2: Aus `Thema1` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ ”
folgt via **7-7**: $\exists\Psi : (\alpha, \Psi) \in c^{\mathbf{on}}D$.

3: Aus 2 “ $\ldots(\alpha, \Psi) \in c^{\mathbf{on}}D$ ”
folgt via **214-2**: $\alpha \in D$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Rightarrow (\alpha \in D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

1: Es gilt: $(D = 0) \vee (0 \neq D)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $D = 0$.

`1.2.Fall` $0 \neq D$.

2: Aus `1.2.Fall` “ $0 \neq D$ ”
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in D$.

3: Aus 2 “ $\ldots\Omega \in D$ ” und
aus `VS` gleich “ $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$ ”
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

4: Aus 3 “ $\Omega \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ ”
folgt via **7-7**: $\exists\Psi : (\Omega, \Psi) \in c^{\mathbf{on}}D$.

5: Aus 4 “ $(\Omega, \Psi) \in c^{\mathbf{on}}D$ ”
folgt via **214-2**: c Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0)$.

<u>Beweis **214-3** `b)`</u> $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Menge.

`Thema2.1` $\alpha \in D$.

`3:` Aus `Thema2.1` "$\alpha \in D$" und
aus `1.1.Fall` "c Menge"
folgt via **214-2**: $(\alpha, c) \in c^{\mathbf{on}}D$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, c) \in c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$D \subseteq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$.

`3:` Aus `2.2` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$" und
aus `A1` gleich "$D \subseteq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`1.2.Fall` $D = 0$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$.

`3:` Aus `2` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$" und
aus `1.2.Fall` "$D = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq 0$.

`4:` Aus `3` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

`5:` Aus `4` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$" und
aus `1.2.Fall` "$D = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

Beweis **214-3** c)

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D) \Leftrightarrow ((c \text{ Menge}) \vee (D = 0)).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\neg(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D)) \Leftrightarrow (\neg((c \text{ Menge}) \vee (D = 0))).$$

3: Aus 2
folgt: $$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \neq D) \Leftrightarrow ((\neg(c \text{ Menge})) \wedge (\neg(D = 0))).$$

4: Aus 3
folgt: $$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \neq D) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq D)).$$

d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0.$$

1: Es gilt: $$(c \text{ Menge}) \vee (c \text{ Unmenge}).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall c Menge.

2: Aus 1.1.Fall "c Menge"
folgt via des bereits bewiesenen b): $$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D.$$

3: Aus 2 "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus VS gleich "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$"
folgt: $$D = 0.$$

1.2.Fall c Unmenge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

<u>Beweis **214-3**</u> `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

`Thema2` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

`3:` Aus `Thema2`“ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ ”
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in c^{\mathbf{on}}D$.

`4:` Aus `3`“ $\ldots (\alpha, \Omega) \in c^{\mathbf{on}}D$ ”
folgt via **214-2**: c Menge.

`5:` Es gilt `4`“ c Menge ” .
Es gilt `1.1.Fall`“ c Unmenge” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

Ergo `Thema2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

`1.2.Fall` $D = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“ $D = 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`3:` Aus `2`“ $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$ ” und
aus `1.2.Fall`“ $D = 0$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

<u>Beweis</u> **214-3** `e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0)) \Leftrightarrow (\neg((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Leftrightarrow ((\neg(c \text{ Unmenge})) \wedge (\neg(D = 0))).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$(0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Leftrightarrow ((c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)).$$

`f)`

`1:` Es gilt: $$(c \text{ Menge}) \vee (c \text{ Unmenge}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Menge.

Aus `1.1.Fall` "c Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D.$

`1.2.Fall` c Unmenge.

Aus `1.2.Fall` "c Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D) \vee (\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0).$$

<u>Beweis **214-3** g)</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

2: Aus Thema1 “$\alpha \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in c^{\mathbf{on}}D$.

3: Aus 2 “$\ldots (\Omega, \alpha) \in c^{\mathbf{on}}D$”
folgt via **214-2**: $\alpha = c$.

4: Aus Thema1 “$\alpha \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

5: Aus 3 “$\alpha = c$” und
aus 4 “α Menge”
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{c\}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Rightarrow (\alpha \in \{c\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

Beweis **214-3** `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$.

`1:` Es gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (c \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "c Menge"
folgt via **1-3**: $c \in \{c\}$.

`3:` Aus `2` "$c \in \{c\}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$"
folgt: $c \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

`4:` Aus `3` "$c \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, c) \in c^{\mathbf{on}}D$.

`5:` Aus `4` "$\ldots (\Omega, c) \in c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via **214-2**: $0 \neq D$.

`1.2.Fall` c Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D)$.

<u>Beweis **214-3** `h)`</u> $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D)$.

`1:` Es gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (c \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“c Menge” und
aus `VS` gleich “$(c \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D)$”
folgt: $0 \neq D$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq D$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in D$” und
aus `1.1.Fall`“c Menge”
folgt via **214-2**: $(\Omega, c) \in c^{\mathbf{on}} D$.

`5:` Aus `4`“$(\Omega, c) \in c^{\mathbf{on}} D$”
folgt via **7-5**: $c \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D)$.

`6:` Aus `5`“$c \in \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D)$”
folgt via **1-8**: $\{c\} \subseteq \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D)$.

`7:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) \subseteq \{c\}$.

`8:` Aus `7`“$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) \subseteq \{c\}$” und
aus `6`“$\{c\} \subseteq \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) = \{c\}$.

`1.2.Fall` c Unmenge.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“c Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{c\} = 0$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“c Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}} D) = 0$.

`3:` Aus `2.2`“$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}} D) = 0$”
folgt via **7-7**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) = 0$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) = 0$” und
aus `2.1`“$\{c\} = 0$”
folgt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) = \{c\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}} D) = \{c\}$.

<u>Beweis</u> **214-3** `i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt:
$$(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D)).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\})) \Leftrightarrow (\neg((c \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \neq \{c\}) \Leftrightarrow ((\neg(c \text{ Unmenge})) \wedge (\neg(0 \neq D))).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \neq \{c\}) \Leftrightarrow ((c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)).$$

`j)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)).$$

`1.2:` Via **7-7** gilt: $$(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \Leftrightarrow (\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $$(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)).$$

`k)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `j)` gilt:
$$(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0)) \Leftrightarrow (\neg((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(0 \neq \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Leftrightarrow ((\neg(c \text{ Unmenge})) \wedge (\neq (D = 0))).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$(0 \neq \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \Leftrightarrow ((c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)).$$

$\square$

214-4. Hier werden einige "Funktions-Eigenschaften " von $c^{\mathbf{on}}D$ präsentiert:

214-4(Satz)

a) $c^{\mathbf{on}}D$ *Funktion.*

b) "$c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}$" *genau dann, wenn* "$c$ *Menge*" *oder* "$D = 0$".

c) "$c^{\mathbf{on}}D = 0$" *genau dann, wenn* "c *Unmenge*" *oder* "$D = 0$".

d) "$(c^{\mathbf{on}}D)(x) = c$" *genau dann, wenn* "$(x \in D) \wedge (c$ *Menge*$)$" *oder* "$c = \mathcal{U}$".

e) $c^{\mathbf{on}}D \neq \mathcal{U}$.

<u>Beweis **214-4**</u> `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in c^{\mathbf{on}}D.$

`1.1:` Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = c.$

`1.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via **214-2**: $\exists\Omega : \alpha = (\Omega, c).$

`2:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = c$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, c).$

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \alpha = (\Omega, c)$" und
aus `2`"$(\Omega, \Psi) = (\Omega, c)$"
folgt: $\alpha = (\Omega, \Psi).$

`4:` Aus `1.2`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `1.1`"$\exists\Psi \ldots$" und
aus `4`"$\alpha = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in c^{\mathbf{on}}D) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: `A1` | "$c^{\mathbf{on}}D$ Relation"

...

Beweis **214-4** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in c^{\mathbf{on}}D.$
`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \ldots \in c^{\mathbf{on}}D$" folgt via **214-2**:	$\beta = c.$
`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in c^{\mathbf{on}}D$" folgt via **214-2**:	$\gamma = c.$
`3:` Aus `2.1`"$\beta = c$" und aus `2.2`"$\gamma = c$" folgt:	$\beta = \gamma.$

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in c^{\mathbf{on}}D) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$c^{\mathbf{on}}D$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in c^{\mathbf{on}}D) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$"
folgt via **214-3**: $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0).$

<u>Beweis **214-4**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Menge}) \vee (D=0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(c \text{ Menge}) \vee (D=0)$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`1.2:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`2:` Aus `1.3` "$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion",
aus `1.1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus `1.2` "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$"
folgt via **21-1(Def)**: $c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}D = 0$" und
aus **7-11** "$\mathsf{dom}\,0 = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$"
folgt via **214-3**: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D=0)$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D=0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(c \text{ Unmenge}) \vee (D=0)$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`3:` Aus `2` "$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$"
folgt via **92-5**: $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

Beweis **214-4** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D(x) = c.$

`1:` Es gilt: $(x \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)) \vee (x \notin \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D).$

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **17-5**: $(c^{\mathbf{on}}D)(x)$ Menge.

`3:` Aus `2.1` "$c^{\mathbf{on}}D(x)$ Menge" und
aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}D(x) = c$"
folgt: c Menge.

`4:` Aus `3` "c Menge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D.$

`5:` aus `1.1.Fall` "$x \in \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$" und
aus `4` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$"
folgt: $x \in D.$

`6:` Aus `5` "$x \in D$" und
aus `3` "c Menge"
folgt: $(x \in D) \wedge (c \text{ Menge}).$

`1.2.Fall` $x \notin \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **17-4**: $(c^{\mathbf{on}}D)(x) = \mathcal{U}.$

`3:` Aus `VS` gleich "$(c^{\mathbf{on}}D)(x) = c$" und
aus `2` "$(c^{\mathbf{on}}D)(x) = \mathcal{U}$"
folgt: $c = \mathcal{U}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$((x \in D) \wedge (c \text{ Menge})) \vee (c = \mathcal{U}).$

Beweis **214-4** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $((x \in D) \wedge (c \text{ Menge})) \vee (c = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((x \in D) \wedge (c \text{ Menge})) \vee (c = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in D) \wedge (c \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \in D \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots c$ Menge”
folgt via **214-2**: $(x, c) \in c^{\mathbf{on}}D$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`4:` Aus `3`“$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion” und
aus `2`“$(x, c) \in c^{\mathbf{on}}D$”
folgt via **18-20**: $c = (c^{\mathbf{on}}D)(x)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(c^{\mathbf{on}}D)(x) = c$.

`1.2.Fall` $c = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$c = \mathcal{U}$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt: c Unmenge.

`3:` Aus `2`“c Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`4:` Via **17-7** gilt: $0(x) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3`“$c^{\mathbf{on}}D = 0$” und
aus `4`“$0(x) = \mathcal{U}$”
folgt: $(c^{\mathbf{on}}D)(x) = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5`“$c^{\mathbf{on}}D(x) = \mathcal{U}$” und
aus `1.2.Fall`“$c = \mathcal{U}$”
folgt: $(c^{\mathbf{on}}D)(x) = c$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(c^{\mathbf{on}}D)(x) = c$.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`2:` Aus `1`“$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion”
folgt via **213-1**: $c^{\mathbf{on}}D \neq \mathcal{U}$.

$\square$

214-5. Hier werden "Mengen-Eigenschaften" von $c^{\mathbf{on}}D$ diskutiert:

214-5(Satz)

a) *"$c^{\mathbf{on}}D$ Menge" genau dann, wenn "c Unmenge" oder "D Menge".*

b) *"$c^{\mathbf{on}}D$ Unmenge" genau dann, wenn "c Menge" und "D Unmenge".*

Beweis **214-5** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`1:` Es gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (c \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "c Menge" folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`3:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}D$ Menge" folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ Menge.

`4:` Aus 3 "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ Menge" und aus 2 "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" folgt: D Menge.

`1.2.Fall` c Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D \text{ Menge})$.

<u>Beweis **214-5**</u> `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D \text{ Menge})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "c Unmenge"
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`3:` Aus 2 "$c^{\mathbf{on}}D = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`1.2.Fall` D Menge.

`2.1:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$.

`2.2:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`3:` Aus `2.1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$" und
aus `1.2.Fall` "D Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ Menge.

`4:` Aus `2.2` "$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion" und
aus 3 "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ Menge"
folgt via **26-3**: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$(c^{\mathbf{on}}D \text{ Menge}) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \vee (D \text{ Menge}))$.

`2:` Aus 1
folgt: $(\neg(c^{\mathbf{on}}D \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg((c \text{ Unmenge}) \vee (D \text{ Menge})))$.

`3:` Aus 2
folgt: $(c^{\mathbf{on}}D \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((\neg(c \text{ Unmenge})) \wedge (\neg(D \text{ Menge})))$.

`4:` Aus 3
folgt: $(c^{\mathbf{on}}D \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((c \text{ Menge}) \wedge (D \text{ Unmenge}))$.

□

214-6. Wenig überraschend gilt $0^{\mathbf{on}}D = \mathsf{zo}_D$ und $\mathcal{U}^{\mathbf{on}}D = 0$:

214-6(Satz)

a) $0^{\mathbf{on}}D = \mathsf{zo}_D$.

b) $\mathcal{U}^{\mathbf{on}}D = 0$.

Beweis **214-6** a)

1.1: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” folgt via **214-4**: $0^{\mathbf{on}}D : D \to \{0\}$.

1.2: Via **21-13** gilt: $\mathsf{zo}_D : D \to \{0\}$.

> Thema1.3 $\alpha \in D$.
>
> 2.1: Aus Thema1.3“$\alpha \in D$” und aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” folgt via **214-2**: $0^{\mathbf{on}}D(\alpha) = 0$.
>
> 2.2: Aus Thema1.3“$\alpha \in D$” folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_D(\alpha) = 0$.
>
> 3: Aus 2.1 und aus 2.2 folgt: $0^{\mathbf{on}}D(\alpha) = \mathsf{zo}_D(\alpha)$.

Ergo Thema1.3: A1 | “$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (0^{\mathbf{on}}D(\alpha) = \mathsf{zo}_D(\alpha))$”

2: Aus 1.1“$0^{\mathbf{on}}D : D \to \{0\}$”, aus 1.2“$\mathsf{zo}_D : D \to \{0\}$” und aus A1 gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (0^{\mathbf{on}}D(\alpha) = \mathsf{zo}_D(\alpha))$” folgt via **21-12**: $0^{\mathbf{on}}D = \mathsf{zo}_D$.

b)

Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge” folgt via **214-4**: $\mathcal{U}^{\mathbf{on}}D = 0$.

□

$$\mathsf{215.0}(K, D)\,.$$
$$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}.$$

Ersterstellung: 14/08/12 **Letzte Änderung: 19/08/12**

215-1. Folgendes vorweg nehmend handelt es sich bei $\mathtt{215.0}(K,D)$ um jene Funktion, die jedem $c\in K$ die Funktion $c^{\mathbf{on}}D$ zuordnet. Die Klasse $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$ entpuppt sich als Bild-Bereich von $\mathtt{215.0}(K,D)$:

215-1(Definition)

a) $\mathtt{215.0}(K,D)=\{(\lambda,\lambda^{\mathbf{on}}D):\lambda\in K\}$

$$=\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in K)\wedge(\Psi=\Omega^{\mathbf{on}}D)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}.$$

b) $\mathtt{215.1}(K,D)=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$

$$=\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega\in K)\wedge(\omega=\Omega^{\mathbf{on}}D))\}.$$

215-2. Hier werden "Element-Eigenschaften" von $\mathtt{215.0}(K, D)$ und von $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ thematisiert:

215-2(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathtt{215.0}(K, D)$"
folgt "D *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (p = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}}D))$".

b) *Aus* "$c \in K$" *und* "D *Menge*" *folgt* "$(c, c^{\mathbf{on}}D) \in \mathtt{215.0}(K, D)$".

c) *Aus* "$(x, y) \in \mathtt{215.0}(K, D)$"
folgt "$x \in K$" *und* "D *Menge*" *und* "$y = x^{\mathbf{on}}D$".

d) *Aus* "$p \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$"
folgt "D *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (p = \Omega^{\mathbf{on}}D)$".

e) *Aus* "D *Menge*" *und* "$c \in K$" *folgt* "$c^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$".

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

<u>Beweis **215-2**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathtt{215.0}(K, D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{215.0}(K, D)$" und
aus "$\mathtt{215.0}(K, D) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (p = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$.

`4:` Aus `2`"$\ldots p = (\Omega, \Psi)$" und
aus `3`"$(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$"
folgt: $p = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$.

`5.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{215.0}(K, D)$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`5.2:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in K \ldots$" und
aus `3`"$p = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (p = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D))}$

`6:` Aus `5.1`"p Menge" und
aus `4`"$p = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$"
folgt: $(\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$ Menge.

`7:` Aus `6`"$(\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Omega^{\mathbf{on}} D$ Menge$)$.

`8:` Aus `7`"$\ldots \Omega^{\mathbf{on}} D$ Menge"
folgt via **214-5**: $(D$ Menge$) \vee (\Omega$ Unmenge$)$.

`9:` Aus `8`"$(D$ Menge$) \vee (\Omega$ Unmenge$)$" und
aus `7`"Ω Menge$\ldots$"
folgt: $\boxed{D \text{ Menge}}$

<u>Beweis **215-2**</u> `b)` `VS` gleich $(c \in K) \wedge (D \text{ Menge})$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = c$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = c^{\mathbf{on}} D$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$c \in K \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: c Menge.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots D$ Menge"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}} D$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = c$" und
aus `VS` gleich "$c \in K \ldots$"
folgt: $\Omega \in K$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = c$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = c^{\mathbf{on}} D$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (c, c^{\mathbf{on}} D)$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = c^{\mathbf{on}} D$" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = c$"
folgt: $\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D$.

`2.4:` Aus `1.3`"c Menge" und
aus `1.4`"$c^{\mathbf{on}} D$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(c, c^{\mathbf{on}} D)$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $(c, c^{\mathbf{on}} D) = (\Omega, \Psi)$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in K$",
aus `2.3`"$\ldots \Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D$" und
aus `3`"$(c, c^{\mathbf{on}} D) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge ((c, c^{\mathbf{on}} D) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `2.4`"$(c, c^{\mathbf{on}} D)$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge ((c, c^{\mathbf{on}} D) = (\Omega, \Psi))$"
folgt: $(c, c^{\mathbf{on}} D) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

...

Beweis **215-2** `b)` `VS` gleich $(c \in K) \wedge (D \text{ Menge})$.

...

`6:` Aus `5`“$(c, c^{\mathbf{on}}D)$
$\in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}}D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}}D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\} = 215.0(K, D)$”
folgt: $(c, c^{\mathbf{on}}D) \in 215.0(K, D)$.

`c)` `VS` gleich $(x, y) \in 215.0(K, D)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(x, y) \in 215.0(K, D)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{D \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(x, y) \in 215.0(K, D)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge ((x, y) = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}}D))$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$(x, y) \in 215.0(K, D)$”
folgt via **ElementAxiom**: (x, y) Menge.

`2:` Aus `1.3`“(x, y) Menge” und
aus `1.2`“$\ldots (x, y) = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}}D)$”
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (y = \Omega^{\mathbf{on}}D)$.

`3.1:` Aus `2`“$x = \Omega \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \Omega \in K \ldots$”
folgt: $\boxed{x \in K}$

`3.2:` Aus `2`“$x = \Omega \ldots$” und
aus `2`“$\ldots y = \Omega^{\mathbf{on}}D$”
folgt: $\boxed{y = x^{\mathbf{on}}D}$

<u>Beweis</u> **215-2** `d)` `VS` gleich $p \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$..

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$" und
aus "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in D\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\omega = \Omega^{\mathbf{on}} D))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\omega = \Omega^{\mathbf{on}} D))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\omega = \Omega^{\mathbf{on}} D))\}$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (p = \Omega^{\mathbf{on}} D)}$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots p = \Omega^{\mathbf{on}} D$" und
aus `1.1`"p Menge"
folgt: $\Omega^{\mathbf{on}} D$ Menge.

`3.2:` aus `2`"$\ldots \Omega \in K \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3.1`"$\Omega^{\mathbf{on}} D$ Menge"
folgt via **214-5**: (D Menge) $\vee$ (Ω Unmenge).

`5:` Aus `4`"(D Menge) $\vee$ (Ω Unmenge)" und
aus `3.2`"Ω Menge"
folgt: $\boxed{D \text{ Menge}}$

<u>Beweis **215-2**</u> `e)` `VS` gleich $(D \text{ Menge}) \wedge (c \in K)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "D Menge…"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = c$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = c$" und
aus `VS` gleich "$\ldots c \in K$"
folgt: $\Omega \in K$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = c$"
folgt: $\Omega^{\mathbf{on}}D = c^{\mathbf{on}}D$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $c^{\mathbf{on}}D = \Omega^{\mathbf{on}}D$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in K$" und
aus `3`"$c^{\mathbf{on}}D = \Omega^{\mathbf{on}}D$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (c^{\mathbf{on}}D = \Omega^{\mathbf{on}}D)$.

`5:` Aus `1.1`"$c^{\mathbf{on}}D$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (c^{\mathbf{on}}D = \Omega^{\mathbf{on}}D)$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}D \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\omega = \Omega^{\mathbf{on}}D))\}$.

`6:` Aus `5`"$c^{\mathbf{on}}D \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\omega = \Omega^{\mathbf{on}}D))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\omega = \Omega^{\mathbf{on}}D))\} = \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

□

215-3. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $\mathsf{215.0}(K,D)$ diskutiert:

<u>**215-3(Satz)**</u>

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) \subseteq K$.

b) "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) = K$"
genau dann, wenn "$K = 0$" *oder* "D *Menge*".

c) "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) \neq K$"
genau dann, wenn "$0 \neq K$" *und* "D *Unmenge*".

d) "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) = 0$"
genau dann, wenn "$K = 0$" *oder* "D *Unmenge*".

e) "$0 \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,)$"
genau dann, wenn "$0 \neq K$" *und* "D *Menge*".

f) "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) = K$" *oder* "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) = 0$".

g) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) = \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

h) "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,) = 0$"
genau dann, wenn "$K = 0$" *oder* "D *Unmenge*".

i) "$0 \neq \mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,)$"
genau dann, wenn "$0 \neq K$" *und* "D *Menge*".

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

Beweis **215-3** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)$.

2: Aus Thema1 " $\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)$ "
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\alpha,\Omega) \in 215.0(K,D)\,.$

3: Aus 2 " $\ldots (\alpha,\Omega) \in 215.0(K,D)$ "
folgt via **215-2**: $\alpha \in K$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)) \Rightarrow (\alpha \in K)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) \subseteq K$.

b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) = K$.

1: Es gilt: $(K = 0) \vee (0 \neq K)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $K = 0$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq K$.

2: Aus 1.2.Fall " $0 \neq K$ "
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in K$.

3: Aus 2 " $\ldots \Omega \in K$ " und
aus VS gleich " $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) = K$ "
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)$.

4: Aus 3 " $\Omega \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)$ "
folgt via **7-7**: $\exists\Psi : (\Omega,\Psi) \in 215.0(K,D)\,.$

5: Aus 4 " $\ldots (\Omega,\Psi) \in 215.0(K,D)$ "
folgt via **215-2**: D Menge.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(K = 0) \vee (D \text{ Menge})$.

Beweis **215-3** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(K = 0) \vee (D \text{ Menge})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(K = 0) \vee (D \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $K = 0$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \subseteq K$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \subseteq K$" und
aus `1.1.Fall`"$K = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \subseteq 0$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = 0$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = 0$" und
aus `1.1.Fall`"$K = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = K$.

`1.2.Fall` D Menge.

`Thema2.1` $\alpha \in K$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in K$" und
aus `1.2.Fall`"D Menge"
folgt via **215-2**: $(\alpha, \alpha^{\mathbf{on}} D) \in 215.0(K, D)$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \alpha^{\mathbf{on}} D) \in 215.0(K, D)$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$K \subseteq \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$"

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \subseteq K$.

`3:` Aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \subseteq K$" und
aus `A1` gleich "$K \subseteq \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = K$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = K$.

Beweis **215-3** c)

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) = K) \Leftrightarrow ((K = 0) \vee (D \text{ Menge})).$$

2: Aus 1 folgt:
$$(\neg(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) = K)) \Leftrightarrow (\neg((K = 0) \vee (D \text{ Menge}))).$$

3: Aus 2 folgt:
$$(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) \neq K) \Leftrightarrow ((\neg(K = 0) \wedge (\neg(D \text{ Menge})))).$$

4: Aus 3 folgt:
$$(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) \neq K) \Leftrightarrow ((0 \neq K) \wedge (D \text{ Unmenge})).$$

d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) = 0.$

1: Es gilt: $(D \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge}).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall D Menge.

Thema2 $\alpha \in K.$

3: Aus Thema2 "$\alpha \in K$" und aus 1.1.Fall "D Menge" folgt via **215-2**: $(\alpha, \alpha^{\mathbf{on}}D) \in 215.0(K,D)\,.$

4: Aus 3 "$(\alpha, \alpha^{\mathbf{on}}D) \in 215.0(K,D)$" folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,).$

5: Aus 4 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)$" und aus VS gleich "$\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,) = 0$" folgt: $\alpha \in 0.$

6: Es gilt 5 "$\alpha \in 0$". Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$". Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin K.$

Ergo Thema2: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \notin K).$

Konsequenz via **0-19**: $K = 0.$

1.2.Fall D Unmenge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$$(K = 0) \vee (D \text{ Unmenge}).$$

Beweis **215-3** `d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(K=0)\vee(D\text{ Unmenge})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(K=0)\vee(D\text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $K=0$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))\subseteq K$.

`3:` Aus 2"$\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))\subseteq K$" und aus `1.1.Fall`"$K=0$" folgt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))\subseteq 0$.

`4:` Aus 3"$\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))\subseteq 0$" folgt via **0-18**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))=0$.

`1.2.Fall` D Unmenge.

`Thema2` $\alpha\in\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))$.

`3:` Aus `Thema2`"$\alpha\in\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))$" folgt via **7-7**: $\exists\Omega:(\alpha,\Omega)\in 215.0(K,D)$.

`4:` Aus 3"$(\alpha,\Omega)\in 215.0(K,D)$" folgt via **215-2**: D Menge.

`5:` Es gilt 4"D Menge". Es gilt `1.2.Fall`"D Unmenge". Ex falso quodlibet folgt: $\alpha\notin\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))$.

Ergo `Thema2`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)))\Rightarrow(\alpha\notin\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))=0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D))=0$.

Beweis **215-3** `e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=0)\Leftrightarrow((K=0)\vee(D\text{ Unmenge})).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=0))\Leftrightarrow(\neg((K=0)\vee(D\text{ Unmenge}))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(0\neq\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,))\Leftrightarrow((\neg(K=0))\wedge(\neg(D\text{ Unmenge}))).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$(0\neq\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,))\Leftrightarrow((0\neq K)\wedge(D\text{ Menge})).$$

`f)`

`1:` Es gilt: $$(D\text{ Menge})\vee(D\text{ Unmenge}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` D Menge.

Aus `1.1.Fall` “D Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=K$.

`1.2.Fall` D Unmenge.

Aus `1.2.Fall` “D Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=K)\vee(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=0).$$

Beweis **215-3** `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$”
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{215.0}(K, D)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{215.0}(K, D)$”
folgt via **215-2**: $(\Omega \in K) \wedge (D$ Menge$) \wedge (\alpha = \Omega^{\mathbf{on}}D)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots D$ Menge” und
aus `3`“$\Omega \in K \ldots$”
folgt via **215-2**: $\Omega^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

`5:` Aus `3`“$\ldots \alpha = \Omega^{\mathbf{on}}D$” und
aus `4`“$\Omega^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$”
folgt: $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)) \Rightarrow (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,) \subseteq \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}\text{”}}$

...

Beweis **215-3** g) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$"
folgt via **215-2**:
$(D \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (\alpha = \Omega^{\mathbf{on}} D))$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in K \ldots$" und
aus 2 "D Menge..."
folgt via **215-2**: $(\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D) \in 215.0(K, D)$.

4: Aus 2 "$\ldots \alpha = \Omega^{\mathbf{on}} D$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$.

5: Aus 4 "$(\Omega, \alpha) = (\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D)$" und
aus 3 "$(\Omega, \Omega^{\mathbf{on}} D) \in 215.0(K, D)$"
folgt: $(\Omega, \alpha) \in 215.0(K, D)$.

6: Aus 5 "$(\Omega, \alpha) \in 215.0(K, D)$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(215.0(K, D))$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(215.0(K, D)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\,.^{\mathbf{on}} DK)\text{"}}$

2: Aus A1 gleich "$\mathsf{ran}\,(215.0(K, D)) \subseteq \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$" und
aus A2 gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq \mathsf{ran}\,(215.0(K, D))$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(215.0(K, D)) = \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

<u>Beweis</u> **215-3** `h)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=0)\Leftrightarrow((K=0)\vee(D\text{ Unmenge})).$$

`1.2:` Via **7-7** gilt: $$(\mathsf{ran}\,(215.0(K,D)\,)=0)\Leftrightarrow(\mathsf{dom}\,(215.0(K,D)\,)=0).$$

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.1`
folgt: $$(\mathsf{ran}\,(215.0(K,D)\,)=0)\Leftrightarrow((K=0)\vee(D\text{ Unmenge})).$$

`i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt:
$$(\mathsf{ran}\,(215.0(K,D)\,)=0)\Leftrightarrow((K=0)\vee(D\text{ Unmenge})).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\mathsf{ran}\,(215.0(K,D)\,)=0))\Leftrightarrow(\neg((K=0)\vee(D\text{ Unmenge}))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(0\neq\mathsf{ran}\,(215.0(K,D)\,))\Leftrightarrow((\neg(K=0))\wedge(\neg(D\text{ Unmenge}))).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$(0\neq\mathsf{ran}\,(215.0(K,D)\,))\Leftrightarrow((0\neq K)\wedge(D\text{ Menge})).$$

□

215-4. Nun werden "Funkions-Eigenschaften" von $\mathsf{215.0}(K,D)$ diskutiert:

215-4(Satz)

a) $\mathsf{215.0}(K,D)$ *Funktion.*

b) *Aus* "$0\neq D$" *folgt* "$\mathsf{215.0}(K,D)$ *injektiv*".

c) "$\mathsf{215.0}(K,D) : K\to\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$"
genau dann, wenn "$K=0$" *oder* "D *Menge*".

d) *Aus* "$0\neq D$ *Menge*"
folgt "$\mathsf{215.0}(K,D) : K\to\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$ *bijektiv*".

e) "$\mathsf{215.0}(K,D)=0$"
genau dann, wenn "$K=0$" *oder* "D *Unmenge*".

f) "$\mathsf{215.0}(K,D)\,(c)=c^{\mathbf{on}}D$"
genau dann, wenn "$c\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)\,)$".

g) "$\mathsf{215.0}(K,D)\,(c)=c^{\mathbf{on}}D$"
genau dann, wenn "$c\in\mathbb{K}$ *und* "D *Menge*".

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

<u>Beweis</u> **215-4** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathsf{215.0}(K, D)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{215.0}(K, D)$" und
aus "$\mathsf{215.0}(K, D) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D)$
$\wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D)$
$\wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in K) \wedge (\Psi = \Omega^{\mathbf{on}} D) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{215.0}(K, D)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: `A1` | "$\mathsf{215.0}(K, D)$ Relation"

...

Beweis **215-4** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{215.0}(K, D)$.
`2.1:` Aus `Thema1.2` "$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{215.0}(K, D)$ " folgt via **215-2**:	$\beta = \alpha^{\mathbf{on}} D$.
`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{215.0}(K, D)$ " folgt via **215-2**:	$\gamma = \alpha^{\mathbf{on}} D$.
`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt:	$\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{215.0}(K, D)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{215.0}(K, D)$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{215.0}(K, D)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{215.0}(K, D)$ Funktion.

<u>Beweis **215-4**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq D$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \texttt{215.0}(K, D)$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \texttt{215.0}(K, D)$ ”
folgt via **215-2**: $\beta = \alpha^{\mathbf{on}} D$.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots (\gamma, \beta) \in \texttt{215.0}(K, D)$ ”
folgt via **215-2**: $\beta = \gamma^{\mathbf{on}} D$.

`2.3:` Aus `Thema1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \texttt{215.0}(K, D)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (α, β) Menge.

`2.4:` Aus `Thema1`“$\ldots (\gamma, \beta) \in \texttt{215.0}(K, D)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (γ, β) Menge.

`2.5:` Aus `VS` gleich “$0 \neq D$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D$.

`3.1:` Aus `2.3`“(α, β) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: α Menge.

`3.2:` Aus `2.4`“(γ, β) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: γ Menge.

`4.1:` Aus `2.5`“$\ldots \Omega \in D$” und
aus `3.1`“α Menge”
folgt via **214-4**: $\alpha^{\mathbf{on}} D(\Omega) = \alpha$.

`4.2:` Aus `2.5`“$\ldots \Omega \in D$” und
aus `3.2`“γ Menge”
folgt via **214-4**: $\gamma^{\mathbf{on}} D(\Omega) = \gamma$.

...

...

<u>Beweis **215-4**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq D$.

...

`Thema1` $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathsf{215.0}(K, D)$.

...

`5.1`: Aus `2.1`"$\beta = \alpha^{\mathbf{on}} D$" und
aus `4.1`"$\alpha^{\mathbf{on}} D(\Omega) = \alpha$"
folgt: $\beta(\Omega) = \alpha$.

`5.2`: Aus `2.2`"$\beta = \gamma^{\mathbf{on}} D$" und
aus `4.2`"$\gamma^{\mathbf{on}} D(\Omega) = \gamma$"
folgt: $\beta(\Omega) = \gamma$.

`6`: Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathsf{215.0}(K, D)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\mathsf{215.0}(K, D)$ injektiv.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}(\mathsf{215.0}(K, D)) = K$.

`2`: Aus `1`"$\mathsf{dom}(\mathsf{215.0}(K, D)) = K$"
folgt via **215-3**: $(K = 0) \vee (D \text{ Menge})$.

<u>Beweis **215-4**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(K=0)\vee(D \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(K=0)\vee(D \text{ Menge})$”
folgt via **215-3**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=K$.

`2.1:` Via **215-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{215.0}(K,D)$ Funktion.

`3:` Aus `2.2`“$\mathsf{215.0}(K,D)$ Funktion”,
aus `1`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=K$” und
aus `2.1`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$”
folgt via **21-2**: $\mathsf{215.0}(K,D):K\to\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

`d)` `VS` gleich $0\neq D$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots D$ Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{215.0}(K,D):K\to\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

`1.2:` Via **215-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$0\neq D\ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{215.0}(K,D)$ injektiv.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{215.0}(K,D):K\to\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$”,
aus `1.2`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{215.0}(K,D)$ injektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $\mathsf{215.0}(K,D):K\to\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$ bijektiv.

`e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\mathsf{215.0}(K,D)=0$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{215.0}(K,D)=0$” und
aus **7-11**“$\mathsf{dom}\,0=0$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=0$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D))=0$”
folgt via **215-3**: $(K=0)\vee(D \text{ Unmenge})$.

Beweis **215-4** `e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(K = 0) \vee (D \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(K = 0) \vee (D \text{ Unmenge})$”
folgt via **215-3**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = 0$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $215.0(K, D)$ Funktion.

`3:` Aus `2`“$215.0(K, D)$ Funktion” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) = 0$”
folgt via **92-5**: $215.0(K, D) = 0$.

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $215.0(K, D)\,(c) = c^{\mathbf{on}}D$.

`1:` Es gilt: $(c \in \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,) \vee (c \notin \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $c \notin \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$c \notin \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$”
folgt via **17-4**: $215.0(K, D)\,(c) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$215.0(K, D)\,(c) = c^{\mathbf{on}}D$” und
aus `2`“$215.0(K, D)\,(c) = \mathcal{U}$”
folgt: $c^{\mathbf{on}}D = \mathcal{U}$.

`4:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D \neq \mathcal{U}$.

`5:` Es gilt `4`“$c^{\mathbf{on}}D \neq \mathcal{U}$”.
Es gilt `3`“$c^{\mathbf{on}}D = \mathcal{U}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $c \in \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$c \in \mathsf{dom}\,(215.0(K, D)\,)$.

<u>Beweis **215-4**</u> `f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (c, \Omega) \in \mathsf{215.0}(K, D)$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{215.0}(K, D)$ Funktion.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots (c, \Omega) \in \mathsf{215.0}(K, D)$"
folgt via **215-2**: $\Omega = c^{\mathbf{on}}D$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{215.0}(K, D)$ Funktion" und
aus `1.1`"$\ldots (c, \Omega) \in \mathsf{215.0}(K, D)$"
folgt via **18-20**: $\Omega = \mathsf{215.0}(K, D)\,(c)$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.1`
folgt: $\mathsf{215.0}(K, D)\,(c) = c^{\mathbf{on}}D$.

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{215.0}(K, D)\,(c) = c^{\mathbf{on}}D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{215.0}(K, D)\,(c) = c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$.

`2:` Aus `1`"$c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$"
folgt via **215-3**: $\boxed{D \text{ Menge}}$

`4:` Aus `3`"D Menge"
folgt via **215-3**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,) = K$.

`5:` Aus `1`"$c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$" und
aus `4`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,) = K$"
folgt: $\boxed{c \in K}$

<u>Beweis **215-4** `g)`</u> $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \in K) \wedge (D \text{ Menge})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots D$ Menge"
folgt via **215-3**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,) = K$.

`2`: Aus `VS` gleich "$c \in K \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,) = K$"
folgt: $c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$.

`3`: Aus `2`"$c \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K, D)\,)$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\mathsf{215.0}(K, D)\,(c) = c^{\mathbf{on}}D$.

$\square$

215-5. Hier werden “ Mengen-Eigenschaften ” von $\mathsf{215.0}(K,D)$ diskutiert:

215-5(Satz)

a) “$\mathsf{215.0}(K,D)$ *Menge*”
genau dann, wenn “K Menge” oder “D Unmenge”.

b) “$\mathsf{215.0}(K,D)$ *Unmenge*”
genau dann, wenn “K Unmenge” oder “D Menge”.

Beweis **215-5** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{215.0}(K,D)$ Menge.

1: Es gilt: $(D \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall D Menge.

2: Aus 1.1.Fall “ D Menge”
folgt via **215-3**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)) = K$.

3: Aus VS gleich “ $\mathsf{215.0}(K,D)$ Menge ”
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D))$ Menge.

4: Aus 3 “ $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D))$ Menge ” und
aus 2 “ $\mathsf{dom}\,(\mathsf{215.0}(K,D)) = K$ ”
folgt: K Menge.

1.2.Fall D Unmenge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$(K \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge})$.

Beweis **215-5** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(K \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge})$.

1: Nach VS gilt: $(K \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall K Menge.

2: Via **215-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)) \subseteq K$.

3: Aus 2 “ $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D)) \subseteq K$ ” und aus 1.1.Fall “ K Menge” folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D))$ Menge.

4: Via **215-4** gilt: $215.0(K, D)$ Funktion.

5: Aus 4 “ $215.0(K, D)$ Funktion ” und aus 3 “ $\mathsf{dom}\,(215.0(K, D))$ Menge ” folgt via **26-3**: $215.0(K, D)$ Menge.

1.1.Fall D Unmenge.

2: Aus 1.2.Fall “ D Unmenge” folgt via **215-4**: $215.0(K, D) = 0$.

3: Aus 2 “ $215.0(K, D) = 0$ ” und aus $0\mathcal{U}$**Axiom** “ 0 Menge” folgt: $215.0(K, D)$ Menge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $215.0(K, D)$ Menge.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$$(215.0(K, D) \text{ Menge}) \Leftrightarrow ((K \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge})).$$

2: Aus 1 folgt:
$$(\neg(215.0(K, D) \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg((K \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge}))).$$

3: Aus 2 folgt:
$$(215.0(K, D) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((\neg(K \text{ Menge})) \wedge (\neg(D \text{ Unmenge}))).$$

4: Aus 3 folgt:
$$(215.0(K, D) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((K \text{ Unmenge}) \wedge (D \text{ Menge})).$$

□

215-6. Für das Folgende sind die nun vorliegenden Aussagen hilfreich:

215-6(Satz)

a) $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$.

b) *Aus* "$0 \neq K$" *folgt* "$\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} = \{0\}$".

c) $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\} = 0$.

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}$
215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\}$.

Beweis **215-6** a)

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}$"
folgt via **215-2**: $\exists \Omega : \alpha = \Omega^{\mathbf{on}}0$.

3: Aus "$0 = 0$"
folgt via **214-4**: $\Omega^{\mathbf{on}}0 = 0$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega^{\mathbf{on}}0$" und
aus 3"$\Omega^{\mathbf{on}}0 = 0$"
folgt: $\alpha = 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}) \Rightarrow (\alpha = 0)$.

Konsequenz via **1-10**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$.

Beweis **215-6** `b)` `VS` gleich $0 \neq K.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq K$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in K.$

`2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `1`"$\ldots \Omega \in K$"
folgt via **215-2**: $\Omega^{\mathbf{on}}0 \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}.$

`3:` Aus `2`"$\Omega^{\mathbf{on}}0 \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}.$

`4:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}.$

`5:` Aus `3`"$0 \neq \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}$" und
aus `4`"$\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$"
folgt via **174-1**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} = \{0\}.$

`c)`

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\}.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\}$"
folgt via **215-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = \Omega^{\mathbf{on}}0).$

`3:` Es gilt `2`"$\ldots \Omega \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\}.$

Drog `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\}).$

Konsequenz via **0-19**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in 0\} = 0.$

$\square$

215-7. Im Fall $0 \neq D$ Menge ist vorliegendes Kriterium für die "Mengen-Eigenschaft" von $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ verfügbar:

215-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) $0 \neq D$ *Menge.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ *Menge.*

`ii)` K *Menge.*

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

Beweis **215-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ Menge.

`1:` Aus →) "$0 \neq D$ Menge"
folgt via **215-4**: $\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ bijektiv" und
aus `VS` gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ Menge"
folgt via **26-7**: K Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich K Menge.

`1:` Aus →) "$0 \neq D$ Menge"
folgt via **215-4**: $\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ bijektiv" und
aus `VS` gleich "K Menge"
folgt via **26-7**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ Menge.

□

215-8. Im Fall $0 \neq D$ Menge ist vorliegendes Kriterium für die “Unmngen-Eigenschaft” von $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ verfügbar:

215-8(Satz)

Unter der Voraussetzung …

→) $0 \neq D$ *Menge.*

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ *Unmenge.*

`ii)` K *Unmenge.*

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

Beweis **215-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ Unmenge.

`1:` Aus →) “$0 \neq D$ Menge”
folgt via **215-4**: $215.0(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` “$215.0(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ bijektiv” und
aus `VS` gleich “$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ Unmenge”
folgt via **26-8**: K Unmenge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich K Unmenge.

`1:` Aus →) “$0 \neq D$ Menge”
folgt via **215-4**: $215.0(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` “$215.0(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ bijektiv” und
aus `VS` gleich “K Unmenge”
folgt via **26-8**: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ Unmenge.

□

215-9. Die in **215-7,8** *nicht* behandelten Fälle $D = 0$ oder D Unmenge in Bezug auf die "Mengen-Eigenschaft" von $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ werden hier mit trivialem Resultat diskutiert:

215-9(Satz)

a) *Aus* "$D = 0$"
folgt "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$" *und* "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ *Menge*".

b) *Aus* "D *Unmenge*"
folgt "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} = 0$" *und* "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ *Menge*".

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

Beweis **215-9**

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}} 0 : \lambda \in K\}$.

---

a) VS gleich $D = 0$.

1: Via **215-6** gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}} 0 : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$.

2: Aus VS gleich "$D = 0$" und
aus 1 "$\{\lambda^{\mathbf{on}} 0 : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$"
folgt: $\boxed{\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}}$

3: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

4: Aus 2 "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$" und
aus 3 "$\{0\}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$ Menge.

<u>Beweis **215-9**</u> `b)` `VS` gleich D Unmenge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$" folgt via **215-2**: D Menge.

`3:` Es gilt `2` "D Menge".
Es gilt `VS` gleich "D Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\})$.

Konsequenz via **0-19**: `A1` | "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} = 0$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} = 0$" und aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"

folgt: $\boxed{\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \text{ Menge}}$

$\square$

215-10. Unabhängig von D gilt $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\} = 0$:

215-10(Satz)

$$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\} = 0.$$

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\}$.

Beweis **215-10**

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\}$"
folgt via **215-2**: $\exists\Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = \Omega^{\mathbf{on}}D)$.

3: Es gilt 2 "$\ldots \Omega \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in 0\} = 0$.

$\square$

Element-Eigenschaft von $c^{\mathbf{on}}D$ in $\mathsf{func}, {}^{\boldsymbol{?}}B, {}^{E}\supseteq^{\boldsymbol{?}}B, {}^{E}B$.
TeilKlassen-Eigenschaft von $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ in $\mathsf{func}, {}^{\boldsymbol{?}}B, {}^{E}\supseteq^{\boldsymbol{?}}B, {}^{E}B$.

Drsterstellung: 16/08/12 **Letzte Änderung: 20/08/12**

216-1. Hier wird die Element-Eigenschaft von $c^{\mathbf{on}}D$ in $\mathsf{func}, {}^{\mathbf{?}}B, {}^{E\supseteq\mathbf{?}}B, {}^{E}B$ diskutiert:

216-1(Satz)

a) *“$c^{\mathbf{on}}D \in \mathsf{func}$” genau dann, wenn “$c$ Unmenge” oder “D Menge”.*

b) *“$c^{\mathbf{on}}D \in {}^{\mathbf{?}}B$” genau dann, wenn “$c$ Unmenge” oder “$D = 0$” oder “$(c \in B) \wedge (0 \neq D$ Menge$)$”.*

c) *“$c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E\supseteq\mathbf{?}}B$” genau dann, wenn “$c$ Unmenge” oder “$D = 0$” oder “$(c \in B) \wedge (D$ Menge$) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$”.*

d) *“$c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}B$” genau dann, wenn “$D = E = 0$” oder “$(c$ Unmenge$) \wedge (E = 0)$” oder “$(c \in \mathbb{B}) \wedge (D$ Menge$) \wedge (0 \neq D = E)$”.*

Beweis **216-1** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $c^{\mathbf{on}}D \in \mathsf{func}$.

1: Aus VS gleich “$c^{\mathbf{on}}D \in \mathsf{func}$”
folgt via **ElementAxiom**: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

2: Aus 1“$c^{\mathbf{on}}D$ Menge”
folgt via **214-5**: $(c$ Unmenge$) \vee (D$ Menge$)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(c$ Unmenge$) \vee (D$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich “$(c$ Unmenge$) \vee (D$ Menge$)$”
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

2: Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

3: Aus 1“$c^{\mathbf{on}}D$ Menge” und
aus 2“$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion”
folgt via **212-2**: $c^{\mathbf{on}}D \in \mathsf{func}$.

Beweis **216-1** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{?}B$.

1: Aus VS gleich "$c^{\mathbf{on}}D \in {}^{?}B$"
folgt via **212-3**: $(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)\text{ Menge}) \wedge (\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B)$.

2: Es gilt: $(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \vee (0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

Aus 1.1.Fall "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$"
folgt via **214-3**: $(c\text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

1.2.Fall $0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

2: Aus 1.2.Fall "$0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **214-3**: $(c\text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)$.

3.1: Aus 2 "$\ldots 0 \neq D$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$.

3.2: Aus 2 "c Menge…"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

4.1: Aus 3.1 "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt: $\{c\} \subseteq B$.

4.2: Aus 3.2 "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ Menge…"
folgt: D Menge.

5.1: Aus 2 "c Menge…" und
aus 4.1 "$\{c\} \subseteq B$"
folgt via **213-2**: $c \in B$.

5.2: Aus 2 "$\ldots 0 \neq D$" und
aus 4.2 "D Menge"
folgt: $0 \neq D$ Menge.

6: Aus 5.2 und
aus 5.1
folgt: $(c \in \mathbb{B}) \wedge (0 \neq D\text{ Menge})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(c\text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D\text{ Menge})).$$

Beweis **216-1** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \text{ Menge}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \text{ Menge}))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)) \vee((c \in B) \wedge (0 \neq D \text{ Menge}))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$”
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`4:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{?}B$.

`5:` Aus `3`“$c^{\mathbf{on}}D = 0$” und
aus `4`“$0 \in {}^{?}B$”
folgt: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{?}B$.

`2.2.Fall` $(c \in B) \wedge (0 \neq D \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots D$ Menge”
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`3.2:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`“$c \in B \ldots$”
folgt via **1-8**: $\{c\} \subseteq B$.

`3.4:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

`4:` Aus `3.4`“$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$” und
aus `3.3`“$\{c\} \subseteq B$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$.

`5:` Aus `3.1`“$c^{\mathbf{on}}D$ Menge”,
aus `3.2`“$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion” und
aus `4`“$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$”
folgt via **212-3**: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{?}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{?}B$.

Beweis **216-1** c) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{?} B$.

1: Aus VS gleich "$c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{?} B$"
folgt via **212-4**:
$$(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \text{ Menge}) \wedge (\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq E) \wedge (\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B).$$

2: Es gilt: $(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0) \vee (0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D))$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$.

Aus 2.1.Fall "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = 0$"
folgt via **214-3**: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

...

Beweis **216-1** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **214-3**: $(c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)$.

`4.1:` Aus `3` "$\ldots 0 \neq D$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$.

`4.2:` Aus `3` "c Menge..."
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`5.1:` Aus `4.1` "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$" und
aus `1` "$\ldots \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt: $\{c\} \subseteq B$.

`5.2:` Aus `4.2` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$ Menge..."
folgt: D Menge.

`5.3:` Aus `4.2` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus `1` "$\ldots \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq E \ldots$"
folgt: $D \subseteq E$.

`6.1:` Aus `3` "c Menge..." und
aus `5.1` "$\{c\} \subseteq B$"
folgt via **213-2**: $c \in B$.

`6.2:` Aus `3` "$\ldots 0 \neq D$" und
aus `5.3` "$D \subseteq E$"
folgt: $0 \neq D \subseteq E$.

`7:` Aus `6.1` "$c \in B$",
aus `5.2` "D Menge" und
aus `6.2` "$0 \neq D \subseteq E$"
folgt: $(c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E)).$$

Beweis **216-1** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$.

`1:` Nach `VS` gilt:
$$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)) \vee ((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E)).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$"
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}} D = 0$.

`4:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`5:` Aus `3` "$c^{\mathbf{on}} D = 0$" und
aus `4` "$0 \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt: $c^{\mathbf{on}} D \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$.

...

Beweis **216-1** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$
`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots D$ Menge$\ldots$"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}D$ Menge.

`3.2:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`3.3:` Aus `2.2.Fall` "$c \in B \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{c\} \subseteq B$.

`3.4:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$.

`3.5:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

`4.1:` Aus `3.4` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D \subseteq E$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, c^{\mathbf{on}}D \subseteq E$.

`4.2:` Aus `3.5` "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$" und
aus `3.3` "$\{c\} \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$.

`5:` Aus `3.1` "$c^{\mathbf{on}}D$ Menge",
aus `3.2` "$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion",
aus `4.1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq E$" und
aus `4.2` "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt via **212-4**: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$.

<u>Beweis **216-1**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D \in {}^E B$.

`1:` Es gilt: $(E = 0) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$E = 0$"
folgt: ${}^E B = {}^0 B$.

`3:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}D \in {}^E B$" und
aus `2` "${}^E B = {}^0 B$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^0 B$.

`4:` Via **212-8** gilt: ${}^0 B = \{0\}$.

`5:` Aus `3` "$c^{\mathbf{on}}D \in {}^0 B$" und
aus `4` "${}^0 B = \{0\}$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}D \in \{0\}$.

`6:` Aus `5` "$c^{\mathbf{on}}D \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`7:` Aus `6` "$c^{\mathbf{on}}D = 0$"
folgt via **214-4**: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$.

`8:` Aus `1.1.Fall` "$E = 0$" und
aus `7` "$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0)$"
folgt: $(E = 0) \wedge ((c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0))$.

`9:` Aus `8`
folgt: $((E = 0) \wedge (D = 0)) \vee ((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0))$.

`10:` Aus `9`
folgt: $(E = D = 0) \vee ((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0))$.

`11:` Aus `10`
folgt: $(D = E = 0) \vee ((c \text{ Unmenge}) \wedge (D = 0))$.

...

Beweis **216-1** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D \in {}^E B$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 \neq E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}D \in {}^E B$"
folgt via **212-5**: $(E \text{ Menge}) \wedge (c^{\mathbf{on}}D : E \to B)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots c^{\mathbf{on}}D : E \to B$"
folgt via **21-1(Eef)**: $(\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = E) \wedge (\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B)$.

`4:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq E$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = E \ldots$"
folgt: $0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$.

`5:` Aus `4`"$0 \neq \mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D)$"
folgt via **214-3**: $(c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)$.

`6.1:` Aus `5`"c Menge..."
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`6.2:` Aus `5`"$\ldots 0 \neq D$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = E \ldots$"
folgt: $D = E$.

`7.2:` Aus `6.2`"$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$" und
aus `3`"$\ldots \mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt: $\{c\} \subseteq B$.

`8.1:` Aus `7.1`"$D = E$" und
aus `2`"E Menge..."
folgt: D Menge.

`8.2:` Aus `5`"c Menge..."
folgt via **1-3**: $c \in \{c\}$.

...

...

<u>Beweis **216-1**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}B$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq E$.

...

`9.1:` Aus `5`"$\ldots 0 \neq$" und
aus `7.1`"$D = E$"
folgt: $0 \neq D = E$.

`9.2:` Aus `8.2`"$c \in \{c\}$" und
aus `7.2`"$\{c\} \subseteq B$"
folgt via **0-4**: $c \in B$.

`10:` Aus `9.2`"$c \in B$",
aus `8.1`"D Menge" und
aus `9.1`"$0 \neq D = E$"
folgt: $(c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D = E)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(D = E = 0)$$
$$\vee((c \text{ Unmenge}) \wedge (D = 0))$$
$$\vee((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D = E)).$$

Beweis **216-1** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich

$$(D=E=0)$$
$$\vee((c\text{ Unmenge})\wedge(E=0))$$
$$\vee((c\in B)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq D=E)).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(D=E=0)$$
$$\vee((c\text{ Unmenge})\wedge(E=0))$$
$$\vee((c\in B)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq D=E)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$((E=0)\wedge(D=0))$$
$$\vee((c\text{ Unmenge})\wedge(E=0))$$
$$\vee((c\in B)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq D=E)).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$((E=0)\wedge((c\text{ Unmenge})\vee(D=0)))$$
$$\vee((c\in B)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq D=E)).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(E=0)\wedge((c\text{ Unmenge})\vee(D=0)).$

`4.1:` Aus `3.1.Fall`“$E=0\ldots$”
folgt: $^{E}B={}^{0}B.$

`4.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots(c\text{ Unmenge})\vee(D=0)$”
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}D=0.$

`5:` Via **212-8** gilt: $^{0}B=\{0\}.$

`6.1:` Aus `4.1`“$^{E}B={}^{0}B$” und
aus `5`“$^{0}B=\{0\}$”
folgt: $^{E}B=\{0\}.$

`6.2:` Aus `4.2`“$c^{\mathbf{on}}D=0$” und
aus **1-5**“$0\in\{0\}$”
folgt: $c^{\mathbf{on}}D\in\{0\}.$

`7:` Aus `6.2`“$c^{\mathbf{on}}D\in\{0\}$” und
aus `6.1`“$^{E}B=\{0\}$”
folgt: $c^{\mathbf{on}}D\in{}^{E}B.$

...

Beweis **216-1** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich

$$(D=E=0)$$
$$\vee((c \text{ Unmenge}) \wedge (E=0))$$
$$\vee((c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D = E)).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $(c \in B) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D = E)$.

`4.1:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`4.2:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

`4.3:` Aus `VS` gleich "$c \in B \ldots$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: c Menge.

`4.4:` Aus `VS` gleich "$c \in B \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{c\} \subseteq B$.

`4.5:` Aus `3.2.Fall` "$\ldots D$ Menge$\ldots$" und
aus `3.2.Fall` "$\ldots D = E$"
folgt: E Menge.

`5.1:` Aus `4.3` "c Menge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$.

`5.2:` Aus `4.2` "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$" und
aus `4.4` "$\{c\} \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$.

`6:` Aus `5.1` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$" und
aus `3.2.Fall` "$\ldots D = E$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = E$.

`7:` Aus `4.1` "$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion",
aus `6` "$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = E$" und
aus `5.2` "$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt via **21-1(Eef)**: $c^{\mathbf{on}}D : E \to B$.

`8:` Aus `4.5` "E Menge" und
aus `7` "$c^{\mathbf{on}}D : E \to B$"
folgt via **212-5**: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}B$.

□

216-2. Nun wird untersucht, unter welchen Bedingungen $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ eine TeilKlasse von func, $^{\mathbf{?}}B$, $^{E}{\supseteq}^{\mathbf{?}}B$, ^{E}B ist:

216-2(Satz)

a) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq \mathsf{func}$.

b) "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$"
genau dann, wenn "$D = 0$" *oder* "D *Unmenge*"
oder "$(0 \neq D$ *Menge*$) \wedge (K \subseteq B)$".

c) "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{E}{\supseteq}^{\mathbf{?}}B$"
genau dann, wenn "$D = 0$" *oder* "D *Unmenge*" *oder* "$K = 0$"
oder "$(0 \neq D \subseteq E) \wedge (D$ *Menge*$) \wedge (0 \neq K \subseteq B)$".

d) "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{E}B$"
genau dann, wenn "$(D = E = 0) \wedge (0 \neq K)$"
oder "D *Unmenge*" *oder* "$K = 0$"
oder "$(0 \neq D = E) \wedge (D$ *Menge*$) \wedge (0 \neq K \subseteq B)$".

215-1(Eef) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.

<u>Beweis **216-2**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$.
`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$" folgt via **215-2**:	$\exists \Omega : \alpha = \Omega^{\mathbf{on}}D$.
`3:` Via **214-4** gilt:	$\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion.
`4:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = \Omega^{\mathbf{on}}D$" und aus `3`"$\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion" folgt:	α Funktion.
`5:` Aus `2.1`"α Menge" und aus `4`"α Funktion" folgt via **212-2**:	$\alpha \in \mathsf{func}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{func})$.

Konsequenz via **0-2(Eef)**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq \mathsf{func}$.

Beweis **216-2** b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B.$

1: Es gilt: $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D \text{ Menge}).$

2: Aus 1
folgt: $((D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}))$
$\vee(0 \neq D \text{ Menge}).$

Fallunterscheidung

2.1.Fall $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}).$

2.2.Fall $0 \neq D$ Menge.

Thema3.1 $\alpha \in K.$

4: Aus 2.2.Fall"$\ldots D$ Menge" und
aus Thema3.1"$\alpha \in K$"
folgt via **215-2**: $\alpha^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}.$

5: Aus 4"$\alpha^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$" und
aus VS gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$"
folgt via **0-4**: $\alpha^{\mathbf{on}}D \in {}^{\mathbf{?}}B.$

6: Aus 5"$\alpha^{\mathbf{on}}D \in {}^{\mathbf{?}}B$"
folgt via **212-4**: $\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) \subseteq B.$

7: Aus 2.2.Fall"$0 \neq D \ldots$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) = \{\alpha\}.$

8: Aus 7"$\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) = \{\alpha\}$" und
aus 6"$\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt: $\{\alpha\} \subseteq B.$

9: Aus Thema3.1"$\alpha \in K$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

10: Aus 9"α Menge" und
aus 8"$\{\alpha\} \subseteq B$"
folgt via **213-2**: $\alpha \in B.$

...

...

Beweis **216-2** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{?}B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq D$ Menge.

...

Ergo `Thema3.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \in B).$

Konsequenz via **0-2(Eef)**: `A1` | "$K \subseteq B$"

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$0 \neq D$ Menge" und
aus `A1` gleich "$K \subseteq B$"
folgt: $(0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (K \subseteq B).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (K \subseteq B)).$$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (K \subseteq B)).$

`1:` Nach `VS` gilt: $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (K \subseteq B)).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $D = 0.$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$D = 0$"
folgt via **215-9**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}.$

`3:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{?}B.$

`4:` Aus `3`"$0 \in {}^{?}B$"
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq {}^{?}B.$

`5:` Aus `2`"$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq \{0\}$" und
aus `4`"$\{0\} \subseteq {}^{?}B$"
folgt via **0-6**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{?}B.$

...

Beweis **216-2** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(D=0)\vee(D \text{ Unmenge})\vee((0\neq D \text{ Menge})\wedge(K\subseteq B))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` D Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall` "D Unmenge" folgt via **215-9**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$.

`3:` Via **0-18** gilt: $0\subseteq^{?}B$.

`4:` Aus 2 "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$" und aus 3 "$0\subseteq^{?}B$" folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq^{?}B$.

`1.3.Fall` $(0\neq D \text{ Menge})\wedge(K\subseteq B)$.

`Thema2` $\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

`3:` Aus `Thema2` "$\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$" folgt via **215-2**: $\exists\Omega:(\Omega\in K)\wedge(\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D)$.

`4.1:` Aus `Thema2` "$\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`4.2:` Via **214-4** gilt: $\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`4.3:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)\subseteq\{\Omega\}$.

`5.1:` Aus 3 "$\ldots\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D$" und aus 4.2 "$\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion" folgt: α Funktion.

`5.2:` Aus 3 "$\ldots\Omega\in K\ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots K\subseteq B$" folgt via **0-4**: $\Omega\in B$.

...

...

...

Beweis **216-2** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (K \subseteq B))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (K \subseteq B)$.

`Thema2` $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

...

6: Aus 5.2"$\Omega \in B$"
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \subseteq B$.

7: Aus 4.3"$\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}} D) \subseteq \{\Omega\}$" und
aus 6"$\{\Omega\} \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}} D) \subseteq B$.

8: Aus 3"$\ldots \alpha = \Omega^{\mathbf{on}} D$" und
aus 7"$\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}} D) \subseteq B$"
folgt: $\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$.

9: Aus 4.1"α Menge",
aus 5.1"α Funktion" und
aus 8"$\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$"
folgt via **212-3**: $\alpha \in {}^{\mathbf{?}}B$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}) \Rightarrow (\alpha \in {}^{\mathbf{?}}B)$.

Konsequenz via **0-2(Eef)**: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$.

Beweis **216-2** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B.$

`1:` Es gilt: $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D \text{ Menge}).$

`2:` Aus `1`
folgt: $((D = 0) \vee (D \text{ Unmenge})) \vee (0 \neq D \text{ Menge}).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}).$

`2.2.Fall` $0 \neq D$ Menge.

`Thema3.1` $\alpha \in K.$

`4:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots D$ Menge" und
aus `Thema3.1`"$\alpha \in K$"
folgt via **215-2**: $\alpha^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}.$

`5:` Aus `4`"$\alpha^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$" und
aus `VS` gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt via **0-4**: $\alpha^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B.$

`6:` Aus `5`"$\alpha^{\mathbf{on}}D \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt via **212-4**: $\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) \subseteq B.$

`7:` Aus `2.2.Fall`"$0 \neq D \ldots$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) = \{\alpha\}.$

`8:` Aus `7`"$\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) = \{\alpha\}$" und
aus `6`"$\mathsf{ran}\,(\alpha^{\mathbf{on}}D) \subseteq B$"
folgt: $\{\alpha\} \subseteq B.$

`9:` Aus `Thema3.1`"$\alpha \in K$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`10:` Aus `9`"α Menge" und
aus `8`"$\{\alpha\} \subseteq B$"
folgt via **213-2**: $\alpha \in B.$

...

...

<u>Beweis</u> **216-2** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq D$ Menge.

...

Ergo `Thema3.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha \in B).$

Konsequenz via **0-2(Eef)**: `A1` | "$K \subseteq B$"

`3.2:` Es gilt: $(K = 0) \vee (0 \neq K).$

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` $K = 0.$

...

...

Beweis **216-2** c) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E\supseteq^{?}B.$

...

Fallunterscheidung

...

2.2.Fall $0 \neq D$ Menge.

...

Fallunterscheidung

...

3.2.2.Fall $0 \neq K.$

4: Aus 3.2.2.Fall“$0 \neq K$”
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in K.$

5.1: Aus 4“$\ldots\Omega \in K$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

5.2: Aus 2.2.Fall“$\ldots D$ Menge” und
aus 4“$\ldots\Omega \in K$”
folgt via **215-2**: $\Omega^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}.$

5.3: Aus 3.2.2.Fall“$0 \neq K$” und
aus A1 gleich “$K \subseteq B$”
folgt: $0 \neq K \subseteq B.$

6.1: Aus 5.1“Ω Menge”
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D) = D.$

6.2: Aus 5.2“$\Omega^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$” und
aus VS gleich “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E\supseteq^{?}B$”
folgt via **0-4**: $\Omega^{\mathbf{on}}D \in {}^E\supseteq^{?}B.$

7: Aus 6.2“$\Omega^{\mathbf{on}}D \in {}^E\supseteq^{?}B$”
folgt via **212-4**: $\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D) \subseteq E.$

8: Aus 6.1“$\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D) = D$” und
aus 7“$\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D) \subseteq E$”
folgt: $D \subseteq E.$

...

...

...

Beweis **216-2** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^{E}\supseteq^{?} B$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq D$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.2.Fall` $0 \neq K$.

...

`9:` Aus `2.2.Fall`“$0 \neq D \ldots$” und
aus `8`“$D \subseteq E$”
folgt: $0 \neq D \subseteq E$.

`10:` Aus `9`“$0 \neq D \subseteq E$” und
aus `2.2.Fall`“$\ldots D$ Menge”
folgt: $(0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge})$.

`11:` Aus `10`“$(0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge})$” und
aus `5.3`“$0 \neq K \subseteq B$”
folgt: $(0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(K = 0) \vee ((0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B)).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | “$((D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}))$
$\vee((K = 0) \vee ((0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B)))$”

`3:` Aus `A2`
folgt: $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (K = 0)$
$\vee((0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B))$.

<u>Beweis **216-2**</u> `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D=0)\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$
$\vee((0\neq D\subseteq E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(D=0)\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$
$\vee((0\neq D\subseteq E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $D=0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` “$D=0$”
folgt via **215-9**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq\{0\}$.

`3:` Via **212-7** gilt: $0\in{}^{E}\supseteq^{?}B$.

`4:` Aus `3` “$0\in{}^{E}\supseteq^{?}B$”
folgt via **1-8**: $\{0\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{?}B$.

`5:` Aus `2` “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq\{0\}$” und
aus `4` “$\{0\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{?}B$”
folgt via **0-6**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{?}B$.

`1.2.Fall` D Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall` “D Unmenge”
folgt via **215-9**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$.

`3:` Via **0-18** gilt: $0\subseteq{}^{E}\supseteq^{?}B$.

`4:` Aus `2` “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$” und
aus `3` “$0\subseteq{}^{E}\supseteq^{?}B$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{?}B$.

...

Beweis **216-2** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D=0)\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$
$\vee((0\neq D\subseteq E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $K=0$.

`2:` Aus `1.3.Fall`“$K=0$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}$.

`3:` Via **215-10** gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}=0$.

`4:` Aus `2`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}$” und
aus `3`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}=0$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$.

`5:` Via **0-18** gilt: $0\subseteq{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

`6:` Aus `4`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$” und
aus `5`“$0\subseteq{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

...

Beweis **216-2** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D=0)\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$
$\vee((0\neq D\subseteq E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(0\neq D\subseteq E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B)$.

`Thema2` $\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

`3:` Aus `Thema2`“$\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$”
folgt via **215-2**: $\exists\Omega:(\Omega\in K)\wedge(\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D)$.

`4.1:` Aus `Thema2`“$\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`4.2:` Via **214-4** gilt: $\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`4.3:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)\subseteq\{\Omega\}$.

`4.4:` Aus `3`“$\ldots\Omega\in K\ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4.5:` Aus `3`“$\ldots\Omega\in K\ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots K\subseteq B$”
folgt via **0-4**: $\Omega\in B$.

`5.1:` Aus `3`“$\ldots\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D$” und
aus `4.2`“$\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion”
folgt: α Funktion.

`5.2:` Aus `3`“$\ldots\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D$” und
aus `4.3`“$\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)\subseteq\{\Omega\}$”
folgt: $\mathsf{ran}\,\alpha\subseteq\{\Omega\}$.

`5.3:` Aus `4.4`“Ω Menge”
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)=D$.

`5.4:` Aus `4.5`“$\Omega\in B$”
folgt via **1-8**: $\{\Omega\}\subseteq B$.

...

...

...

Beweis **216-2** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D=0)\vee(D\text{ Unmenge})\vee(K=0)$
$\vee((0\neq D\subseteq E)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(0\neq D\subseteq E)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B)$.

...

`Thema2` $\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$.

...

`6.1:` Aus `3`"$\ldots\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D$" und
aus `5.3`"$\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)=D$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\alpha=D$.

`6.2:` Aus `5.2`"$\mathsf{ran}\,\alpha\subseteq\{\Omega\}$" und
aus `5.4`"$\{\Omega\}\subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,\alpha\subseteq B$.

`7:` Aus `6.1`"$\mathsf{dom}\,\alpha=D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D\subseteq E\ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\alpha\subseteq E$.

`8:` Aus `4.1`"α Menge",
aus `5.1`"α Funktion",
aus `7`"$\mathsf{dom}\,\alpha\subseteq E$" und
aus `6.2`"$\mathsf{ran}\,\alpha\subseteq B$"
folgt via **212-4**: $\alpha\in{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

Ergo `Thema2`: $\forall\alpha:(\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\})\Rightarrow(\alpha\in{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B)$.

Konsequenz via **0-2(Eef)**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$.

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B.$

`1:` Via **212-6** gilt: ${}^E B \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B$" und
aus `1` "${}^E B \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt via **0-6**: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B.$

`3:` Aus `2` "$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (K = 0)$
$\vee((0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B)).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $D = 0.$

`4:` Es gilt: $(K = 0) \vee (0 \neq K).$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $K = 0.$

...

...

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B.$$

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $$D = 0.$$

`4:` Es gilt: $$(K = 0) \vee (0 \neq K).$$

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $$0 \neq K.$$

`5:` Aus `3.1.Fall`“$D = 0$”
folgt: $$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} = \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}.$$

`6:` Aus `4.2.Fall`“$0 \neq K$”
folgt via **215-6**: $$\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} = \{0\}.$$

`7:` Aus `5`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} = \{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\}$” und
aus `6`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}0 : \lambda \in K\} = \{0\}$”
folgt: $$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} = \{0\}.$$

`8:` Aus `7`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} = \{0\}$” und
aus `VS` gleich “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B$”
folgt: $$\{0\} \subseteq {}^E B.$$

`9:` Aus **1-5**“$0 \in \{0\}$” und
aus `8`“$\{0\} \subseteq {}^E B$”
folgt via **0-4**: $$0 \in {}^E B.$$

`10:` Aus `9`“$0 \in {}^E B$”
folgt via **212-7**: $$E = 0.$$

`11:` Aus `3.1.Fall`“$D = 0$” und
aus `10`“$E = 0$”
folgt: $$D = E = 0.$$

`12:` Aus `11`“$D = E = 0$” und
aus `4.2.Fall`“$0 \neq K$”
folgt: $$(D = E = 0) \wedge (0 \neq K).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$((D = E = 0) \wedge (0 \neq K)) \vee (K = 0).$$

...

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall`	D Unmenge.
`3.3.Fall`	$K = 0.$

...

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.4.Fall` $(0 \neq D \subseteq E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B).$

`4:` Aus `3.4.Fall` "$\ldots 0 \neq K \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in K.$

`5.1:` Aus `4` "$\ldots \Omega \in K$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`5.2:` Aus `3.4.Fall` "$\ldots D$ Menge$\ldots$" und
aus `4` "$\ldots \Omega \in K$"
folgt via **215-2**: $\Omega^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}.$

`6:` Aus `5.2` "$\Omega^{\mathbf{on}}D \in \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$" und
aus `VS` gleich "$\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B$"
folgt via **0-4**: $\Omega^{\mathbf{on}}D \in {}^E B.$

`7:` Aus `6` "$\Omega^{\mathbf{on}}D \in {}^E B$"
folgt via **212-5**: $\Omega^{\mathbf{on}}D : E \to B.$

`8.1:` Aus `7` "$\Omega^{\mathbf{on}}D : E \to B$"
folgt via **21-1(Eef)**: $\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D) = E.$

`8.2:` Aus `5.1` "Ω Menge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D) = D.$

`9:` Aus `8.2` und
aus `8.1`
folgt: $D = E.$

`10:` Aus `3.4.Fall` "$0 \neq D \ldots$",
aus `9` "$D = E$",
aus `3.4.Fall` "$\ldots D$ Menge$\ldots$" und
aus `3.4.Fall` "$\ldots 0 \neq K \subseteq B$"
folgt: $(0 \neq D = E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$((D = E = 0) \wedge (0 \neq K)) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (K = 0) \vee ((0 \neq D = E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B)).$$

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich

$$((D=E=0)\wedge(0\neq K))$$
$$\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$$
$$\vee((0\neq D=E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B)).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$((D=E=0)\wedge(0\neq K))$$
$$\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$$
$$\vee((0\neq D=E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(D=E=0)\wedge(0\neq K)$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$D=\ldots=0\ldots$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=\{\lambda^{\mathbf{on}}0:\lambda\in K\}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots E=0\ldots$”
folgt: ${}^{E}B={}^{0}B$.

`3.1:` Via **215-6** gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}0:\lambda\in K\}\subseteq\{0\}$.

`3.2:` Via **212-8** gilt: ${}^{0}B=\{0\}$.

`4:` Aus `2.1`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=\{\lambda^{\mathbf{on}}0:\lambda\in K\}$” und
aus `3.1`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}0:\lambda\in K\}\subseteq\{0\}$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq\{0\}$.

`5:` Aus `4`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq\{0\}$” und
aus `3.2`“${}^{0}B=\{0\}$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}B$.

`1.2.Fall` D Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`“D Unmenge”
folgt via **215-9**: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$.

`3:` Via **0-18** gilt: $0\subseteq{}^{E}B$.

`2:` Aus `2`“$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$” und
aus `3`“$0\subseteq{}^{E}B$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^{E}B$.

...

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich

$$((D=E=0)\wedge(0\neq K))$$
$$\vee(D \text{ Unmenge})\vee(K=0)$$
$$\vee((0\neq D=E)\wedge(D \text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B)).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $K=0$.

`2:` Aus `1.3.Fall` “$K=0$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}$.

`3:` Via **215-10** gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}=0$.

`4:` Aus `2` “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}$” und
aus `3` “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in 0\}=0$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$.

`5:` Via **0-18** gilt: $0\subseteq{}^E B$.

`6:` Aus `4` “$\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}=0$” und
aus `5` “$0\subseteq{}^E B$”
folgt: $\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}\subseteq{}^E B$.

...

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich

$$((D=E=0)\wedge(0\neq K))$$
$$\vee(D\text{ Unmenge})\vee(K=0)$$
$$\vee((0\neq D=E)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B)).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(0\neq D=E)\wedge(D\text{ Menge})\wedge(0\neq K\subseteq B).$

`Thema2` $\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}.$

`3.1:` Aus `Thema2`“$\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.2:` Aus `Thema2`“$\alpha\in\{\lambda^{\mathbf{on}}D:\lambda\in K\}$”
folgt via **215-2**: $\exists\Omega:(\Omega\in K)\wedge(\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D).$

`4.1:` Via **214-4** gilt: $\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`4.2:` Aus `3.2`“$\ldots\Omega\in K\ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4.3:` Aus `3.2`“$\ldots\Omega\in K\ldots$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots K\subseteq B$”
folgt via **0-4**: $\Omega\in B.$

`4.4:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)\subseteq\{\Omega\}.$

`5.1:` Aus `3.2`“$\ldots\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D$” und
aus `4.1`“$\Omega^{\mathbf{on}}D$ Funktion”
folgt: α Funktion.

`5.2:` Aus `4.2`“Ω Menge”
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)=D.$

`5.3:` Aus `4.3`“$\Omega\in B$”
folgt via **1-8**: $\{\Omega\}\subseteq B.$

`5.4:` Aus `3.2`“$\ldots\alpha=\Omega^{\mathbf{on}}D$” und
aus `4.4`“$\mathsf{ran}\,(\Omega^{\mathbf{on}}D)\subseteq\{\Omega\}$”
folgt: $\mathsf{ran}\,\alpha\subseteq\{\Omega\}.$

...

...

...

Beweis **216-2** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $((D = E = 0) \wedge (0 \neq K))$
$\vee(D \text{ Unmenge}) \vee (K = 0)$
$\vee((0 \neq D = E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $(0 \neq D = E) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge (0 \neq K \subseteq B)$.

...

`Thema2` $\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}$.

...

`6.1:` Aus `3.2`"$\ldots \alpha = \Omega^{\mathbf{on}} D$" und
aus `5.2`"$\mathsf{dom}\,(\Omega^{\mathbf{on}} D) = D$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\alpha = D$.

`6.2:` Aus `5.4`"$\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq \{\Omega\}$" und
aus `5.3`"$\{\Omega\} \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$.

`7:` Aus `6.1`"$\mathsf{dom}\,\alpha = D$" und
aus `1.4.Fall`"$\ldots D = E \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\alpha = E$.

`8:` Aus `5.1`"α Funktion",
aus `7`"$\mathsf{dom}\,\alpha = E$" und
aus `6.2`"$\mathsf{ran}\,\alpha \subseteq B$"
folgt via **21-1(Eef)**: $\alpha : E \to B$.

`9:` Aus `3.1`"α Menge" und
aus `8`"$\alpha : E \to B$"
folgt via **212-5**: $\alpha \in {}^E B$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\}) \Rightarrow (\alpha \in {}^E B)$.

Konsequenz via **0-2(Eef)**: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in K\} \subseteq {}^E B$.

□

217.0(D,c).
$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Ersterstellung: 20/08/12 **Letzte Änderung: 26/08/12**

217-1. Hier wird, wie sich bald herausstellt, die Funktion $\mathtt{217.0}(D,c)$, die jedem $p \in D$ die auf $\{p\}$ konstante Funktion mit Wert$=c$ zuordnet, per definitionem in die Essays eingebracht:

217-1(Definition)

a) $\mathtt{217.0}(D,c) = \{(\lambda, c^{\mathbf{on}}\{\lambda\}) : \lambda \in D\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

b) $\mathtt{217.1}(D,c) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\}.$$

217-2. Nun wird die Zugehörigkeit zu $\mathsf{217.0}(D,c)$ und zu $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ debattiert:

<u>**217-2(Satz)**</u>

a) *Aus* “$q \in \mathsf{217.0}(D,c)$” *folgt* “$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (q = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))$”.

b) *Aus* “$p \in D$” *folgt* “$(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) \in \mathsf{217.0}(D,c)$”.

c) *Aus* “$(p,r) \in \mathsf{217.0}(D,c)$” *folgt* “$p \in D$” *und* “$r = c^{\mathbf{on}}\{p\}$”.

d) *Aus* “$q \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$” *folgt* “$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (q = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$”.

e) *Aus* “$p \in D$” *folgt* “$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$”.

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

<u>Beweis **217-2**</u> a) VS gleich $q \in \mathsf{217.0}(D,c)$.

1: Aus VS gleich “$q \in \mathsf{217.0}(D,c)$” und
aus “$\mathsf{217.0}(D,c) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$”
folgt: $q \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

2: Aus 1“$q \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (q = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 2“$\ldots \Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

4: Aus 2“$\ldots q = (\Omega, \Psi)$” und
aus 3“$(\Omega, \Psi) = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$”
folgt: $q = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

5: Aus 2“$\exists \Omega \ldots$”,
aus 2“$\ldots \Omega \in D \ldots$” und
aus 4“$q = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (q = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))$.

<u>Beweis **217-2**</u> `b) VS` gleich $p \in D$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$p \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = c^{\mathbf{on}}\{p\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, c^{\mathbf{on}}\{p\})$.

`2.2:` Aus `1.4`"$\{p\}$ Menge"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = c^{\mathbf{on}}\{p\}$" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$.

`2.4:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$p \in D$"
folgt: $\Omega \in D$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) = (\Omega, \Psi)$.

`3.2:` Aus `1.3`"p Menge" und
aus `2.2`"$c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, c^{\mathbf{on}}\{p\})$ Menge.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.4`"$\Omega \in D$",
aus `2.3`"$\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$" und
aus `3.1`"$(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge ((p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) = (\Omega, \Psi))$.

...

Beweis **217-2** `b)` `VS` gleich $p \in D$.

...

`5:` Aus `3.2`“$(p, c^{\mathbf{on}}\{p\})$ Menge” und
aus `4`“$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge ((p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) = (\Omega, \Psi))$”
folgt:
$$(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

`6:` Aus `4`“$(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\} = \mathsf{217.0}(D, c)$”
folgt: $(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) \in \mathsf{217.0}(D, c)$.

`c)` `VS` gleich $(p, r) \in \mathsf{217.0}(D, c)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p, r) \in \mathsf{217.0}(D, c)$”
folgt via **ElementAxiom**: (p, r) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p, r) \in \mathsf{217.0}(D, c)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge ((p, r) = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})).$$

`2:` Aus `1.1`“(p, r) Menge” und
aus `1.2`“$\ldots (p, r) = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$”
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (r = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

`3.1:` Aus `2`“$p = \Omega \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt: $\boxed{p \in D}$

`3.2:` Aus `2`“$p = \Omega \ldots$” und
aus `2`“$\ldots r = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$”
folgt: $\boxed{r = c^{\mathbf{on}}\{p\}}$

<u>Beweis</u> **217-2** `d)` `VS` gleich $q \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\}$"
folgt: $q \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\}$.

`2:` Aus `1`"$q \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\}$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (q = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

`e)` `VS` gleich $p \in D$.

`1.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$p \in D$"
folgt: $\Omega \in D$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} = c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\{p\}$ Menge"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in D$" und
aus `3`"$c^{\mathbf{on}}\{p\} = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (c^{\mathbf{on}}\{p\} = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

`5:` Aus `2.3`"$c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge" und
aus `4`"$\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (c^{\mathbf{on}}\{p\} = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\}$.

...

<u>Beweis</u> **217-2** `e)` `VS` gleich $p \in D$.

...

`6:` Aus `5` "$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\omega = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}))\} = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

$\square$

217-3. Hier werden Definitions- und Bild-Bereich von $\mathsf{217.0}(D,c)$ diskutiert:

217-3(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D,c)\,) = D$.

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D,c)\,) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

c) *“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D,c)\,) = 0$” genau dann, wenn “$D = 0$”.*

d) *“$0 \neq \mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D,c)\,)$” genau dann, wenn “$0 \neq D$”.*

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

<u>Beweis **217-3**</u> a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,).$

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha,\Omega) \in 217.0(D,c)\,.$

3: Aus 2 "$\ldots(\alpha,\Omega) \in 217.0(D,c)$"
folgt via **217-2**: $\alpha \in D.$

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,)) \Rightarrow (\alpha \in D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,) \subseteq D$"

`Thema1.2` $\alpha \in D.$

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in D$"
folgt via **217-2**: $(\alpha, c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}) \in 217.0(D,c)\,.$

3: Aus 2 "$(\alpha, c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}) \in 217.0(D,c)$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,).$

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$D \subseteq \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,)$"

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,) \subseteq D$" und
aus A2 gleich "$D \subseteq \mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)\,) = D.$

<u>Beweis **217-3** `b)`</u>

`Thema1.1`	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,)$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,)$" folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in 217.0(D,c)\,$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in 217.0(D,c)$ " folgt via **217-2**:	$(\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.
`4:` Aus `3` "$\Omega \in D \ldots$" folgt via **217-2**:	$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.
`5:` Aus `3` "$\ldots \alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$" und aus `4` "$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" folgt:	$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,)) \Rightarrow (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,) \subseteq \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"

...

<u>Beweis</u> **217-3** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"
folgt via **217-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

3.1: Aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **217-2**: $(\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \in \mathsf{217.0}(D, c)$.

3.2: Aus 2 "$\ldots \alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

4: Aus 3.2 "$(\Omega, \alpha) = (\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$" und
aus 3.1 "$(\Omega, c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \in \mathsf{217.0}(D, c)$"
folgt: $(\Omega, \alpha) \in \mathsf{217.0}(D, c)$.

5: Aus 4 "$(\Omega, \alpha) \in \mathsf{217.0}(D, c)$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c))$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) \text{”}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) \subseteq \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus A2 gleich "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c))$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Beweis **217-3** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,) = 0.$

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

2: Aus 1 “ $\mathsf{ran}\,(217.0(D,c) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ ” und
aus VS gleich “ $\mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,) = 0$ ”
folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0.$

3: Es gilt: $(D = 0) \vee (0 \neq D).$

wfFallunterscheidung

3.1.Fall $0 \neq D.$

4: Aus 3.1.Fall “ $0 \neq D$ ”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D.$

5: Aus 4 “ $\ldots \Omega \in D$ ”
folgt via **217-2**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

6: Aus 5 “ $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ ”
folgt via **0-20**: $0 \neq \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

7: Aus 6 “ $0 \neq \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ ” und
aus 1 “ $\mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ ”
folgt: $0 \neq \mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,).$

8: Es gilt 7 “ $0 \neq \mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,)$ ” .
Es gilt VS gleich “ $\mathsf{ran}\,(217.0(D,c)\,) = 0$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $D = 0.$

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $D = 0.$

Beweis **217-3** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $D = 0.$

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,).$

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

`3:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,)$” und
aus 2“$\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$”
folgt: $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

`4:` Aus 3“$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$”
folgt via **217-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}).$

`5:` Aus 4“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt via **0-20**: $0 \neq D.$

`6:` Es gilt 5“$0 \neq D$”.
Es gilt `VS` gleich “$D = 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,)).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,) = 0.$

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,) = 0) \Leftrightarrow (D = 0).$

`2:` Aus 1
folgt: $(\neg(\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,) = 0)) \Leftrightarrow (\neg(D = 0)).$

`3:` Aus 2
folgt: $(0 \neq \mathsf{ran}\,(217.0(D, c)\,)) \Leftrightarrow (0 \neq D).$

$\square$

217-4. Nun werden "Funktions-Eigenschaften" von $\mathsf{217.0}(D, c)$ diskutiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - e) - f) - c)`:

217-4(Satz)

a) $\mathsf{217.0}(D, c)$ *Funktion.*

b) *Aus "c Menge" folgt "$\mathsf{217.0}(D, c)$ injektiv".*

c) *Aus "c Unmenge" folgt "$\mathsf{217.0}(D, c) = \mathsf{zo}_D$".*

d) $\mathsf{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

e) *Aus "c Menge" folgt "$\mathsf{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv".*

f) "$\mathsf{217.0}(D, c)\,(p) = c^{\mathbf{on}}\{p\}$" *genau dann, wenn* "$p \in D$".

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

<u>Beweis</u> **217-4** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in 217.0(D, c)\,.$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in 217.0(D, c)$" und
aus "$217.0(D, c) = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 217.0(D, c)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}217.0(D, c) \text{ Relation”}}$

...

Beweis **217-4** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{217.0}(D, c)$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{217.0}(D, c)$"
folgt via **217-2**: $\beta = c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{217.0}(D, c)$"
folgt via **217-2**: $\gamma = c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\, \text{"}\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{217.0}(D, c)) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{217.0}(D, c)$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{217.0}(D, c)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{217.0}(D, c)$ Funktion.

<u>Beweis</u> **217-4** `b)` `VS` gleich c Menge.

`Thema1` $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathtt{217.0}(D, c)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“ $(\alpha, \beta) \ldots \in \mathtt{217.0}(D, c)$ ”
folgt via **217-2**: $\beta = c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“ $\ldots (\gamma, \beta) \in \mathtt{217.0}(D, c)$ ”
folgt via **217-2**: $\beta = c^{\mathbf{on}}\{\gamma\}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\} = c^{\mathbf{on}}\{\gamma\}$.

`4:` Aus `Thema1`“ $(\alpha, \beta) \ldots \in \mathtt{217.0}(D, c)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (α, β) Menge.

`5:` Aus `4`“ (α, β) Menge ”
folgt via **PaarAxiom I**: α Menge.

`6:` Aus `5`“ α Menge ”
folgt via **1-3**: $\alpha \in \{\alpha\}$.

`7:` Aus `6`“ $\alpha \in \{\alpha\}$ ” und
aus `VS` gleich “ c Menge ”
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}(\alpha) = c$.

`8:` Aus `7`“ $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}(\alpha) = c$ ” und
aus `3`“ $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\} = c^{\mathbf{on}}\{\gamma\}$ ”
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{\gamma\}(\alpha) = c$.

`9:` Aus `8`“ $c^{\mathbf{on}}\{\gamma\}(\alpha) = c$ ”
folgt via **214-4**: $((\alpha \in \{\gamma\}) \wedge (c \text{ Menge})) \vee (c = \mathcal{U})$.

`10:` Aus `VS` gleich “ c Menge ”
folgt via **0-17**: $c \neq \mathcal{U}$.

...

...

Beweis **217-4** `b) VS` gleich c Menge.

...

`Thema1` $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathsf{217.0}(D, c)$.

...

`11:` Aus `9`"$((\alpha \in \{\gamma\}) \wedge (c \text{ Menge})) \vee (c = \mathcal{U})$" und
aus `10`"$c \neq \mathcal{U}$"
folgt: $(\alpha \in \{\gamma\}) \wedge (c \text{ Menge})$.

`12:` Aus `11`"$\alpha \in \{\gamma\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathsf{217.0}(D, c)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\mathsf{217.0}(D, c)$ injektiv.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{217.0}(D, c)$ Funktion.

`1.2:` Via **217-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) = D$.

`1.3:` Via **217-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{217.0}(D, c)$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) = D$" und
aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D, c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"
folgt via **21-2**: $\mathsf{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Beweis **217-4** `e)` `VS` gleich c Menge.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{217.0}(D,c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`1.2:` Via **217-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D,c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "c Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{217.0}(D,c)$ injektiv.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{217.0}(D,c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$",
aus `1.2`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{217.0}(D,c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus `1.3`"$\mathsf{217.0}(D,c)$ injektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $\mathsf{217.0}(D,c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv.

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{217.0}(D,c)\,(p) = c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

`1:` Es gilt: $(x \in D) \vee (x \notin D)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \notin D$.

`2:` Via **217-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D,c)) = D$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$p \notin D$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D,c)) = D$"
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D,c))$.

`4:` Aus `3`"$p \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{217.0}(D,c))$"
folgt via **17-4**: $\mathsf{217.0}(D,c)\,(p) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{217.0}(D,c)\,(p) = c^{\mathbf{on}}\{p\}$" und
aus `4`"$\mathsf{217.0}(D,c)\,(p) = \mathcal{U}$"
folgt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} = \mathcal{U}$.

`6:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \neq \mathcal{U}$.

`7:` Es gilt `6`"$c^{\mathbf{on}}\{p\} \neq \mathcal{U}$".
Es gilt `5`"$c^{\mathbf{on}}\{p\} = \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \in D$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \in D$.

Beweis **217-4** `f)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $p \in D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in D$"
folgt via **217-2**: $(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) \in \mathtt{217.0}(D, c)$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{217.0}(D, c)$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\mathtt{217.0}(D, c)$ Funktion" und
aus `1`"$(p, c^{\mathbf{on}}\{p\}) \in \mathtt{217.0}(D, c)$"
folgt via **18-20**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} = \mathtt{217.0}(D, c)(p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathtt{217.0}(D, c)(p) = c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

<u>Beweis</u> **217-4** `c)` `VS` gleich c Unmenge.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{217.0}(D,c)\,:D\to\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\}:\lambda\in D\}.$

`1.2:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{zo}_D:D\to\{0\}.$

> `Thema1.3` $\alpha\in D.$
>
> `2.1:` Aus `Thema1.3`“$\alpha\in D$”
> folgt via des bereits bewiesenen `f)`:
> $\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}.$
>
> `2.2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha\in D$”
> folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_D(\alpha)=0.$
>
> `3:` Aus `VS` gleich “c Unmenge”
> folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}=0.$
>
> `4:` Aus `2.1`“$\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}$” und
> aus `3`“$c^{\mathbf{on}}\{\alpha\}=0$”
> folgt: $\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=0.$
>
> `5:` Aus `4`“$\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=0$” und
> aus `2.2`“$\mathsf{zo}_D(\alpha)=0$”
> folgt: $\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=\mathsf{zo}_D(\alpha).$

Ergo `Thema1.3`: `A1` | “$\forall\alpha:(\alpha\in D)\Rightarrow(\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=\mathsf{zo}_D(\alpha))$”

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{217.0}(D,c)\,:D\to\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\}:\lambda\in D\}$”,
aus `1.2`“$\mathsf{zo}_D:D\to\{0\}$” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha:(\alpha\in D)\Rightarrow(\mathsf{217.0}(D,c)\,(\alpha)=\mathsf{zo}_D(\alpha))$”
folgt via **21-12**: $\mathsf{217.0}(D,c)\;=\mathsf{zo}_D.$

$\square$

217-5. Hier werden die " (Un)Mengen-Eigenschaften" von $\mathtt{217.0}(D,c)$ diskutiert:

217-5(Satz)

a) *"*$\mathtt{217.0}(D,c)$ *Menge" genau dann, wenn "D Menge".*

b) *"*$\mathtt{217.0}(D,c)$ *Unmenge" genau dann, wenn "D Unmenge".*

Beweis **217-5** a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $217.0(D,c)$ Menge.

1: Via **217-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)) = D$.

2: Aus VS gleich "$217.0(D,c)$ Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(217.0(D,c))$ Menge.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\,(217.0(D,c))$ Menge" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)) = D$"
folgt: D Menge.

a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich D Menge.

1.1: Via **217-4** gilt: $217.0(D,c)$ Funktion.

1.2: Via **217-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)) = D$.

2: Aus 1.2"$\mathsf{dom}\,(217.0(D,c)) = D$" und
aus VS gleich "D Menge"
folgt: $\mathsf{dom}\,(217.0(D,c))$ Menge.

3: Aus 1.1"$217.0(D,c)$ Funktion" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,(217.0(D,c))$ Menge"
folgt via **26-3**: $217.0(D,c)$ Menge.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(217.0(D,c)$ Menge$) \Leftrightarrow (D$ Menge$)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(217.0(D,c)$ Menge$)) \Leftrightarrow (\neg(D$ Menge$))$.

3: Aus 2
folgt: $(217.0(D,c)$ Unmenge$) \Leftrightarrow (D$ Unmenge$)$.

□

217-6. Falls c eine Menge ist, so ist $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ genau dann eine Menge, wenn D eine Menge ist:

217-6(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *c Menge.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ *Menge.*

`ii)` *D Menge.*

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Beweis **217-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Menge.

`1:` Aus $\rightarrow$)“c Menge”
folgt via **217-4**: $\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1`“$\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv” und
aus `VS` gleich “$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Menge”
folgt via **26-7**: D Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich D Menge.

`1:` Aus $\rightarrow$)“c Menge”
folgt via **217-4**: $\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1`“$\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv” und
aus `VS` gleich “D Menge”
folgt via **26-7**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Menge.

$\square$

217-7. Falls c eine Menge ist, so ist $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ genau dann eine Unmenge, wenn D eine Unmenge ist:

217-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ *c Menge.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ *Unmenge.*

`ii)` *D Unmenge.*

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Beweis **217-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "c Menge"
folgt via **217-4**: $\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` "$\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv" und
aus `VS` gleich "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge"
folgt via **26-8**: D Unmenge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich D Unmenge.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "c Menge"
folgt via **217-4**: $\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv.

`2:` Aus `1` "$\texttt{217.0}(D, c) : D \to \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ bijektiv" und
aus `VS` gleich "D Unmenge"
folgt via **26-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge.

$\square$

217-8. Hier wird die "Mengen-Eigenschaft" von $(\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ in größerer Detailiertheit als in **217-6,7** in den dort unberücksichtigten Fällen diskutiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - c)`:

217-8(Satz)

`a)` *Aus "c Unmenge"*
folgt "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$" und "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Menge".

`b)` *Aus "c Unmenge" und "$0 \neq D$" folgt "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{0\}$".*

`c)` *Aus "$D = 0$" folgt "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$".*

`d)` $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\} = 0.$

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$. $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}$.

Beweis **217-8** `a)` `VS` gleich c Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "c Unmenge"
folgt via **217-4**: $217.0(D, c) = \mathsf{zo}_D$.

`2.1:` Via **217-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`2.2:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_D) \subseteq \{0\}$.

`2.3:` Aus `1`"$217.0(D, c) = \mathsf{zo}_D$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)) = \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_D)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)) = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(217.0(D, c)) = \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_D)$"
folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_D)$.

`3.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

`4:` Aus `3.1`"$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_D)$" und
aus `2.2`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_D) \subseteq \{0\}$"
folgt: $\boxed{\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}}$

...

<u>Beweis **217-8**</u> `a)` `VS` gleich c Unmenge.

...

`5:` Aus `4` "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$" und aus `3.2` "$\{0\}$ Menge"

folgt via **TeilMengenAxiom**: $\boxed{\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \text{ Menge}}$

`b)` `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq D)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "c Unmenge..."
folgt via des bereits bewiesenen `a)` : $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D$.

`2:` Aus `1.2` "$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **217-2**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`3:` Aus `2` "$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`4:` Aus `3` "$0 \neq \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus `1.1` "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$"
folgt via **174-1**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{0\}$.

<u>Beweis **217-8** `d)`</u>

`Thema1` $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}.$

`2:` Aus `Thema1`“ $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}$ ”
folgt via **217-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}).$

`3:` Es gilt `2`“ $\ldots \Omega \in 0 \ldots$ ” .
Via **0-19** gilt “ $\Omega \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}).$

Konsequenz via **0-19**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\} = 0.$

`c)` `VS` gleich $D = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “ $D = 0$ ”
folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\} = 0.$

`3:` Aus `1`“ $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}$ ” und
aus `2`“ $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\} = 0$ ”
folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0.$

$\square$

217-9. Anders als im allgemeinen Fall mit D an Stelle von $\{p\}$ ist $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ stets eine Menge. Dies stellt sich als konsistent mit dem **SingeltonAxiom** heraus:

217-9(Satz)

a) $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ *Menge.*

b) $c^{\mathbf{on}}\{p\} = \{(p, c)\}$.

Beweis **217-9** a)

1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

2: Aus 1 "$\{p\}$ Menge"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge.

Beweis **217-9** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in c^{\mathbf{on}}\{p\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in c^{\mathbf{on}}\{p\}$”
folgt via **214-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge (\alpha = (\Omega, c))$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$”
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`4:` Aus `3`“$\Omega = p$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, c) = (p, c)$.

`5:` Aus `2.2`“$\ldots \alpha = (\Omega, c)$” und
aus `4`“$(\Omega, c) = (p, c)$”
folgt: $\alpha = (p, c)$.

`6:` Aus `5`“$\alpha = (p, c)$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{(p, c)\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in c^{\mathbf{on}}\{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(p, c)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} c^{\mathbf{on}}\{p\} \subseteq \{(p, c)\} \text{”}}$

...

Beweis **217-9** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(p,c)\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“ $\alpha \in \{(p,c)\}$ ”
folgt via **1-6**: $(\alpha = (p,c)) \wedge ((p,c) \text{ Menge})$.

`3:` Aus `2`“ $\ldots (p,c)$ Menge ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p \text{ Menge}) \wedge (c \text{ Menge})$.

`4:` Aus `3`“ p Menge... ”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`5:` Aus `4`“ $p \in \{p\}$ ” und
aus `3`“ $\ldots c$ Menge ”
folgt via **214-2**: $(p,c) \in c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

`6:` Aus `2`“ $\alpha = (p,c) \ldots$ ” und
aus `5`“ $(p,c) \in c^{\mathbf{on}}\{p\}$ ”
folgt: $\alpha \in c^{\mathbf{on}}\{p\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(p,c)\}) \Rightarrow (\alpha \in c^{\mathbf{on}}\{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “ $\{(p,c)\} \subseteq c^{\mathbf{on}}\{p\}$ ”

`1.3:` Aus `A1` gleich “ $c^{\mathbf{on}}\{p\} \subseteq \{(p,c)\}$ ” und
aus `A2` gleich “ $\{(p,c)\} \subseteq c^{\mathbf{on}}\{p\}$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} = \{(p,c)\}$.

□

Element-Eigenschaft von $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ in func, ${}^{\boldsymbol{?}}B$, ${}^{E}\supseteq{}^{\boldsymbol{?}}B$, ${}^{E}B$.
TeilKlassen-Eigenschaft von $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in E\}$ in func, ${}^{\boldsymbol{?}}B$, ${}^{E}\supseteq{}^{\boldsymbol{?}}B$, ${}^{E}B$.

Ersterstellung: 23/08/12 **Letzte Änderung: 26/08/12**

218-1. Hier wird die Element-Eigenschaft von $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ in func, $^{\mathbf{?}}B$, $^{E\supseteq\mathbf{?}}B$, ^{E}B diskutiert:

218-1(Satz)

a) $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in \mathsf{func}$.

b) "$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{\mathbf{?}}B$" *genau dann, wenn* "$c$ *Unmenge*" *oder* "p *Unmenge*" *oder* "$(c \in B) \wedge (p$ *Menge*$)$".

c) "$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E\supseteq\mathbf{?}}B$" *genau dann, wenn* "$c$ *Unmenge*" *oder* "p *Unmenge*" *oder* "$(c \in B) \wedge (p \in E)$".

E) "$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}B$" *genau dann, wenn* "$(c$ *Unmenge*$) \wedge (E = 0)$" *oder* "$(p$ *Unmenge*$) \wedge (E = 0)$" *oder* "$(c \in B) \wedge (p$ *Menge*$) \wedge (E = \{p\})$".

Beweis **218-1** a)

1.1: Via **217-9** gilt: $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge.

1.2: Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Funktion.

2: Aus 1.1"$c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Menge" und aus 1.2"$c^{\mathbf{on}}\{p\}$ Funktion" folgt via **212-2**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in \mathsf{func}$.

Beweis **218-1** b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in^{\mathbf{?}} B.$

1: Aus VS gleich “$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in^{\mathbf{?}} B$”
folgt via **216-1**:
$$(p \text{ Unmenge}) \vee (\{p\} = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq \{p\} \text{ Menge})).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ c Unmenge.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\{p\} = 0.$

Aus 1.2.Fall“$\{p\} = 0$”
folgt via **1-4**: p Unmenge.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(c \in B) \wedge (0 \neq \{p\} \text{ Menge}).$

2: Aus 1.3.Fall“$\ldots 0 \neq \{p\}$”
folgt via **1-3**: p Menge.

3: Aus 1.3.Fall“$c \in B \ldots$” und
aus 2“p Menge”
folgt: $(c \in B) \wedge (p \text{ Menge}).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:
$$(c \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (p \text{ Menge})).$$

<u>Beweis</u> **218-1** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (p \text{ Menge}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (p \text{ Menge}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

Aus `1.1.Fall`“c Unmenge”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{\mathbf{?}}B$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`“p Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` Aus 2“$\{p\} = 0$”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{\mathbf{?}}B$.

`1.3.Fall` $(c \in B) \wedge (p \text{ Menge})$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots p$ Menge”
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`2.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \neq \{p\}$ Menge.

`4:` Aus `1.3.Fall`“$c \in B \ldots$” und
aus 3“$0 \neq \{p\}$ Menge”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{\mathbf{?}}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{\mathbf{?}}B$.

Beweis **218-1** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`1:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt via **216-1**:
$$(c \text{ Unmenge}) \vee (\{p\} = 0) \vee ((c \in B) \wedge (\{p\} \text{ Menge}) \wedge (0 \neq \{p\} \subseteq E)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

`1.2.Fall` $\{p\} = 0$.

Aus `1.2.Fall` "$\{p\} = 0$"
folgt via **1-4**: p Unmenge.

`1.3.Fall` $(c \in B) \wedge (\{p\} \text{ Menge}) \wedge (0 \neq \{p\} \subseteq E)$.

`2:` Aus `1.3.Fall` "$\ldots 0 \neq \{p\} \subseteq E$"
folgt via **174-1**: $p \in E$.

`3:` Aus `1.3.Fall` "$c \in B \ldots$" und
aus 2 "$p \in E$"
folgt: $(c \in B) \wedge (p \in E)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$(c \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (p \in E)).$$

Beweis **218-1** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (p \in E))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (p \in E))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

Aus `1.1.Fall`“c Unmenge”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`“p Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` Aus 2“$\{p\} = 0$”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`1.3.Fall` $(c \in B) \wedge (p \in E)$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots p \in E$”
folgt via **174-1**: $0 \neq \{p\} \subseteq E$.

`2.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`3:` Aus `1.3.Fall`“$c \in B$”,
aus `2.2`“$\{p\}$ Menge” und
aus `2.1`“$0 \neq \{p\} \subseteq E$”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

Beweis **218-1** `E)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^E B$.

`1:` Aus `VS` gleich "$c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^E B$"
folgt via **216-1**: $(\{p\} = E = 0) \vee ((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0))$
$\vee((c \in B) \wedge (\{p\} \text{ Menge}) \wedge (0 \neq \{p\} = E))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{p\} = E = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\{p\} = \ldots = 0$"
folgt via **1-4**: p Unmenge.

`3:` Aus `2` "p Unmenge" und
aus `1.1.Fall` "$\ldots E = 0$"
folgt: $(p \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)$.

`1.2.Fall` $(c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)$.

`1.3.Fall` $(c \in B) \wedge (\{p\} \text{ Menge}) \wedge (0 \neq \{p\} = E)$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall` "$\ldots \{p\} = E$"
folgt: $E = \{p\}$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$\ldots 0 \neq \{p\} \ldots$"
folgt via **1-3**: p Menge.

`3:` Aus `1.3.Fall` "$\ldots c \in B$",
aus `2.2` "p Menge" und
aus `2.1` "$E = \{p\}$"
folgt: $(c \in B) \wedge (E = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0))$
$\vee((p \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0))$
$\vee((c \in B) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (E = \{p\}))$.

Beweis **218-1** `E)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich

$$((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)) \vee ((p \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)) \vee ((c \in B) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (E = \{p\})).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)) \vee ((p \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)) \vee ((c \in B) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (E = \{p\})).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)$.

Aus `1.1.Fall`"$(c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)$"
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}B$.

`1.2.Fall` $(p \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"p Unmenge..."
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` Aus `2`"$\{p\} = 0$" und
aus `1.2.Fall`"$\dots E = 0$"
folgt: $\{p\} = E = 0$.

`4:` Aus `3`"$\{p\} = E = 0$"
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}B$.

`1.3.Fall` $(c \in B) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (E = \{p\})$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`"$\dots E = \{p\}$"
folgt: $\{p\} = E$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$\dots p$ Menge..."
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`2.3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`3:` Aus `2.2`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `2.1`"$\{p\} = E$"
folgt: $0 \neq \{p\} = E$.

`4:` Aus `1.3.Fall`"$c \in B \dots$",
aus `3`"$0 \neq \{p\} = E$" und
aus `2.3`"$\{p\}$ Menge"
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $c^{\mathbf{on}}\{p\} \in {}^{E}B$.

□

218-2. Nun wird untersucht, unter welchen Bedingungen $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ eine TeilKlasse von func, ${}^{?}B$, ${}^{E\supseteq?}B$ ist. Die etwas aufwändiger zu bearbeitende Frage, unter welchen Bedingungen $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ eine TeilKlasse von ${}^{E}B$ ist, wird in **218-3** behandelt:

218-2(Satz)

a) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \mathsf{func}$.

b) *"$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{?}B$" genau dann, wenn "$c$ Unmenge" oder "$D = 0$" oder "$(c \in B) \wedge (0 \neq D)$".*

c) *"$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E\supseteq?}B$" genau dann, wenn "$c$ Unmenge" oder "$D = 0$" oder "$(c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$".*

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

Beweis **218-2** a)

`Thema1` $\qquad \alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

2: Aus `Thema1`"$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"
folgt via **217-2**: $\qquad \exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

3: Via **218-1** gilt: $\qquad c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \mathsf{func}$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$" und
aus 3"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \mathsf{func}$"
folgt: $\qquad \alpha \in \mathsf{func}$.

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall\alpha : (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{func})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \mathsf{func}$.

Beweis **218-2** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$.

1: Es gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall c Unmenge.

1.2.Fall $D = 0$.

1.3.Fall $(c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)$.

2: Aus 1.2.Fall"$\ldots 0 \neq D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **217-2**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

4: Aus 3"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus VS gleich "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$"
folgt via **0-4**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{\mathbf{?}}B$.

5: Aus 4"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{\mathbf{?}}B$"
folgt via **218-1**:
$(c \text{ Unmenge}) \vee (\Omega \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \text{ Menge}))$.

6: Aus 5"$(c \text{ Unmenge}) \vee (\Omega \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \text{ Menge}))$" und
aus 1.3.Fall"c Menge$\ldots$"
folgt: $(\Omega \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \text{ Menge}))$.

7: Aus 2"$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

8: Aus 6"$(\Omega \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \text{ Menge}))$" und
aus 7"Ω Menge"
folgt: $(c \in B) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

9: Aus 8"$c \in B \ldots$" und
aus 1.3.Fall"$\ldots 0 \neq D$"
folgt: $(c \in B) \wedge (0 \neq D)$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt:

$$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D)).$$

Beweis **218-2** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall` “c Unmenge”
folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$.

`3:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^{?}B$.

`4:` Aus `3` “$0 \in {}^{?}B$”
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq {}^{?}B$.

`5:` Aus `2` “$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$” und
aus `4` “$\{0\} \subseteq {}^{?}B$”
folgt via **0-6**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{?}B$.

`1.2.Fall` $D = 0$.

`2:` Aus `1.2.Fall` “$D = 0$”
folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$.

`3:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq {}^{?}B$.

`4:` Aus `2` “$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$” und
aus `3` “$0 \subseteq {}^{?}B$”
folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{?}B$.

...

Beweis **218-2** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(c \in B) \wedge (0 \neq D)$.

`Thema2` $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`3:` Aus `Thema2`“$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$”
folgt via **217-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

`5:` Aus `4.1`“Ω Menge”
folgt via **1-3**: $0 \neq \{\Omega\}$.

`6:` Aus `1.3.Fall`“$c \in B \ldots$”,
aus `4.2`“$\{\Omega\}$ Menge” und
aus `5`“$0 \neq \{\Omega\}$”
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{\mathbf{?}}B$.

`7:` Aus `3`“$\ldots \alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$” und
aus `6`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{\mathbf{?}}B$”
folgt: $\alpha \in {}^{\mathbf{?}}B$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}) \Rightarrow (\alpha \in {}^{\mathbf{?}}B)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{\mathbf{?}}B$.

Beweis **218-2** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E} \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`1`: Es gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

`1.2.Fall` $D = 0$.

`1.3.Fall` $(c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)$.

`Thema2.1` $\alpha \in D$.

`3`: Aus `Thema2.1`“$\alpha \in D$”
folgt via **217-2**: $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`4`: Aus `3`“$c^{\mathbf{on}}\{\alpha\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$” und
aus `VS` gleich “$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E} \supseteq^{\mathbf{?}} B$”
folgt via **0-4**: $c^{\mathbf{on}}\{\alpha\} \in {}^{E} \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`5`: Aus `4`“$c^{\mathbf{on}}\{\alpha\} \in {}^{B} \supseteq^{\mathbf{?}}$”
folgt via **218-1**:
$(c \text{ Unmenge}) \vee (\alpha \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\alpha \in E))$.

`6`: Aus `Thema2.1`“$\alpha \in D$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`7`: Aus `6`“α Menge” und
aus `5`“$(c \text{ Unmenge}) \vee (\alpha \text{ Unmenge})$
$\vee((c \in B) \wedge (\alpha \in E))$”
folgt: $(c \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\alpha \in E))$.

`8`: Aus `1.3.Fall`“c Menge...” und
aus `7`“$(c \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\alpha \in E))$”
folgt: $(c \in B) \wedge (\alpha \in E)$.

`9`: Aus `8`
folgt: $\alpha \in E$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$D \subseteq E$”

...

...

<u>Beweis **218-2**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E} \supseteq^{\mathbf{?}} B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(c \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D).$

...

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$\ldots 0 \neq D$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D.$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in D$”
folgt via **217-2**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

`4:` Aus `3`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$” und
aus `VS` gleich “$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E} \supseteq^{\mathbf{?}} B$”
folgt via **0-4**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{E} \supseteq^{\mathbf{?}} B.$

`5:` Aus `4`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{B} \supseteq^{\mathbf{?}}$”
folgt via **218-1**:
$(c \text{ Unmenge}) \vee (\Omega \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \in E)).$

`6:` Aus `Thema2.1`“$\Omega \in D$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`7:` Aus `6`“Ω Menge” und
aus `5`“$(c \text{ Unmenge}) \vee (\Omega \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \in E))$”
folgt: $(c \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \in E)).$

`8:` Aus `1.3.Fall`“c Menge...” und
aus `7`“$(c \text{ Unmenge}) \vee ((c \in B) \wedge (\Omega \in E))$”
folgt: $(c \in B) \wedge (\Omega \in E).$

`9:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots 0 \neq D$” und
aus `A1` gleich “$D \subseteq E$”
folgt: $0 \neq D \subseteq E.$

`10:` Aus `8`“$c \in B \ldots$” und
aus `9`“$0 \neq D \subseteq E$”
folgt: $(c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E)).$$

Beweis **218-2** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` c Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "c Unmenge" folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$.

`3:` Via **212-7** gilt: $0 \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`4:` Aus `3` "$0 \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$" folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`5:` Aus `2` "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$" und aus `4` "$\{0\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$" folgt via **0-6**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`1.2.Fall` $D = 0$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$D = 0$" folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$.

`3:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`4:` Aus `2` "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$" und aus `3` "$0 \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$" folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

...

Beweis **218-2** c) $\boxed{\Leftarrow}$

VS gleich $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E))$.

...

Fallunterscheidung

...

1.3.Fall $(c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E)$.

Thema2 $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

3: Aus Thema2"$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$"
folgt via **217-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

4.1: Aus 3"$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus 1.3.Fall"$\ldots D \subseteq E$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in E$.

4.2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

5: Aus 4.1"$\Omega \in E$"
folgt via **174-1**: $0 \neq \{\Omega\} \subseteq E$.

6: Aus 5"$0 \neq \{\Omega\} \subseteq E$",
aus 4.2"$\{\Omega\}$ Menge" und
aus 1.3.Fall"$c \in B \ldots$"
folgt via **216-1**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

7: Aus 3"$\ldots \alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$" und
aus 6"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$"
folgt: $\alpha \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

Ergo Thema2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}) \Rightarrow (\alpha \in {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

$\square$

218-3. Hier wird Notwendiges und Hinreichendes für $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$ präsentiert:

<u>**218-3(Satz)**</u>

a) *Aus* "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$" *folgt*
"$(c$ *Unmenge*$) \wedge (E = 0)$" *oder* "$D = 0$"
oder "$(c \in B) \wedge (\exists \Omega : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (D = E = \{\Omega\}))$".

b) *Aus* "c *Unmenge*" *und* "$E = 0$" *folgt* "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$".

c) *Aus* "c *Unmenge*" *folgt* "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^0 B$".

D) *Aus* "$D = 0$" *folgt* "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$".

e) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\} \subseteq {}^E B$.

f) *Aus* "$c \in B$" *und* "$D = E = \{p\}$" *folgt* "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$".

g) *Aus* "$c \in B$" *folgt* "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \{p\}\} \subseteq {}^{\{p\}} B$".

217-1(Def) $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$. $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\}$. $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \{p\}\}$.

<u>Beweis **218-3**</u> `a)` `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}B.$

`1:` Via **212-6** gilt: ${}^{E}B \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B.$

`2:` aus `VS` gleich "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}B$" und
aus `1` "${}^{E}B \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$"
folgt via **0-6**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B.$

`3:` Aus `2` "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}\supseteq^{\mathbf{?}}B$"
folgt via **218-2**: $(c \text{ Unmenge}) \vee (D = 0) \vee ((c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E)).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` c Unmenge.

`4:` Es gilt: $(D = 0) \vee (0 \neq D).$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $D = 0.$

`4.2.Fall` $0 \neq D.$

`5:` Aus `3.1.Fall` "c Unmenge" und
aus `4.2.Fall` "$0 \neq D$"
folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{0\}.$

`6:` Aus `5` "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = \{0\}$" und
aus `VS` gleich "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}B$"
folgt: $\{0\} \subseteq {}^{E}B.$

`7:` Aus **1-5** "$0 \in \{0\}$" und
aus `6` "$\{0\} \subseteq {}^{E}B$"
folgt via **0-4**: $0 \in {}^{E}B.$

`8:` Aus `7` "$0 \in {}^{E}B$"
folgt via **212-7**: $E = 0.$

`9:` Aus `3.1.Fall` "c Unmenge" und
aus `8` "$E = 0$"
folgt: $(c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiDen Fällen gilt:

$((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)) \vee (D = 0).$

...

Beweis **218-3** `a)` `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $D = 0.$

`3.3.Fall` $(c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E).$

`4:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq D \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D.$

`5.1:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`5.2:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \subseteq D.$

`5.3:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **217-2**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}.$

`6:` Aus `5.3`"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$" und
aus `VS` gleich "$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$"
folgt via **0-4**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^E B.$

`7:` Aus `6`"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^E B$"
folgt via **212-5**: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} : E \to B.$

`8:` Aus `7`"$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} : E \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) = E.$

`9:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \subseteq \{\Omega\}.$

`10:` Aus `8`"$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) = E$" und
aus `9`"$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \subseteq \{\Omega\}$"
folgt: $E \subseteq \{\Omega\}.$

`11:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots D \subseteq E$" und
aus `10`"$E \subseteq \{\Omega\}$"
folgt via **0-6**: $D \subseteq \{\Omega\}.$

`12:` Aus `11`"$D \subseteq \{\Omega\}$" und
aus `5.2`"$\{\Omega\} \subseteq D$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $D = \{\Omega\}.$

...

...

Beweis **218-3** `a)` `VS` gleich $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}B.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $(c \in B) \wedge (0 \neq D \subseteq E).$

...

`13:` Aus `12`"$D = \{\Omega\}$" und
aus `3.3.Fall`"$\ldots D \subseteq E$"
folgt: $\{\Omega\} \subseteq E.$

`14:` Aus `10`"$E \subseteq \{\Omega\}$" und
aus `13`"$\{\Omega\} \subseteq E$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E = \{\Omega\}.$

`15:` Aus `12`"$D = \{\Omega\}$" und
aus `14`"$E = \{\Omega\}$"
folgt: $D = E = \{\Omega\}.$

`16:` Aus `4`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `5.1`"Ω Menge" und
aus `15`"$D = E = \{\Omega\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (D = E = \{\Omega\}).$

`17:` Aus `3.3.Fall`"$c \in B \ldots$" und
aus `16`"$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (D = E = \{\Omega\})$"
folgt: $(c \in B) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (D = E = \{\Omega\})).$

`Ende Fallunterscheidung`

In allen Fällen gilt: $((c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)) \vee (D = 0)$
$\vee((c \in B) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (D = E = \{\Omega\})).$

<u>Beweis</u> **218-3** `b)` `VS` gleich $(c \text{ Unmenge}) \wedge (E = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "c Unmenge…"
folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$E = 0$"
folgt via **212-7**: $0 \in {}^E B$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \in {}^E B$"
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq {}^E B$.

`3:` Aus `1.1`"$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq \{0\}$" und
aus `2`"$\{0\} \subseteq {}^E B$"
folgt via **0-6**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$.

`c)` `VS` gleich c Unmenge.

Aus `VS` gleich "c Unmenge" und
aus "$0 = 0$"
folgt via Des bereits bewiesenen `b)`: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^0 B$.

`D)` `VS` gleich $D = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$D = 0$"
folgt via **217-8**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$.

`2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq {}^E B$.

`3:` Aus `1`"$\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} = 0$" und
aus `2`"$0 \subseteq {}^E B$"
folgt: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^E B$.

`e)`

Aus "$0 = 0$"
folgt via Des bereits bewiesenen `D)`: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in 0\} \subseteq {}^E B$.

Beweis **218-3** `f)` `VS` gleich $(c \in B) \wedge (D = E = \{p\})$.

`Thema1` $\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$”
folgt via **217-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$c \in B \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: c Menge.

`3.2:` Aus `VS` gleich “$c \in B \ldots$”
folgt via **1-8**: $\{c\} \subseteq B$.

`3.3:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$ Funktion.

`3.4:` Via **214-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \subseteq \{c\}$.

`3.5:` Via **217-9** gilt: $c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$ Menge.

`3.6:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in D \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots D = \ldots = \{p\}$”
folgt: $\Omega \in \{p\}$.

`4.1:` Aus `3.1`“c Menge”
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) = \{\Omega\}$.

`4.2:` Aus `3.4`“$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \subseteq \{c\}$” und
aus `3.2`“$\{c\} \subseteq B$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \subseteq B$.

`4.3:` Aus `3.6`“$\Omega \in \{p\}$”
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`5:` Aus `4.1`“$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) = \{\Omega\}$” und
aus `4.3`“$\Omega = p$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) = \{p\}$.

...

...

<u>Beweis **218-3**</u> `f)` `VS` gleich $(c \in B) \wedge (D = E = \{p\})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$.
...	
`6:` Aus `3.3`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$ Funktion”, aus `5`“$\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) = \{p\}$” und aus `4.2`“$\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}) \subseteq B$” folgt via **21-1(Def)**:	$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} : \{p\} \to B$.
`7:` Aus `3.5`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$ Menge” und aus `5`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} : \{p\} \to B$” folgt via **212-5**:	$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{\{p\}}B$.
`8:` Aus `2`“$\ldots \alpha = c^{\mathbf{on}}\{\Omega\}$” und aus `7`“$c^{\mathbf{on}}\{\Omega\} \in {}^{\{p\}}B$” folgt:	$\alpha \in {}^{\{p\}}B$.
`9:` Aus `8`“$\alpha \in {}^{\{p\}}B$” und aus `VS` gleich “$\ldots E = \{p\}$” folgt:	$\alpha \in {}^{E}B$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}) \Rightarrow (\alpha \in {}^{E}B)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{E}B$.

`g)` `VS` gleich $c \in B$.

Aus `VS` gleich “$c \in B$” und
aus “$\{p\} = \{p\} = \{p\}$”
folgt via Des bereits bewiesenen `f)`: $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \{p\}\} \subseteq {}^{\{p\}}B$.

$\square$

(Un)Mengen-Eigenschaft von $\mathsf{func}, {}^{\boldsymbol{?}}B, {}^{D\supseteq\boldsymbol{?}}B, {}^{D}B$.

Ersterstellung: 20/08/12 **Letzte Änderung: 15/06/13**

219-1. Hier werden die (Un)Mengen Eigenschaften von func, ${}^{?}B$, ${}^{D\supseteq?}B$, ${}^{D}B$ diskutiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `f) - g) - d) - e) - b) - c) - a)`:

219-1(Satz)

a) func *Unmenge.*

b) *"${}^{?}B$ Menge" genau dann, wenn "$B=0$".*

c) *"${}^{?}B$ Unmenge" genau dann, wenn "$0\neq B$".*

d) *"${}^{D\supseteq?}B$ Menge" genau dann, wenn "$D=0$" oder "(D Unmenge) $\wedge$ ($B=0$)" oder "($0\neq D$ Menge) $\wedge$ (B Menge)".*

e) *"${}^{D\supseteq?}B$ Unmenge" genau dann, wenn "(D Unmenge) $\wedge$ ($0\neq B$)" oder "($0\neq D$) $\wedge$ (B Unmenge)".*

f) *"${}^{D}B$ Menge" genau dann, wenn "$D=0$" oder "D Unmenge" oder "($0\neq D$ Menge) $\wedge$ (B Menge)".*

g) *"${}^{D}B$ Unmenge" genau dann, wenn "$0\neq D$ Menge" und "B Unmenge".*

Beweis **219-1**

215-1(Def) $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in B\}$.
217-1(Def) $\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$. $\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`f)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich ^{D}B Menge.

`1:` Es gilt: $(D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $D = 0$.

`1.2.Fall` D Unmenge.

`1.3.Fall` $0 \neq D$ Menge.

`2:` Es gilt: $(B \text{ Menge}) \vee (B \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` B Menge.

Aus `1.3.Fall` “$0 \neq D$ Menge” und
aus `2.1.Fall` “B Menge”
folgt: $(0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})$.

...

...

<u>Beweis **219-1**</u> `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\quad {}^D B$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\quad 0 \neq D$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $\quad B$ Unmenge.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"B Unmenge"
folgt via **0-17**: $\quad 0 \neq B$.

`3.2:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq D$ Menge" und
aus `2.2.Fall`"B Unmenge"
folgt via **215-8**: $\quad \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\}$ Unmenge.

`4.1:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq D \ldots$" und
aus "$D = D$"
folgt: $\quad 0 \neq D = D$.

`4.2:` Aus `3.1`"$0 \neq B$"
folgt via **0-20**: $\quad 0 \neq B \subseteq B$.

`5:` Aus `4.1`"$0 \neq D = D$",
aus `1.3.Fall`"$\ldots D$ Menge" und
aus `4.2`"$0 \neq B \subseteq B$"
folgt via **216-2**: $\quad \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\} \subseteq {}^D B$.

`6:` Aus `3.2`"$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\}$ Unmenge" und
aus `5`"$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\} \subseteq {}^D B$"
folgt via **0-7**: $\quad {}^D B$ Unmenge.

`7:` Es gilt `6`"${}^D B$ Unmenge".
Es gilt `VS` gleich "${}^D B$ Menge".
Ex falso quodlibet folgt: $\quad B$ Menge.

`8:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq D$ Menge" und
aus `7`"B Menge"
folgt: $\quad (0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})$.

...

...

Beweis **219-1** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad {}^{D}B$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\qquad 0 \neq D$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\qquad (D = 0) \vee (D \text{ Unmenge})$
$\vee((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}))$.

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\qquad (D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $\qquad (D = 0) \vee (D \text{ Unmenge})$
$\vee((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad D = 0$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "$D = 0$"
folgt: $\qquad {}^{D}B = {}^{0}B$.

`2.2:` Via **212-8** gilt: $\qquad {}^{0}B = \{0\}$.

`3.1:` Aus `2.1` "${}^{D}B = {}^{0}B$" und
aus `2.2` "${}^{0}B = \{0\}$"
folgt: $\qquad {}^{D}B = \{0\}$.

`3.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\qquad \{0\}$ Menge.

`4:` Aus `3.1` "${}^{D}B = \{0\}$" und
aus `3.2` "$\{0\}$ Menge"
folgt: $\qquad {}^{D}B$ Menge.

...

Beweis **219-1** `f)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $(D=0)\vee(D\text{ Unmenge})\vee((0\neq D\text{ Menge})\wedge(B\text{ Menge}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` D Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`“D Unmenge”
folgt via **212-5**: ${}^DB=0$.

`3:` Aus `2`“${}^DB=0$” und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt: ${}^DB$ Menge.

`1.3.Fall` $(0\neq D\text{ Menge})\wedge(B\text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.3.Fall`“...D Menge...” und
aus `1.3.Fall`“...B Menge”
folgt via **Binär-Cartesisches Axiom**: $D\times B$ Menge.

`3:` Aus `2`“$D\times B$ Menge”
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(D\times B)$ Menge.

`4:` Via **212-10** gilt: ${}^DB\subseteq\mathcal{P}(D\times B)$.

`5:` Aus `4`“${}^DB\subseteq\mathcal{P}(D\times B)$” und
aus `3`“$\mathcal{P}(D\times B)$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: ${}^DB$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: ${}^DB$ Menge.

<u>Beweis **219-1**</u> `g)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $({}^D B \text{ Menge})$
$\Leftrightarrow ((D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg({}^D B \text{ Menge}))$
$\Leftrightarrow (\neg((D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $({}^D B \text{ Unmenge})$
$\Leftrightarrow ((\neg(D = 0)) \wedge (\neg(D \text{ Unmenge})) \wedge (\neg((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}))))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $({}^D B \text{ Unmenge})$
$\Leftrightarrow ((0 \neq D) \wedge (D \text{ Menge}) \wedge ((\neg(0 \neq D \text{ Menge})) \vee (\neg(B \text{ Menge}))))$.

`5:` Aus `4`
folgt: $({}^D B \text{ Unmenge})$
$\Leftrightarrow ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge ((\neg(0 \neq D \text{ Menge})) \vee (\neg(B \text{ Menge}))))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $({}^D B \text{ Unmenge})$
$\Leftrightarrow ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (\neg(B \text{ Menge})))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $({}^D B \text{ Unmenge})$
$\Leftrightarrow ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Unmenge}))$.

<u>Beweis **219-1**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\quad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

`1:` Es gilt: $\quad (D = 0) \vee (D \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq D \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\quad D = 0$.

`1.2.Fall` $\quad D$ Unmenge.

`2.1:` Es gilt: $\quad (0 \neq B) \vee (B = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $\quad 0 \neq B$.

`3.1:` Aus `1.2.Fall`“D Unmenge”
folgt via **0-17**: $\quad 0 \neq D$.

`3.2:` Aus `2.1.1.Fall`“$0 \neq B$”
folgt via **0-20**: $\quad \exists \Omega : \Omega \in B$.

`4.1:` Aus `3.1`“$0 \neq D$”
folgt via **0-20**: $\quad 0 \neq D \subseteq D$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\ldots \Omega \in B$”
folgt via **ElementAxiom**: $\quad \Omega$ Menge.

`5:` Aus `3.2`“$\ldots \Omega \in B$” und
aus `4.1`“$0 \neq D \subseteq D$”
folgt via **218-2**: $\quad \{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{D}\supseteq^{?} B$.

`6:` Aus `4.2`“Ω Menge” und
aus `1.2.Fall`“D Unmenge”
folgt via **217-7**: $\quad \{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge.

`7:` Aus `6`“$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge” und
aus `5`“$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{D}\supseteq^{?} B$”
folgt via **0-7**: $\quad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge.

`8:` Es gilt `7`“${}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge”.
Es gilt `VS` gleich “${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\quad B = 0$.

...

...

Beweis **219-1** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\qquad D$ Unmenge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.2.Fall` $\qquad B = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad$ `A1` | "$B = 0$"

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "D Unmenge" und
aus `A1` gleich "$B = 0$"
folgt: $\qquad (D \text{ Unmenge}) \wedge (B = 0)$.

`1.3.Fall` $\qquad 0 \neq D$ Menge.

`2.1:` Es gilt: $\qquad (B \text{ Menge}) \vee (B \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $\qquad B$ Menge.

...

...

Beweis **219-1** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\qquad 0 \neq D$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.2.Fall` $\qquad B$ Unmenge.

`3.1:` Aus `1.3.Fall`“$0 \neq D \ldots$”
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq D \subseteq D$.

`3.2:` Aus `2.1.2.Fall`“B Unmenge”
folgt via **0-17**: $\qquad 0 \neq B$.

`4:` Aus `3.2`“$0 \neq B$”
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq B \subseteq B$.

`5:` Aus `3.1`“$0 \neq D \subseteq D$”,
aus `1.3.Fall`“$\ldots D$ Menge und
aus `4`“$0 \neq B \subseteq B$”
folgt via **216-2**: $\qquad \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\} \subseteq {}^{D}\supseteq^{?} B$.

`6:` Aus `1.3.Fall`“$0 \neq D$ Menge” und
aus `2.1.2.Fall`“B Unmenge”
folgt via **215-8**: $\qquad \{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\}$ Unmenge.

`7:` Aus `6`“$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\}$ Unmenge” und
aus `5`“$\{\lambda^{\mathbf{on}} D : \lambda \in B\} \subseteq {}^{D}\supseteq^{?} B$”
folgt via **0-7**: $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge.

`8:` Es gilt `7`“${}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge”.
Es gilt `VS` gleich “${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad B$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “B Menge”

...

...

Beweis **219-1** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\qquad 0 \neq D$ Menge.

...

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$0 \neq D$ Menge" und
aus `A1` gleich "B Menge"
folgt: $\qquad (0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(D = 0) \vee ((D \text{ Unmenge}) \wedge (B = 0)) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})).$$

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich

$$(D = 0) \vee ((D \text{ Unmenge}) \wedge (B = 0)) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})).$$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(D = 0) \vee ((D \text{ Unmenge}) \wedge (B = 0)) \vee ((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad D = 0.$

`2:` Aus `1.1.Fall` "$D = 0$"
folgt: $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B = {}^{0}\supseteq^{?} B.$

`3:` Via **212-8** gilt: $\qquad {}^{0}\supseteq^{?} B = \{0\}.$

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\qquad \{0\}$ Menge.

`5:` Aus `2` "${}^{D}\supseteq^{?} B = {}^{0}\supseteq^{?} B$" und
aus `3` "${}^{0}\supseteq^{?} B = \{0\}$"
folgt: $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B = \{0\}.$

`6:` Aus `5` "${}^{D}\supseteq^{?} B = \{0\}$" und
aus `4` "$\{0\}$ Menge"
folgt: $\qquad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

...

Beweis **219-1** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(D=0) \vee ((D \text{ Unmenge}) \wedge (B=0))$
$\vee((0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(D \text{ Unmenge}) \wedge (B=0)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots B=0$" folgt: ${}^{D}\supseteq^{?}B = {}^{D}\supseteq^{?}0$.

`3:` Via **212-8** gilt: ${}^{D}\supseteq^{?}0 = \{0\}$.

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

`5:` Aus `2`"${}^{D}\supseteq^{?}B = {}^{D}\supseteq^{?}0$" und aus `3`"${}^{D}\supseteq^{?}0 = \{0\}$" folgt: ${}^{D}\supseteq^{?}B = \{0\}$.

`6:` Aus `5`"${}^{D}\supseteq^{?}B = \{0\}$" und aus `4`"$\{0\}$ Menge" folgt: ${}^{D}\supseteq^{?}B$ Menge.

`1.3.Fall` $(0 \neq D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots D$ Menge$\ldots$" und aus `1.3.Fall`"$\ldots B$ Menge" folgt via **Binär-Cartesisches Axiom**: $D \times B$ Menge.

`3:` Aus `2`"$D \times B$ Menge" folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(D \times B)$ Menge.

`4:` Via **212-10** gilt: ${}^{D}\supseteq^{?}B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$.

`5:` Aus `4`"${}^{D}\supseteq^{?}B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$" und aus `3`"$\mathcal{P}(D \times B)$ Menge" folgt via **TeilMengenAxiom**: ${}^{D}\supseteq^{?}B$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: ${}^{D}\supseteq^{?}B$ Menge.

Beweis **219-1** e) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich ${}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge.

1: Es gilt: $(D, B \text{ Menge}) \vee ((D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Unmenge})) \vee ((D \text{ Unmenge}) \wedge (B \text{ Menge})) \vee (D, B \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall D, B Menge.

2.1: Es gilt: $(D = 0) \vee (0 \neq D)$.

Fallunterscheidung

2.1.1.Fall $D = 0$.

Aus 2.1.1.Fall "$D = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen d): ${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

2.1.2.Fall $0 \neq D$.

Aus 2.1.2.Fall "$0 \neq D$",
aus 1.1.Fall "$D \ldots$ Menge" und
aus 1.1.Fall "$\ldots B$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen d): ${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

A1 | "${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge"

2.2: Es gilt A1 gleich "${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge".
Es gilt VS gleich "${}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $(D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B)$.

...

Beweis **219-1** `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\quad {}_D\supseteq^{?} B$ Unmenge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\quad (D \text{ Menge}) \wedge (B \text{ Unmenge}).$

`2.1:` Es gilt: $\quad (D = 0) \vee (0 \neq D).$

`wfFallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $\quad D = 0.$

`3:` Aus `2.1.1.Fall`"$D = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\quad {}_D\supseteq^{?} B$ Menge.

`4:` Es gilt `3`"${}_D\supseteq^{?} B$ Menge" .
Es gilt `VS` gleich "${}_D\supseteq^{?} B$ Unmenge" .
Ex falso quodlibet folgt: $\quad 0 \neq D.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$0 \neq D$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq D$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots B$ Unmenge"
folgt: $\quad (0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge}).$

...

<u>Beweis **219-1**</u> `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\quad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\quad (D \text{ Unmenge}) \wedge (B \text{ Menge})$.

`2.1:` Es gilt: $\quad (B = 0) \vee (0 \neq B)$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $\quad B = 0$.

`3:` Aus `1.3.Fall`"D Unmenge..." und
aus `2.1.1.Fall`"$B = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\quad {}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge.

`4:` Es gilt `3`"${}^{D}\supseteq^{?} B$ Menge".
Es gilt `VS` gleich "${}^{D}\supseteq^{?} B$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\quad 0 \neq B$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$0 \neq B$"

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"D Unmenge..." und
aus `A1` gleich "$0 \neq B$"
folgt: $\quad (D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B)$.

`1.4.Fall` $\quad D, B$ Unmenge.

`2:` Aus `1.4.Fall`"...B Unmenge"
folgt via **0-17**: $\quad 0 \neq B$.

`3:` Aus `1.4.Fall`"D... Unmenge" und
aus `2`"$0 \neq B$"
folgt: $\quad (D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$((D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B)) \vee ((0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge})).$$

Beweis **219-1** `e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $((D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B))$
$\vee((0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B)) \vee ((0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B)$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“D Unmenge…”
folgt via **0-17**: $0 \neq D$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots 0 \neq B$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in B$.

`3.1:` Aus `2.1`“$0 \neq D$”
folgt via **0-20**: $0 \neq D \subseteq D$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in B$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4.1:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in B$” und
aus `3.1`“$0 \neq D \subseteq D$”
folgt via **218-2**: $\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{D} \supseteq^{\mathbf{?}} B$.

`4.2:` Aus `3.2`“Ω Menge” und
aus `1.1.Fall`“D Unmenge…”
folgt via **217-7**: $\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge.

`5:` Aus `4.1`“$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{D} \supseteq^{\mathbf{?}} B$” und
aus `4.2`“$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge”
folgt via **0-7**: ${}^{D} \supseteq^{\mathbf{?}} B$ Unmenge.

…

Beweis **219-1** `e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $((D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B))$
$\vee((0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge})$.

`2.1:` Es gilt: $(D \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` D Menge.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq D \ldots$",
aus `2.1.1.Fall`"D Menge" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots B$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: ${}^D B$ Unmenge.

`4:` Via **212-6** gilt: ${}^D B \subseteq {}^D \supseteq^{?} B$.

`5:` Aus `4`"${}^D B \subseteq {}^D \supseteq^{?} B$" und
aus `3`"${}^D B$ Unmenge"
folgt via **0-7**: ${}^D \supseteq^{?} B$ Unmenge.

...

...

Beweis **219-1** `e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $((D \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq B))$
$\vee((0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(0 \neq D) \wedge (B \text{ Unmenge})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.2.Fall` D Unmenge.

`3.1:` Aus `2.1.2.Fall` "D Unmenge"
folgt via **0-17**: $0 \neq D$.

`3.2:` Aus `1.2.Fall` "... B Unmenge"
folgt via **0-17**: $\exists \Omega : \Omega \in B$.

`4.1:` Aus `3.1` "$0 \neq D$"
folgt via **0-20**: $0 \neq D \subseteq D$.

`4.2:` Aus `3.2` "... $\Omega \in B$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`5.1:` Aus `3.2` "... $\Omega \in B$" und
aus `4.1` "$0 \neq D \subseteq D$"
folgt via **218-2**: $\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{D} \supseteq^{?} B$.

`5.2:` Aus `4.2` "Ω Menge" und
aus `2.1.2.Fall` "D Unmenge"
folgt via **217-7**: $\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge.

`6:` Aus `5.1` "$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\} \subseteq {}^{D} \supseteq^{?} B$" und
aus `5.2` "$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ Unmenge"
folgt via **0-7**: ${}^{D} \supseteq^{?} B$ Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: ${}^{D} \supseteq^{?} B$ Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: ${}^{D} \supseteq^{?} B$ Unmenge.

Beweis **219-1** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\quad {}^{?}B$ Menge.

`1:` Es gilt: $\quad (B = 0) \vee (0 \neq B)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\quad B = 0$.

`1.2.Fall` $\quad 0 \neq B$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq B$”
folgt via **0-20**: $\quad \exists \Omega : \Omega \in B$.

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in B$”
folgt via **ElementAxiom**: $\quad \Omega$ Menge.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in B$” und
aus **0-18**“$0 \neq \mathcal{U}$”
folgt via **218-2**: $\quad \{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \mathcal{U}\} \subseteq {}^{?}B$.

`4:` Aus `3.1`“Ω Menge” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via **217-7**: $\quad \{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \mathcal{U}\}$ Unmenge.

`5:` Aus `4`“$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \mathcal{U}\}$ Unmenge” und
aus `3.2`“$\{\Omega^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in \mathcal{U}\} \subseteq {}^{?}B$”
folgt via **0-7**: $\quad {}^{?}B$ Unmenge.

`6:` Es gilt `5`“${}^{?}B$ Unmenge”.
Es gilt `VS` gleich “${}^{?}B$ Menge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\quad B = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\quad B = 0$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\quad B = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich “$B = 0$”
folgt: $\quad {}^{?}B = {}^{?}0$.

`2:` Aus `1`“${}^{?}B = {}^{?}0$” und
aus **212-8**“${}^{?}0 = \{0\}$”
folgt: $\quad {}^{?}B = \{0\}$.

`3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\quad \{0\}$ Menge.

`4:` Aus `2`“${}^{?}B = \{0\}$” und
aus `3`“$\{0\}$ Menge”
folgt: $\quad {}^{?}B$ Menge.

<u>Beweis **219-1**</u> `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\overset{?}{\cdot}B \text{ Menge}) \Leftrightarrow (B = 0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(\overset{?}{\cdot}B \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(B = 0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\overset{?}{\cdot}B \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (0 \neq B)$.

`a)`

`1:` Via **212-6** gilt: $\overset{?}{\cdot}1 \subseteq \mathsf{func}$.

`2:` Aus $\neq$**schola**"$0 \neq 1$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\overset{?}{\cdot}1$ Unmenge.

`3:` Aus `2`"$\overset{?}{\cdot}1$ Unmenge" und
aus `1`"$\overset{?}{\cdot}1 \subseteq \mathsf{func}$"
folgt via **0-7**: func Unmenge.

$\square$

219-2. Die nunmehrigen Implikationen sind in **219-1** enthalten, gehen dort aber ein wenig unter:

219-2(Satz)

a) *Aus* “$B = 0$” *folgt* “${}^{D}\supseteq^{?} B$ *Menge*”.

b) ${}^{D}\supseteq^{?} 0$ *Menge.*

c) *Aus* “B *Menge*” *folgt* “${}^{D}B$ *Menge*”.

<u>Beweis **219-2**</u> `a)` `VS` gleich $B = 0.$

`1:` Via **212-6** gilt: $^{D}\supseteq^{?}B \subseteq {}^{?}B.$

`2:` Aus `VS` gleich "$B = 0$"
folgt via **219-1**: $^{?}B$ Menge.

`3:` Aus `2`"$^{?}B$ Menge" und
aus `1`"$^{D}\supseteq^{?}B \subseteq {}^{?}B$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $^{D}\supseteq^{?}B$ Menge.

`b)`

Aus "$0 = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $^{D}\supseteq^{?}0$ Menge.

`c)` `VS` gleich B Menge.

`1:` Es gilt: $(D = 0) \vee (D$ Unmenge$) \vee (0 \neq D$ Menge$).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $D = 0.$

Aus `1.1.Fall`"$D = 0$"
folgt via **219-1**: ^{D}B Menge.

`1.2.Fall` D Unmenge.

Aus `1.2.Fall`"D Unmenge"
folgt via **219-1**: ^{D}B Menge.

`1.3.Fall` $0 \neq D$ Menge.

Aus `1.3.Fall`"$0 \neq D$ Menge" und
aus `VS` gleich "B Menge"
folgt via **219-1**: ^{D}B Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: ^{D}B Menge.

□

- **F. Erwe**, *Differential- und Integralrechnung. Band 1*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1962.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- `matlab Version 7.2.0.294 (R2006a) 27.01.2006`, *Dokumentation.*
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).