Suite IV - Die Zerrissene

Teil 3: Essays 277 - 290

Meinem Vater

KLT: Standard L mit $M_{..}(t), \ldots$.

KLT: Standard L mit $M_{..}(x), \ldots$.

KLT: Standard L mit $M_{..}(), \ldots$.

ODE: Grundlagen.

MSC2010: 70A05, 34A99, 53A99.

Andreas Unterreiter

19. Juni 2015

KLT: Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 25/02/15**

Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.
3. $(V \downharpoonleft C) \in \mathsf{C}^1(C : \mathbb{R})$.
4. Für $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$,
   wobei $I = \{t : (\exists x : (t,x) \in C)\}$.
5. Für $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) = (M_{ji} \downharpoonleft I)$,
   wobei $I = \{t : (\exists x : (t,x) \in C)\}$.
6. $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,
$$L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j\right) - V(t,x).$$

M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $I_{\mathtt{inv}} \subseteq I$.
2. Für $t \in I_{\mathtt{inv}}$ und $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gibt es $M^{ij}(t)$,
   so dass für alle $k,l \in \{1,\ldots,m\}$
$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t) \cdot M^{il}(t) = \delta_k{}^l,$$
   gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $I_{\mathtt{inv}}$ ...
$$(M^\bullet)^i_j = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (M^\bullet)_{\alpha j},$$
und auf $C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : t \in I_{\mathtt{inv}}\}$,
$$V^i_, = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = \mathsf{zo}_I$, wobei $I = \{t : (\exists x : (t,x) \in C)\}$.

e) Ist M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar und ist $0 \neq C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : t \in I_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$, so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{\,i} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(I_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (M^{\bullet})^i_{\,j} \in \mathsf{C}(I_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = \mathsf{zo}_{I_{\mathtt{inv}}}.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$
$$(\partial_{\mathtt{t}} L)(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^{\bullet})_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V)(t,x).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$**.** Für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t,x,v) = -(V_{,\,\alpha})(t,x).$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t,x,v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t,x,v) = -(\nabla_{\mathtt{x}} V)(t,x).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$**.** Für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$**.**

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$
$$\begin{aligned} \mathtt{E}(t,x,v) &= \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t,x). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$**.**

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$
$$\begin{aligned} \mathtt{T}(t,x,v) &= (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &= (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$**.**

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(t,x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j .\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t,x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t,x) \mid u \,\rangle ,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

$\rightarrow$) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

`b)` Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $E \subseteq I_{\mathtt{inv}} \cap \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + + \left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_{\ i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i\right) + (V_{,}^{\ \alpha}) \circ (\mathtt{t}, c),$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \right) - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle\,,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = -(V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\,\rangle = -\,\langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = -(\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^\bullet \quad = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^*c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$\begin{aligned} &\langle\, (\mathtt{P}^*c)^\bullet \mid \dot{c}\,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\ &\qquad \langle\, (\mathtt{P}^*c)^\bullet \mid \dot{c}\,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j\right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad\qquad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$+ (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$- \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u, w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u, w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u, w)^*c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u, w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u, w)^*c \\ &\quad= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\ &\quad\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &\quad= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\ &\quad - \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}\quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung …

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i = -\left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i\right) - V_{,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) $t \in I_{\mathtt{inv}}$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = -\left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha{}_i(t) \cdot \dot{q}_i(t)\right) - V_{,}^{\alpha}(t, q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = -\left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_{\ i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i\right) - V^{\alpha}_{,} \circ (\mathtt{t}, q),$$

Dann folgt “q löst `(ELG)`”.

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) - V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$
$$- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q}\,\rangle\,,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$
$$- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q}\,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -(V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = -\langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^* q = -(\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = -(\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ &= -\langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \dot q_i\cdot \dot q_j\right) + V\circ(\mathtt{t},q),$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \ddot q_i\cdot \dot q_j\right) + (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s}(M^\bullet)_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \dot q_i\cdot \dot q_j$$
$$+ (\partial_{\mathtt{t}} V)\circ(\mathtt{t},q) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V)\circ(\mathtt{t},q) \mid \dot q\,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s}(M^\bullet)_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \dot q_i\cdot \dot q_j\right) + (\partial_{\mathtt{t}} V)\circ(\mathtt{t},q).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \dot q_i\cdot \dot q_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \ddot q_i\cdot \dot q_j\right) + (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s}(M^\bullet)_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \dot q_i\cdot \dot q_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s}(M^\bullet)_{ij}\circ \mathtt{t}\cdot \dot q_i\cdot \dot q_j\right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V)\circ(\mathtt{t},q) \mid \dot q\,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V\circ(\mathtt{t},q),$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} V)\circ(\mathtt{t},q) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V)\circ(\mathtt{t},q) \mid \dot q\,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u,w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u,w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &\quad = \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\ &\quad - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.

`c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

→) $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

→) $P \subseteq E$.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$.

→) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

→) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- $\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.
- $\rightarrow$) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow$) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.
- $\rightarrow$) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, t, x) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}}$ gilt

$$V(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(t,x).$$

- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, t, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow$) q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.
- $\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot q_j - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq C$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t, x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $C_{\mathtt{inv}} = \{(t, x) \in C : t \in I_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t, x), \mathbb{R}^s) : (t, x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t, x, v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

`a)` D Funktion.

`b)` $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

`c)` $E_v = \{(t, x, v) : v \in D(t, x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

`d)` $E_p = \{(t, x, \mathtt{P}(t, x, v)) : v \in D(t, x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

`e)` $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

`f)` Für alle $(t, x, v) \in E_v$ gilt

$$G(t, x, \mathtt{P}(t, x, v)) = v.$$

`g)` Für alle $(t, x, p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t, x, G(t, x, p)) = p.$$

`h)` (D, G) ist $\mathtt{v}, \mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : t \in I_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t,x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\texttt{inv}} = \{(t,x) \in C : t \in I_{\texttt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\texttt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i\right).$$

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C_{\texttt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t) \cdot P_i(t) \\
\dot{P}_\alpha(t) &= -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\
&\qquad - V_{,\,\alpha}(t, Q(t))
\end{aligned}.$$

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(t,x)$.

$\rightarrow\!)$ M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow\!)$ $C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : t \in I_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow\!)$ $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow\!)$ $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

$\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!)$ Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 25/02/15**

Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq I$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
3. $(V \downharpoonleft I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$.
4. Für $i, j \in \{1, \dots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$.
5. Für $i, j \in \{1, \dots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) = (M_{ji} \downharpoonleft I)$.
6. $L : I \times \mathbb{R}^{2s} \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t),$$

M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $I_{\mathtt{inv}} \subseteq I$.
2. Für $t \in I_{\mathtt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \dots, s\}$ gibt es $M^{ij}(t)$,
   so dass für alle $k, l \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t) \cdot M^{il}(t) = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $I_{\mathtt{inv}}$ ...

$$(M^\bullet)^i_j = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (M^\bullet)_{\alpha j}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$.

b) $\mathsf{dom}\, L = I \times \mathbb{R}^{2s}$.

c) $L = (L \downharpoonright I \times \mathbb{R}^{2s})$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = \mathsf{zo}_I$.

e) Ist M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar und ist $0 \neq I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(I_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (M^\bullet)^i_j \in \mathsf{C}(I_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^k = \mathsf{zo}_{I_{\mathtt{inv}}}.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^{\bullet})_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (V^{\bullet})(t).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = 0.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = \vec{0}.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{E}(t, x, v) &= \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) \\ &= (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t).\end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{T}(t, x, v) &= (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 \\ &= (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) - L(t, x, v)) : 2 = V(t).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und $\mathsf{dom}\, c \subseteq I$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

$\rightarrow$) c ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i.$

`b)` Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $E \subseteq I_{\mathtt{inv}} \cap \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_{\ i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(t)$.

$\rightarrow$) c ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V^\bullet) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$
$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\, \rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c},$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^\bullet \quad = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha.$$

Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^*c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c),$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^*c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, (\mathtt{P}^*c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$= \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle\, .$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*c = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^\bullet = (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*c \\ &\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $\mathsf{dom}\, q \subseteq I$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i = -\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q löst `(ELG)`.

→) $t \in I_{\mathtt{inv}}$.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = -\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha{}_i(t) \cdot \dot{q}_i(t).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = -\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_i \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`" .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q},$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*q)^\bullet = \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),\\
&\qquad \langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j\\
&\qquad\qquad = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.
\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, I \times \mathbb{R}^{2s}, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \subseteq I$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $E_{\texttt{zeit}} \subseteq I$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, I \times \mathbb{R}^{2s}, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- $\longrightarrow\!\!)$ Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.
- $\longrightarrow\!\!)$ $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\longrightarrow\!\!)$ $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\longrightarrow\!\!)$ $E_{\texttt{zeit}} \subseteq I$.
- $\longrightarrow\!\!)$ $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\longrightarrow\!\!)$ Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.
- $\longrightarrow\!\!)$ Für alle $(\phi, t, v) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\longrightarrow\!\!)$ q löst `(ELG)`.
- $\longrightarrow\!\!)$ $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\texttt{zeit}}$.
- $\longrightarrow\!\!)$ Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot q_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned}\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) \\ - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\ = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) \\ - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, I \times \mathbb{R}^{2s}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\mathtt{zeit}} \subseteq I$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $I_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

$\rightarrow$) $G : (I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \subseteq I \times \mathbb{R}^{2s}$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(t)$.

→) M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) $I_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t, x), \mathbb{R}^s) : (t, x) \in I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t, x, v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : (I_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t, x, p) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t),$$

ist (D, G)-Hamilton-Funktion von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$.

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

$\rightarrow$) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
$\mathsf{dom}\, Q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V(t)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$.

Dann folgt “$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$” .

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 25/02/15**

Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq I$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
3) $0 \neq O$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.
4. $(V \downharpoonleft O) \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$.
6. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) = (M_{ji} \downharpoonleft I)$.
7. $L : (I \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(x).$$

M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $I_{\mathtt{inv}} \subseteq I$.
2. Für $t \in I_{\mathtt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es $M^{ij}(t)$,
   so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t) \cdot M^{il}(t) = \delta_k{}^l,$$

   gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $I_{\mathtt{inv}}$ ...

$$(M^\bullet)^i_j = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (M^\bullet)_{\alpha j},$$

und auf $I_{\mathtt{inv}} \times O$,

$$V^i_, = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (I \times O) \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = \mathsf{zo}_I$.

e) Ist M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$,
so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{\,i} \in \mathsf{C}(I_{\mathtt{inv}} \times O : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(I_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (M^{\bullet})^i_j \in \mathsf{C}(I_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^k = \mathsf{zo}_{I_{\mathtt{inv}}}.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t,x,v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{\bullet})_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t,x,v) = -(V_{,\,\alpha})(x).$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t,x,v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t,x,v) = -(\nabla V)(x).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{E}(t,x,v) = \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(x). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{T}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &\qquad = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(x).$$

(u, w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u, w) \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)(t, x, v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j . \end{aligned}$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u, w) \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u, w)(t, x, v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V(x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V(x) \mid u \,\rangle , \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)(t, x, v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : O)$
und $\mathsf{dom}\, c \subseteq I$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

$\rightarrow\!)$ c ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \right) + V_{,\,\alpha} \circ c.$$

`b)` Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $E \subseteq I_{\mathtt{inv}} \cap \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + + \left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_{\ i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \right) + (V_{,}^{\ \alpha}) \circ c,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

→) c ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \right) - V_{,\alpha} \circ c.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ c,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - 2 \cdot \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^* c = -(V_{,\,\alpha}) \circ c.$$

Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle = -\langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^* c = -(\nabla V) \circ c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet \quad = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - V_{,\,\alpha} \circ c.$$

Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) - (\nabla V) \circ c,$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\
&\qquad \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad\qquad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\,.
\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ c,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c}\, \rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c}\, \rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*c = V \circ c,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^\bullet = \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c}\, \rangle\,.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^* c$ **längs** c
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u, w)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)^* c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^* c)^\bullet = \mathtt{M}(u, w)^* c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u, w)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u, w)^* c \\ &\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle \\ &\quad\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\ &\quad = \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ c \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ c \mid u \,\rangle, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : O)$ und
$\mathsf{dom}\, q \subseteq I$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i = -\left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i\right) - V_{,\alpha} \circ q.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) $(t, q(t)) \in I_{\mathtt{inv}} \times O$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = -\left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^{\alpha}{}_{i}(t) \cdot \dot{q}_i(t)\right) - V_{,}{}^{\alpha}(q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = -\left(\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha{}_i \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i\right) - V_{,}^{\alpha} \circ q,$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) - V \circ q,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ - \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q}\,\rangle\,,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) - 2 \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q}\,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -(V_{,\alpha}) \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = -\langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^* q = -(\nabla V) \circ q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -V_{,\alpha} \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = -(\nabla V) \circ q,$$

und

$$\begin{aligned} &\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \\ &\qquad \langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad\qquad = -\langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ q,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j + \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid u \,\rangle,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq I \times O$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

→) $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

→) $P \subseteq E$.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq I \times O$.

→) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

→) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt
“A ist $L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie” .

Es gelte:

- $\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(t)$.
- $\rightarrow\!)$ $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow\!)$ $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq I \times O$.
- $\rightarrow\!)$ $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\mathtt{ort}}$ gilt

$$V((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(x).$$

- $\rightarrow\!)$ Für alle $(\phi, t, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot q_j - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid u \,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \le m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq I \times O$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times O\}$.

→) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (I_{\mathtt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s \subseteq (I \times O) \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (I_{\mathtt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s$
offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L,(I \times O) \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times O\}$.

→) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : (I_{\mathtt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t), V(x)$.

→) M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq I_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\texttt{inv}} \times O\}$.

→) $G : (I_{\texttt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in I_{\texttt{inv}} \times O$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ & & \qquad -V_{,\,\alpha}(Q(t)) \end{array}.$$

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V(x)$.

$\rightarrow\!)$ M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq I_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$\rightarrow\!)$ $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\texttt{inv}} \times O\}$.

$\rightarrow\!)$ $G : (I_{\texttt{inv}} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

$\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!)$ Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in I_{\texttt{inv}} \times O.$$

Dann folgt “ $q, \texttt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$” .

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq I$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
3. $V \in \mathbb{R}$..
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft I) = (M_{ji} \downharpoonleft I)$.
6. $L : I \times \mathbb{R}^{2s} \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V,$$

M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $I_{\mathtt{inv}} \subseteq I$.
2. Für $t \in I_{\mathtt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es $M^{ij}(t)$,
   so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t) \cdot M^{il}(t) = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $I_{\mathtt{inv}}$ ...

$$(M^\bullet)^i_j = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (M^\bullet)_{\alpha j}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$.

b) $\mathsf{dom}\, L = I \times \mathbb{R}^{2s}$.

c) $L = (L \downharpoonleft I \times \mathbb{R}^{2s})$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = \mathsf{zo}_I$.

e) Ist M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq I_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$,
so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(I_{\texttt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (M^{\bullet})^i_j \in \mathsf{C}(I_{\texttt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^k = \mathsf{zo}_{I_{\texttt{inv}}}.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t,x,v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{\bullet})_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t,x,v) = 0.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t,x,v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t,x,v) = \vec{0}.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{E}(t,x,v) = \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V. \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{T}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &\qquad = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V.$$

(u, w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u, w) \in \mathsf{C}^1(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)(t, x, v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u, w) \in \mathsf{C}(I \times \mathbb{R}^{2s} : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u, w)(t, x, v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)(t, x, v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V()$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und $\mathsf{dom}\, c \subseteq I$.

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V()$.

→) c ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i.$$

`b)` Falls M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $E \subseteq I_{\mathtt{inv}} \cap \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_i \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

$\rightarrow$) c ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c},$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet \quad = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha.$$

Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c),$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\
&\qquad \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad\qquad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.
\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c,$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u,w)^*c \\ &\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
$\mathsf{dom}\, q \subseteq I$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i = -\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i.$$

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

$\rightarrow\!)$ M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$.

$\rightarrow\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = -\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha{}_i(t) \cdot \dot{q}_i(t).$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) q ist $I \times \mathbb{R}^{2s}$-Kurve.

$\rightarrow$) $t \in I_{\texttt{inv}}$.

$\rightarrow$) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = -\sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)^\alpha_{\ i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\, \rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q},$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{s} (M^\bullet)_{\alpha i} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*q)^\bullet = \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q}\, \rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) + \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$
$$= \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^\bullet)_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** **(ELG).**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** **(ELG).**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned}\text{“ }\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, I \times \mathbb{R}^{2s}, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \subseteq I$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.

`c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

→) $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

→) $P \subseteq E$.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \subseteq I$.

→) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

→) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt " A ist $L, I \times \mathbb{R}^{2s}, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie" .

Es gelte:

- →) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.
- →) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- →) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- →) $E_{\texttt{zeit}} \subseteq I$.
- →) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.
- →) Für alle $(\phi, t, v) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- →) q löst `(ELG)`.
- →) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\texttt{zeit}}$.
- →) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ \mathtt{t} \cdot u_i \cdot \dot q_j$$
$$= \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned}
&\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) \\
&\qquad - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t) \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\
&\qquad = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) \\
&\qquad\qquad - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma) \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, I \times \mathbb{R}^{2s}, O_{\texttt{zeit}}, D_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\texttt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\texttt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\texttt{zeit}} \subseteq I$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{\cdot\cdot}(t), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

$\rightarrow$) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \subseteq I \times \mathbb{R}^{2s}$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \restriction E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V,$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$.

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

$\rightarrow$) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
$\mathsf{dom}\, Q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $I \times \mathbb{R}^{2s}$ mit $M_{..}(t), V()$.

→) M_{ij} auf $I_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $I_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t) \cdot v_i \right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq I_{\mathtt{inv}}$.

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, I \times \mathbb{R}^{2s})$" .

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.
3. $(V \downharpoonright C) \in \mathsf{C}^1(C : \mathbb{R})$.
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonright O) \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$,
   wobei $O = \{x : (\exists t : (t,x) \in C)\}$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonright O) = (M_{ji} \downharpoonright O)$,
   wobei $O = \{x : (\exists t : (t,x) \in C)\}$.
6. $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t,x).$$

M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $O_{\texttt{inv}} \subseteq O = \{x : (\exists t : (t,x) \in C)\}$.
2. Für $x \in O_{\texttt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es $M^{ij}(x)$,
   so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(x) \cdot M^{il}(x) = \delta_k{}^l,$$

   gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar, dann auf $O_{\texttt{inv}}$ …

$$\Gamma_{ij}{}^k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \cdot M^{\alpha k},$$

und auf $C_{\texttt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\texttt{inv}}\}$,

$$V_{,}^{i} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t,x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(C : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$ und
ist $C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$,
so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{i} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = -(\partial_{\mathtt{t}} V)(t, x).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned} &\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\qquad \mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{x_\alpha} L)(t, x, v) \\ &\qquad\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (V_{,\,\alpha})(t, x). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \\ &\qquad \mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) \\ &\qquad\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{ij})(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V)(t, x). \end{aligned}$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{E}(t,x,v) = \langle\ \mathtt{P}(t,x,v) \mid v\ \rangle - L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t,x).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{T}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(t,x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte $\mathtt{I}(u,w)$.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\ x \mid u\ \rangle \cdot \langle\ w \mid \mathtt{P}(t,x,v)\ \rangle - \langle\ x \mid w\ \rangle \cdot \langle\ u \mid \mathtt{P}(t,x,v)\ \rangle \\ &= \langle\ x \mid u\ \rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\ x \mid w\ \rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u, w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)(t, x, v) \\
&\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle \\
&\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\
&\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})(x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})(x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t, x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t, x) \mid u \,\rangle,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)(t, x, v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\
&= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + V_{,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

`b)` Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $(t, c(t)) \in C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\mathtt{inv}}\}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \left(\sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (V_{,}{}^{\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c),$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ c \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t,x)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \left(\sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$
$$- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = -(\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$
$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$
$$\mathtt{K}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c$$
$$= (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot c_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^* c)^\bullet &= (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c \\ &= (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{i,j}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\ &\quad \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\quad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle\,.\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^* c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) &+ \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &+ (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle\,,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle + (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\,\rangle.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\,\rangle.$$

(u,w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u,w)^*c$ längs c**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u\,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c\,\rangle - \langle\, c \mid w\,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c\,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*c \\
&\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ c \mid w \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ c \mid u \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&+ \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\
&- \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -V_{,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q löst `(ELG)`.

→) $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = -V_{,}{}^{\alpha}(t, q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -V_{,}{}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q),$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = -(\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^* q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$
$$\mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^* q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot q_j \right) - V_{,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{i,j}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \\
&\qquad \langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\
&\qquad\qquad = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.
\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ + (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^{\bullet} = (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^{\bullet} = -\,\langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^{\bullet} = (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\operatorname{dom} q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^{\bullet} = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*q \\
&\qquad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\
&\qquad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&\quad = (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ q \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&\quad - (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ q \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\
&- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad & \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.

`c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

→) $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

→) $P \subseteq E$.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$.

→) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

→) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- →) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.
- →) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- →) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- →) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.
- →) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- →) Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\mathtt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(x).$$

- →) Für alle $(\phi, t, x) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}}$ gilt

$$V(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(t,x).$$

- →) Für alle $(\phi, x, v) \in P \times E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- →) q löst `(ELG)`.
- →) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.
- →) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: …

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$
\begin{aligned}
&(1:2)\cdot\langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid w \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad - (1:2)\cdot\langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid u \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad + \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q \cdot w_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q \cdot u_i \cdot \dot q_j \\
&- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V)\circ(\mathtt{t},q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V)\circ(\mathtt{t},q) \mid u \,\rangle \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.
\end{aligned}
$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t,\sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$
\begin{aligned}
&\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t)) \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) \\
&\qquad - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t)) \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\
&\qquad = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma)) \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) \\
&\qquad\qquad - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma)) \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq C$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\mathtt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t,x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $C_{\texttt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\texttt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\texttt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C_{\texttt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ & & \hfill -V_{,\,\alpha}(t, Q(t)) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\texttt{inv}} = \{(t,x) \in C : x \in O_{\texttt{inv}}\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\texttt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i\right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C_{\texttt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq I$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
3. $0 \neq O$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.
4. $(V \downharpoonleft I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft O) \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$.
6. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft O) = (M_{ji} \downharpoonleft O)$.
7. $L : (I \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t).$$

M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $O_{\mathtt{inv}} \subseteq O$.
2. Für $x \in O_{\mathtt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es $M^{ij}(x)$, so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(x) \cdot M^{il}(x) = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $O_{\mathtt{inv}}$ ...

$$\Gamma_{ij}{}^k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \cdot M^{\alpha k},$$

und auf $I \times O_{\mathtt{inv}}$,

$$V_,^i = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (I \times O) \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonleft (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(O : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$,
so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V^i_{,} \in \mathsf{C}(I \times O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = -V^{\bullet}(t).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{x_\alpha} L)(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s),$$

$$\mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{ij})(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{E}(t, x, v) &= \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) \\ &= (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{T}(t, x, v) &= (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 \\ &= (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) - L(t, x, v)) : 2 = V(t).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}((I \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})(x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\ &\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})(x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : O)$
und $\mathsf{dom}\, q \subseteq I$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

$\rightarrow\!)$ c ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$

`b)` Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $c(t) \in O_{\mathtt{inv}}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ c \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t)$.

→) c ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - V^\bullet \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = -V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^s M_{\alpha i} \circ c \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^s M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^s M_{\alpha i,\, j} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^s M_{ij,\, \alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot c_j.$$

Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^s (\nabla M_{i,j}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$\begin{aligned} &\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\ &\quad \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^s M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^s \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\qquad\qquad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle + \sum_{i,j,k=1}^s \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^s M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^s M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^s \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) + V^\bullet \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle + V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*c = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^\bullet = V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u,w)^*c$ längs c**
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^* c \\
&\qquad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle \\
&\qquad + \langle\, \dot c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\
&\quad = (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ c \mid w \,\rangle \cdot \dot c_i \cdot \dot c_j \\
&\quad - (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ c \mid u \,\rangle \cdot \dot c_i \cdot \dot c_j \\
&\quad + \langle\, \dot c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot c_j - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot c_j,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\
&\qquad = \langle\, \dot c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot c_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot c_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : O)$ und
$\mathsf{dom}\, q \subseteq I$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q löst `(ELG)`.

→) $(t, q(t)) \in I \times O_{\mathtt{inv}}$.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha}(q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = 0.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in O_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = 0,$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - V^\bullet \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -V^\bullet \circ \mathtt{t}$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = -V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^* q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^* q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot q_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{i,j}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$\begin{aligned} &\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \\ &\quad \langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ &\qquad = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) + V^\bullet \circ \mathtt{t}$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}..$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

(u, w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u, w)^*q$, q löst (ELG).**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u, w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u, w)^*q.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^*q \\
&\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ q \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ q \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&+ \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u, w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“ } \quad & \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq I \times O$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.

`c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t)$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq I \times O$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt
“A ist $L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie” .

Es gelte:

- →) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.
- →) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- →) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- →) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq I \times O$.
- →) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- →) Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\mathtt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(x).$$

- →) Für alle $(\phi, x, v) \in P \times E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- →) q löst `(ELG)`.
- →) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.
- →) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$(1:2)\cdot\langle\, q \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid w \,\rangle\cdot\dot q_i\cdot\dot q_j$$
$$-\,(1:2)\cdot\langle\, q \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid u \,\rangle\cdot\dot q_i\cdot\dot q_j$$
$$+\,\langle\, \dot q \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q\cdot w_i\cdot\dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q\cdot u_i\cdot\dot q_j$$
$$= \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^{\bullet} = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t,\sigma\in\mathsf{dom}\, q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),$$

also

$$\langle\, q(t) \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t))\cdot w_i\cdot\dot q_j(t)$$
$$-\,\langle\, q(t) \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t))\cdot u_i\cdot\dot q_j(t)$$
$$=\langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma))\cdot w_i\cdot\dot q_j(\sigma)$$
$$-\,\langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma))\cdot u_i\cdot\dot q_j(\sigma),$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \upharpoonright D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq I \times O$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^s M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^s M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \subseteq (I \times O) \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonright E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$\mathcal{H} : (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(t)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in I \times O_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (I \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i\right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in I \times O_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (I \times O) \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1\le s\in\mathbb{N}$.
2. $0\neq O$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.
3. $(V\downharpoonright O)\in\mathsf{C}^1(O:\mathbb{R})$.
4. Für $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gilt $(M_{ij}\downharpoonright O)\in\mathsf{C}^1(O:\mathbb{R})$.
5. Für $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gilt $(M_{ij}\downharpoonright O)=(M_{ji}\downharpoonright O)$.
6. $L:(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$,

$$L(t,x,v)=(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot v_i\cdot v_j\right)-V(x).$$

M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $O_{\mathtt{inv}}\subseteq O$.
2. Für $x\in O_{\mathtt{inv}}$ und $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gibt es $M^{ij}(x)$,
   so dass für alle $k,l\in\{1,\dots,m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(x)\cdot M^{il}(x)=\delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $O_{\mathtt{inv}}$ ...

$$\Gamma_{ij}{}^k=\sum_{\alpha=1}^{s}\Gamma_{ij\alpha}\cdot M^{\alpha k},$$

$$V_{,}^{i}=\sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha}\cdot V_{,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(O : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$,
so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{\,i} \in \mathsf{C}(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = 0 \quad \text{auf} \quad (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned} &\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\qquad \mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{x_\alpha} L)(t, x, v) \\ &\qquad\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (V_{,\,\alpha})(x). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\mathtt{K} \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \\ &\qquad \mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) \\ &\qquad\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{ij})(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (\nabla V)(x). \end{aligned}$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{E}(t,x,v) &= \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(x). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{T}(t,x,v) &= (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &= (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\quad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\
&\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\
&\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\
&\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})(x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})(x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V)(x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V)(x) \mid u \,\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\
&= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\,c$ echtes reelles Intervall
und $c\in\mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\,c:O)$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

→) c ist $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}}c)_\alpha=\left(\sum_{i=1}^s M_{\alpha i}\circ c\cdot\ddot{c}_i\right)+\sum_{i,j=1}^s\Gamma_{ij\alpha}\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j+V_{,\alpha}\circ c.$$

`b)` Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $c(t)\in O_{\mathtt{inv}}$ für alle $t\in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}}c)^\alpha=\ddot{c}_\alpha+\left(\sum_{i,j=1}^s{\Gamma_{ij}}^\alpha\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right)+(V_,^{\ \alpha})\circ c,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}}c)^\alpha=\sum_{i=1}^s M^{\alpha i}\circ c\cdot(\Delta_{\mathtt{elg}}c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

→) c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \left(\sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ c.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k - \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c} \,\rangle.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ c,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c}\,\rangle\,,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - -2 \cdot \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c}\,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathsf{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathsf{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathsf{t}} L)^*c = \mathsf{zo}_{\operatorname{\mathsf{dom}} c}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}),$$
$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V_{,\,\alpha}) \circ c.$$

Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\,\rangle \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c}\,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \nabla V \circ c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*c\in\mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),\quad (\mathtt{P}_\alpha)^*c=\sum_{i=1}^s M_{\alpha i}\circ c\cdot\dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^\bullet=\left(\sum_{i=1}^s M_{\alpha i}\circ c\cdot\ddot{c}_i\right)+\sum_{i,j=1}^s M_{\alpha i,\,j}\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j,$$

und

$$\begin{aligned}((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^\bullet&=(\Delta_{\mathtt{elg}}c)_\alpha+(\mathtt{K}_\alpha)^*c\\&=(\Delta_{\mathtt{elg}}c)_\alpha+(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^s M_{ij,\,\alpha}\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot c_j\right)-V_{,\,\alpha}\circ c.\end{aligned}$$

Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*c\in\mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}^s),$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^*c)^\bullet&=(\Delta_{\mathtt{elg}}c)+\mathtt{K}^*c\\&=(\Delta_{\mathtt{elg}}c)+(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^s(\nabla M_{i,j})\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right)-\nabla V\circ c,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\langle\,(\mathtt{P}^*c)^\bullet\mid\dot{c}\,\rangle\in\mathsf{C}(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),\\&\quad\langle\,(\mathtt{P}^*c)^\bullet\mid\dot{c}\,\rangle=\left(\sum_{i=1}^s M_{ij}\circ c\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right)+2\cdot\sum_{i,j,k=1}^s\Gamma_{ijk}\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\cdot\dot{c}_k\\&\qquad=\langle\,(\Delta_{\mathtt{elg}}c)\mid\dot{c}\,\rangle+\left(\sum_{i,j,k=1}^s\Gamma_{ijk}\circ c\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\cdot\dot{c}_k\right)-\langle\,\nabla V\circ c\mid\dot{c}\,\rangle\,.\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ c,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) + \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c} \,\rangle_.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \circ c,$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u,w)^*c$ längs** c
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^* c \\
&\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ c \mid w \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ c \mid u \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&+ \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V \circ c \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V \circ c \mid u \,\rangle,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : O)$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -V_{,\,\alpha} \circ q.$$

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

$\rightarrow\!)$ M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!)$ $q(t) \in O_{\mathtt{inv}}$.

$\rightarrow\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = -V_{,}{}^{\alpha}(q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in O_{\texttt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -V_{,}^{\alpha} \circ q,$$

Dann folgt “ q löst `(ELG)`” .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ q,$$

und

$$(L^*q)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*q)^{\bullet} = -2 \cdot \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathsf{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathsf{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathsf{t}} L)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V_{,\,\alpha}) \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \nabla V \circ q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot q_j \right) - V_{,\, \alpha} \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*q)^\bullet = \mathtt{K}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{i,j}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \nabla V \circ q,$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \\
&\quad \langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\
&\qquad\qquad = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.
\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ q,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) + \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -\langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle_.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

(u, w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u, w)^*q$, q löst (ELG).**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u, w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u, w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u,w\in\mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q\in\mathsf{C}(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*q\\
&\quad=\langle\, q\mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid \mathtt{K}^*q\,\rangle-\langle\, q\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid \mathtt{K}^*q\,\rangle\\
&\quad+\langle\, \dot q\mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid \mathtt{P}^*q\,\rangle-\langle\, \dot q\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid \mathtt{P}^*q\,\rangle\\
&=(1:2)\cdot\langle\, q\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla M_{ij})\circ q\mid w\,\rangle\cdot\dot q_i\cdot\dot q_j\\
&-(1:2)\cdot\langle\, q\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla M_{ij})\circ q\mid u\,\rangle\cdot\dot q_i\cdot\dot q_j\\
&+\langle\, \dot q\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ q\cdot w_i\cdot\dot q_j\\
&\qquad-\langle\, \dot q\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ q\cdot u_i\cdot\dot q_j\\
&\qquad-\langle\, q\mid u\,\rangle\cdot\langle\,\nabla V\circ q\mid w\,\rangle+\langle\, q\mid w\,\rangle\cdot\langle\,\nabla V\circ q\mid u\,\rangle,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q=\langle\, q\mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid \mathtt{K}^*q\,\rangle-\langle\, q\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid \mathtt{K}^*q\,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad&\langle\, \dot q\mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid \mathtt{P}^*q\,\rangle-\langle\, \dot q\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid \mathtt{P}^*q\,\rangle\\
&\quad=\langle\, \dot q\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ q\cdot w_i\cdot\dot q_j\\
&\qquad-\langle\, \dot q\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ q\cdot u_i\cdot\dot q_j=\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}\quad\text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{ort}} \subseteq O$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $E_{\mathtt{ort}} \subseteq O$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt
"A ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- $\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(x)$.
- $\rightarrow$) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow$) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) $E_{\texttt{ort}} \subseteq O$.
- $\rightarrow$) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.
- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\texttt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(x).$$

- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\texttt{ort}}$ gilt

$$V((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(x).$$

- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, x, v) \in P \times E_{\texttt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow$) q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$
\begin{aligned}
&(1:2)\cdot\langle\, q \mid u\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid w\,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad - (1:2)\cdot\langle\, q \mid w\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid u\,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad + \langle\, \dot q \mid u\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q \cdot w_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot q \mid w\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q \cdot u_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad - \langle\, q \mid u\,\rangle \cdot \langle\, \nabla V\circ q \mid w\,\rangle + \langle\, q \mid w\,\rangle \cdot \langle\, \nabla V\circ q \mid u\,\rangle \\
&\qquad\qquad\qquad = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.
\end{aligned}
$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t,\sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$
\begin{aligned}
&\langle\, q(t) \mid u\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t))\cdot w_i \cdot \dot q_j(t) \\
&\qquad - \langle\, q(t) \mid w\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t))\cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\
&\qquad = \langle\, q(\sigma) \mid u\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma))\cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) \\
&\qquad\qquad - \langle\, q(\sigma) \mid w\,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma))\cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung …

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

$$\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : O).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \subseteq (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonright E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v}, \mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$\mathcal{H} : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\texttt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\texttt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $Q(t) \in O_{\texttt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) &=& \displaystyle -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ && \qquad\qquad -V_{,\,\alpha}(Q(t)) \end{array} .$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \dots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$q(t) \in O_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq O$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.
3. $V \in \mathbb{R}$.
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft O) \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft O) = (M_{ji} \downharpoonleft O)$.
6. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V.$$

M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $O_{\mathtt{inv}} \subseteq O$.
2. Für $x \in O_{\mathtt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es $M^{ij}(x)$,
   so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(x) \cdot M^{il}(x) = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $O_{\mathtt{inv}}$ ...

$$\Gamma_{ij}{}^k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \cdot M^{\alpha k}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonleft (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(O : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$,
so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(O_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}}L$.

$$\partial_{\mathtt{t}}L \in \mathsf{C}((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}}L)(t,x,v) = 0.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{K}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{x_\alpha}L)(t,x,v) = (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(x)\cdot v_i\cdot v_j.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s),$$

$$\mathtt{K}(t,x,v) = (\nabla_{\mathtt{x}}L)(t,x,v) = (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{ij})(x)\cdot v_i\cdot v_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha}L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(x)\cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{E}(t,x,v) &= \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v\,\rangle - L(t,x,v)\\ &= (1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot v_i\cdot v_j\right) + V.\end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{T}(t,x,v) &= (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2\\ &= (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot v_i\cdot v_j.\end{aligned}$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V.$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u,w\in\mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w)\in\mathsf{C}^1((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s:\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v)\,\rangle - \langle\, x \mid w\,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v)\,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot w_i\cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot u_i\cdot v_j.\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u,w\in\mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w)\in\mathsf{C}((\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s:\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v)\\ &\quad = \langle\, x \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v)\,\rangle - \langle\, x \mid w\,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v)\,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v)\,\rangle - \langle\, v \mid w\,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v)\,\rangle \\ &\quad = (1:2)\cdot\langle\, x \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla M_{ij})(x) \mid w\,\rangle\cdot v_i\cdot v_j \\ &\quad - (1:2)\cdot\langle\, x \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla M_{ij})(x) \mid u\,\rangle\cdot v_i\cdot v_j \\ &\quad + \langle\, v \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot w_i\cdot v_j - \langle\, v \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot u_i\cdot v_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v)\,\rangle - \langle\, x \mid w\,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v)\,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, v \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v)\,\rangle - \langle\, v \mid w\,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v)\,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot w_i\cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x)\cdot u_i\cdot v_j = 0 \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : O)$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

→) c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$

`b)` Falls M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $c(t) \in O_{\mathtt{inv}}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ c \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V()$.

→) c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = -V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^* c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ c \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot c_j.$$

Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{i,j}) \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &= \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^* c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ c \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ c \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k,$$

und

$$(\mathtt{E}^* c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle\, .$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ c\cdot\dot c_i\cdot\dot c_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ c\cdot\ddot c_i\cdot\dot c_j\right) + \sum_{i,j,k=1}^{s}\Gamma_{ijk}\circ c\cdot\dot c_i\cdot\dot c_j\cdot\dot c_k$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^{\bullet} = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot c\,\rangle\,.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c,$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^{\bullet} = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u,w)^*c$ längs** c
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u,w\in\mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}^*c\,\rangle - \langle\, c \mid w\,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}^*c\,\rangle\\ &= \langle\, c \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ c\cdot w_i\cdot\dot c_j\\ &\qquad\qquad - \langle\, c \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ c\cdot u_i\cdot\dot c_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^{\bullet} = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u,w\in\mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*c\in\mathsf{C}(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*c\\
&\quad=\langle\, c \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid \mathtt{K}^*c\,\rangle-\langle\, c\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid \mathtt{K}^*c\,\rangle\\
&\quad+\langle\, \dot c \mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid \mathtt{P}^*c\,\rangle-\langle\, \dot c\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid \mathtt{P}^*c\,\rangle\\
&=(1:2)\cdot\langle\, c\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla M_{ij})\circ c\mid w\,\rangle\cdot\dot c_i\cdot\dot c_j\\
&-(1:2)\cdot\langle\, c\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla M_{ij})\circ c\mid u\,\rangle\cdot\dot c_i\cdot\dot c_j\\
&+\langle\,\dot c\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ c\cdot w_i\cdot\dot c_j-\langle\,\dot c\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ c\cdot u_i\cdot\dot c_j,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c=\langle\, c\mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid\mathtt{K}^*c\,\rangle-\langle\, c\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid\mathtt{K}^*c\,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad&\langle\,\dot c\mid u\,\rangle\cdot\langle\, w\mid\mathtt{P}^*c\,\rangle-\langle\,\dot c\mid w\,\rangle\cdot\langle\, u\mid\mathtt{P}^*c\,\rangle\\
&=\langle\,\dot c\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ c\cdot w_i\cdot\dot c_j\\
&\qquad-\langle\,\dot c\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ c\cdot u_i\cdot\dot c_j=\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,c}\quad\text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!\!\rangle$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : O)$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Es gelte:

$\rightarrow\!\!\rangle$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

$\rightarrow\!\!\rangle$ M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow\!\!\rangle$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!\!\rangle$ $(t, q(t)) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}$.

$\rightarrow\!\!\rangle$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha}(q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = 0.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(x), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $O_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) q ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in O_{\texttt{inv}}$.

$\rightarrow$) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = 0,$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`" .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathsf{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathsf{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathsf{t}} L)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \mathtt{K}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla M_{ij}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ q \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot q_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*q)^\bullet = \mathtt{K}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla M_{i,j}) \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ q \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}..$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u,w)^*q$, q löst (ELG).**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*q \\
&\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ q \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij}) \circ q \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&+ \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ q \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

... sind die Aussagen i), ii) äquivalent:

i) Γ ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

ii) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{ort}} \subseteq O$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

a) $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

b) $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.

c) Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

$\rightarrow$) $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow$) $P \subseteq E$.

$\rightarrow$) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow$) $E_{\texttt{ort}} \subseteq O$.

$\rightarrow$) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow$) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow$) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow$) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt
"A ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- $\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.
- $\rightarrow\!)$ $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow\!)$ $E_{\mathtt{ort}} \subseteq O$.
- $\rightarrow\!)$ $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\mathtt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(x).$$

- $\rightarrow\!)$ Für alle $(\phi, x, v) \in P \times E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: …

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$(1:2)\cdot\langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid w \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j$$
$$- (1:2)\cdot\langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla M_{ij})\circ q \mid u \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j$$
$$+ \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\circ q \cdot u_i \cdot \dot q_j$$
$$= \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t,\sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t)) \cdot w_i \cdot \dot q_j(t)$$
$$- \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(t)) \cdot u_i \cdot \dot q_j(t)$$
$$= \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma)) \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma)$$
$$- \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(q(\sigma)) \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, O_{\texttt{zeit}}, D_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\texttt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\texttt{ort}})$ gilt:

$$\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\texttt{ort}} : O).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \subseteq (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t, x), \mathbb{R}^s) : (t, x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t, x, v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$\mathcal{H} : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{H}(t, x, p) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V,$$

ist (D, G)-Hamilton-Funktion von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i\right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $Q(t) \in O_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(x), V()$.

→) M_{ij} auf $O_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $0 \neq O_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O_{\mathtt{inv}}) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(x) \cdot v_i \right).$$

→) q löst (ELG).

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$q(t) \in O_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)(HJG) von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

$$\text{Standard } L \text{ auf } C \times \mathbb{R}^s \text{ mit } M_{..}(), V(t,x),$$

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.
3. $(V \downharpoonleft C) \in \mathsf{C}^1(C : \mathbb{R})$.
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} \in \mathbb{R}$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} = M_{ji}$.
6. $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t, x).$$

$$M_{ij} \text{ invertierbar}$$

genau dann, wenn gilt:

Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es M^{ij},
so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \cdot M^{il} = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} invertierbar, dann

$$V_{,}^{i} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = 0$.

e) Ist M_{ij} invertierbar, so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{i} \in \mathsf{C}(C : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = 0.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = -(\partial_{\mathtt{t}} V)(t, x).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = -(V_{,\,\alpha})(t, x).$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = -(\nabla_{\mathtt{x}} V)(t, x).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{E}(t, x, v) = \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) \\ &\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t, x). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{T}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 \\ &\qquad = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) - L(t, x, v)) : 2 = V(t, x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j .\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t,x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t,x) \mid u \,\rangle ,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(), V(t,x)$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(), V(t,x)$.

$\rightarrow$) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c)$.

`b)` Falls M_{ij} invertierbar ist
und falls $E \subseteq \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + (V_{,}^{\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c),$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

$\rightarrow$) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c)$.

b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\,\rangle$.

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, c) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_\mathtt{t} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_\mathtt{t} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_\mathtt{t} L)^*c = -(\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = -(V_{,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle = -\langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = -(\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^* c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet \quad = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle + (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle_.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*c = V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^\bullet = (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^{\bullet} = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*c \\ &\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &\quad = \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\ &\quad - \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad & \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung …

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i = -V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) $t \in \mathsf{dom}\, q$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \dots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = -V_{,}^{\alpha}(t, q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = -V_{,}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q),$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, q) - \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, q) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_\mathtt{t} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_\mathtt{t} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_\mathtt{t} L)^*q = -(\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = -(V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = -\langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*q = -(\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = -(\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -\langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, q) + \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -\,\langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle_.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = (\partial_\mathtt{t} V) \circ (\mathtt{t}, q) + \langle\, (\nabla_\mathtt{x} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\operatorname{\mathsf{dom}} q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^{\bullet} = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad+ \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &\quad= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\ &\quad- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\operatorname{\mathsf{dom}} q}\quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

$\rightarrow)$ $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow)$ $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow)$ $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$.

$\rightarrow)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- →) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.
- →) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- →) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- →) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$.
- →) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.
- →) Für alle $(\phi, t, x) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}}$ gilt

$$V(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(t,x).$$

- →) Für alle $(\phi, v) \in P \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j.$$

- →) q löst `(ELG)`.
- →) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\texttt{zeit}}$.
- →) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: . . .

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$\begin{aligned} \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j \\ - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j \\ - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \\ = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}. \end{aligned}$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned} \langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) \\ - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\ = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) \\ - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma), \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t, x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\texttt{zeit}}, D_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \le m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\texttt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\texttt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\texttt{zeit}} \times \Psi[D_{\texttt{ort}}] \subseteq C$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C\}$.

→) $G : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = C \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C \times \mathbb{R}^s$
offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C\}$.

→) $G : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : C \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij} \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t,x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C\}$.

→) $G : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \dots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & \displaystyle -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha} \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ & & \qquad\qquad\qquad -V_{,\,\alpha}(t, Q(t)) \end{array}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t,x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} invertierbar.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C\}$.

$\rightarrow$) $G : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C.$$

Dann folgt “$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$” .

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq I$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
3. $(V \downharpoonright I) \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R})$.
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} \in \mathbb{R}$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} = M_{ji}$.
6. $L : (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t).$$

M_{ij} invertierbar

genau dann, wenn gilt:

Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es M^{ij},
so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \cdot M^{il} = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} invertierbar, dann

$$V_{,}^{i} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\,\alpha}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(), V(t)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonleft (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \dots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = 0$.

e) Ist M_{ij} invertierbar,

so gilt für alle $i \in \{1, \dots, s\}$,

$$V_{,}^{i} \in \mathsf{C}(I : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \dots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = 0.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t,x,v) = -V^{\bullet}(t).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t,x,v) = 0.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t,x,v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t,x,v) = \vec{0}.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{E}(t,x,v) = \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\quad \mathtt{T}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &\qquad = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(t).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}((I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow\!\!)$ Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und $\mathsf{dom}\, c \subseteq I$.

Es gelte:

$\rightarrow\!\!)$ Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

$\rightarrow\!\!)$ c ist $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow\!\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i$.

`b)` Falls M_{ij} invertierbar ist
und falls $E \subseteq \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(), V(t)$.

$\rightarrow$) c ist $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\texttt{elg}} c)_\alpha$.

b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\texttt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle$.

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V^{\bullet} \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^{\bullet} = \langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\ \rangle - V^{\bullet} \circ \mathtt{t}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = -V^{\bullet} \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\ \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\ \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\ \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\ \rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c},$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet \quad = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha.$$

Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c),$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle\,.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V^\bullet \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle\,.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle\,.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^* c$ **längs** c
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u, w)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)^* c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^* c)^{\bullet} = \mathtt{M}(u, w)^* c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u, w)^* c \\ &\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\ &\quad = \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
$\mathsf{dom}\, q \subseteq I$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) q löst `(ELG)`.

→) $t \in \mathsf{dom}\, q$.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = 0.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) q ist $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q},$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V^\bullet \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = -V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q},$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V^\bullet \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = V^\bullet \circ \mathtt{t}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** (ELG)**.**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** (ELG)**.**
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &\qquad = \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}\quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{zeit}} \subseteq I$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $E_{\mathtt{zeit}} \subseteq I$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt
"A ist $L, (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie" .

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\mathtt{zeit}} \subseteq I$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

→) Für alle $(\phi, v) \in P \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j.$$

→) q löst `(ELG)`.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned} \langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) &- \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\ &= \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma), \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

$$\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \subseteq (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L,(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij} \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D, G)`(HJG)` von $(L, (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
$\mathsf{dom}\, Q \subseteq I$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha} \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(t)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in I \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

→) q löst `(ELG)`.

Dann folgt “ $q, \mathtt{P}^*q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (I \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$” .

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq O$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^s$.
3. $(V \downharpoonleft O) \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$.
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} \in \mathbb{R}$.
5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} = M_{ji}$.
6. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(x).$$

M_{ij} invertierbar

genau dann, wenn gilt:

Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es M^{ij},
so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \cdot M^{il} = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} invertierbar, dann

$$V_{,}^{i} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\,\alpha}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonleft (\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = 0$.

e) Ist M_{ij} invertierbar, so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{i} \in \mathsf{C}(O : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = 0.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = 0.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = -(V_{,\alpha})(x).$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = -(\nabla V)(x).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\begin{aligned}
&\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\
&\quad \mathtt{E}(t, x, v) = \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) \\
&\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(x).
\end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\begin{aligned}
&\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\
&\quad \mathtt{T}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 \\
&\qquad = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j.
\end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) - L(t, x, v)) : 2 = V(x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j .\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V(x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V(x) \mid u \,\rangle ,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : O)$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

→) c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i \right) + V_{,\,\alpha} \circ c.$

`b)` Falls M_{ij} invertierbar ist
und falls $E \subseteq \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + (V_,^{\alpha}) \circ c,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(), V(x)$.

→) c ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - V_{,\,\alpha} \circ c.$

b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c}\,\rangle.$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right) - V\circ c,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right) - \langle\, \nabla V\circ c \mid \dot{c}\,\rangle\,,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot{c}\,\rangle) - 2\cdot\langle\, \nabla V\circ c \mid \dot{c}\,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}}L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}}L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}}L)^*c = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = -V_{,\,\alpha}\circ c.$$

Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\,\rangle = -\langle\, \nabla V\circ c \mid \dot{c}\,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = -\nabla V\circ c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^* c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet \quad = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - V_{,\,\alpha} \circ c.$$

Falls c eine $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) - \nabla V \circ c,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \langle\, \nabla V \circ c \mid \dot{c} \,\rangle\, .$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c\in\mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),\quad \mathtt{E}^*c=(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right)+V\circ c,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^{\bullet}=\left(\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right)+\langle\,\nabla V\circ c\mid\dot{c}\,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^{\bullet}=\langle\,(\Delta_{\mathtt{elg}}c)\mid\dot{c}\,\rangle\,.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c\in\mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),\quad \mathtt{T}^*c=(1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^{\bullet}=\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^{\bullet}=\langle\,(\Delta_{\mathtt{elg}}c)\mid\dot{c}\,\rangle-\langle\,\nabla V\circ c\mid\dot{c}\,\rangle_{.}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c\in\mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R}),\quad \mathbf{\Phi}^*c=V\circ c,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^{\bullet}=\langle\,\nabla V\circ c\mid\dot{c}\,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u,w\in\mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot w_i\cdot\dot c_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot u_i\cdot\dot c_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(\mathbb{R}\times O)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u,w\in\mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\,c:\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*c \\ &\quad= \langle\, c \mid u \,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\ &\quad\;+ \langle\, \dot c \mid u \,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &\quad= \langle\, \dot c \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot w_i\cdot\dot c_j \\ &\qquad\quad - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot u_i\cdot\dot c_j \\ &\qquad\quad - \langle\, c \mid u \,\rangle\cdot\langle\, \nabla V\circ c \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle\cdot\langle\, \nabla V\circ c \mid u \,\rangle,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot c \mid u \,\rangle\cdot\langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle\cdot\langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &\quad= \langle\, \dot c \mid u \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot w_i\cdot\dot c_j \\ &\qquad - \langle\, \dot c \mid w \,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot u_i\cdot\dot c_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,c}\quad\text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung …

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : O)$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i = -V_{,\,\alpha} \circ q.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) $(t, q(t)) \in \mathbb{R} \times O$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = -V_{,}^{\alpha}(q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) q ist $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = -V_,^\alpha \circ q,$$

Dann folgt " q löst `(ELG)`" .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ q,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -2 \cdot \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathsf{t}} L)^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathsf{t}} L)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathsf{t}} L)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -V_{,\,\alpha} \circ q.$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = -\langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*q = -\nabla V \circ q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = -V_{,\,\alpha} \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = -\nabla V \circ q,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -\langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{E}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ q,$$

und

$$(\mathtt{E}^* q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{E}^* q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{T}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^* q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^* q)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^* q)^\bullet = -\langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle_.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^* q = V \circ q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^* q)^\bullet = \langle\, \nabla V \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &\quad= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V \circ q \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V \circ q \mid u \,\rangle,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{ort}} \subseteq O$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $E_{\mathtt{ort}} \subseteq O$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt
"A ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie" .

Es gelte:

- $\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.
- $\rightarrow$) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow$) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) $E_{\texttt{ort}} \subseteq O$.
- $\rightarrow$) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.
- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\texttt{ort}}$ gilt

$$V((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(x).$$

- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, v) \in P \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow$) q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: ...

. . .

. . .

`a)` $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$\begin{aligned}\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot w_i \cdot \dot q_j \\ - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot u_i \cdot \dot q_j \\ - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V\circ q \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla V \circ q \mid u \,\rangle \\ = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.\end{aligned}$$

`b)` $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t,\sigma \in \mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned}\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot w_i \cdot \dot q_j(t) \\ - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\ = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) \\ - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma),\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

$$\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : O).$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} invertierbar.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O\}$.

$\rightarrow$) $G : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \subseteq (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$
offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \dots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij} \cdot p_i \cdot p_j\right) + V(x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D, G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $Q(t) \in O$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) &= -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha} \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ &\qquad - V_{,\,\alpha}(Q(t)) \end{aligned}.$$

Es gelte:

$\to$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V(x)$.

$\to$) M_{ij} invertierbar.

$\to$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times O\}$.

$\to$) $G : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

$\to$) q löst `(ELG)`.

$\to$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$q(t) \in O.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 26/02/15**

Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $V \in \mathbb{R}$.
3. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} \in \mathbb{R}$.
4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $M_{ij} = M_{ji}$.
5. $L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t, x, v) = (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j \right) - V.$$

M_{ij} invertierbar

genau dann, wenn gilt:

Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es M^{ij},
so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \cdot M^{il} = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonleft (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} = 0$.

e) Ist M_{ij} invertierbar, so gilt für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$,

$$\Gamma_{ij}{}^k = 0.$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = 0.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = 0.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = \vec{0}.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\qquad \mathtt{E}(t, x, v) = \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\begin{aligned} &\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\ &\qquad \mathtt{T}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 \\ &\qquad\qquad = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) - L(t, x, v)) : 2 = V.$$

(u, w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u, w) \in \mathsf{C}^1((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)(t, x, v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j . \end{aligned}$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u, w) \in \mathsf{C}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u, w)(t, x, v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &\quad = \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)(t, x, v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$.

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

→) c ist $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $(\Delta_{\texttt{elg}} c)_\alpha = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{c}_i$.

`b)` Falls M_{ij} invertierbar ist
und falls $E \subseteq \mathsf{dom}\, c$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\texttt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha,$$

wobei $(\Delta_{\texttt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot (\Delta_{\texttt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(), V()$.

$\rightarrow$) c ist $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$.

Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}\cdot\ddot{c}_i = (\Delta_{\texttt{elg}}c)_\alpha$.

b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\texttt{elg}}c) \mid \dot{c}\,\rangle$.

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle\, .$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

Falls c eine $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c}\, \rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c},$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha\in\{1,\dots,s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}\cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^{\bullet} \quad = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}\cdot \ddot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*c)^{\bullet} = (\Delta_{\mathtt{elg}}c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (\Delta_{\mathtt{elg}}c)_\alpha.$$

Falls c eine $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*c)^{\bullet} = (\Delta_{\mathtt{elg}}c) + \mathtt{K}^*c = (\Delta_{\mathtt{elg}}c),$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^*c)^{\bullet} \mid \dot{c}\,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c:\mathbb{R}),$$

$$\langle\, (\mathtt{P}^*c)^{\bullet} \mid \dot{c}\,\rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij}\cdot \ddot{c}_i\cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot{c}\,\rangle\,.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j\right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot{c}\,\rangle\,.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2)\cdot\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\dot{c}_i\cdot\dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}\cdot\ddot{c}_i\cdot\dot{c}_j$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot{c}\,\rangle\,.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c,$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u, w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u, w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^*c)^{\bullet} = \mathtt{M}(u, w)^*c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u, w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u, w)^*c \\ &\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &\quad = \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) $t \in \mathsf{dom}\, q$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) = 0.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) q ist $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q},$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`" .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q},$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \cdot \ddot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^*q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^*q)^\bullet = \mathtt{K}^*q = \vec{0} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$\langle\ (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\ (\mathtt{P}^*q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle = \sum_{i=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u,w)^*q \\ &\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\ &\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &\quad = \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\texttt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt
“ A ist $L, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie” .

Es gelte:

- →) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.
- →) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- →) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- →) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- →) Für alle $(\phi, v) \in P \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot v_i \cdot v_j.$$

- →) q löst `(ELG)`.
- →) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: …

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^{\bullet} = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned} \langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j(t) &- \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j(t) \\ &= \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot w_i \cdot \dot q_j(\sigma) - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \cdot u_i \cdot \dot q_j(\sigma), \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, O_{\texttt{zeit}}, D_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\texttt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\texttt{ort}})$ gilt:

$$\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x),\mathbb{R}^s) : (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}\cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}\cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v\in D(t,x)\} = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s \subseteq (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v\in D(t,x)\} = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v)\in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p)\in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L,(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s)\times\mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij} \cdot p_i \cdot p_j\right) + V,$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.

→) M_{ij} invertierbar.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s\}$.

→) $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & \displaystyle -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha} \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

- $\rightarrow\!)$ Standard L auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(), V()$.
- $\rightarrow\!)$ M_{ij} invertierbar.
- $\rightarrow\!)$ $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s\}$.
- $\rightarrow\!)$ $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i} \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si} \cdot v_i \right).$$

- $\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^*q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

ODE: $-L \cdot c \leq c^\bullet$ und $c^\bullet \leq L \cdot c$.

Ersterstellung: 25/02/14 **Letzte Änderung: 27/02/15**

Notationen 1. c ist genau dann eine *reelle Funktion*, wenn $c : D \to B$ mit $D, B \subseteq \mathbb{R}$.

Notationen 2. Die klassische Grenzwert-Definition der Stetigkeit in $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ von Funktionen $c : D \to \mathbb{R}^m$ - hier ist $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und es kommt die Konvention $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ zum Einsatz - ist besonders griffig für nichtleere Mengen D, welche die zusätzliche Eigenschaft haben, dass jeder Punkt $t \in D$ Häufungspunkt von D, also Grenzwert einer Folge aus $D \setminus \{t\}$ ist. Für derartige Mengen D und $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, ist $\mathsf{C}(D : B)$ die Menge aller stetigen Funktionen $c : D \to B$, wobei D, B mit der Euklidischen Standard-Topologie ausgestattet sind. Ähnlich ist $\mathsf{C}^k(D : B)$, $1 \leq k \in \mathbb{N}$, die Menge aller $k-$fach stetig differenzierbaren Funktionen $c : D \to B$. Die Ableitung einer *differenzierbaren* Funktion $c : D \to B$ - also etwa von $c \in \mathsf{C}^1(D : B)$ - ist $c^\bullet$ und wird gelegentlich zwecks besserer Lesbarkeit als $c^\bullet$ bezeichnet. Im Fall $c \in \mathsf{C}^1(D : B)$ gilt klarer Weise $c^\bullet \in \mathsf{C}(D : \mathbb{R}^s)$. Die zweite Ableitung einer *zweimal differenzierbaren* Funktion $c : D \to B$ - also etwa von $c \in \mathsf{C}^2(D : B)$ - ist $\ddot{c}$ und wird gelegentlich zwecks besserer Lesbarkeit als $c^{\bullet\bullet}$ notiert. Für $c \in \mathsf{C}^2(D : B)$ gilt offenbar $c^\bullet \in \mathsf{C}^1(D : \mathbb{R}^s)$ und $\ddot{c} \in \mathsf{C}(D : \mathbb{R}^s)$. Gelegentlich wird von der Konvention $\mathsf{C}^0(D : B) = \mathsf{C}(D : B)$ Gebrauch gemacht. $\mathsf{C}^\infty(D : B)$ ist die Menge aller Funktionen $c : D \to B$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Mitunter können mit elementaren Methoden bemerkenswerte qualitative Aussagen über Funktionen gewonnen werden.

Es gelte:

$\rightarrow$) c reelle Funktion.

$\rightarrow$) $[t_\circ|\tau[$ echtes reelles Intervall.

$\rightarrow$) c ist auf $[t_\circ|\tau[$ stetig und auf $]t_\circ|\tau[$ differenzierbar.

$\rightarrow$) $c(t_\circ) = 0$.

$\rightarrow$) $0 \leq L \in \mathbb{R}$ und $c^\bullet \leq L \cdot c$ auf $]t_\circ|\tau[$.

Dann folgt

$$c \leq 0 \quad \text{auf} \quad [t_\circ|\tau[.$$

Beweis. Es gilt $L = 0$ oder $0 < L \in \mathbb{R}$.

Falls $L = 0$ so gilt $c^\bullet \leq 0$ auf $]t_\circ|\tau[$ und somit ist c auf $]t_\circ|\tau[$ fallend. Da c auf $[t_\circ|\tau[$ stetig ist und $c(t_\circ) = 0$ gilt, folgt $c \leq 0$ auf $[t_\circ|\tau[$.

Falls $0 < L \in \mathbb{R}$, dann $0 \neq L \in \mathbb{R}$. Entweder $c \leq 0$ auf $[t_\circ|\tau[$ oder es gibt $t_1 \in [t_\circ|\tau[$ mit $0 < c(t_1)$.

Im zweiten Fall gelten wegen $c(t_\circ) = 0$ die Ungleichungen

$$t_\circ < t_1 < \tau.$$

Da c auf $[t_\circ|\tau[$ stetig ist und da $c(t_\circ) = 0 < c(t_1)$ mit $t_\circ < t_1 < \tau$ gilt gibt es $t_{\circ\circ}$ mit

$$t_\circ \leq t_{\circ\circ} < t_1 < \tau,$$

so dass

$$c(t_{\circ\circ}) = 0$$

und

$$0 < c \quad \text{auf} \quad]t_{\circ\circ}|t_1[.$$

Wähle s_0 mit

$$t_\circ \leq t_{\circ\circ} < s_0 < t_1 < \tau \quad \text{mit} \quad |s_0 - t_{\circ\circ}| \leq 1 : (2L)$$

und setze

$$\overline{g} = \|c : [t_{\circ\circ}|s_0]\|_\infty = \sup\{|c(t)| : t_{\circ\circ} \leq t \leq s_0\}.$$

Wegen $s_0 \in]t_{\circ\circ}|t_1[\subseteq [t_{\circ\circ}|t_1]$ gilt

$$0 < c(s_0) \leq \overline{g}.$$

Da c auf $[t_\circ|\tau[$ stetig ist und da $[t_{\circ\circ}|s_0]$ wegen $t_\circ \leq t_{\circ\circ} < s_0 < t_1 < \tau$ eine kompakte, nichtleere Teilmenge von $[t_\circ|\tau[$ ist gilt

$$\overline{g} < +\infty.$$

Nach dem MWS der DR, der Differenzierbarkeit von c auf $]t_{\circ\circ}|s_0[\subseteq]t_\circ|\tau[$ und der Stetigkeit von c auf $[t_{\circ\circ}|s_0] \subseteq [t_\circ|\tau[$ gibt es $s_1 \in]t_{\circ\circ}|s_0[$ mit

$$\begin{aligned} c(s_0) : (s_0 - t_{\circ\circ}) &= (c(s_0) - 0) : (s_0 - t_{\circ\circ}) \\ &= (c(s_0) - c(t_{\circ\circ})) : (s_0 - t_{\circ\circ}) = c^\bullet(s_1). \end{aligned}$$

Wegen $s_1 \in]t_{\circ\circ}|s_0[\subseteq]t_\circ|\tau[$ gilt gemäß Voraussetzung die Ungleichung

$$c^\bullet(s_1) \leq L \cdot c(s_1).$$

Auch via $0 < s_1 - t_{\circ\circ} < s_0 - t_{\circ\circ} = |s_0 - t_{\circ\circ}| \leq 1 : (2L)$ ergeben sich somit die Aussagen

$$t_\circ \leq t_{\circ\circ} < s_1 < s_0 < t_1 < \tau \quad \text{mit} \quad |s_1 - t_{\circ\circ}| \leq 1 : (2L),$$

$$0 < c(s_0) = (s_0 - t_{\circ\circ}) \cdot c^\bullet(s_1) \leq (s_0 - t_{\circ\circ}) \cdot (L \cdot c(s_1)) \leq c(s_1) : 2.$$

Via Induktion: Es gibt Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$t_\circ \leq t_{\circ\circ} < \ldots < s_{1+n} < s_n < \ldots < s_2 < s_1 < s_0 < t_1 < \tau,$$

und

$$|s_n - t_{\circ\circ}| \leq 1 : (2L),$$

und

$$0 < c(s_n) = (s_n - t_{\circ\circ}) \cdot c^\bullet(s_{1+n}) \leq (s_n - t_{\circ\circ}) \cdot (L \cdot c(s_{1+n})) \leq c(s_{1+n}) : 2,$$

woraus durch sukzessives Einsetzen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$0 < c(s_0) \leq c(s_n) : 2^n \leq \overline{g} : 2^n$$

folgt und sich hieraus via $n \to +\infty$ die Aussagen $0 < c(s_0) \leq 0$ ergeben. □

Zur Illustration seien $t_\circ \in \mathbb{R}$ und

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c(t) = 1 - \exp(t - t_\circ).$$

Dann gilt $c \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ mit

$$c^\bullet : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c^\bullet(t) = -\exp(t - t_\circ) = c(t) - 1,$$

und $c(t_\circ) = 0$. Es folgt

$$c^\bullet = c - 1 \leq c \quad \textit{auf}\ \mathbb{R}.$$

Offenbar erfüllen $t_\circ, \tau = +\infty, L = 1, c$ die Voraussetzungen vorhergehenden Satzes und es gilt $c \leq 0$ auf $[t_\circ|\tau[= [t_\circ| + \infty[$. □

Nicht der soeben bewiesene Satz sondern eine Folgerung mit verzichtbarem Beweis wird später eingesetzt:

Es gelte:

→) c reelle Funktion.

→) $[t_\circ|\tau[$ echtes reelles Intervall.

→) c ist auf $[t_\circ|\tau[$ stetig und auf $]t_\circ|\tau[$ differenzierbar.

→) $c(t_\circ) = 0$.

→) $0 \leq L \in \mathbb{R}$ und $c^\bullet \leq L \cdot c$ auf $]t_\circ|\tau[$.

→) $0 \leq c$ auf $]t_\circ|\tau[$.

Dann folgt

$$c = 0 \quad \text{auf} \quad [t_\circ|\tau[.$$

Aus Vorliegendees läßt sich ohne allzu viel Aufwand herleiten.

Es gelte:

→) c reelle Funktion.

→) $]\tau|t_\circ]$ echtes reelles Intervall.

→) c ist auf $]\tau|t_\circ]$ stetig und auf $]\tau|t_\circ[$ differenzierbar.

→) $c(t_\circ) = 0$.

→) $0 \leq L \in \mathbb{R}$ und $-L \cdot c \leq c^\bullet$ auf $]\tau|t_\circ[$.

Dann folgt

$$c \leq 0 \quad \text{auf} \quad]\tau|t_\circ].$$

Beweis. Sei die Hilfsfunktion C definiert als

$$C : [-t_\circ| - \tau[\to \mathbb{R}, \quad C(t) = c(-t).$$

Dann gilt offenbar:

→) C reelle Funktion,

$\rightarrow\!)$ $[-t_\circ|-\tau[$ echtes reelles Intervall,

$\rightarrow\!)$ C ist auf $[-t_\circ|-\tau[$ stetig und auf $]-t_\circ|-\tau[$ differenzierbar,

$\rightarrow\!)$ $C(-t_\circ)=0$,

$\rightarrow\!)$ $0 \leq L \in \mathbb{R}$,

und falls $t \in\ ]-t_\circ|-\tau[$, dann $-t \in\ ]\tau|t_\circ[$ und somit

$$C^\bullet(t) = -c^\bullet(-t) \leq L \cdot c(-t) = L \cdot C(t),$$

also

$\rightarrow\!)$ $C^\bullet \leq L \cdot C$ auf $]-t_\circ|-\tau[$,

so dass via vorhergehenden Satzes für C die Aussage $C \leq 0$ auf $[-t_\circ|-\tau[$ ergibt, woraus ohne viel Weiteres

$$c \leq 0 \quad \text{auf} \quad]\tau|t_\circ],$$

folgt. □

Zur Illustration seien $t_\circ \in \mathbb{R}$ und

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c(t) = 1 - \exp(4 \cdot (t_\circ - t)).$$

Dann gilt offenbar $c \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ mit

$$c^\bullet : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c^\bullet(t) = 4 \cdot \exp(4 \cdot (t_\circ - t)) = 4 \cdot (1 - c(t)),$$

und $c(t_\circ) = 0$. Es folgt

$$c^\bullet = 4 - 4 \cdot c \geq -4 \cdot c, \quad \textit{auf}\ \mathbb{R}.$$

Offenbar erfüllen $t_\circ, \tau = -\infty, L = 4, c$ die Voraussetzungen vorhergehenden Satzes und es gilt $c \leq 0$ auf $]\tau|t_\circ] =]-\infty|t_\circ]$. □

Der Beweis dieser Folgerung bleibt den Lesern überlassen.

Es gelte:

- $\rightarrow\!)$ c reelle Funktion.
- $\rightarrow\!)$ $]\tau|t_\circ]$ echtes reelles Intervall.
- $\rightarrow\!)$ c ist auf $]\tau|t_\circ]$ stetig und auf $]\tau|t_\circ[$ differenzierbar.
- $\rightarrow\!)$ $c(t_\circ) = 0$.
- $\rightarrow\!)$ $0 \leq L \in \mathbb{R}$ und $-L \cdot c \leq c^\bullet$ auf $]\tau|t_\circ[$.
- $\rightarrow\!)$ $0 \leq c$ auf $]\tau|t_\circ[$.

Dann folgt

$$c = 0 \quad \text{auf} \quad]\tau|t_\circ].$$

ODE: x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$ (mit $\&(\tau)=\gamma$) (maximal).
x löst $\&^\bullet = f(\&)$ (mit $\&(\tau)=\gamma$) (maximal).
$f^\flat$.

Ersterstellung: 26/02/14 **Letzte Änderung: 04/03/15**

Für die Dynamisierung der Arbeit an "lokalen "Bereichen des LebensWerkes - im gegenwärtigen Fall wird "lokal" an ODE gearbeitet - ist es von geradezu vitaler Bedeutung sich auf "lokal "gültige Sprachregelungen zu einigen. Dabei ist es nicht so wichtig welche individuellen Sprachregelungen fest gelegt werden - vermutlich sind in anderem Kontext andere Vereinbarungen sinnvoller als die hier verwendeten - - entscheidend ist, dass überhaupt Sprachregelungen getroffen und rigoros eingehalten werden. Einige Vereinbarungen sind Allgemeingut - etwa $\mathbb{R}$ =Menge der reellen Zahlen oder was unter Stetigkeit oder Differenzierbarkeit reeller Funktionen einer Variablen zu verstehen ist - weitere Vereinbarungen sind blosse Notationen - es folgen hiervon einige - und es gibt Vereinbarungen die als mathematische Definition eingebracht werden. In diesem Abschnitt geht es um den Lösungsbegriff gewöhnlicher Differential-Gleichungen erster Ordnung. Einem allgemeinen Grundsatz folgend sollen so wenig Begriffe wie möglich eingesetzt werden und so wird auf eine Definition der Ordnung einer Differential-Gleichung verzichtet. Statt dessen geht es darum "x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$"festzulegen. Hierbei fällt auf, dass nicht nur die als Lösung fungierende Klasse x und zwei weitere Klassen t, F sondern auch ein anderwertig nicht verwendetes Symbol - nämlich "&"- das keine Klasse und auch keine Aussage der Mathematik ist, auftaucht. Das Symbol & wird verwendet, weil der Terminus "x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$" lediglich abkürzenden, geradezu symbolischen Charakter hat, dessen mathematische Bedeutung erst in der gleich zu erbringenden Definition festgelegt wird.

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&),$$

genau dann, wenn gilt:

1) x, F Funktion.

2) $\mathsf{dom}\, x$ echtes reelles Intervall.

3) x differenzierbar.

4) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, x$ gilt
$$x^\bullet(t) = F(t, x(t)).$$

Bemerkung. Die Definition wird bis auf Weiteres für Funktionen $F : D \to A^s$, $D \subseteq \mathbb{R} \times A^s$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, und $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $A = \mathbb{A}$, oder allgemeiner $A \subseteq \mathbb{A}$, eingesetzt. Es wird die Konvention $A^1 = A$ eingesetzt.

Bemerkung. Falls x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$, dann ist x differenzierbar und $x^\bullet(t)$ ist für alle $t \in \mathsf{dom}\, x$ eine Menge. Demnach gilt $(t, x(t)) \in \mathsf{dom}\, F$ für alle $t \in \mathsf{dom}\, x$.

Es sollen einige Aussagen über x, x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$, in dem Fall $\mathsf{dom}\, F \subseteq \mathbb{R} \times A^s$, $A \subseteq \mathbb{A}$, $1 \le s \in \mathbb{N}$, getroffen werden. Der einfache Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Es gelte:

→) x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$.

→) $1 \le s \in \mathbb{N}$.

→) $A \subseteq \mathbb{A}$.

→) $\mathsf{dom}\, F \subseteq \mathbb{R} \times A^s$.

Dann folgt “$x : \mathsf{dom}\, x \to \mathbb{A}^s$” .

Beispiel 1. Seien

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t,w) = 2 \cdot t \cdot w,$$

und

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = \exp(t^2).$$

Dann sind x, F Funktionen, $\mathsf{dom}\, x = \mathbb{R}$ ist echtes reelles Intervall, für $t \in \mathsf{dom}\, x = \mathbb{R}$ gilt $(t, x(t)) = (t, \exp(t^2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathsf{dom}\, F$ und für $t \in \mathsf{dom}\, x = \mathbb{R}$ gilt

$$x^\bullet(t) = 2 \cdot t \cdot \exp(t^2) = 2 \cdot t \cdot x(t) = F(t, x(t)),$$

so dass

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&),$$

gefolgert werden kann. □

Anhand zweier einfacher Merkmale kann x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$ ausgeschlossen werden. Der einfache Beweis bleibt den Lesern überlassen.

a) *Aus "¬(*$\mathsf{dom}\, x$ *echtes reelles Intervall)" folgt "¬(*x *löst* $\&^\bullet = F(t,\&)$*)".*

b) *Aus "*$t \in \mathsf{dom}\, x$*" und "*$(t, x(t)) \notin \mathsf{dom}\, F$*" folgt "¬(*$x$ *löst* $\&^\bullet = F(t,\&)$*)".*

Beispiel 2. Der Definitions-Bereich der Funktion

$$x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = 1 : t,$$

ist kein reelles Intervall. Also gilt

$$\neg(x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&)),$$

für alle F. □

Beispiel 3. Seien

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t,w) = 2 \cdot w : t,$$

und

$$F^* : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F^*(t,w) = 2 \cdot w : t,$$

und

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = t^2.$$

Die Funktionen F, F^* unterscheiden sich nur für $t = 0$:

$$F(0,w) = 2 \cdot w : 0 = 0, \quad w \in \mathbb{R}.$$

und da $(0,w) \notin \mathsf{dom}\, F$,

$$F^*(0,w) = \mathcal{U}, \quad w \in \mathbb{R},$$

Es gilt

$$\{(t, x(t)) : t \in \mathsf{dom}\, x\} = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\},$$

und somit gibt es $t \in \mathsf{dom}\, x$ - nämlich $t = 0$ - mit $(t, x(t)) \notin \mathsf{dom}\, F^*$. Es folgt

$$\neg(x \text{ löst } \&^\bullet = F^*(t,\&)).$$

Andererseits gilt

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&).$$

Damit ist gezeigt, dass die Lösungstheorie von $\&^\bullet = F(t,\&)$ sensibel von Änderungen im Definitions-Bereich der Funktion F der rechten Seite abhängt. □

Beispiel 4. Seien

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t, w) = -w : t,$$

und

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(t, w) = -w^2,$$

und .

$$x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = 1 : t.$$

Wie bereits in Beispiel 2 fest gestellt, kommt x nicht als Lösung von $\&^\bullet = F(t, \&)$ oder $\&^\bullet = G(t, \&)$ in Frage. Ungeachtet dessen gelten für die Einschränkungen von x auf $\left] -\infty | 0 \right[$

$$x_- : \left] -\infty | 0 \right[\to \mathbb{R}, \quad x_-(t) = 1 : t,$$

und auf $\left] 0 | +\infty \right[$,

$$x_+ : \left] 0 | +\infty \right[\to \mathbb{R}, \quad x_+(t) = 1 : t,$$

die Aussagen

$$x_- \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&) \quad \text{und} \quad x_- \text{ löst } \&^\bullet = G(t, \&),$$

und

$$x_+ \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&) \quad \text{und} \quad x_+ \text{ löst } \&^\bullet = G(t, \&).$$

So ist auch nachgewiesen, dass es zu einer Funktion mehrere Klassen F geben kann, so dass diese Funktion $\&^\bullet = F(t, \&)$ löst . □

Es gelte x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$. Dann ist jede Einschränkung von x auf ein echtes reelles Teil-Intervall von $\mathsf{dom}\,x$ wieder Lösung von $\&^\bullet = F(t,\&)$. Konsequenter Weise hat jede ODE $\&^\bullet = F(t,\&)$, die wenigstens eine Lösung hat, unendlich viele Lösungen. An diesem Umstand ändert sich auch nichts, wenn "Anfangswertprobleme" betrachtet werden.

a) Aus "x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$"
und "I echtes reelles Intervall"
und $I \subseteq \mathsf{dom}\,x$" folgt "$(x \downharpoonleft I)$ löst $\&^\bullet = F(t,\&)$".

b) Aus "x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$"
folgt "$\{\omega : \omega$ löst $\&^\bullet = F(t,\&)\}$ unendlich".

c) Aus "x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$" und "$t_\circ \in \mathsf{dom}\,x$"
folgt "$\{\omega : (\omega$ löst $\&^\bullet = F(t,\&)) \wedge (\omega(t_\circ) = x(t_\circ))\}$ unendlich".

<u>Beweis-Skizze</u>. a) Durch Einschränkung auf ein echtes reelles Intervall werden weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit noch die Gleichung zwischen Ableitung $\dot{x}(t)$ und $F(t,x(t))$ beeinflusst.

b) Das echte reelle Intervall $\mathsf{dom}\,x$ hat *unendlich viele verschiedene* echte reelle Teilintervalle und jede Einschränkung auf eines dieser unendlich vielen echten reellen Teilintervalle ergibt via a) eine weitere Lösung.

c) Wegen $t_\circ \in \mathsf{dom}\,x$ hat das echte reelle Intervall $\mathsf{dom}\,x$ *unendlich viele verschiedene* echte reelle Teilintervalle in denen $t_\circ$ liegt. Für jede Einschränkung von x auf eines dieser Teil-Intervalle I gilt nach a)

$$(x \downharpoonleft I) \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&),$$

und wegen $t_\circ \in I$ gilt $(x \downharpoonleft I)\,(t_\circ) = x(t_\circ)$. $\square$

Beispiel 5. Seien
$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad F(t, w) = -2w : t,$$
und
$$x : \left]0| + \infty\right[, \quad x(t) = 1 : t^2.$$
Ohne allzu viel Mühe ist
$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&),$$
zu erkennen. Für alle $a \in \left]0| + \infty\right[$ sei
$$x_a = (x \downharpoonleft \left]0|a\right[) : \left]0|a\right[\to \mathbb{R}, \quad x_a(t) = 1 : t^2,$$
die Einschränkung von x auf $\left]0|a\right[$. Dann gilt
$$x_a \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&). \quad a \in \left]0| + \infty\right[.$$
Darüber hinausgehend gilt $x_a \neq x_b$ für alle $a, b \in \left]0| + \infty\right[$ mit $a \neq b$ sowie $x_a(1) = 1$ für alle $a \in \left]0| + \infty\right[$, so dass
$$\{\omega : \omega \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&)\},$$
und
$$\{\omega : (\omega \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&)) \wedge (\omega(1) = 1)\}$$
in der Tat unendlich sind. $\square$

Ein etwas tiefliegenderes Problem als die Vererbung der Lösungseigenschaft auf Einschränkungen auf echte reelle TeilIntervalle ergibt sich durch die Frage inwieweit Vereinigungen von Lösungen wieder Lösungen sind.

a) Aus "x, y löst $\&^\bullet = F(t, \&)$"
und "$0 \neq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"
und "$x = y$ auf $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"
folgt "$x \cup y$ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$" .

b) Aus "$0 \neq X$"
und "$\forall \alpha \in X : \alpha$ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$"
und "$\forall \alpha, \beta \in X :$
$(0 \neq (\mathsf{dom}\, \alpha) \cap (\mathsf{dom}\, \beta)) \Rightarrow (\alpha = \beta$ auf $(\mathsf{dom}\, \alpha) \cap (\mathsf{dom}\, \beta))$"
folgt "$\bigcup X$ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$" .

c) Aus "$0 \neq X$"
und "$\forall \alpha \in X : \alpha$ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$"
und "$\forall \alpha, \beta \in X : (\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$"
folgt "$\bigcup X$ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$" .

Beweis-Skizze. a) Mit elementarer Mengenlehre stellt sich $x \cup y$ als Funktion heraus.. $0 \neq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$ stellt sicher, dass es sich bei $(\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y) = \mathsf{dom}\,(x \cup y)$ um ein echtes reelles Intervall handelt. Die Funktion $x \cup y$ legt via F die Ableitung von $x \cup y$ fest.

b) Mit elementarer Mengelehre zeigt sich, dass $\bigcup X$ eine Funktion ist. $0 \neq (\mathsf{dom}\, \alpha) \cap (\mathsf{dom}\, \alpha)$ für $\alpha, \beta \in X$ stellt sicher, dass es sich bei $\bigcup \{\mathsf{dom}\, \omega : \omega \in X\} = \mathsf{dom}\,(\bigcup X)$ um ein echtes reelles Intervall handelt. Die Funktion $\bigcup X$ legt via F die Ableitung von $\bigcup X$ fest.

c) folgt aus b). □

Ein Spezialfall des vorhergehenden Satzes liegt vor, wenn x, y löst $\&^\bullet = F(t, \&)$ und $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) = \{t_\circ\}$. Der einfache Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ x, y *löst* $\&^\bullet = F(t, \&)$.

$\rightarrow\!)$ $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) = \{t_\circ\}$.

$\rightarrow\!)$ $x(t_\circ) = y(t_\circ)$.

Dann folgt

$$x \cup y \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&).$$

Beispiel 6. Seien

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t, w) = |t| + \sqrt{|w|},$$

und

$$x : \rrbracket -\infty|0\rrbracket \to \mathbb{R}, \quad x(t) = -t^2,$$

und

$$y : \llbracket 0| +\infty\llbracket \to \mathbb{R}, \quad y(t) = t^2.$$

Dann gilt für alle $t \in \rrbracket -\infty|0\rrbracket$,

$$\begin{aligned} x^\bullet(t) &= -2 \cdot t = (-t) + (-t) = |t| + |t| \\ &= |t| + \sqrt{t^2} = |t| + \sqrt{|-t^2|} = |t| + \sqrt{|x(t)|} = F(t, x(t)), \end{aligned}$$

und für alle $t \in \llbracket 0| +\infty\llbracket$ gilt

$$\begin{aligned} y^\bullet(t) &= 2 \cdot t = t + t = |t| + |t| \\ &= |t| + \sqrt{t^2} = |t| + \sqrt{|t^2|} = |t| + \sqrt{|y(t)|} = F(t, y(t)), \end{aligned}$$

und ausserdem gilt

$$x(0) = 0 = y(0),$$

so dass sich dank des vorhergehenden Satzes die Aussage

$$x \cup y \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&),$$

ergibt. Ohne allzu viel Mühe kann

$$x \cup y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x \cup y)(t) = t \cdot |t|,$$

fest gestellt werden. □

Falls x löst $\&^\bullet = F(t, \&)$, so ist die Menge aller Lösungen von $\&^\bullet = F(t, \&)$ unendlich. In dieser unendlichen Menge sollen die nicht mehr fortsetzbaren Lösungen einen eigenen Namen bekommen.

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&) \text{ maximal}$$

genau dann, wenn gilt:

1) μ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$.

2) $\forall \alpha : ((\alpha \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&)) \wedge (\mu \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mu)$.

In zwei einfachen Fällen liegt mit Sicherheit eine maximale Lösung von $\&^\bullet = F(t, \&)$ vor. Der Beweis dieser und einer weiteren Aussage gleibt den Lesern überlassen.

a) *Aus "μ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$ maximal"*
und "x löst $\&^\bullet = F(t, \&)$"
und "$\mu \subseteq x$" *folgt "$x = \mu$".*

b) *Aus "μ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$"*
und "$\mathsf{dom}\, \mu = \{t : (\exists \Omega : (t, \Omega) \in \mathsf{dom}\, F)\}$"
folgt "μ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$ maximal".

c) *Aus "μ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$"*
und "$\mathsf{dom}\, \mu = \mathbb{R}$"
folgt "μ löst $\&^\bullet = F(t, \&)$ maximal".

Beispiel 7. Seien

$$F : \left]0\right| + \infty\left[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t, w) = \ln t + w : (2 \cdot t) + 1,$$

und

$$\mu : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad \mu(t) = 2 \cdot t \cdot (\ln t - 1).$$

Dann gilt für $t \in \mathsf{dom}\,\mu = \left]0\right| + \infty\left[$,

$$\begin{aligned}
\mu^\bullet(t) &= 2 \cdot (\ln t - 1) + 2 \cdot t \cdot (1 : t) = 2 \cdot \ln t = \ln t + \ln t \\
&= \ln t + (\ln t - 1) + 1 = \ln t + (2 \cdot t) \cdot (\ln t - 1)) : (2 \cdot t) + 1 \\
&= (2 \cdot t \cdot (\ln t - 1)) : (2 \cdot t) + 1 \\
&= \ln t + \mu(t) : (2 \cdot t) + 1 = F(t, \mu(t)),
\end{aligned}$$

und aus Weiterem folgt

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&).$$

Via $\mathsf{dom}\,F = \left]0\right| + \infty\left[\times \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathsf{dom}\,\mu = \left]0\right| + \infty\left[&= \{t : (\exists \Omega : (t, \Omega) \in \left]0\right| + \infty\left[\times \mathbb{R})\} \\
&= \{t : (\exists \Omega : (t, \Omega) \in \mathsf{dom}\,F)\},
\end{aligned}$$

so dass

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = F(t, \&) \text{ maximal.}$$

$\square$

Ob sich Lösungen $\&^\bullet = F(t, \&)$ "schneiden" oder "nicht schneiden" spielt gelegentlich eine nicht zu unterschätzende Rolle. Mit dem elementaren binären Durchschnitt $\cap$ kann das "(Nicht-)Schneiden" von Funktionen - also nicht nur von Lösungen von Differential-Gleichungen - einfach beschrieben werden.

Aus "g, h Funktion" und ...

a) ... und "$0 \neq g \cap h$" folgt "$\exists t \in (\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, h) : g(t) = h(t)$" .

b) ... und "$t \in (\mathsf{dom}\, g) \cup (\mathsf{dom}\, h)$" und "$g(t) = h(t)$"
folgt "$0 \neq g \cap h$" .

c) ... und "$g \cap h = 0$" folgt "$\forall \tau \in (\mathsf{dom}\, g) \cup (\mathsf{dom}\, h) : g(\tau) \neq h(\tau)$" .

d) ... und "$\forall \tau \in (\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, h)$: $g(\tau) \neq h(\tau)$" folgt "$0 = g \cap h$" .

Beweis. Da g, h Funktionen sind gilt

$$g = \{(t, g(t)) : t \in \mathsf{dom}\, g\}, \quad h = \{(t, h(t)) : t \in \mathsf{dom}\, h\}. \tag{1}$$

Falls $g \cap h \neq 0$ ergibt sich aus (1) ohne viel Mühe die Existenz von $t \in (\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, h)$ mit $g(t) = h(t)$. a)

Falls $t \in (\mathsf{dom}\, g) \cup (\mathsf{dom}\, h)$ und falls $g(t) = h(t)$ gilt, so folgt mit elementaren mengentheoretischen Argumenten $t \in (\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, h)$ und hieraus folgt via (1) schnell $(t, g(t)) \in g$, $(t, h(t)) \in h$ und wegen $g(t) = h(t)$ gilt natürlich $(t, g(t)) = (t, h(t))$ und somit $(t, g(t)) \in g, (t, g(t)) \in h$, also $(t, g(t)) \in g \cap h$ und somit $0 \neq g \cap h$. b)

cd) folgen via Negation aus ab).

$\square$

Mitunter sind Lösungen von “AnfangsWertProblemen ”- gelegentlich wird “AnfangsWertProblem” als “AWP” abgekürzt - von Interesse. Dabei handelt es sich um die Aufgabe, Lösungen von $\&^\bullet = F(t,\&)$ *zu finden, die an einer bestimmten Stelle* τ *einen bestimmten Wert* γ *annehmen. Hierfür wird die nunmehrige Zeichenkette geschaffen, in der nicht nur die Funktionen* x, F *sondern auch die Klassen* τ, γ *auftreten.*

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(\tau) = \gamma,$$

genau dann, wenn gilt:

1) x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$.

2) $\tau \in \mathsf{dom}\, x$.

3) $x(\tau) = \gamma$.

Bemerkung. Die Bedingung $\tau \in \mathsf{dom}\, x$ schließt $\gamma = \mathcal{U}$ aus und garantiert $\gamma \in \mathsf{ran}\, x$.

Beispiel 8. Seien

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t,w) = w - t^2,$$

und

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = t^2 + 2 \cdot t + 2.$$

Dann gilt

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(0) = 2\ ,$$

und

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(-1) = 1,$$

so dass eine Funktion x mehrere AWPe bei gleich bleibender rechter Seite F lösen kann. □

Beispiel 9. Seien

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t,w) = -2\sqrt{|w|^3},$$

und

$$x : [1| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad y(t) = 1 : (1+t)^2.$$

Dann gilt

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(1) = 1 : 4,$$

und es stellt sich heraus, dass es auch Lösungen von AnfansWertProblemen gibt, bei denen der vorgeschriebene Funktions-Wert in einem Randpunkt des Definitions-Bereichs der Lösung angenommen wird. □

Falls x löst $\&^\bullet = F(t,\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$, so gibt es entsprechend vorehriger Untersuchungen unendlich viele Lösungen von $\&^\bullet = F(t,\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$. Gelegentlich sind auch hier maximale Lösungen von besonderem Interesse.

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(\tau) = \gamma \text{ maximal},$$

genau dann, wenn gilt:

1) μ löst $\&^\bullet = F(t,\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$.

2) μ löst $\&^\bullet = F(t,\&)$ maximal.

Beispiel 10. Seien

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t,w) = -t + w,$$

und

$$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = -1 - t + \exp t.$$

Dann gilt $\mathsf{dom}\,\mu = \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathsf{dom}\,\mu = \mathbb{R}$ gilt

$$\mu^\bullet(t) = -1 + \exp t = (-1 - t + \exp t) + t = \mu(t) + t = t + \mu(t) = F(t,\mu(t)),$$

so dass nach Weiterem

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&)$$

folgt. Wegen $\mathsf{dom}\,x = \mathbb{R}$ gilt sogar

$$x \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ maximal}.$$

Aus $\mu(0) = 0$ ergibt sich noch

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(0) = 0,$$

und es kann auf

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = F(t,\&) \text{ mit } \&(0) = 0 \text{ maximal},$$

geschlossen werden.

Gelegentlich sind konstante Lösungen von $\&^\bullet = F(t,\&)$ besonders wichtig. Die Untersuchungen sollen auf $\mathbb{C}^s$-wertige konstante Funktionen beschränkt werden. In diesen Fällen kann der Beweis der nachfolgenden Aussage den Lesern überlassen werden.

a) Aus "$1 \leq s \in \mathbb{N}$"
und "F Funktion"
und "$\gamma \in \mathbb{C}^s$"
und "I echtes reelles Intervall"
und "$\forall \tau \in I : F(\tau,\gamma) = \vec{0} \in \mathbb{A}^s$"

folgt "$\gamma^{\mathbf{on}}I$ löst $\&^\bullet = F(t,\&)$" .

b) Aus "$1 \leq s \in \mathbb{N}$"
und "$\gamma \in \mathbb{C}^s$"
und "$\tau \in I$"
und "$F(\tau,\gamma) \neq \vec{0} \in \mathbb{A}^s$"

folgt "$\neg(\ \gamma^{\mathbf{on}}I$ löst $\&^\bullet = F(t,\&))$" .

Beweis-Skizze. a) Der entscheidende Beweis-Schritt besteht in der Verifikation von

$$(\gamma^{\mathbf{on}}I)^\bullet(t) = \vec{0} = F(t,\gamma) = F(t,(\gamma^{\mathbf{on}}I)(t)), \quad t \in I.$$

b) Entsprechend Definition brauchen nur jene Fälle näher untersucht werden, für die zusätzlich "F Funktion" und "$\mathsf{dom}\,(\gamma^{\mathbf{on}}I) = I$ =echtes reelles Intervall" gilt. In diesen Fällen ist via $\tau \in I$ der entscheidende Beweis-Schritt die Verifikation von

$$(\gamma^{\mathbf{on}}I)^\bullet(\tau) = \vec{0} \neq F(\tau,\gamma) = F(t,(\gamma^{\mathbf{on}}I)(t)).$$

$\square$

In einigen Fällen werden autonome Differential-Gleichungen untersucht. Hierbei ist die rechte Seite von t unabhängig.

$$x \text{ löst } \&^\bullet = f(\&)$$

genau dann, wenn gilt:

1) x, f Funktion.

2) $\mathsf{dom}\, x$ echtes reelles Intervall.

3) x differenzierbar.

4) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, x$ gilt
$$x^\bullet(t) = F(t, x(t)).$$

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = f(\&) \text{ maximal}$$

genau dann, wenn gilt:

1) μ löst $\&^\bullet = f(\&)$.

2) $\forall \alpha : ((\alpha \text{ löst } \&^\bullet = f(\&)) \wedge (\mu \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mu)$.

$$x \text{ löst } \&^\bullet = f(\&) \text{ mit } x(\tau) = \gamma$$

genau dann, wenn gilt:

1) x löst $\&^\bullet = f(\&)$.

2) $\tau \in \mathsf{dom}\, x$.

3) $x(\tau) = \gamma$.

$$\mu \text{ löst } \&^\bullet = f(\&) \text{ mit } \&(\tau) = \gamma \text{ maximal}$$

genau dann, wenn gilt:

1) μ löst $\&^\bullet = f(\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$.

2) μ löst $\&^\bullet = f(\&)$ maximal.

Um den Fall x löst $\&^\bullet = f(\&)$ nicht immer eigens untersuchen zu müssen, ist ein kleiner Kunstgriff hilfreich. Wir definieren

$$f^\flat : \mathbb{R} \times \mathsf{dom}\, f \to \mathcal{U}, \quad f^\flat(t, w) = f(w),$$

und stellen dann unter Überlassung des einfachen Beweises an die Leser fest:

a) "x löst $\&^\bullet = f(\&)$" genau dann, wenn "x löst $\&^\bullet = f^\flat(t, \&)$" .

b) "x löst $\&^\bullet = f(\&)$ maximal"
genau dann, wenn "x löst $\&^\bullet = f^\flat(t, \&)$ maximal" .

c) "x löst $\&^\bullet = f(\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$"
genau dann, wenn "x löst $\&^\bullet = f^\flat(t, \&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$" .

d) "x löst $\&^\bullet = f(\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$ maximal"
genau dann, wenn "x löst $\&^\bullet = f^\flat(t, \&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$ maximal" .

Beispiel 11. Seien

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(w_0, w_1) = (-w_1, w_0),$$

und

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x(t) = (\cos t, \sin t).$$

Dann sind x, f Funktionen und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x^\bullet(t) &= (x_0, x_1)^\bullet(t) = ((x_0)^\bullet, (x_1)^\bullet)(t) = ((x_0)^\bullet(t), (x_1)^\bullet(t)) \\ &= (\cos^\bullet t, \sin^\bullet t) = (-\sin t, \cos t) = (-x_1(t), x_0(t)) = f(x_0(t), x_1(t)), \end{aligned}$$

so dass nach Weiterem

$$x \text{ löst } \&^\bullet = f(\&) \text{ mit } \&(0) = (1, 0) \text{ maximal},$$

folgt. Es gilt

$$f^\flat : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f^\flat(t, w_0, w_1) = (-w_1, w_0).$$

und

$$x \text{ löst } \&^\bullet = f^\flat(t, \&) \text{ mit } \&(0) = (1, 0) \text{ maximal}.$$

□

Bei autonomen Differential-Gleichungen kann bei Lösungen "das Argument verschoben werden". In diesem und in anderen Zusammenhängen sind unter anderem die Notationen

$$\alpha +_\in E = \{\alpha + \lambda : \lambda \in E\}$$

und

$$x(\alpha + .) = \{(t, \omega) : (\alpha + t, \omega) \in x\},$$

hilfreich. Für $x : D \to B$ gilt offenbar

$$x(\alpha + .) : (-\alpha) +_\in D \to B, \quad x(\alpha + .)(t) = x(\alpha + t).$$

Es gelte:

→) x löst $\&^\bullet = f(\&)$.

→) $p \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$x(p + .)$ löst $\&^\bullet = f(\&)$".

<u>Beweis-Skizze</u>. Der entscheidende Beweis-Schritt besteht in der Verifikation der Umformungskette

$$(x(p + .))^\bullet(t) = x^\bullet(p + t) = f(x(p + t)) = f(x(p + .)(t)),$$

für alle $t \in \mathsf{dom}\,(x(p + .)) = -p +_\in \mathsf{dom}\, x$ =echtes reelles Intervall. □

Das Herumschieben des Argumengs von Lösungen kann ohne Weiteres auf AWPe erweitert werden. Der Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Es gelte:

→) x löst $\&^\bullet = f(\&)$ mit $\&(\tau) = \gamma$.

→) $\sigma \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$x((\tau - \sigma) + .)$ löst $\&^\bullet = f(\&)$ mit $\&(\sigma) = \gamma$".

<u>Beweis-Skizze</u>. Dank des vorhergehenden Satzes löst $x((\tau - \sigma) + .)$ die ODE $\&^\bullet = f(\&)$. Auch gilt entsprechend Voraussetzung $x(\tau) = \gamma$ mit $\tau \in \mathsf{dom}\, x$. Es folgt $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ und somit wegen $\tau \in \mathsf{dom}\, x$,

$$\sigma = (\sigma - \tau) + \tau = -(\sigma - \tau) + \tau \in -(\sigma - \tau) +_\in \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\,(x((\tau - \sigma) + .)),$$

und

$$x((\tau - \sigma) + .)(\sigma) = x((\tau - \sigma) + \sigma) = x(\tau) = \gamma.$$

□

- **C. Bandelow**, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **H.B. Mann & D.R. Whitney**, *On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947).
- **R. Mlitz**, *Analysis 1.2.3*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt*. Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.