Suite IV - Die Zerrissene

Teil 4: Essays 291-299

Meinem Vater

Beiträge zum EK: Kombinatorik.

$\mathcal{U}_x$.

Das Zählmaß #.

cup. cap. stm. Dlt.

MSC2010: 28A10, 08-01, 05A10.

Andreas Unterreiter

19. Juni 2015

Mengenlehre: Weiteres über $x \times y$.

Ersterstellung: 05/03/14 **Letzte Änderung: 05/03/14**

291-1. In längst fälliger Aufarbeitung der Grundlagen der Analysis wird nun mit der Überarbeitung "meiner" Standardliteratur begonnen. Dabei stellt sich nicht nur heraus, dass erstaunlich viele der dort zu findenden Resultate bereits Eingang in das LebensWerk gefunden haben. Daneben gibt es Etliches, das noch der Einarbeitung bedarf. Die folgenden beiden Resultate gehören dazu.

291-1(Satz) *Aus "$x = y$" folgt "$x \times y = y \times x$".*

Beweis **291-1** `VS` gleich $x = y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = y$"
folgt: $y = x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x = y$" und
aus `1` "$y = x$"
folgt via **91-1**: $x \times y = y \times x$.

□

291-2. Klarer Weise folgt aus $x \times y = y \times x$ nur in nicht-trivialen Fällen $x = y$.

291-2(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $x \times y = y \times x$.

$\rightarrow)$

$0 \neq x \times y$.

oder

$0 \neq y \times x$.

oder

$0 \neq x, y$.

oder

$0 \neq y, x$.

Dann folgt:

a) $x = y$.

b) $0 \neq x, y$.

Beweis **291-2**

`1.1:` Nach "$\rightarrow)$ *oder*" gilt:

$$0 \neq x \times y \vee 0 \neq y \times x \vee 0 \neq x, y \vee 0 \neq y, x.$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq x \times y$.

`2:` Aus $\rightarrow)$ "$x \times y = y \times x$" und aus `1.1.1.Fall` "$0 \neq x \times y$" folgt via **ISBCP**: $(x = y) \wedge (0 \neq x, y)$.

...

Beweis **291-2** ...

`Fallunterscheidung`

...

`1.1.2.Fall` $0 \neq y \times x.$

`2:` Aus →) "$x \times y = y \times x$" und
aus `1.1.2.Fall` "$0 \neq y \times x$"
folgt via **ISBCP**: $(x = y) \wedge (0 \neq x, y).$

`1.1.3.Fall` $0 \neq x, y.$

`2:` Aus →) "$x \times y = y \times x$" und
aus `1.1.3.Fall` "$0 \neq x, y$"
folgt via **ISBCP**: $(x = y) \wedge (0 \neq x, y).$

`1.1.4.Fall` $0 \neq y, x.$

`2:` Aus →) "$x \times y = y \times x$" und
aus `1.1.4.Fall` "$0 \neq y, x$"
folgt via **ISBCP**: $(x = y) \wedge (0 \neq x, y).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1` | "$(x = y) \wedge (0 \neq x, y)$"

`2.a):` Aus `A1` folgt: $x = y.$

`2.b):` Aus `A1` folgt: $0 \neq x, y.$

□

Literatur.

R.Mlitz, Analysis 1.2.3, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.

Mengenlehre: transitiv, antiSymmetrisch, symmetrisch.

Ersterstellung: 15/03/14 **Letzte Änderung: 15/03/14**

292-1. Ergänzend zu den Ausführungen vergangener Essays - etwa **#30** - werden hier äquivalente Bedingungen nachgereicht, die (Anti-)Symmetrie und Transitivität garantieren. Die Innovation gegenüber den entsprechenden Definitionen besteht darin, dass auf Voraussetzungen wie "$\alpha \in \mathcal{U}$" - oder "α Menge" - verzichtet werden kann.

292-1(Satz)

a) *"M transitiv" genau dann, wenn*
"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma)$".

b) *"M antiSymmetrisch" genau dann, wenn*
"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$".

c) *"M symmetrisch" genau dann, wenn*
"$\forall \alpha, \beta : (\alpha\_M\_\beta) \Rightarrow (\beta\_M\_\alpha)$".

Beweis **229-1** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich M transitiv.

Thema1 $(\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)$.

Aus VS gleich "M transitiv",
aus Thema1"$\alpha\_M\_\beta \ldots$" und
aus Thema1"$\ldots \beta\_M\_\gamma$"
folgt via **30-38**: α_M_γ.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma)$.

<u>Beweis **292-1**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha\_M\_\beta)\wedge(\beta\_M\_\gamma))\Rightarrow(\alpha\_M\_\gamma)$.

> `Thema1` $(\delta,\epsilon,\phi\in\mathcal{U})\wedge(\delta\_M\_\epsilon)\wedge(\epsilon\_M\_\phi)$
> Aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha\_M\_\beta)\wedge(\beta\_M\_\gamma))$
> $\Rightarrow(\alpha\_M\_\gamma)$" und
> aus `Thema1`"$\ldots(\delta\_M\_\epsilon)\wedge(\epsilon\_M\_\phi)$"
> folgt: δ_M_ϕ.

Ergo `Thema1`: $\forall\delta,\epsilon,\phi:((\delta,\epsilon,\phi\in\mathcal{U})\wedge(\delta\_M\_\epsilon)\wedge(\epsilon\_M\_\phi))\Rightarrow(\epsilon\_M\_\phi)$.

Konsequenz via **30-30(Def)**: M transitiv in $\mathcal{U}$.
Konsequenz via **30-30(Def)**: M transitiv.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich M antiSymmetrisch.

> `Thema1` $(\alpha\_M\_\beta)\wedge(\beta\_M\_\alpha)$.
> Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch" und
> aus `Thema1`"$\alpha\_M\_\beta\ldots$" und
> aus `Thema1`"$\ldots\beta\_M\_\alpha$"
> folgt via **30-47**: $\alpha=\beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta:((\alpha\_M\_\beta)\wedge(\beta\_M\_\alpha))\Rightarrow(\alpha=\beta)$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta:((\alpha\_M\_\beta)\wedge(\beta\_M\_\alpha))\Rightarrow(\alpha=\beta)$.

> `Thema1` $(\gamma,\delta\in\mathcal{U})\wedge(\gamma\_M\_\delta)\wedge(\delta\_M\_\gamma)$
> Aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta:((\alpha\_M\_\beta)\wedge(\beta\_M\_\alpha))\Rightarrow(\alpha=\beta)$" und
> aus `Thema1`"$\ldots(\gamma\_M\_\delta)\wedge(\delta\_M\_\gamma)$"
> folgt: $\gamma=\delta$.

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma,\delta:((\gamma,\delta\in\mathcal{U})\wedge(\gamma\_M\_\delta)\wedge(\delta\_M\_\gamma))\Rightarrow(\gamma=\delta)$.

Konsequenz via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.
Konsequenz via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch.

Beweis **292-1** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich M symmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	α_M_β.
Aus `VS` gleich "M symmetrisch" und	
aus `Thema1` "α_M_β"	
folgt via **30-57**:	β_M_α.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta:(\alpha\_M\_\beta)\Rightarrow(\beta\_M\_\alpha)$.

`c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta:(\alpha\_M\_\beta)\Rightarrow(\beta\_M\_\alpha)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$(\gamma,\delta\in\mathcal{U})\wedge(\gamma\_M\_\delta)$
Aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta:(\alpha\_M\_\beta)\Rightarrow(\beta\_M\_\alpha)$" und	
aus `Thema1` "$\ldots\gamma\_M\_\delta$"	
folgt:	δ_M_γ.

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma,\delta:((\gamma,\delta\in\mathcal{U})\wedge(\gamma\_M\_\delta))\Rightarrow(\delta\_M\_\gamma)$.

Konsequenz via **30-49(Def)**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.
Konsequenz via **30-49(Def)**: M symmetrisch.

292-2. Vorbereitend für "Äquivalenzrelationen in z" werden Klassen betrachtet, die reflexiv oder transitiv oder symmetrisch - oder mehreres hiervon gleichzeitig - in z sind.

292-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *reflexiv in* z.

$\rightarrow$) $p \in z$.

Dann folgt:

a) $p \in z \cap M[\{p\}]$.

b) $0 \neq z \cap M[\{p\}]$.

Beweis **292-2**

1: Aus $\rightarrow$) "M reflexiv in z" und
aus $\rightarrow$) "$p \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: p_M_p.

2: Aus 1
folgt: $(p, p) \in M$.

3: Aus 2 "$(p, p) \in M$"
folgt via **9-15**: $p \in M[\{p\}]$.

4.a): Aus $\rightarrow$) "$p \in z$" und
aus 3 "$p \in M[\{p\}]$"
folgt via **2-2**: $p \in z \cap M[\{p\}]$.

5.b): Aus 4.a) "$p \in z \cap M[\{p\}]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq z \cap M[\{p\}]$.

□

292-3. Ein erster Hilfssatz zielt auf den Nachweis ab, dass zwei Äquivalenzklassen entweder gleich sind oder leeren binären Durchschnitt haben.

292-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv in z.*

$\rightarrow)$ *M symmetrisch in z.*

$\rightarrow)$ $p, q \in z$.

$\rightarrow)$ $0 \neq (z \cap (M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

Dann folgt "$z \cap M[\{p\}] \subseteq z \cap M[\{q\}]$".

Beweis **292-3**

`Thema1` $\alpha \in z \cap M[\{p\}]$.

`2.1:` Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in z \cap M[\{p\}]$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in M[\{p\}])$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\ldots \Omega \in (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in z \cap M[\{p\}]) \wedge (\Omega \in z \cap M[\{q\}])$.

`3.2:` Aus `2.2` "$\ldots \alpha \in M[\{p\}]$"
folgt via **9-15**: $(p, \alpha) \in M$.

`4.1:` Aus `3.1` "$\Omega \in z \cap M[\{p\}] \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in z) \wedge (\Omega \in M[\{p\}])$.

`4.2:` Aus `3.1` "$\ldots \Omega \in z \cap M[\{q\}]$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in z) \wedge (\Omega \in M[\{q\}])$.

`4.3:` Aus `3.2`
folgt: p_M_α.

...

...

Beweis **292-3**

...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in z \cap M[\{p\}]$.

...

`5.1:` Aus `4.1`“$\ldots \Omega \in M[\{p\}]$”
folgt via **9-15**: $(p, \Omega) \in M$.

`5.2:` Aus `4.2`“$\ldots \Omega \in M[\{q\}]$”
folgt via **9-15**: $(q, \Omega) \in M$.

`5.3:` Aus →)“M symmetrisch in z”,
aus →)“$p \ldots \in z$”,
aus `2.2`“$\alpha \in z \ldots$” und
aus `4.3`“p_M_α”
folgt via **30-49(Def)**: α_M_p.

`6.1:` Aus `5.1`
folgt: p_M_Ω.

`6.2:` Aus `5.2`
folgt: q_M_Ω.

`7.1:` Aus →)“M transitiv in z”,
aus `2.2`“$\alpha \in z \ldots$”,
aus →)“$p \ldots \in z$”,
aus `4.1`“$\Omega \in z \ldots$”,
aus `5.3`“α_M_p” und
aus `6.1`“p_M_Ω”
folgt via **30-30(Def)**: α_M_Ω.

`7.2:` Aus →)“M symmetrisch in z”,
aus →)“$\ldots q \in z$”,
aus `4.1`“$\Omega \in z \ldots$” und
aus `6.2`“q_M_Ω”
folgt via **30-49(Def)**: Ω_M_q.

...

...

<u>Beweis **292-3**</u>

...

`Thema1` $\alpha \in z \cap M[\{p\}]$.

...

8: Aus →) " M transitiv in z ",
aus 2.2 " $\alpha \in z \ldots$ ",
aus 4.1 " $\Omega \in z \ldots$ ",
aus →) " $\ldots q \in z$ ",
aus 7.1 " α_M_Ω " und
aus 7.2 " Ω_M_q "
folgt via **30-30(Def)**: α_M_q.

9: Aus 8
folgt: $(\alpha, q) \in M$.

10: Aus 9 " $(\alpha, q) \in M$ "
folgt via **9-15**: $\alpha \in M[\{q\}]$.

11: Aus 2.2 " $\alpha \in z \ldots$ " und
aus 10 " $\alpha \in M[\{q\}]$ "
folgt via **2-2**: $\alpha \in z \cap M[\{q\}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z \cap M[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in z \cap M[\{q\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $z \cap M[\{p\}] \subseteq z \cap M[\{q\}]$.

□

292-4. Interessanter Weise muss hier M keine Äquivalenzrelation, sondern nur transitiv und symmetrisch sein.

292-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *transitiv in* z.

$\rightarrow$) M *symmetrisch in* z.

$\rightarrow$) $p, q \in z$.

$\rightarrow$) $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

Dann folgt "$z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$".

Beweis **292-4**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "M transitiv in z",
aus $\rightarrow$) "M symmetrisch in z",
aus $\rightarrow$) "$p, q \in z$" und
aus $\rightarrow$) "$0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$"
folgt via **292-3**: $z \cap M[\{p\}] \subseteq z \cap M[\{q\}]$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$p, q \in z$"
folgt: $q, p \in z$.

`1.3:` Via **KG**$\cap$ gilt:
$$(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}]).$$

`2:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$" und
aus `1.3` "$(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$"
folgt: $0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "M transitiv in z",
aus $\rightarrow$) "M symmetrisch in z",
aus `1.2` "$q, p \in z$" und
aus `2` "$0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$"
folgt via **292-3**: $z \cap M[\{q\}] \subseteq z \cap M[\{p\}]$.

`4:` Aus `1.1` "$z \cap M[\{p\}] \subseteq z \cap M[\{q\}]$" und
aus `3` "$z \cap M[\{q\}] \subseteq z \cap M[\{p\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$.

$\square$

292-5. Merkwürdiger Weise muss hier M nicht reflexiv in z sein.

292-5(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv in z.*

→) *M symmetrisch in z.*

→) *$p, q \in z$.*

Dann folgt

$$z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}] \textit{ oder } (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0.$$

Beweis **292-5**

`1:` Es gilt:
$$((z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0) \vee (0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0.$

`1.2.Fall` $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]).$

Aus →) "M transitiv in z",
aus →) "M symmetrisch in z",
aus →) "$p, q \in z$" und
aus `1.2.Fall` "$0 \neq (z \cap (M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$"
folgt via **292-4**: $z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}].$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]) \vee ((z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0).$$

□

Literatur.

R.Mlitz, Analysis 1.2.3, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.

Mengenlehre: $\bigcup x_{\mathrm{sngltn}} = x$. $\{0 : \lambda \in x\}$.
$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$. $\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

Ersterstellung: 17/03/14 **Letzte Änderung: 20/03/14**

293-1. Zu Beginn dieses Essays steht der Beweis zweier Ergänzungen zur Mengenlehre.

293-1(Satz)

a) *Aus* "$p \in x$" *folgt* "$p \in \{p\}$" *und* "$0 \neq \{p\}$".

b) $\bigcup x_{\mathrm{sngltn}} = x$.

Beweis **293-1** `a)` `VS` gleich $p \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `1`"p Menge"
folgt via **1-3**: $(p \in \{p\}) \wedge (0 \neq \{p\})$.

Beweis **293-1** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \bigcup x_{\mathrm{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \bigcup x_{\mathrm{sngltn}}$”
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : \alpha \in \Omega \in x_{\mathrm{sngltn}}$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x_{\mathrm{sngltn}}$”
folgt via **27-3**: $\exists \Psi : (\Omega = \{\Psi\}) \wedge (\Psi \in x)$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$” und
aus `3`“$\ldots \Omega = \{\Psi\} \ldots$”
folgt: $\alpha \in \{\Psi\}$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \{\Psi\}$”
folgt via **1-6**: $\alpha = \Psi$.

`6:` Aus `5`“$\alpha = \Psi$” und
aus `3`“$\ldots \Psi \in x$”
folgt: $\alpha \in x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup x_{\mathrm{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$\bigcup x_{\mathrm{sngltn}} \subseteq x$”

...

<u>Beweis **293-1**</u> `b)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x.$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \{\alpha\}.$

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
folgt via **27-3**: $\{\alpha\} \in x_{\text{sngltn}}.$

`3:` Aus `2.1`"$\alpha \in \{\alpha\}$" und
aus `2.2`"$\{\alpha\} \in x_{\text{sngltn}}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup x_{\text{sngltn}}.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup x_{\text{sngltn}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“} x \subseteq \bigcup x_{\text{sngltn}} \text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\bigcup x_{\text{sngltn}} \subseteq x$" und
aus `A2` gleich "$x \subseteq \bigcup x_{\text{sngltn}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup x_{\text{sngltn}} = x.$

$\square$

293-2. Mit der nun definierten, etwas exotisch wirkenden Klasse verkürzen sich spätere Beweise.

293-2(Definition)

$$\mathsf{293.0}(x) \;= \{0 : \lambda \in x\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = 0))\}.$$

293-3. Das "Element-Sein" in $\{0 : \lambda \in x\}$ nimmt eine interessante Form an. Hieraus folgen weitere Aussagen über $\{0 : \lambda \in x\}$.

293-3(Satz)

a) *"$p \in \{0 : \lambda \in x\}$" genau dann, wenn "$p = 0$" und "$0 \neq x$".*

b) $\{0 : \lambda \in x\} \subseteq \{0\}$.

c) *"$\{0 : \lambda \in x\} = 0$" genau dann, wenn "$x = 0$".*

d) *"$\{0 : \lambda \in x\} = \{0\}$" genau dann, wenn "$0 \neq x$".*

$\{0 : \lambda \in x\}$ **293-2(Def)**

Beweis **293-3** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in \{0 : \lambda \in x\}$.

1: Aus VS gleich "$p \in \{0 : \lambda \in x\}$"
folgt via **293-2(Def)**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p = 0)$.

2.1: Aus 1
folgt: $\boxed{p = 0}$

2.2: Aus 1"$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq x}$

<u>Beweis</u> **293-3** `a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(p = 0) \wedge (0 \neq x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p = 0 \ldots$"
folgt via **94-1**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`2:` Aus `1.2`"$\exists \Omega : \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$p = 0 \ldots$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p = 0)$.

`3:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `2`"$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p = 0)$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\omega = 0))\}$.

`4:` Aus `3`
folgt via **293-2(Def)**: $p \in \{0 : \lambda \in x\}$.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in \{0 : \lambda \in x\}$.
Aus `Thema1`"$\alpha \in \{0 : \lambda \in x\}$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha = 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{0 : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha = 0)$.
Konsequenz via **1-10**: $\{0 : \lambda \in x\} \subseteq \{0\}$.

<u>Beweis **293-3**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{0 : \lambda \in x\} = 0.$

`1:` Es gilt: $(0 \neq x) \vee (x = 0).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq x.$

`2:` Aus "$0 = 0$" und
aus `1.1.Fall` "$0 \neq x$"
folgt: $(0 = 0) \wedge (0 \neq x).$

`3:` Aus `2` "$(0 = 0) \wedge (0 \neq x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \in \{0 : \lambda \in x\}.$

`4:` Aus `3` "$0 \in \{0 : \lambda \in x\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{0 : \lambda \in x\}.$

`5:` Es gilt `4` "$0 \neq \{0 : \lambda \in x\}$".
Es gilt `VS` gleich "$\{0 : \lambda \in x\} = 0.$"
Ex falso quodlibet folgt: $x = 0.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = 0.$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x = 0.$

`Thema1` $\alpha \in \{0 : \lambda \in x\}.$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{0 : \lambda \in x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\alpha = 0)) \wedge (0 \neq x).$

`3:` Es gilt `2` "$\ldots 0 \neq x.$"
Es gilt `VS` gleich "$x = 0.$"
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{0 : \lambda \in x\}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{0 : \lambda \in x\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{0 : \lambda \in x\}).$

Konsequenz via **0-19**: $\{0 : \lambda \in x\} = 0.$

<u>Beweis</u> **293-3** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{0 : \lambda \in x\} = \{0\}$.

`1:` Aus **1-5**"$0 \in \{0\}$" und
aus `VS` gleich "$\{0 : \lambda \in x\} = \{0\}$"
folgt: $0 \in \{0 : \lambda \in x\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \in \{0 : \lambda \in x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(0 = 0) \wedge (0 \neq x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 \neq x$.

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $0 \neq x$.

`1:` Aus "$0 = 0$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \in \{0 : \lambda \in x\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \in \{0 : \lambda \in x\}$"
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq \{0 : \lambda \in x\}$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{0 : \lambda \in x\} \subseteq \{0\}$.

`4:` Aus `3`"$\{0 : \lambda \in x\} \subseteq \{0\}$" und
aus `2`"$\{0\} \subseteq \{0 : \lambda \in x\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{0 : \lambda \in x\} = \{0\}$.

$\square$

293-4. Mit der nun definierten Klasse werden spätere Untersuchungen über "Äquivalenzrelationen" vorbereitet.

293-4(Definition)

$$\mathsf{293.1}(z,x,y) = \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = x \cap y[\{\Omega\}]))\}.$$

293-5. Hier wird das "Element-Sein" in $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ untersucht.

293-5(Satz)

a) *Aus* "$p\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$" *folgt* "$p$ *Menge*" *und* "$\exists\Omega:(\Omega\in z)\wedge(p=x\cap y[\{\Omega\}])$".

b) *Aus* "$p\in z$" *und* "$x\cap y[\{p\}]$ *Menge*" *folgt* "$x\cap y[\{p\}]\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$".

c) *Aus* "$p\in z$" *und* "x *Menge*" *folgt* "$x\cap y[\{p\}]\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$".

d) *Aus* "$p\in z$" *und* "$y[\{p\}]$ *Menge*" *folgt* "$x\cap y[\{p\}]\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$".

$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **293-5** a) VS gleich $p\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$.

1.1: Aus VS gleich "$p\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$" folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

1.2: Aus VS gleich "$p\in\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$" folgt via **293-4(Def)**: $\boxed{\exists\Omega:(\Omega\in z)\wedge(p=x\cap y[\{\Omega\}])}$

<u>Beweis</u> **293-5** `b)` `VS` gleich $(p \in z) \wedge (x \cap y[\{p\}]$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in z$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (p = \Omega)$.

`2:` Aus `1`“$\ldots p = \Omega$”
folgt: $x \cap y[\{p\}] = x \cap y[\{\Omega\}]$.

`3:` Aus `1`“$\exists \Omega : \Omega \in z \ldots$” und
aus `2`“$x \cap y[\{p\}] = x \cap y[\{\Omega\}]$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (x \cap y[\{p\}] = x \cap y[\{\Omega\}])$.

`4:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \cap y[\{p\}]$ Menge” und
aus `3`“$\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (x \cap y[\{p\}] = x \cap y[\{\Omega\}])$”
folgt: $x \cap y[\{p\}] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = x \cap y[\{\Omega\}]))\}$.

`5:` Aus `4`“$x \cap y[\{p\}] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = x \cap y[\{\Omega\}]))\}$”
folgt via **293-4(Def)**:
$x \cap y[\{p\}] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\omega = x \cap y[\{\Omega\}]))\}$.

`c)` `VS` gleich $(p \in z) \wedge (x$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots x$ Menge”
folgt via **2-24**: $x \cap y[\{p\}]$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in z \ldots$” und
aus `1`“$x \cap y[\{p\}]$ Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cap y[\{p\}] \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

`d)` `VS` gleich $(p \in z) \wedge (y[\{p\}]$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y[\{p\}]$ Menge”
folgt via **2-24**: $x \cap y[\{p\}]$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in z \ldots$” und
aus `1`“$x \cap y[\{p\}]$ Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cap y[\{p\}] \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

$\square$

293-6. Hier wird $\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ in jenen Fällen vorgestellt, in denen wenigstens eine der drei Klassen x, y, z gleich 0 ist.

293-6(Satz)

a) $\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0$.

b) $\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

c) $\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \{0\}$.

d) "$\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = 0$" *genau dann, wenn* "$z = 0$".

e) "$\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0\}$" *genau dann, wenn* "$0 \neq z$".

f) $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

g) $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \{0\}$.

h) "$\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = 0$" *genau dann, wenn* "$z = 0$".

i) "$\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0\}$" *genau dann, wenn* "$0 \neq z$".

$\{0 : \lambda \in x\}$ **293-2(Def)**
$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **293-6** a)

Thema1 $\qquad \alpha \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\}$"
folgt via **293-5**: $\qquad \exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = x \cap y[\{\Omega\}])$.

3: Es gilt 2 "$\ldots \Omega \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad \alpha \notin \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\}$.

Ergo Thema1: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\qquad \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0$.

Beweis **293-6** `b)`

`Thema1.1` $\alpha\in\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha\in\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$”
folgt via **293-5**: $\exists\Omega:(\Omega\in z)\wedge(\alpha=x\cap 0[\{\Omega\}])$.

`3.1:` Aus 2“$\ldots\Omega\in z\ldots$”
folgt via **0-20**: $0\neq z$.

`3.2:` Aus 2
folgt: $\alpha=x\cap 0[\{\Omega\}]$.

`4:` $\alpha\stackrel{3.2}{=}x\cap 0[\{\Omega\}]\stackrel{\mathbf{8-12}}{=}x\cap 0\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}0$.

`5:` Aus 4“$\alpha=\ldots=0$” und
aus `3.1`“$0\neq z$”
folgt via **293-3**: $\alpha\in\{0:\lambda\in z\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\})\Rightarrow(\alpha\in\{0:\lambda\in z\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq\{0:\lambda\in z\}$”

...

<u>Beweis **293-6**</u> `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{0 : \lambda \in z\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{0 : \lambda \in z\}$"
folgt via **293-3**: $(\alpha = 0) \wedge (0 \neq z)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots 0 \neq z$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in z$.

`4:` $x \cap 0[\{\Omega\}] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} x \cap 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`5:` Aus `4`"$x \cap 0[\{\Omega\}] = \ldots = 0$"
folgt via **94-1**: $x \cap 0[\{\Omega\}]$ Menge.

`6:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in z$" und
aus `5`"$x \cap 0[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **293-5**: $x \cap 0[\{\Omega\}] \in \{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

`7:` Aus `2`"$\alpha = 0 \ldots$" und
aus `4`"$x \cap 0[\{\Omega\}] = \ldots = 0$"
folgt: $\alpha = x \cap 0[\{\Omega\}]$.

`8:` Aus `7`"$\alpha = x \cap 0[\{\Omega\}]$" und
aus `6`"$x \cap 0[\{\Omega\}] \in \{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$"
folgt: $\alpha \in \{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{0 : \lambda \in z\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2}\,\Big|\ \text{“}\{0 : \lambda \in z\} \subseteq \{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \{0 : \lambda \in z\}$" und
aus `A2` gleich "$\{0 : \lambda \in z\} \subseteq \{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

`c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

`1.2:` Via **293-3** gilt: $\{0 : \lambda \in z\} \subseteq \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\{x \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \{0\}$.

<u>Beweis **293-6**</u> `d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=\{0:\lambda\in z\}$.

`1.2:` Via **293-3** gilt: $(\{0:\lambda\in z\}=0)\Leftrightarrow(z=0)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=0)\Leftrightarrow(z=0)$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=\{0:\lambda\in z\}$.

`1.2:` Via **293-3** gilt: $(\{0:\lambda\in z\}=\{0\})\Leftrightarrow(0\neq z)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\{x\cap 0[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=\{0\})\Leftrightarrow(0\neq z)$.

`f)`

`Thema1.1` $\alpha\in\{0\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha\in\{0\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$”
folgt via **293-13**: $\exists\Omega:(\Omega\in z)\wedge(\alpha=0\cap y[\{\Omega\}])$.

`3.1:` Aus 2“$\ldots\Omega\in z\ldots$”
folgt via **0-20**: $0\neq z$.

`3.2:` Aus 2
folgt: $\alpha=0\cap y[\{\Omega\}]$.

`4:` $\alpha\stackrel{\mathbf{3.2}}{=}0\cap y[\{\Omega\}]\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}0$.

`5:` Aus 4“$\alpha=\ldots=0$” und
aus `3.1`“$0\neq z$”
folgt via **293-3**: $\alpha\in\{0:\lambda\in z\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\{0\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\})\Rightarrow(\alpha\in\{0:\lambda\in z\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\{0\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq\{0:\lambda\in z\}$”

...

Beweis **293-6** `f)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \{0 : \lambda \in z\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{0 : \lambda \in z\}$"
folgt via **293-3**: $(\alpha = 0) \wedge (0 \neq z)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots 0 \neq z$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in z$.

`4:` Via **2-17** gilt: $0 \cap y[\{\Omega\}] = 0$.

`5:` Aus `4`"$0 \cap y[\{\Omega\}] = 0$"
folgt via **94-1**: $0 \cap y[\{\Omega\}]$ Menge.

`6:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in z$" und
aus `5`"$0 \cap y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **293-5**: $0 \cap y[\{\Omega\}] \in \{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

`7:` Aus `2`"$\alpha = 0 \ldots$" und
aus `4`"$0 \cap y[\{\Omega\}] = 0$"
folgt: $\alpha = 0 \cap y[\{\Omega\}]$.

`8:` Aus `7`"$\alpha = 0 \cap y[\{\Omega\}]$" und
aus `6`"$0 \cap y[\{\Omega\}] \in \{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$"
folgt: $\alpha \in \{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{0 : \lambda \in z\}) \Rightarrow (\alpha \in \{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\{0 : \lambda \in z\} \subseteq \{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \{0 : \lambda \in z\}$" und
aus `A2` gleich "$\{0 : \lambda \in z\} \subseteq \{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

`g)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

`1.2:` Via **293-3** gilt: $\{0 : \lambda \in z\} \subseteq \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \{0\}$.

<u>Beweis **293-6**</u> `h)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

`1.2:` Via **293-3** gilt: $(\{0 : \lambda \in z\} = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$.

`i)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0 : \lambda \in z\}$.

`1.2:` Via **293-3** gilt: $(\{0 : \lambda \in z\} = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq z)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\{0 \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq z)$.

□

293-7. In den hier vorgestellten Spezialfällen zeigt sich unter anderem, dass $\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ auch dann$= 0$ sein kann, wenn $0 \neq x, y, z$ gilt.

293-7(Satz)

a) $\{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = 0$.

b) $\{\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = \{0\}$.

c) $\{0 \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = \{0\}$.

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

<u>Beweis **293-7**</u> a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$"
folgt via **293-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\alpha = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\Omega\}])$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in z \ldots$"
folgt via **293-1**: $0 \neq \{\Omega\}$.

4: Aus 3 "$0 \neq \{\Omega\}$"
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[\{\Omega\}] = \mathcal{U}$.

5: $\alpha \stackrel{2}{=} \mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\Omega\}] \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \mathcal{U}[\{\Omega\}] \stackrel{4}{=} \mathcal{U}$.

6: Aus Thema1 "$\alpha \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$" und
aus 5 "$\alpha = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathcal{U} \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

7: Es gilt 6 "$\mathcal{U} \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$".
Via **94-1** gilt "$\mathcal{U} \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\})$.
Konsequenz via **0-19**: $\{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = 0$.

b)

Aus **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt via **293-6**: $\{\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = \{0\}$.

c)

Aus **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt via **293-6**: $\{0 \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = \{0\}$.

□

293-8. Es folgen weitere Aussagen über $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ und über $\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$. Insbesondere gilt nicht ohne Weiteres "$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=x\cap y[z]$".

293-8(Satz)

a) $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq\mathcal{P}(x\cap y[z])$.

b) $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq\mathcal{P}(x\cap\mathsf{ran}\,y)$.

c) $\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq x\cap y[z]$.

d) $\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq x\cap\mathsf{ran}\,y$.

e) *Aus* "$0\neq z$" *folgt* "$\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\neq\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[z]$".

f) *Aus* "$\forall\alpha:(\alpha\in z)\Rightarrow(x\cap y[\{\alpha\}]$ *Menge*)"
folgt "$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=x\cap y[z]$".

g) *Aus* "$\forall\alpha:(\alpha\in z)\Rightarrow(y[\{\alpha\}]$ *Menge*)"
folgt "$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=x\cap y[z]$".

h) *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=x\cap y[z]$".

i) *Aus* "y *Menge*" *folgt* "$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=x\cap y[z]$".

$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **293-8** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

`2:` Aus `1`“$\alpha \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$”
folgt via **293-5**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in z) \wedge (\alpha = x \cap y[\{\Omega\}]))$.

`3.1:` Aus `2`“α Menge...” und
aus `2`“$\ldots \alpha = x \cap y[\{\Omega\}]$”
folgt: $x \cap y[\{\Omega\}]$ Menge.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in z \ldots$”
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \subseteq z$.

`4:` Aus `3.2`“$\{\Omega\} \subseteq z$”
folgt via **8-9**: $y[\{\Omega\}] \subseteq y[z]$.

`5:` Aus `4`“$y[\{\Omega\}] \subseteq y[z]$”
folgt via **158-4**: $x \cap y[\{\Omega\}] \subseteq x \cap y[z]$.

`6:` Aus `5`“$x \cap y[\{\Omega\}] \subseteq x \cap y[z]$” und
aus `3.1`“$x \cap y[\{\Omega\}]$ Menge”
folgt via **0-26**: $x \cap y[\{\Omega\}] \in \mathcal{P}(x \cap y[z])$.

`7:` Aus `2`“$\ldots \alpha = x \cap y[\{\Omega\}]$” und
aus `6`“$x \cap y[\{\Omega\}] \in \mathcal{P}(x \cap y[z])$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}(x \cap y[z])$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(x \cap y[z]))$.
Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq \mathcal{P}(x \cap y[z])$.

<u>Beweis **293-8**</u> `b)`

`1.1:` Via **8-10** gilt: $y[z]\subseteq \mathsf{ran}\,y.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap y[z]).$

`2:` Aus `1.1`“$y[z]\subseteq \mathsf{ran}\,y$”
folgt via **158-4**: $x\cap y[z]\subseteq x\cap \mathsf{ran}\,z.$

`3:` Aus `2`“$x\cap y[z]\subseteq x\cap \mathsf{ran}\,y$”
folgt via **0-28**: $\mathcal{P}(x\cap y[z])\subseteq \mathcal{P}(x\cap \mathsf{ran}\,y).$

`4:` Aus `1.2`“$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap y[z])$” und
aus `3`“$\mathcal{P}(x\cap y[z])\subseteq \mathcal{P}(x\cap \mathsf{ran}\,y)$”
folgt via **0-6**: $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap \mathsf{ran}\,y).$

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap y[z]).$

`2:` Aus `1`“$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap y[z])$”
folgt via **1-19**: $\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq x\cap y[z].$

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap \mathsf{ran}\,y).$

`2:` Aus `1`“$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq \mathcal{P}(x\cap \mathsf{ran}\,y)$”
folgt via **1-19**: $\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\subseteq x\cap \mathsf{ran}\,y.$

`e)` `VS` gleich $0\neq z.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0\neq z$”
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[z]=\mathcal{U}.$

`1.2:` $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\overset{\mathbf{293-7}}{=}\bigcup 0\overset{\mathbf{1-14}}{=}0.$

`2.1:` $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[z]\overset{\mathbf{2-17}}{=}\mathcal{U}[z]\overset{1.1}{=}\mathcal{U}.$

`2.2:` Aus `1.2`“$\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=\ldots=0$” und
aus **0-18**“$0\neq\mathcal{U}$”
folgt: $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\neq\mathcal{U}.$

`3:` Aus `2.2`“$\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\neq\mathcal{U}$” und
aus `2.1`“$\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[z]=\ldots=\mathcal{U}$”
folgt: $\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}\neq\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[z].$

Beweis **293-8** `f)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (x \cap y[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

`Thema1.1` $\beta \in x \cap y[z]$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in x \cap y[z]$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in x) \wedge (\beta \in y[z])$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \beta \in y[z]$”
folgt via **8-7**: $\exists\Omega : (\Omega \in z) \wedge ((\Omega, \beta) \in y)$.

`4.1:` Aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (x \cap y[\{\Omega\}]$ Menge$)$” und
aus `3`“$\ldots \Omega \in z \ldots$”
folgt: $x \cap y[\{\Omega\}]$ Menge.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \beta) \in y$”
folgt via **9-15**: $\beta \in y[\{\Omega\}]$.

`5.1:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in z \ldots$” und
aus `4.1`“$x \cap y[\{\Omega\}]$ Menge”
folgt via **293-5**: $x \cap y[\{\Omega\}] \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

`5.2:` Aus `2`“$\beta \in x \ldots$” und
aus `4.2`“$\beta \in y[\{\Omega\}]$”
folgt via **2-2**: $\beta \in x \cap y[\{\Omega\}]$.

`6:` Aus `5.2`“$\beta \in x \cap y[\{\Omega\}]$” und
aus `5.1`“$x \cap y[\{\Omega\}] \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$”
folgt via **1-12**: $\beta \in \bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\beta : (\beta \in x \cap y[z]) \Rightarrow (\beta \in \bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$x \cap y[z] \subseteq \bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq x \cap y[z]$.

`2:` Aus `1.2`“$\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq x \cap y[z]$” und
aus `A1` gleich “$x \cap y[z] \subseteq \bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x \cap y[z]$.

<u>Beweis **293-8**</u> `g)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

> `Thema1` $\beta \in z$.
>
> `2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in z$” und
> aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$”
> folgt: $y[\{\beta\}]$ Menge.
>
> `3:` Aus `2`“$y[\{\beta\}]$ Menge”
> folgt via **2-24**: $x \cap y[\{\beta\}]$ Menge.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in z) \Rightarrow (x \cap y[\{\beta\}]$ Menge$)$.

Konsequenz via des bereits bewiesenen `f)`: $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x \cap y[z]$.

`h)` `VS` gleich x Menge.

> `Thema1` $\alpha \in z$.
>
> Aus `VS` gleich “x Menge”
> folgt via **2-24**: $x \cap y[\{\alpha\}]$ Menge.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (x \cap y[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

Konsequenz via des bereits bewiesenen `f)`: $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x \cap y[z]$.

□

`i)` `VS` gleich y Menge.

> `Thema1` $\alpha \in y$.
>
> `1:` Aus `VS` gleich “y Menge”
> folgt via **8-11**: $y[\{\alpha\}]$ Menge.
>
> `2:` Aus `1`“$y[\{\alpha\}$ Menge”
> folgt via **2-24**: $x \cap y[\{\alpha\}]$ Menge.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (x \cap y[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

Konsequenz via des bereits bewiesenen `f)`: $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x \cap y[z]$.

□

293-9. Es gilt $\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

<u>**293-9(Satz)**</u>

$$\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}.$$

$\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ **21-15(Def)**
$\{z \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ **293-4(Def)**

<u>Beweis **293-9**</u>

`Thema1.1` $\alpha \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$"
folgt via **293-5**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\alpha = \mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}]))$.

`3:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] = x[\{\Omega\}]$.

`4:` Aus `2` "$\ldots \alpha = \mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}]$" und
aus `3` "$\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] = x[\{\Omega\}]$"
folgt: $\alpha = x[\{\Omega\}]$.

`5:` Aus `2` "α Menge…" und
aus `4` "$\alpha = x[\{\Omega\}]$"
folgt: $x[\{\Omega\}]$ Menge.

`6:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in y \ldots$" und
aus `5` "$x[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **21-22**: $x[\{\Omega\}] \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

`7:` Aus `4` "$\alpha = x[\{\Omega\}]$" und
aus `6` "$x[\{\Omega\}] \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$"
folgt: $\alpha \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$"

…

<u>Beweis **293-9**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

2: Aus Thema1.1"$\alpha \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$"
folgt via **21-21**:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\alpha = x[\{\Omega\}] \text{ Menge}))$.

3: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] = x[\{\Omega\}]$.

4.1: Aus 2"$\ldots \alpha = x[\{\Omega\}] \ldots$" und
aus 3"$\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] = x[\{\Omega\}]$"
folgt: $\alpha = \mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}]$.

4.2: Aus 3"$\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] = x[\{\Omega\}]$" und
aus 2"$\ldots x[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt: $\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}]$ Menge.

5: Aus 2"$\ldots \Omega \in y \ldots$" und
aus 4.2"$\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **293-5**: $\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

6: Aus 4.1"$\alpha = \mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}]$" und
aus 5"$\mathcal{U} \cap x[\{\Omega\}] \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$"
folgt: $\alpha \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: | A1 | "$\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$" |

1.3: Aus A1 gleich "$\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$" und
aus A2 gleich "$\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

$\square$

293-10. In den hier vorgestellten Spezialfällen zeigt sich, dass $\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ auch dann$= 0$ sein kann, wenn $0 \neq x$ und $0 \neq y$ gilt.

293-10(Satz)

a) $\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0$.

b) $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0 : \lambda \in y\}$.

c) $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{0\}$.

d) *"$\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = 0$" genau dann, wenn "$y = 0$".*

e) *"$\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0\}$" genau dann, wenn "$0 \neq y$".*

f) $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0$.

g) $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = \{0\}$.

h) $\{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = 0$.

$\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ **21-15(Def)**

Beweis **293-10**

$\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ **293-4(Def)**

---

abcde)

1.1: Via **293-6** gilt: $\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0$.

1.2: Via **293-6** gilt: $\{\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0 : \lambda \in y\}$.

1.3: Via **293-6** gilt: $\{\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{0\}$.

1.4: Via **293-6** gilt: $(\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = 0) \Leftrightarrow (y = 0)$.

1.5: Via **293-6** gilt: $(\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq y)$.

1.6: Via **293-9** gilt: $\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

1.7: Via **293-9** gilt: $\{\mathcal{U} \cap 0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

...

<u>Beweis **293-10**</u> `abcde)` ...

`2.a):` Aus `1.1` und
aus `1.6`
folgt: $\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0.$

`2.b):` Aus `1.2` und
aus `1.7`
folgt: $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0 : \lambda \in y\}.$

`2.c):` Aus `1.3` und
aus `1.7`
folgt: $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \{0\}.$

`2.d):` Aus `1.4` und
aus `1.7`
folgt: $(\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = 0) \Leftrightarrow (y = 0).$

`2.e):` Aus `1.5` und
aus `1.7`
folgt: $(\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq y).$

`f)`
Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in 0\} = 0.$

`g)`
Aus **0-18**“$0 \neq \mathcal{U}$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\{0[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = \{0\}.$

`h)`

`1.1:` Via **293-7** gilt: $\{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = 0.$

`1.2:` Via **293-10** gilt: $\{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = 0.$

□

293-11. Es folgen weitere Aussagen über $\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ und über $\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$. Insbesondere gilt nicht ohne Weiteres "$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = x[y]$".

293-11(Satz)

a) $\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq x[y]$.

b) $\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

c) *Aus* "$0 \neq y$" *folgt* "$\bigcup\{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \neq \mathcal{U}[y]$".

d) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (x[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$" *folgt* "$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = x[y]$".

e) *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = x[y]$".

$\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$ **21-15(Def)**

Beweis **293-11**

1.1: Via **293-8** gilt: $\bigcup\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \mathcal{U} \cap x[y]$.

1.2: Via **293-8** gilt: $\bigcup\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathsf{ran}\, x$.

1.3: Via **293-8** gilt: $(0 \neq y) \Rightarrow (\{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \neq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}[y])$.

1.4: Via **293-8** gilt:
$(\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (x[\{\alpha\}] \text{ Menge})) \Rightarrow (\bigcup\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \mathcal{U} \cap x[y])$.

1.5: Via **293-8** gilt:
$(x \text{ Menge}) \Rightarrow (\bigcup\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \mathcal{U} \cap x[y])$.

1.6: Via **293-9** gilt: $\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

1.7: Via **293-9** gilt: $\{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

...

<u>Beweis **293-11**</u> ...

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.6
folgt: $$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \mathcal{U} \cap x[y].$$

2.2: Aus 1.2 und
aus 1.6
folgt: $$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathsf{ran}\, x.$$

2.3: Aus 1.3 und
aus 1.7
folgt: $$(0 \neq y) \Rightarrow (\{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \neq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}[y]).$$

2.4: Aus 1.4 und
aus 1.6
folgt:
$$(\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (x[\{\alpha\}] \text{ Menge})) \Rightarrow (\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \mathcal{U} \cap x[y]).$$

2.5: Aus 1.5 und
aus 1.6
folgt:
$$(x \text{ Menge}) \Rightarrow (\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \mathcal{U} \cap x[y]).$$

2.6: Via **2-17** gilt: $$\mathcal{U} \cap x[y] = x[y].$$

2.7: Via **2-17** gilt: $$\mathcal{U} \cap \mathsf{ran}\, x = \mathsf{ran}\, x.$$

2.8: Via **2-17** gilt: $$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[y] = \mathcal{U}[y].$$

...

Beweis **293-11** ...

`3.a):` Aus `2.1` und
aus `2.6`
folgt: $$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq x[y].$$

`3.b):` Aus `2.2` und
aus `2.7`
folgt: $$\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \subseteq \mathsf{ran}\, x.$$

`3.c):` Aus `2.3` und
aus `2.8`
folgt: $$(0 \neq y) \Rightarrow (\{\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} \neq \mathcal{U}[y]).$$

`3.d):` Aus `2.4` und
aus `2.6`
folgt: $$(\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (x[\{\alpha\}] \text{ Menge})) \Rightarrow (\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = x[y]).$$

`3.e):` Aus `2.5` und
aus `2.6`
folgt: $$(x \text{ Menge}) \Rightarrow (\bigcup\{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = x[y]).$$

□

Literatur.

R.Mlitz, Analysis 1.2.3, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.

M reflexiv in z ...
M transitiv *und* symmetrisch in z ...
ÄquivalenzRelation. ÄquivalenzRelation auf z.

Ersterstellung: 02/04/14 **Letzte Änderung: 03/04/14**

294-1. Kein Grundstudium der Mathematik kommt ohne "ÄquivalenzRelationen" aus. Dies ist Grund genug, derartige Struktruren in die Essays einzubringen.

294-1(Definition)

1) "R **ÄquivalenzRelation auf** z" genau dann, wenn gilt:

R Relation.

$\wedge$

R reflexiv in z.

$\wedge$

R transitiv in z.

$\wedge$

R symmetrisch in z.

2) "R **ÄquivalenzRelation**" genau dann, wenn gilt:

R ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

294-2. Ist R eine ÄquivalenzRelation auf z und gilt $x \subseteq z$, so ist R auch eine ÄquivalenzRelation auf x. Im Speziellen ist jede ÄquivalenzRelation eine ÄquivalenzRelation auf z:

294-2(Satz)

a) *Aus "R ÄquivalenzRelation auf z" und "$x \subseteq z$" folgt "R ÄquivalenzRelation auf x".*

b) *Aus "R ÄquivalenzRelation" folgt "R ÄquivalenzRelation auf z".*

Beweis **294-2** a) VS gleich $(R$ ÄquivalenzRelation auf $z) \wedge (x \subseteq z)$.

1: Aus VS gleich "R ÄquivalenzRelation auf $z\ldots$"
folgt via **294-1(Def)**: $(R$ Relation$) \wedge (R$ reflexiv in $z)$
$\wedge(R$ transitiv in $z) \wedge (R$ symmetrisch in $z)$.

2.1: Aus 1"$\ldots R$ reflexiv in $z\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots x \subseteq z$"
folgt via **30-20**: R reflexiv in x.

2.2: Aus 1"$\ldots R$ transitiv in $z\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots x \subseteq z$"
folgt via **30-31**: R transitiv in x.

2.3: Aus 1"$\ldots R$ symmetrisch in z" und
aus VS gleich "$\ldots x \subseteq z$"
folgt via **30-50**: R symmetrisch in x.

3: Aus 1"R Relation$\ldots$",
aus 2.1"R reflexiv in x",
aus 2.2"R transitiv in x" und
aus 2.3"R symmetrisch in x"
folgt via **294-1(Def)**: R ÄquivalenzRelation auf x.

b) VS gleich R ÄquivalenzRelation.

1: Aus VS gleich "R ÄquivalenzRelation"
folgt via **294-1(Def)**: R ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

2: Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

3: Aus 1"R ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$" und
aus 2"$z \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): R ÄquivalenzRelation auf z.

$\square$

294-3. Nun wird ein Kriterium für ÄquivalenzRelationen gegeben.

<u>**294-3(Satz)**</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *R ÄquivalenzRelation.*

`ii)` *"R Relation" und "R reflexiv" und "R transitiv" und "R symmetrisch".*

<u>Beweis **294-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich R ÄquivalenzRelation.

`1:` Aus `VS` gleich "R ÄquivalenzRelation"
folgt via **294-1(Def)**: R ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"R ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$"
folgt via **294-1(Def)**: $(R \text{ Relation}) \wedge (R \text{ reflexiv in } \mathcal{U}) \wedge (R \text{ transitiv in } \mathcal{U}) \wedge (R \text{ symmetrisch in } \mathcal{U})$.

`3.1:` Aus `2`
folgt: $\boxed{R \text{ Relation}}$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots R$ reflexiv in $\mathcal{U} \ldots$"
folgt via **30-17(Def)**: $\boxed{R \text{ reflexiv}}$

`3.3:` Aus `2`"$\ldots R$ transitiv in $\mathcal{U} \ldots$"
folgt via **30-30(Def)**: $\boxed{R \text{ transitiv}}$

`3.4:` Aus `2`"$\ldots R$ symmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-49(Def)**: $\boxed{R \text{ symmetrisch}}$

Beweis **294-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(R \text{ Relation}) \wedge (R \text{ reflexiv}) \wedge (R \text{ transitiv}) \wedge (R \text{ symmetrisch})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "... R reflexiv... "
folgt via **30-17(Def)**: R reflexiv in $\mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... R transitiv... "
folgt via **30-30(Def)**: R transitiv in $\mathcal{U}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "... R symmetrisch"
folgt via **30-49(Def)**: R symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "R Relation... ",
aus `1.2`"R reflexiv in $\mathcal{U}$",
aus `1.3`"R transitiv in $\mathcal{U}$" und
aus `1.3`"R symmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **294-1(Def)**: R ÄquivalenzRelation in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"R ÄquivalenzRelation in $\mathcal{U}$"
folgt via **294-1(Def)**: R ÄquivalenzRelation.

□

294-4. Nun wird Hiinreichendes für ÄquivalenzRelationen *auf* z bewiesen.

294-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R Relation.*

$\rightarrow\!)$ *R reflexiv in z.*

$\rightarrow\!)$ *R transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *R symmetrisch.*

Dann folgt "R ÄquivalenzRelation auf z".

Beweis **294-4**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "R transitiv"
folgt via **30-38**: R transitiv in z.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "R symmetrisch"
folgt via **30-57**: R symmetrisch in z.

`2:` Aus $\rightarrow\!)$ "R Relation",
aus $\rightarrow\!)$ "R reflexiv in z",
aus `1.1` "R transitiv in z" und
aus `1.2` "R symmetrisch in z"
folgt via **294-1(Def)**: R ÄquivalenzRelation in z.

$\square$

294-5. Die zIdentität ist eine ÄquivalenzRelation auf z. Allgemeiner gilt: Falls $x \subseteq z$, so ist id_z eine ÄquivalenzRelation in x.

294-5(Satz)

a) id_z *Relation.*

b) id_z *reflexiv in* z.

c) id_z *transitiv.*

d) id_z *symmetrisch.*

e) id_z *ÄquivalenzRelation auf* z.

f) *Aus "*$x \subseteq z$*" folgt "*id_z *ÄquivalenzRelation auf* x*".*

Beweis **294-5** a)

1: Via **20-11** gilt: id_z Funktion.

2: Aus 1"id_z Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: id_z Relation.

b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in z$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in z$"
folgt via **20-9**: $(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z$.

3: Aus 2
folgt: $\alpha\_\mathsf{id}_z\_\alpha$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{id}_z\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: id_z reflexiv in z.

<u>Beweis **294-5**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha\_\mathsf{id}_z\_\beta) \wedge (\beta\_\mathsf{id}_z\_\gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha\_\mathsf{id}_z\_\beta \ldots$”
folgt: $(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_z$.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta\_\mathsf{id}_z\_\gamma$”
folgt: $(\beta, \gamma) \in \mathsf{id}_z$.

`3.1:` Aus `2.1`“$(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_z$”
folgt via **20-10**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)$.

`3.2:` Aus `2.2`“$(\beta, \gamma) \in \mathsf{id}_z$”
folgt via **20-10**: $\beta = \gamma$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\alpha \in z \ldots$”
folgt via **20-9**: $(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z$.

`4.2:` Aus `3.1`“$\ldots \alpha = \beta$” und
aus `3.2`“$\beta = \gamma$”
folgt: $\alpha = \gamma$.

`5:` Aus `4.2`“$\alpha = \gamma$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \alpha) = (\alpha, \gamma)$.

`6:` Aus `5`“$(\alpha, \alpha) = (\alpha, \gamma)$” und
aus `4.1`“$(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z$”
folgt: $(\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_z$.

`7:` Aus `6`“$(\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_z$”
folgt: $\alpha\_\mathsf{id}_z\_\gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha\_\mathsf{id}_z\_\beta) \wedge (\beta\_\mathsf{id}_z\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{id}_z\_\gamma)$.

Konsequenz via **292-1**: id_z transitiv.

Beweis **294-5** d)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha\_\mathsf{id}_z\_\beta$.

2: Aus Thema1 “$\alpha\_\mathsf{id}_z\_\beta$”
folgt: $(\alpha,\beta)\in\mathsf{id}_z$.

3: Aus 2 “$(\alpha,\beta)\in\mathsf{id}_z$”
folgt via **20-10**: $(\alpha\in z)\wedge(\alpha=\beta)$.

4.1: Aus 3 “$\alpha\in z\ldots$”
folgt via **20-9**: $(\alpha,\alpha)\in\mathsf{id}_z$.

4.2: Aus 3 “$\ldots\alpha=\beta$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha,\alpha)=(\beta,\alpha)$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $(\beta,\alpha)\in\mathsf{id}_z$.

6: Aus 5
folgt: $\beta\_\mathsf{id}_z\_\alpha$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha,\beta:(\alpha\_\mathsf{id}_z\_\beta))\Rightarrow(\beta\_\mathsf{id}_z\_\alpha)$.

Konsequenz via **292-1**: id_z symmetrisch.

e)

Aus a) “id_z Relation”,
aus b) “id_z reflexiv in z”,
aus c) “id_z transitiv” und
aus d) “id_z symmetrisch”
folgt via **294-4**: id_z ÄquivalenzRelation auf z.

f) VS gleich $x\subseteq z$.

Aus e) “id_z ÄquivalenzRelation auf z” und
aus VS gleich “$x\subseteq z$”
folgt via **294-2**: id_z ÄquivalenzRelation auf x.

□

294-6. Ohne viel Mühe läßt sich Vorliegendes aus **294-5** folgern:

294-6(Satz)

a) id *Relation.*

b) id *reflexiv.*

c) id *transitiv.*

d) id *symmetrisch.*

e) id *ÄquivalenzRelation.*

f) id *ÄquivalenzRelation auf* z.

<u>Beweis **294-6**</u>

`1.1:` Via **294-5** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ Relation.

`1.2:` Via **294-5** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ reflexiv in $\mathcal{U}$.

`1.3:` Via **294-5** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ transitiv.

`1.4:` Via **294-5** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ symmetrisch.

`1.5:` Via **294-5** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

`2.a):` Aus `1.1` "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ Relation" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: id Relation.

`2.1:` Aus `1.2` "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ reflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: id reflexiv in $\mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.5` "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: id ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

`3.b):` Aus `2.1` "id reflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-17(Def)**: id reflexiv.

`3.c):` Aus `1.3` "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ transitiv" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: id transitiv.

`3.d):` Aus `1.4` "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ symmetrisch" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: id symmetrisch.

`3.e):` Aus `2.2` "id ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$"
folgt via **294-1(Def)**: id ÄquivalenzRelation.

`4.f):` Aus `3.e)` "id ÄquivalenzRelation"
folgt via **294-2**: id ÄquivalenzRelation auf z.

$\square$

294-7. Neben id_z ist $z \times z$ eine geradezu kanonische ÄquivalenzRelation auf z.

294-7(Satz)

`a)` *$z \times z$ Relation.*

`b)` *$z \times z$ reflexiv in z.*

`c)` *$z \times z$ transitiv.*

`d)` *$z \times z$ symmetrisch.*

`e)` *$z \times z$ ÄquivalenzRelation auf z.*

`f)` *Aus "$x \subseteq z$" folgt "$z \times z$ ÄquivalenzRelation auf x".*

Beweis **294-7** `a)`

Via **10-13** gilt: $z \times z$ Relation.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in z$" und
aus `Thema1`"$\alpha \in z$"
folgt via **6-6**: $(\alpha, \alpha) \in z \times z$.

`3:` Aus 2
folgt: $\alpha_-(z \times z)_-\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha_-(z \times z)_-\alpha)$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: $z \times z$ reflexiv in z.

<u>Beweis **294-7**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha_-(z\times z)_-\beta)\wedge(\beta_-(z\times z)_-\gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha_-(z\times z)_-\beta\ldots$"
folgt: $(\alpha,\beta)\in z\times z$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\ldots\beta_-(z\times z)_-\gamma$"
folgt: $(\beta,\gamma)\in z\times z$.

`3.1:` Aus `2.1`"$(\alpha,\beta)\in z\times z$"
folgt via **6-6**: $\alpha\in z$.

`3.2:` Aus `2.2`"$(\beta,\gamma)\in z\times z$"
folgt via **6-6**: $\gamma\in z$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha\in z$" und
aus `3.2`"$\gamma\in z$"
folgt via **6-6**: $(\alpha,\gamma)\in z\times z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha_-(z\times z)_-\gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta:((\alpha_-(z\times z)_-\beta)\wedge(\beta_-(z\times z)_-\gamma))\Rightarrow(\alpha_-(z\times z)_-\gamma)$.

Konsequenz via **292-1**: $z\times z$ transitiv.

<u>Beweis</u> **294-7** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha\_(z \times z)\_\beta$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha\_(z \times z)\_\beta$” folgt:	$(\alpha, \beta) \in z \times z$.
`3:` Aus `2`“$(\alpha, \beta) \in z \times z$” folgt via **6-6**:	$\alpha, \beta \in z$.
`4:` Aus `3`“$\ldots \beta \in z$” und aus `3`“$\alpha \ldots \in z$” folgt via **6-6**:	$(\beta, \alpha) \in z \times z$.
`5:` Aus `4` folgt:	$\beta\_(z \times z)\_\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha\_(z \times z)\_\beta) \Rightarrow (\beta\_(z \times z)\_\alpha)$.

Konsequenz via **292-1**: $z \times z$ symmetrisch.

`e)`

Aus `a)`“$z \times z$ Relation”,
aus `b)`“$z \times z$ reflexiv in z”,
aus `c)`“$z \times z$ transitiv” und
aus `d)`“$z \times z$ symmetrisch”
folgt via **294-4**: $z \times z$ ÄquivalenzRelation auf z.

`f)` `VS` gleich $x \subseteq z$.

Aus `e)`“$z \times z$ ÄquivalenzRelation auf z” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq z$”
folgt via **294-2**: $z \times z$ ÄquivalenzRelation auf x.

□

294-8. Im Fall $z=\mathcal{U}$ steht mit $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ via **294-7** die "größte" ÄquivalenzRelation zur Verfügung.

294-8(Satz)

a) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *Relation.*

b) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *reflexiv.*

c) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *transitiv.*

d) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *symmetrisch.*

e) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *ÄquivalenzRelation.*

f) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *ÄquivalenzRelation auf* z.

g) *Aus "R ÄquivalenzRelation" folgt "$R\subseteq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".*

h) *Aus "R ÄquivalenzRelation auf z" folgt "$R\subseteq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".*

<u>Beweis **294-8**</u> `abcdef)`

`1.a):` Via **294-7** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ Relation.

`1.1:` Via **294-7** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ reflexiv in $\mathcal{U}$.

`1.2:` Via **294-7** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

`2.b):` Aus `1.1` "$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ reflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-17(Def)**: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ reflexiv.

`2.c):` Via **294-7** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ transitiv.

`2.d):` Via **294-7** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ symmetrisch.

`2.e):` Aus `1.2` "$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$"
folgt via **294-1(Def)**: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ÄquivalenzRelation.

`3.f):` Aus `2.e)` "$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ÄquivalenzRelation"
folgt via **294-2**: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ÄquivalenzRelation auf z.

`g)` `VS` gleich R ÄquivalenzRelation.

`1:` Aus `VS` gleich "R ÄquivalenzRelation"
folgt via **294-1(Def)**: R Relation.

`2:` Aus `1` "R Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $R \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`h)` `VS` gleich R ÄquivalenzRelation auf z.

`1:` Aus `VS` gleich "R ÄquivalenzRelation"
folgt via **294-1(Def)**: R Relation.

`2:` Aus `1` "R Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $R \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

□

294-9. Vorbereitend für Weiteres wird nun unter anderem für in z reflexive M die Aussage $z \subseteq M[z]$ bewiesen.

294-9(Satz)

a) *Aus "M reflexiv in z" folgt "$z \subseteq M[z]$" und "$z \cap M[z] = z$".*

b) *Aus "M reflexiv" folgt "$M[\mathcal{U}] = \mathcal{U}$".*

<u>Beweis **294-9**</u> `a)` `VS` gleich M reflexiv in z.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in z$.

`2:` Aus `VS` gleich "M reflexiv in z" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: α_M_α.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\alpha, \alpha) \in M$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \alpha) \in M$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in z$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in M[z]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in M[z])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} z \subseteq M[z] \text{”}}$

`1.2:` Aus `A1`
folgt: $\boxed{z \subseteq M[z]}$

`2:` Aus `1.2`"$z \subseteq M[z]$"
folgt via **2-10**: $\boxed{z \cap M[z] = z}$

`b)` `VS` gleich M reflexiv..

`1:` Aus `VS` gleich "M reflexiv"
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"M reflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{U} \subseteq M[\mathcal{U}]$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U} \subseteq M[\mathcal{U}]$"
folgt via **0-18**: $M[\mathcal{U}] = \mathcal{U}$.

$\square$

294-10. Gleichsam am Wegesrand der Diskussion von ÄquivalenzRelationen liegt nunmehriges Resultat.

294-10(Satz)

a) *Aus "M reflexiv in z" und "$\mathsf{dom}\,M\subseteq z$" folgt "$\mathsf{dom}\,M=z$".*

b) *Aus "M reflexiv in z" und "$\mathsf{ran}\,M\subseteq z$" folgt "$\mathsf{ran}\,M=z$".*

Beweis **294-10** a) VS gleich $(M \text{ reflexiv in } z)\wedge(\mathsf{dom}\,M\subseteq z)$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in $z\ldots$"
folgt via **30-18**: $z\subseteq\mathsf{dom}\,M$.

2: Aus 1"$z\subseteq\mathsf{dom}\,M$" und
aus VS gleich "$\ldots\mathsf{dom}\,M\subseteq z$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $z=\mathsf{dom}\,M$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,M=z$.

b) VS gleich $(M \text{ reflexiv in } z)\wedge(\mathsf{ran}\,M\subseteq z)$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in $z\ldots$"
folgt via **30-18**: $z\subseteq\mathsf{ran}\,M$.

2: Aus 1"$z\subseteq\mathsf{ran}\,M$" und
aus VS gleich "$\ldots\mathsf{ran}\,M\subseteq z$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $z=\mathsf{ran}\,M$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{ran}\,M=z$.

□

294-11. Mit der nunmehrigen Bemerkung werden Resultate aus **#293** erhellt.

294-11.Bemerkung

Die Aussage
"$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}=x\cap y[z]$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ **293-4(Def)**

294-12. Die Darlegungen von **#293** in Bezug auf die nicht allgemeine Verfügbarkeit der Formel "$\bigcup\{x\cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x\cap y[z]$" nehmen hier konkretere Formen an.

294-12(Satz)

a) $\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$.

b) $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$.

c) $\mathcal{U}[\mathcal{U}] = \mathcal{U}$.

d) $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\mathcal{U}] = \mathcal{U}$.

e) $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \neq \mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\mathcal{U}]$.

$\{x\cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

<u>Beweis **294-12**</u> `a)` Via **293-7** gilt: $\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}=0.$

`b)`

`1:` $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}\stackrel{\text{a)}}{=}\bigcup 0\stackrel{\mathbf{1-14}}{=}0.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}=0.$

`c)` Aus **0-18** "$0\neq\mathcal{U}$"
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[\mathcal{U}]=\mathcal{U}.$

`d)`

`1:` $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\mathcal{U}]\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}\mathcal{U}[\mathcal{U}]\stackrel{\text{c)}}{=}\mathcal{U}.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\mathcal{U}]=\mathcal{U}.$

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}=0.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\mathcal{U}]=\mathcal{U}.$

`1.3:` Via **0-18** gilt: $0\neq\mathcal{U}.$

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\bigcup\{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}\neq\mathcal{U}\cap\mathcal{U}[\mathcal{U}].$

□

294-13. Auch an den Voraussetzungen von **293-5**`b)` kann nicht beliebig manipuliert werden.

294-13.Bemerkung

Die Aussage
“$(p \in z) \Rightarrow (x \cap y[\{p\}] \in \{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\})$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

294-14. Passend zu **294-13(Bem)** erscheint nunmehriger Satz.

294-14(Satz)

a) *Aus* “$p \in \mathcal{U}$” *folgt* “$\mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$”.

b) *Aus* “$p \in \mathcal{U}$” *folgt* “$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$”.

c) *Aus* “$p \in \mathcal{U}$” *folgt* “$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{p\}] \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$”.

d) $\mathcal{U}[\{0\}] = \mathcal{U}$.

e) $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{0\}] = \mathcal{U}$.

f) $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{0\}] \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

<u>Beweis **294-14**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **293-1**: $0 \neq \{p\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \{p\}$"
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`b)` `VS` gleich $p \in \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`2:` $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{p\}] \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \mathcal{U}[\{p\}] \stackrel{\mathbf{1}}{=} \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{p\}] \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`def)`

`1.d):` Aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{U}[\{0\}] = \mathcal{U}$.

`1.e):` Aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{0\}] = \mathcal{U}$.

`1.f):` Aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{0\}] \notin \{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

□

294-15. Im Vorliegenden ist, wie gleich zu sehen sein wird, die Voraussetzung "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge)" von nicht zu unterschätzender Bedeutung.

294-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *M reflexiv in z.*

$\rightarrow\!)$ *$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge).*

Dann folgt "$\bigcup\{z \cap M[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$".

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **294-15**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "M reflexiv in z"
folgt via **294-9**: $z \cap M[z] = z$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge)"
folgt via **293-8**: $\bigcup\{z \cap M[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z \cap M[z]$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\bigcup\{z \cap M[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$.

□

294-16. Auf die "mengenbezogene Voraussetzung" darf in **294-15** nicht ohne Weiteres verzichtet werden.

294-16.Bemerkung

Die Aussage
"$(M \text{ reflexiv in } z) \Rightarrow (\bigcup\{z \cap M[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

294-17. Passend zu **294-16(Bem)** erscheint Vorliegendes.

294-17(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq E$" *folgt* "$(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[E]=\mathcal{U}$".

b) *Aus* "$p\in\mathcal{U}$" *folgt* "$(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{p\}]=\mathcal{U}$".

c) *Aus* "$p\in\mathcal{U}$" *folgt* "$\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{p\}]=\mathcal{U}$".

d) *Aus* "$p\in\mathcal{U}$" *folgt* "$\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{p\}]\notin\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}$".

e) $(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{0\}]=\mathcal{U}$.

f) $\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{0\}]=\mathcal{U}$.

g) $\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{0\}]\notin\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}$.

h) $\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}=0$.

i) $\bigcup\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}=0$.

j) "$\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *reflexiv in* $\mathcal{U}$" *und* "$\bigcup\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}\neq\mathcal{U}$".

$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **294-17** a) VS gleich $0\neq E$.

1: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U}\cap E=E$.

2: Aus VS gleich "$0\neq E$" und aus 1"$\mathcal{U}\cap E=E$" folgt: $0\neq\mathcal{U}\cap E$.

3: Aus 2"$0\neq\mathcal{U}\cap E$" folgt via **9-23**: $(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[E]=\mathcal{U}$.

b) VS gleich $p\in\mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$p\in\mathcal{U}$" folgt via **293-1**: $0\neq\{p\}$.

2: Aus 1"$0\neq\{p\}$" folgt via des bereits bewiesenen a): $(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{p\}]=\mathcal{U}$.

<u>Beweis **294-17**</u> `c)` `VS` gleich $p \in \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`2:` $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{p\}] \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{p\}] \stackrel{\texttt{b)}}{=} \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`d)` `VS` gleich $p \in \mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{p\}] \notin \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`efg)`

`1.e):` Aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{0\}] = \mathcal{U}$.

`1.f):` Aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{0\}] = \mathcal{U}$.

`1.g):` Aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesen `d)`:
$\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{0\}] \notin \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **294-17** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **293-5**:
$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = \mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\Omega\}])).$$

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathcal{U} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\Omega\}] = \mathcal{U}.$$

4: Aus 2 "$\ldots \alpha = \mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\Omega\}]$" und
aus 3 "$\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\Omega\}] = \mathcal{U}$"
folgt: $\alpha = \mathcal{U}$.

5: Aus 2 "α Menge…" und
aus 4 "$\alpha = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathcal{U}$ Menge.

6: Es gilt 5 "$\mathcal{U}$ Menge".
Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt "$\mathcal{U}$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt:
$$\alpha \notin \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}.$$

Ergo Thema1:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}).$$

Konsequenz via **0-19**: $\{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$.

`i)`

1: $$\bigcup \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \stackrel{\texttt{h)}}{=} \bigcup 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} 0.$$

2: Aus 1
folgt: $\bigcup \{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$.

<u>Beweis **294-17**</u> `j)`

`1.1:` Via **294-7** gilt: $\boxed{\mathcal{U} \times \mathcal{U} \text{ reflexiv in } \mathcal{U}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\bigcup\{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0.$

`2:` Aus `1.2`"$\bigcup\{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$" und
aus **0-18**"$0 \neq \mathcal{U}$"

folgt: $\boxed{\bigcup\{\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \neq \mathcal{U}}$

□

294-18. Die Voraussetzungen vorliegender Aussage sind möglicherweise anwenderfreundlicher als die zweite Voraussetzung von **294-15**.

294-18(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) *M Menge.* *oder* $\mathsf{ran}\, M$ *Menge.* *oder* *z Menge.*

Dann folgt "$\bigcup\{z \cap M[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$".

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **294-18**

`1.1`: Nach $\rightarrow$) gilt: $(M \text{ Menge}) \vee (\mathsf{ran}\, M \text{ Menge}) \vee (z \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` M Menge.

`Thema2` $\alpha \in z$.

`3`: Aus `1.1.1.Fall` "M Menge" folgt via **8-11**: $M[\{\alpha\}]$ Menge.

`4`: Aus `3` "$M[\{\alpha\}]$ Menge" folgt via **2-24**: $z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}] \text{ Menge})$.

...

Beweis **294-18**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.1.2.Fall` ran M Menge.

`Thema2` $\alpha \in z$.

`3:` `1.1.2.Fall` "ran M Menge"
folgt via **8-11**: $M[\{\alpha\}]$ Menge.

`4:` Aus `3` "$M[\{\alpha\}]$ Menge"
folgt via **2-24**: $z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

`1.1.3.Fall` z Menge.

`Thema2` $\alpha \in z$.

Aus `1.1.3.Fall` "z Menge"
folgt via **2-24**: $z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge$)$"

`1.2:` Aus →) "M reflexiv in z" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap M[\{\alpha\}]$ Menge$)$"
folgt via **294-15**: $\bigcup\{z \cap M[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$.

□

294-19. Nun wird ein geradezu offensichtliches Kriterium für die Aussage "$p \in x \cap y[\{q\}]$" bewiesen.

294-19(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x \cap y[\{q\}]$.

`ii)` *"$p \in x$" und "q_y_p".*

Beweis **294-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in x \cap y[\{q\}]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cap y[\{q\}]$"
folgt via **2-2**: $p \in x, y[\{q\}]$.

`2.1:` Aus `1`
folgt: $\boxed{p \in x}$

`2.2:` Aus `1`"$p \in \ldots y[\{q\}]$"
folgt via **9-15**: $(q, p) \in y$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: q_y_p.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p \in x) \wedge (q\_y\_p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q\_y\_p$"
folgt; $(q, p) \in y$.

`2:` Aus `1`"$(q, p) \in y$"
folgt via **9-15**: $p \in y[\{q\}]$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$" und
aus `2`"$p \in y[\{q\}]$"
folgt via **2-2**: $p \in x \cap y[\{q\}]$.

□

294-20. Falls M transitiv *und* symmetrisch in z ist, so haben die Aussagen "$p, q \in z$" und "p_M_q" überraschend weitreichende Konsequenzen.

294-20(Satz) *Es gelte:*

→) *M transitiv in z.*

→) *M symmetrisch in z.*

→) $p, q \in z$.

→) p_M_q.

Dann folgt:

a) q_M_p.

b) p_M_p.

c) q_M_q.

d) $p, q \in z \cap M[\{p\}]$.

e) $p, q \in z \cap M[\{q\}]$.

f) $p, q \in (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

g) $p, q \in (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

h) $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

i) $0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

j) $z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$.

Beweis **294-20** `abcdefghi)`

`1.a)`: Aus →) "M symmetrisch in z",
aus →) "$p, q \in z$" und
aus →) "p_M_q"
folgt via **30-49(Def)**: q_M_p.

...

<u>Beweis</u> **294-20** `abcdefghi)` ...

`2.b)`: Aus →) "M transitiv in z",
aus →) "$p \ldots \in z$",
aus →) "$\ldots q \in z$",
aus →) "$p \ldots \in z$",
aus →) "p_M_q" und
aus `1.a)` "q_M_p"
folgt via **30-30(Def)**: p_M_p.

`2.c)`: Aus →) "M transitiv in z",
aus →) "$\ldots q \in z$",
aus →) "$p \ldots \in z$",
aus →) "$\ldots q \in z$",
aus `1.a)` "q_M_p" und
aus →) "p_M_q"
folgt via **30-30(Def)**: q_M_q.

`3.1`: Aus →) "$p \ldots \in z$" und
aus `2.b)` "p_M_p"
folgt via **294-19**: $p \in z \cap M[\{p\}]$.

`3.2`: Aus →) "$p \ldots \in z$" und
aus `1.a)` "q_M_p"
folgt via **294-19**: $p \in z \cap M[\{q\}]$.

`3.3`: Aus →) "$\ldots q \in z$" und
aus →) "p_M_q"
folgt via **294-19**: $q \in z \cap M[\{p\}]$.

`3.4`: Aus →) "$\ldots q \in z$" und
aus `2.c)` "q_M_q"
folgt via **294-19**: $q \in z \cap M[\{q\}]$.

`4.d)`: Aus `3.1` und
aus `3.3`
folgt: $p, q \in z \cap M[\{p\}]$.

`4.e)`: Aus `3.2` und
aus `3.4`
folgt: $p, q \in z \cap M[\{q\}]$.

...

<u>Beweis</u> **294-20** `abcdefghi)` ...

`5.f):` Aus `4.d)` "$p, q \in z \cap M[\{p\}]$" und
aus `4.e)` "$p, q \in z \cap M[\{q\}]$"
folgt via **2-2**: $p, q \in (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

`5.1:` Via **KG**$\cap$ gilt:
$$(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}]).$$

`6.g):` Aus `5.f)` und
aus `5.1`
folgt: $p, q \in (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

`6.h):` Aus `5.f)` "$p \ldots \in (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$"
folgt via **0-20**: $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

`7.i):` Aus `6.g)` "$p \ldots \in (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$"
folgt via **0-20**: $0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

<u>Beweis **294-20**</u> `j)`

`Thema1.1`	$\alpha \in z \cap M[\{p\}]$.
`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in z \cap M[\{p\}]$" folgt via **294-19**:	$(\alpha \in z) \wedge (p\_M\_\alpha)$.
`2.2:` Aus →) "M transitiv in z", aus →) "M symmetrisch in z", aus →) "$p, q \in z$" und aus →) "p_M_q" folgt via des bereits bewiesenen `a)`:	q_M_p.
`3:` Aus →) "M transitiv in z", aus →) "$\ldots q \in z$", aus →) "$p \ldots \in z$", aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$", aus `2.2` "q_M_p" und aus `2.1` "$\ldots p\_M\_\alpha$" folgt via **30-30(Def)**:	q_M_α.
`4:` Aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$" und aus `3` "q_M_α" folgt via **294-19**:	$\alpha \in z \cap M[\{q\}]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z \cap M[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in z \cap M[\{q\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$z \cap M[\{p\}] \subseteq z \cap M[\{q\}]$"

...

Beweis **294-20** `j)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in z \cap M[\{q\}]$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in z \cap M[\{q\}]$"
folgt via **294-19**: $(\alpha \in z) \wedge (q\_M\_\alpha)$.

`3:` Aus →) "M transitiv in z",
aus →) "$p \ldots \in z$",
aus →) "$\ldots q \in z$",
aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$",
aus →) "p_M_q" und
aus `2` "$\ldots q\_M\_\alpha$"
folgt via **30-30(Def)**: p_M_α.

`4:` Aus `2` "$\alpha \in z \ldots$" und
aus `3` "p_M_α"
folgt via **294-19**: $\alpha \in z \cap M[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in z \cap M[\{q\}]) \Rightarrow (\alpha \in z \cap M[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$z \cap M[\{q\}] \subseteq z \cap M[\{p\}]$"

`2:` Aus `A1` gleich "$z \cap M[\{p\}] \subseteq z \cap M[\{q\}]$" und
aus `A2` gleich "$z \cap M[\{q\}] \subseteq z \cap M[\{p\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$.

□

294-21. Auf Grund von **294-20** ist vorliegendes Kriterium verfügbar.

<u>**294-21(Satz)**</u> *Unter den Voraussetzungen ...*

→) M *transitiv in* z.

→) M *symmetrisch in* z.

→) $p, q \in z$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` p_M_q.

`ii)` $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

`iii)` $0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

<u>Beweis **294-21**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p_M_q.

Aus →) "M transitiv in z",
aus →) "M symmetrisch in z",
aus →) "$p, q \in z$" und
aus `VS` gleich "p_M_q"
folgt via **294-20**: $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$.

`1`: Via **KG**$\cap$ gilt:
$$(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}]).$$

`2`: Aus →) "$0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])$" und
aus `1` "$(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$"
folgt: $0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

<u>Beweis **294-21**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in z \cap M[\{q\}]) \wedge (\Omega \in z \cap M[\{p\}])$.

`3.1:` Aus `2`"$\Omega \in z \cap M[\{q\}] \ldots$"
folgt via **294-19**: $(\Omega \in z) \wedge (q\_M\_\Omega)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in z \cap M[\{p\}]$"
folgt via **294-19**: p_M_Ω.

`4:` Aus →)"M symmetrisch in z",
aus →)"$\ldots q \in z$",
aus `3.1`"$\Omega \in z \ldots$" und
aus `3.1`"$\ldots q\_M\_\Omega$"
folgt via **30-49(Def)**: Ω_M_q.

`5:` Aus →)"M transitiv in z",
aus →)"$p \ldots \in z$",
aus `3.1`"$\Omega \in z \ldots$",
aus →)"$\ldots q \in z$",
aus `3.2`"p_M_Ω" und
aus `4`"Ω_M_q"
folgt via **30-30(Def)**: p_M_q.

□

294-22. Auch die "Negations-Version" von **294-21** ist mitunger von Interesse.

<u>**294-22(Satz)**</u> *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) M *transitiv in* z.

$\rightarrow$) M *symmetrisch in* z.

$\rightarrow$) $p, q \in z$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\neg(p\_M\_q)$.

`ii)` $(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0$.

`iii)` $(z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}]) = 0$.

<u>Beweis **294-22**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "M transitiv in z",
aus $\rightarrow$) "M symmetrisch in z" und
aus $\rightarrow$) "$p, q \in z$"
folgt via **294-21**:

$$(p\_M\_q) \Leftrightarrow (0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}])) \Leftrightarrow (0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}])).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(\neg(p\_M\_q)) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq (z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]))) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq (z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}]))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$(\neg(p\_M\_q)) \Leftrightarrow ((z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0) \Leftrightarrow ((z \cap M[\{q\}]) \cap (z \cap M[\{p\}]) = 0)).$$

$\square$

294-23. Mit dem vorliegenden Resultat vereinfacht sich der Beweis nachfolgenden Satzes über ÄquivalenzRelationen.

294-23(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) M *reflexiv in* z.

$\rightarrow$) $p \in z$.

$\rightarrow$) $z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$.

Dann folgt "q_M_p".

Beweis **294-23**

1: Aus $\rightarrow$) "M reflexiv in z" und
aus $\rightarrow$) "$p \in z$"
folgt via **292-2**: $p \in z \cap M[\{p\}]$.

2: Aus 1"$p \in z \cap M[\{p\}]$" und
aus VS gleich "$z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$"
folgt: $p \in z \cap M[\{q\}]$.

3: Aus 2"$p \in z \cap M[\{q\}]$"
folgt via **294-19**: q_M_p.

□

294-24. Eine etwas subtilere Re-Formulierung von **294-21** gelingt für ÄquivalenzRelationen:

294-24(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow\!)$ *R ÄquivalenzRelation auf z.*

$\rightarrow\!)$ *$p, q \in z$.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` p_R_q.

`ii)` $z \cap R[\{p\}] = z \cap R[\{q\}]$.

Beweis **294-24** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich p_M_q.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ÄquivalenzRelation auf z"
folgt via **294-1(Def)**: $(R \text{ transitiv in } z) \wedge (R \text{ symmetrisch in } z)$.

`2:` Aus `1` "R transitiv in $z \ldots$",
aus `1` "$\ldots R$ symmetrisch in z",
aus $\rightarrow\!)$ "$p, q \in z$" und
aus `VS` gleich "p_R_q"
folgt via **294-20**: $z \cap R[\{p\}] = z \cap R[\{q\}]$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $z \cap R[\{p\}] = z \cap R[\{q\}]$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $z \cap R[\{q\}] = z \cap R[\{p\}]$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ÄquivalenzRelation auf z"
folgt via **294-1(Def)**: R reflexiv in z.

`2:` Aus `1` "R reflexiv in z",
aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots q \in z$" und
aus `1.1` "$z \cap R[\{q\}] = z \cap R[\{p\}]$"
folgt via **294-23**: p_R_q.

□

294-25. Nun wird **294-15** für ÄquivalenzRelationen adaptiert.

<u>**294-25(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrowtail$) *R ÄquivalenzRelation auf z.*

$\rightarrowtail$) $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap R[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Dann folgt "$\bigcup\{z \cap R[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$".

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

<u>Beweis **294-25**</u>

1: Aus $\rightarrowtail$) "R ÄquivalenzRelation auf z"
folgt via **294-1(Def)**: R reflexiv in z.

2: Aus 1 "R reflexiv in z" und
aus $\rightarrowtail$) "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (z \cap R[\{\alpha\}]$ Menge$)$"
folgt via **294-15**: $\bigcup\{z \cap R[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$.

□

294-26. Auf die “ mengenbezogene Voraussetzung ” darf auch in **294-25** nicht ohne Weiteres verzichtet werden.

294-26.Bemerkung

Die Aussage
“ $(R$ ÄquivalenzRelation auf $z) \Rightarrow (\bigcup\{z \cap R[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

294-27. Passend zu **294-26(Bem)** erscheint Vorliegendes.

294-27(Satz)

a) $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ *ÄquivalenzRelation auf* $\mathcal{U}$.

b) $\bigcup\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}\neq\mathcal{U}$.

$\{x\cap y[\{\lambda\}]:\lambda\in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **294-27** a) Via **294-7** gilt: $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ ÄquivalenzRelation auf $\mathcal{U}$.

b) Via **294-17** gilt: $\bigcup\{\mathcal{U}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[\{\lambda\}]:\lambda\in\mathcal{U}\}\neq\mathcal{U}$.

□

294-28. Die Voraussetzungen vorliegender Aussage sind möglicherweise anwenderfreundlicher als die zweite Voraussetzung von **294-25**.

294-28(Satz) *Es gelte:*

→) *R ÄquivalenzRelation auf z.*

→) *R Menge.* *oder* $\mathsf{ran}\,R$ *Menge.* *oder* *z Menge.*

Dann folgt "$\bigcup\{z \cap R[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$".

$\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\}$ **293-4(Def)**

Beweis **294-28**

1: Aus →) "R ÄquivalenzRelation auf z"
folgt via **294-1(Def)**: R reflexiv in z.

2: Aus 1 "R reflexiv in z" und
aus →) "(R Menge) $\vee$ ($\mathsf{ran}\,R$ Menge) $\vee$ (z Menge)"
folgt via **294-18**: $\bigcup\{z \cap R[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = z$.

□

Literatur.

R.Mlitz, Analysis 1.2.3, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.

EK: Kombinatorik.

Ersterstellung: 02/05/14 **Letzte Änderung: 04/05/14**

Führen "elementare Überlegungen" zum Ziel, so handelt es sich um Fragestellungen des Grundniveaus.

Führen Überlegungen unter Verwendung Resulteten von Niveau$\leq m$, $m \in \mathbb{N}$, zum Ziel, so handelt es sich um Fragestellungen von Niveau $1+m$.

Grundniveau 0

Modell 0.1

Frage 0.1 Mit n unterscheidbaren Objekten sollen geordnete k-Tupel gebildet werden. Jedes der n Objekte darf höchstens einmal vorkommen. Wieviele geordnete k-Tupel sind möglich? ($1 \leq k, n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 0.1 Erste Position: n Möglichkmiten. Verbleiben $-1+n$ unterscheidbare Objekte. Zwmite Position: $-1+n$ Möglichkmiten. Verbleiben $-2+n$ unterscheidbare Objekte. Dritte Position: $-2+n$ Möglichkmiten. $\ldots k$-te Position (wenn $k \leq n$): $1-k+n$ Möglichkmiten. Insgesamt für $k \leq n$ also

$$\#_{0.1}(k,n) = n \cdot (-1+n) \cdot (-2+n) \cdot \ldots \cdot (1-k+n)$$

Möglichkmiten. Die Formel liefert auch im Fall $k > n$ die richtige Aussage, nämlich $\#_{0.1}(k,n) = 0$, so dass die Darstellung für kontext-beliebige k, n gültig ist. Es ist offenbar die Darstellung

$$\#_{0.1}(k,n) = n! : (n-k)!, \quad k \leq n,$$

verfügbar.

Modell 0.1a

Frage 0.1a Wieviele geordnete n-Tupel können mit n unterscheidbaren Objekten gebildet werden, wenn jedes der n Objekte genau einmal vorkommen soll? ($1 \leq n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 0.1a Aus Modell 0.1 ergibt sich im Spezialfall $k = n$,

$$\#_{0.1a}(n) = \#_{0.1}(n, n) = n!.$$

Modell 0.2

Frage 0.2 Mit n unterscheidbaren Objekten sollen geordnete k-Tupel gebildet werden. Jedes der n Objekte kann beliebig oft vorkommen. Wieviele geordnete k-Tupel sind möglich? ($1 \leq k, n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 0.2 Erste Position: n Möglichkmiten. Zwmite Position: n Möglichkmiten. . . . k-te Position: n Möglichkmiten. Insgesamt also

$$\#_{0.2}(k, n) = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

Möglichkmiten.

Modell 0.3

Frage 0.3 Sei $\Phi(n,e)$=Menge aller geordneten $(n+e)$-Tupel von 0en und 1en, in denen 0 genau n-fach und 1 genau e-fach vorkommen. Von jedem $x \in \Phi(n,e)$ wird für jede auftretende 1 die Anzahl der 0en gezählt, die auf diese 1 folgen und dann werden diese Anzahlen zu $\phi_{n,e}(x)$ addiert. Wieviele $x \in \Phi(n,e)$ gibt es mit $\phi_{n,e}(x) = U$? ($n, e \in \mathbb{N}$, $U \in \mathbb{Z}$.)

Antwort 0.3 Offenbar gilt $\#_{0.3}(n,e,U) = 0$ für $U < 0$. Ausserdem gilt

$$\#_{0.3}(n,0,0) = 1,$$

$$\#_{0.3}(n,0,U) = 0, \quad 0 \neq U,$$

$$\#_{0.3}(0,e,0) = 1,$$

$$\#_{0.3}(0,e,U) = 0, \quad 0 \neq U,$$

wobei im Speziellen

$$\#_{0.3}(0,0,0) = 1$$

Auch gilt offenbar

$$\#_{0.3}(n,e,U) = 0, \quad n \cdot e < U \in \mathbb{N}.$$

Es gelte nun $1 \leq n, e \in \mathbb{N}$ und $0 \leq U \leq n \cdot e$. Vorab kann sehr einfach

$$\#_{0.3}(n,1,U) = 1, \quad 0 \leq U \leq n,$$

und

$$\#_{0.3}(1,e,U) = 1, \quad 0 \leq U \leq e,$$

sowie

$$\#_{0.3}(n,e,0) = \#_{0.3}(n,e,n \cdot e) = 1,$$

und

$$\#_{0.3}(n,e,1) = \#_{0.3}(n,e,-1+n \cdot e) = 1,$$

überlegt werden. Seien $\Gamma(n,e,0) = \{x \in \Phi(n,e) : x_{n+e} = 0\}$ und $\Gamma(n,e,1) = \{x \in \Phi(n,e) : x_{n+e} = 1\}$. Offenbar sind $\Gamma(n,e,0)$ und $\Gamma(n,e,1)$ paarweise disjunkt und es gilt

$$\#_{0.3}(n,e,U)$$

$$= \text{Anzahl der Elemente } x \text{ von } \Gamma(n,e,0) \text{ mit } \phi_{n,e}(x) = U$$

$$+ \text{ Anzahl der Elemente } x \text{ von } \Gamma(n,e,1) \text{ mit } \phi_{n,e}(x) = U.$$

Die Abbildung

$$\Psi_{n,e,0} : \Gamma(n,e,0) \to \Phi(-1+n,e),$$
$$\Psi_{n,e,0}(x_1,\ldots,x_{-1+n+e},0) = (x_1,\ldots,x_{-1+n+e}),$$

ist offenbar bijektiv. Durch das "Wegstreichen der Null an der Position $n+e$" ist einsehbar, dass für $x \in \Gamma(n,e,0)$ genau dann $\phi_{n,e}(x) = U$ gilt, wenn $\phi_{-1+n,e}(\Psi_{n,e,0}(x)) = U - e$. Hieraus folgt

Anzahl der Elemente x von $\Gamma(n,e,0)$ mit $\phi_{n,e}(x) = U$ ist gleich $\#_{0.3}(-1+n,e,U-e)$.

Die Abbildung

$$\Psi_{n,e,1} : \Gamma(n,e,1) \to \Phi(-1+n,e),$$
$$\Psi_{n,e,1}(x_1,\ldots,x_{-1+n+e},1) = (x_1,\ldots,x_{-1+n+e}),$$

ist offenbar bijektiv. Da das "Wegstreichen der Eins an der Position $n+e$" keine Auswirkung auf $\phi_{n,e}(x)$ hat gilt für $x \in \Gamma(n,e,1)$ genau dann $\phi_{n,e}(x) = U$, wenn $\phi_{n,-1+e}(\Psi_{n,e,1}(x)) = U$. Hieraus folgt

Anzahl der Elemente x von $\Gamma(n,e,1)$ mit $\phi_{n,e}(x) = U$ ist gleich $\#_{0.3}(n,-1+e,U)$.

Somit ergibt sich für $1 \le n, e \in \mathbb{N}$ und $0 \le U \le n \cdot e$ die rekursive Darstellung

$$\#_{0.3}(n,e,U) = \#_{0.3}(-1+n,e,U-e) + \#_{0.3}(n,-1+e,U).$$

Diese Rekursion wird für $1 \le n, e \le 5$ tabellarisch angeführt:

$$\begin{aligned}
\#_{0.3}(1,1,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 1\\
\#_{0.3}(1,2,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 2\\
\#_{0.3}(1,3,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 3\\
\#_{0.3}(1,4,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 4\\
\#_{0.3}(1,5,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(2,1,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 2 \\[4pt]
\#_{0.3}(2,2,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,2,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,2,2) &= \#_{0.3}(1,2,0) + \#_{0.3}(2,1,2) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,2,3) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,2,4) &= 1 \\[4pt]
\#_{0.3}(2,3,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,3,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,3,2) &= \#_{0.3}(1,3,-1) + \#_{0.3}(2,2,2) = 0+2 = 2 \\
\#_{0.3}(2,3,3) &= \#_{0.3}(1,3,0) + \#_{0.3}(2,2,3) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,3,4) &= \#_{0.3}(1,3,1) + \#_{0.3}(2,2,4) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,3,5) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,3,6) &= 1 \\[4pt]
\#_{0.3}(2,4,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,4,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,4,2) &= \#_{0.3}(1,4,-2) + \#_{0.3}(2,3,2) = 0+2 = 2 \\
\#_{0.3}(2,4,3) &= \#_{0.3}(1,4,-1) + \#_{0.3}(2,3,3) = 0+2 = 2 \\
\#_{0.3}(2,4,4) &= \#_{0.3}(1,4,0) + \#_{0.3}(2,3,4) = 1+2 = 3 \\
\#_{0.3}(2,4,5) &= \#_{0.3}(1,4,1) + \#_{0.3}(2,3,5) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,4,6) &= \#_{0.3}(1,4,2) + \#_{0.3}(2,3,6) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,4,7) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,4,8) &= 1 \\[4pt]
\#_{0.3}(2,5,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,5,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,5,2) &= \#_{0.3}(1,5,-3) + \#_{0.3}(2,4,2) = 0+2 = 2 \\
\#_{0.3}(2,5,3) &= \#_{0.3}(1,5,-2) + \#_{0.3}(2,4,3) = 0+2 = 2 \\
\#_{0.3}(2,5,4) &= \#_{0.3}(1,5,-1) + \#_{0.3}(2,4,4) = 0+3 = 3 \\
\#_{0.3}(2,5,5) &= \#_{0.3}(1,5,0) + \#_{0.3}(2,4,5) = 1+2 = 3 \\
\#_{0.3}(2,5,6) &= \#_{0.3}(1,5,1) + \#_{0.3}(2,4,6) = 1+2 = 3 \\
\#_{0.3}(2,5,7) &= \#_{0.3}(1,5,2) + \#_{0.3}(2,4,7) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,5,8) &= \#_{0.3}(1,5,3) + \#_{0.3}(2,4,8) = 1+1 = 2 \\
\#_{0.3}(2,5,9) &= 1 \\
\#_{0.3}(2,5,10) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\#_{0.3}(3,1,U) & = & 1 \quad 0 \leq U \leq 3 \\
\\
\#_{0.3}(3,2,0) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,2,1) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,2,2) & = & \#_{0.3}(2,2,0) + \#_{0.3}(3,1,2) = 1 + 1 = 2 \\
\#_{0.3}(3,2,3) & = & \#_{0.3}(2,2,1) + \#_{0.3}(3,1,3) = 1 + 1 = 2 \\
\#_{0.3}(3,2,4) & = & \#_{0.3}(2,2,2) + \#_{0.3}(3,1,4) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(3,2,5) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,2,6) & = & 1 \\
\\
\#_{0.3}(3,3,0) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,3,1) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,3,2) & = & \#_{0.3}(2,3,-1) + \#_{0.3}(3,2,2) = 0 + 2 = 2 \\
\#_{0.3}(3,3,3) & = & \#_{0.3}(2,3,0) + \#_{0.3}(3,2,3) = 1 + 2 = 3 \\
\#_{0.3}(3,3,4) & = & \#_{0.3}(2,3,1) + \#_{0.3}(3,2,4) = 1 + 2 = 3 \\
\#_{0.3}(3,3,5) & = & \#_{0.3}(2,3,2) + \#_{0.3}(3,2,5) = 2 + 1 = 3 \\
\#_{0.3}(3,3,6) & = & \#_{0.3}(2,3,3) + \#_{0.3}(3,2,6) = 2 + 1 = 3 \\
\#_{0.3}(3,3,7) & = & \#_{0.3}(2,3,4) + \#_{0.3}(3,2,7) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(3,3,8) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,3,9) & = & 1 \\
\\
\#_{0.3}(3,4,0) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,4,1) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,4,2) & = & \#_{0.3}(2,4,-2) + \#_{0.3}(3,3,2) = 0 + 2 = 2 \\
\#_{0.3}(3,4,3) & = & \#_{0.3}(2,4,-1) + \#_{0.3}(3,3,3) = 0 + 3 = 3 \\
\#_{0.3}(3,4,4) & = & \#_{0.3}(2,4,0) + \#_{0.3}(3,3,4) = 1 + 3 = 4 \\
\#_{0.3}(3,4,5) & = & \#_{0.3}(2,4,1) + \#_{0.3}(3,3,5) = 1 + 3 = 4 \\
\#_{0.3}(3,4,6) & = & \#_{0.3}(2,4,2) + \#_{0.3}(3,3,6) = 2 + 3 = 5 \\
\#_{0.3}(3,4,7) & = & \#_{0.3}(2,4,3) + \#_{0.3}(3,3,7) = 2 + 2 = 4 \\
\#_{0.3}(3,4,8) & = & \#_{0.3}(2,4,4) + \#_{0.3}(3,3,8) = 3 + 1 = 4 \\
\#_{0.3}(3,4,9) & = & \#_{0.3}(2,4,5) + \#_{0.3}(3,3,9) = 2 + 1 = 3 \\
\#_{0.3}(3,4,10) & = & \#_{0.3}(2,4,6) + \#_{0.3}(3,3,10) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(3,4,11) & = & 1 \\
\#_{0.3}(3,4,12) & = & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(3,5,0) &= 1\\
\#_{0.3}(3,5,1) &= 1\\
\#_{0.3}(3,5,2) &= \#_{0.3}(2,5,-3) + \#_{0.3}(3,4,2) = 0 + 2 = 2\\
\#_{0.3}(3,5,3) &= \#_{0.3}(2,5,-2) + \#_{0.3}(3,4,3) = 0 + 3 = 3\\
\#_{0.3}(3,5,4) &= \#_{0.3}(2,5,-1) + \#_{0.3}(3,4,4) = 0 + 4 = 4\\
\#_{0.3}(3,5,5) &= \#_{0.3}(2,5,0) + \#_{0.3}(3,4,5) = 1 + 4 = 5\\
\#_{0.3}(3,5,6) &= \#_{0.3}(2,5,1) + \#_{0.3}(3,4,6) = 1 + 5 = 6\\
\#_{0.3}(3,5,7) &= \#_{0.3}(2,5,2) + \#_{0.3}(3,4,7) = 2 + 4 = 6\\
\#_{0.3}(3,5,8) &= \#_{0.3}(2,5,3) + \#_{0.3}(3,4,8) = 2 + 4 = 6\\
\#_{0.3}(3,5,9) &= \#_{0.3}(2,5,4) + \#_{0.3}(3,4,9) = 3 + 3 = 6\\
\#_{0.3}(3,5,10) &= \#_{0.3}(2,5,5) + \#_{0.3}(3,4,10) = 3 + 2 = 5\\
\#_{0.3}(3,5,11) &= \#_{0.3}(2,5,6) + \#_{0.3}(3,4,11) = 3 + 1 = 4\\
\#_{0.3}(3,5,12) &= \#_{0.3}(2,5,7) + \#_{0.3}(3,4,12) = 2 + 1 = 3\\
\#_{0.3}(3,5,13) &= \#_{0.3}(2,5,8) + \#_{0.3}(3,4,13) = 2 + 0 = 2\\
\#_{0.3}(3,5,14) &= 1\\
\#_{0.3}(3,5,15) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(4,1,U) &= 1 \quad 0 \le U \le 4 \\[1ex]
\#_{0.3}(4,2,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(4,2,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(4,2,2) &= \#_{0.3}(3,2,0) + \#_{0.3}(4,1,2) = 1 + 1 = 2 \\
\#_{0.3}(4,2,3) &= \#_{0.3}(3,2,1) + \#_{0.3}(4,1,3) = 1 + 1 = 2 \\
\#_{0.3}(4,2,4) &= \#_{0.3}(3,2,2) + \#_{0.3}(4,1,4) = 2 + 1 = 3 \\
\#_{0.3}(4,2,5) &= \#_{0.3}(3,2,3) + \#_{0.3}(4,1,5) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(4,2,6) &= \#_{0.3}(3,2,4) + \#_{0.3}(4,1,5) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(4,2,7) &= 1 \\
\#_{0.3}(4,2,8) &= 1 \\[1ex]
\#_{0.3}(4,3,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(4,3,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(4,3,2) &= \#_{0.3}(3,3,-1) + \#_{0.3}(4,2,2) = 0 + 2 = 2 \\
\#_{0.3}(4,3,3) &= \#_{0.3}(3,3,0) + \#_{0.3}(4,2,3) = 1 + 2 = 3 \\
\#_{0.3}(4,3,4) &= \#_{0.3}(3,3,1) + \#_{0.3}(4,2,4) = 1 + 3 = 4 \\
\#_{0.3}(4,3,5) &= \#_{0.3}(3,3,2) + \#_{0.3}(4,2,5) = 2 + 2 = 4 \\
\#_{0.3}(4,3,6) &= \#_{0.3}(3,3,3) + \#_{0.3}(4,2,6) = 3 + 2 = 5 \\
\#_{0.3}(4,3,7) &= \#_{0.3}(3,3,4) + \#_{0.3}(4,2,7) = 3 + 1 = 4 \\
\#_{0.3}(4,3,8) &= \#_{0.3}(3,3,5) + \#_{0.3}(4,2,8) = 3 + 1 = 4 \\
\#_{0.3}(4,3,9) &= \#_{0.3}(3,3,6) + \#_{0.3}(4,2,9) = 3 + 0 = 3 \\
\#_{0.3}(4,3,10) &= \#_{0.3}(3,3,7) + \#_{0.3}(4,2,10) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(4,3,11) &= 1 \\
\#_{0.3}(4,3,12) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(4,4,0) &= 1\\
\#_{0.3}(4,4,1) &= 1\\
\#_{0.3}(4,4,2) &= \#_{0.3}(3,4,-2)+\#_{0.3}(4,3,2)=0+2=2\\
\#_{0.3}(4,4,3) &= \#_{0.3}(3,4,-1)+\#_{0.3}(4,3,3)=0+3=3\\
\#_{0.3}(4,4,4) &= \#_{0.3}(3,4,0)+\#_{0.3}(4,3,4)=1+4=5\\
\#_{0.3}(4,4,5) &= \#_{0.3}(3,4,1)+\#_{0.3}(4,3,5)=1+4=5\\
\#_{0.3}(4,4,6) &= \#_{0.3}(3,4,2)+\#_{0.3}(4,3,6)=2+5=7\\
\#_{0.3}(4,4,7) &= \#_{0.3}(3,4,3)+\#_{0.3}(4,3,7)=3+4=7\\
\#_{0.3}(4,4,8) &= \#_{0.3}(3,4,4)+\#_{0.3}(4,3,8)=4+4=8\\
\#_{0.3}(4,4,9) &= \#_{0.3}(3,4,5)+\#_{0.3}(4,3,9)=4+3=7\\
\#_{0.3}(4,4,10) &= \#_{0.3}(3,4,6)+\#_{0.3}(4,3,10)=5+2=7\\
\#_{0.3}(4,4,11) &= \#_{0.3}(3,4,7)+\#_{0.3}(4,3,11)=4+1=5\\
\#_{0.3}(4,4,12) &= \#_{0.3}(3,4,8)+\#_{0.3}(4,3,12)=4+1=5\\
\#_{0.3}(4,4,13) &= \#_{0.3}(3,4,9)+\#_{0.3}(4,3,13)=3+0=3\\
\#_{0.3}(4,4,14) &= \#_{0.3}(3,4,10)+\#_{0.3}(4,3,14)=2+0=2\\
\#_{0.3}(4,4,15) &= 1\\
\#_{0.3}(4,4,16) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(4,5,0) &= 1\\
\#_{0.3}(4,5,1) &= 1\\
\#_{0.3}(4,5,2) &= \#_{0.3}(3,5,-3)+\#_{0.3}(4,4,2)=0+2=2\\
\#_{0.3}(4,5,3) &= \#_{0.3}(3,5,-2)+\#_{0.3}(4,4,3)=0+3=3\\
\#_{0.3}(4,5,4) &= \#_{0.3}(3,5,-1)+\#_{0.3}(4,4,4)=0+5=5\\
\#_{0.3}(4,5,5) &= \#_{0.3}(3,5,0)+\#_{0.3}(4,4,5)=1+5=6\\
\#_{0.3}(4,5,6) &= \#_{0.3}(3,5,1)+\#_{0.3}(4,4,6)=1+7=8\\
\#_{0.3}(4,5,7) &= \#_{0.3}(3,5,2)+\#_{0.3}(4,4,7)=2+7=9\\
\#_{0.3}(4,5,8) &= \#_{0.3}(3,5,3)+\#_{0.3}(4,4,8)=3+8=11\\
\#_{0.3}(4,5,9) &= \#_{0.3}(3,5,4)+\#_{0.3}(4,4,9)=4+7=11\\
\#_{0.3}(4,5,10) &= \#_{0.3}(3,5,5)+\#_{0.3}(4,4,10)=5+7=12\\
\#_{0.3}(4,5,11) &= \#_{0.3}(3,5,6)+\#_{0.3}(4,4,11)=6+5=11\\
\#_{0.3}(4,5,12) &= \#_{0.3}(3,5,7)+\#_{0.3}(4,4,12)=6+5=11\\
\#_{0.3}(4,5,13) &= \#_{0.3}(3,5,8)+\#_{0.3}(4,4,13)=6+3=9\\
\#_{0.3}(4,5,14) &= \#_{0.3}(3,5,9)+\#_{0.3}(4,4,14)=6+2=8\\
\#_{0.3}(4,5,15) &= \#_{0.3}(3,5,10)+\#_{0.3}(4,4,15)=5+1=6\\
\#_{0.3}(4,5,16) &= \#_{0.3}(3,5,11)+\#_{0.3}(4,4,16)=4+1=5\\
\#_{0.3}(4,5,17) &= \#_{0.3}(3,5,12)+\#_{0.3}(4,4,17)=3+0=3\\
\#_{0.3}(4,5,18) &= \#_{0.3}(3,5,13)+\#_{0.3}(4,4,18)=2+0=2\\
\#_{0.3}(4,5,19) &= 1\\
\#_{0.3}(4,5,20) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(5.1, U) &= 1 \quad 0 \le U \le 5 \\[6pt]
\#_{0.3}(5,2,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,2,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,2,2) &= \#_{0.3}(4,2,0) + \#_{0.3}(5,1,2) = 1+1=2 \\
\#_{0.3}(5,2,3) &= \#_{0.3}(4,2,1) + \#_{0.3}(5,1,3) = 1+1=2 \\
\#_{0.3}(5,2,4) &= \#_{0.3}(4,2,2) + \#_{0.3}(5,1,4) = 2+1=3 \\
\#_{0.3}(5,2,5) &= \#_{0.3}(4,2,3) + \#_{0.3}(5,1,5) = 2+1=3 \\
\#_{0.3}(5,2,6) &= \#_{0.3}(4,2,4) + \#_{0.3}(5,1,6) = 3+0=3 \\
\#_{0.3}(5,2,7) &= \#_{0.3}(4,2,5) + \#_{0.3}(5,1,7) = 2+0=2 \\
\#_{0.3}(5,2,8) &= \#_{0.3}(4,2,6) + \#_{0.3}(5,1,8) = 2+0=2 \\
\#_{0.3}(5,2,9) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,2,10) &= 1 \\[6pt]
\#_{0.3}(5,3,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,3,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,3,2) &= \#_{0.3}(4,3,-1) + \#_{0.3}(5,2,2) = 0+2=2 \\
\#_{0.3}(5,3,3) &= \#_{0.3}(4,3,0) + \#_{0.3}(5,2,3) = 1+2=3 \\
\#_{0.3}(5,3,4) &= \#_{0.3}(4,3,1) + \#_{0.3}(5,2,4) = 1+3=4 \\
\#_{0.3}(5,3,5) &= \#_{0.3}(4,3,2) + \#_{0.3}(5,2,5) = 2+3=5 \\
\#_{0.3}(5,3,6) &= \#_{0.3}(4,3,3) + \#_{0.3}(5,2,6) = 3+3=6 \\
\#_{0.3}(5,3,7) &= \#_{0.3}(4,3,4) + \#_{0.3}(5,2,7) = 4+2=6 \\
\#_{0.3}(5,3,8) &= \#_{0.3}(4,3,5) + \#_{0.3}(5,2,8) = 4+2=6 \\
\#_{0.3}(5,3,9) &= \#_{0.3}(4,3,6) + \#_{0.3}(5,2,9) = 5+1=6 \\
\#_{0.3}(5,3,10) &= \#_{0.3}(4,3,7) + \#_{0.3}(5,2,10) = 4+1=5 \\
\#_{0.3}(5,3,11) &= \#_{0.3}(4,3,8) + \#_{0.3}(5,2,11) = 4+0=4 \\
\#_{0.3}(5,3,12) &= \#_{0.3}(4,3,9) + \#_{0.3}(5,2,12) = 3+0=3 \\
\#_{0.3}(5,3,13) &= \#_{0.3}(4,3,10) + \#_{0.3}(5,2,13) = 2+0=2 \\
\#_{0.3}(5,3,14) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,3,15) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\#_{0.3}(5,4,0) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,4,1) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,4,2) &= \#_{0.3}(4,4,-2) + \#_{0.3}(5,3,2) = 0 + 2 = 2 \\
\#_{0.3}(5,4,3) &= \#_{0.3}(4,4,-1) + \#_{0.3}(5,3,3) = 0 + 3 = 3 \\
\#_{0.3}(5,4,4) &= \#_{0.3}(4,4,0) + \#_{0.3}(5,3,4) = 1 + 4 = 5 \\
\#_{0.3}(5,4,5) &= \#_{0.3}(4,4,1) + \#_{0.3}(5,3,5) = 1 + 5 = 6 \\
\#_{0.3}(5,4,6) &= \#_{0.3}(4,4,2) + \#_{0.3}(5,3,6) = 2 + 6 = 8 \\
\#_{0.3}(5,4,7) &= \#_{0.3}(4,4,3) + \#_{0.3}(5,3,7) = 3 + 6 = 9 \\
\#_{0.3}(5,4,8) &= \#_{0.3}(4,4,4) + \#_{0.3}(5,3,8) = 5 + 6 = 11 \\
\#_{0.3}(5,4,9) &= \#_{0.3}(4,4,5) + \#_{0.3}(5,3,9) = 5 + 6 = 11 \\
\#_{0.3}(5,4,10) &= \#_{0.3}(4,4,6) + \#_{0.3}(5,3,10) = 7 + 5 = 12 \\
\#_{0.3}(5,4,11) &= \#_{0.3}(4,4,7) + \#_{0.3}(5,3,11) = 7 + 4 = 11 \\
\#_{0.3}(5,4,12) &= \#_{0.3}(4,4,8) + \#_{0.3}(5,3,12) = 8 + 3 = 11 \\
\#_{0.3}(5,4,13) &= \#_{0.3}(4,4,9) + \#_{0.3}(5,3,13) = 7 + 2 = 9 \\
\#_{0.3}(5,4,14) &= \#_{0.3}(4,4,10) + \#_{0.3}(5,3,14) = 7 + 1 = 8 \\
\#_{0.3}(5,4,15) &= \#_{0.3}(4,4,11) + \#_{0.3}(5,3,15) = 5 + 1 = 6 \\
\#_{0.3}(5,4,16) &= \#_{0.3}(4,4,12) + \#_{0.3}(5,3,16) = 5 + 0 = 5 \\
\#_{0.3}(5,4,17) &= \#_{0.3}(4,4,13) + \#_{0.3}(5,3,17) = 3 + 0 = 3 \\
\#_{0.3}(5,4,18) &= \#_{0.3}(4,4,14) + \#_{0.3}(5,3,18) = 2 + 0 = 2 \\
\#_{0.3}(5,4,19) &= 1 \\
\#_{0.3}(5,4,20) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\#_{0.3}(5,5,0) & = & 1 \\
\#_{0.3}(5,5,1) & = & 1 \\
\#_{0.3}(5,5,2) & = & \#_{0.3}(4,5,-3) + \#_{0.3}(5,4,2) = 0+2 = 2 \\
\#_{0.3}(5,5,3) & = & \#_{0.3}(4,5,-2) + \#_{0.3}(5,4,3) = 0+3 = 3 \\
\#_{0.3}(5,5,4) & = & \#_{0.3}(4,5,-1) + \#_{0.3}(5,4,4) = 0+5 = 5 \\
\#_{0.3}(5,5,5) & = & \#_{0.3}(4,5,0) + \#_{0.3}(5,4,5) = 1+6 = 7 \\
\#_{0.3}(5,5,6) & = & \#_{0.3}(4,5,1) + \#_{0.3}(5,4,6) = 1+8 = 9 \\
\#_{0.3}(5,5,7) & = & \#_{0.3}(4,5,2) + \#_{0.3}(5,4,7) = 2+9 = 11 \\
\#_{0.3}(5,5,8) & = & \#_{0.3}(4,5,3) + \#_{0.3}(5,4,8) = 3+11 = 14 \\
\#_{0.3}(5,5,9) & = & \#_{0.3}(4,5,4) + \#_{0.3}(5,4,9) = 5+11 = 16 \\
\#_{0.3}(5,5,10) & = & \#_{0.3}(4,5,5) + \#_{0.3}(5,4,10) = 6+12 = 18 \\
\#_{0.3}(5,5,11) & = & \#_{0.3}(4,5,6) + \#_{0.3}(5,4,11) = 8+11 = 19 \\
\#_{0.3}(5,5,12) & = & \#_{0.3}(4,5,7) + \#_{0.3}(5,4,12) = 9+11 = 20 \\
\#_{0.3}(5,5,13) & = & \#_{0.3}(4,5,8) + \#_{0.3}(5,4,13) = 11+9 = 20 \\
\#_{0.3}(5,5,14) & = & \#_{0.3}(4,5,9) + \#_{0.3}(5,4,14) = 11+8 = 19 \\
\#_{0.3}(5,5,15) & = & \#_{0.3}(4,5,10) + \#_{0.3}(5,4,15) = 12+6 = 18 \\
\#_{0.3}(5,5,16) & = & \#_{0.3}(4,5,11) + \#_{0.3}(5,4,16) = 11+5 = 16 \\
\#_{0.3}(5,5,17) & = & \#_{0.3}(4,5,12) + \#_{0.3}(5,4,17) = 11+3 = 14 \\
\#_{0.3}(5,5,18) & = & \#_{0.3}(4,5,13) + \#_{0.3}(5,4,18) = 9+2 = 11 \\
\#_{0.3}(5,5,19) & = & \#_{0.3}(4,5,14) + \#_{0.3}(5,4,19) = 8+1 = 9 \\
\#_{0.3}(5,5,20) & = & \#_{0.3}(4,5,15) + \#_{0.3}(5,4,20) = 6+1 = 7 \\
\#_{0.3}(5,5,21) & = & \#_{0.3}(4,5,16) + \#_{0.3}(5,4,21) = 5+0 = 5 \\
\#_{0.3}(5,5,22) & = & \#_{0.3}(4,5,17) + \#_{0.3}(5,4,22) = 3+0 = 3 \\
\#_{0.3}(5,5,23) & = & \#_{0.3}(4,5,18) + \#_{0.3}(5,4,23) = 2+0 = 2 \\
\#_{0.3}(5,5,24) & = & 1 \\
\#_{0.3}(5,5,25) & = & 1
\end{array}
$$

Ohne Beweis zur Verfügung zu haben scheint $\#_{0.3}(n,e,U) = \#_{0.3}(e,n,U)$, $0 \leq U \leq n \cdot e$, und $\#_{0.3}(n,e,\gamma) = \#_{0.3}(n,e,-\gamma + n \cdot e : 2)$ falls ne gerade und $0 \leq \gamma \leq n \cdot e : 2$ und $\#_{0.3}(n,e,(1+n\cdot e):2+\gamma) = \#_{0.3}(n,e,(-1+n\cdot e):2-\gamma)$ falls $n \cdot e$ ungerade und $0 \leq \gamma \leq (-1+n\cdot e):2$.

Niveau 1

Modell 1.1

Frage 1.1 Mit n unterscheidbaren Objekten sollen *ungeordnete* k-Tupel gebildet werden. Jedes der n Objekte darf höchstens einmal vorkommen. Wieviele ungeordnete k-Tupel sind möglich? ($1 \leq k, n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 1.1 Zunächst werden geordnete k-Tupel gebildet. Entsprechend Modell 0.1 ist dies auf $\#_{0.1}(k,n)$ verschiedene Arten möglich. Dann wird eine Abbildung $f : \Omega_{k,n} \to \mathcal{U}$ betrachtet, $\Omega_{k,n}$=Menge aller geordneten k-Tupel, die mit den n Objekten gebildet werden können, wobei jedes der n Objekte höchstens einmal vorkommen darf und $f(x_1, \ldots, x_k) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ gilt. Offenbar besteht das Urbild von $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathsf{ran}\, f$ genau aus den geordneten k-Tupeln, die sich durch Vertauschung der Reihenfolge der Einträge von $(x_1, \ldots, x_k)$ ergeben. Da alle Objekte $x_1, \ldots, x_k$ verschieden sind, sind dies entsprechend Modell 0.1a genau $k!$ Objekte. Also wird $\Omega_{k,n}$ durch diese Bildung von Urbildern in Teilmengen zerteilt, so dass jede Teilmenge genau $k!$ Elemente hat. Jede dieser Teilmengen wird auf das entsprechende ungeordnete k-Tupel abgebildet. Also gibt es genau so viele ungeordnete k-Tupel wie es paarweise disjunkte Urbilder der Elemente von $\mathsf{ran}\, f$ gibt. Dies sind genau $\#_{0.1}(k,n) : k!$ viele und es folgt

$$\#_{1.1}(k,n) = \#_{0.1}(k,n) : k!,$$

oder für $k \leq n$,

$$\#_{1.1}(k,n) = (n! : (n-k)!) : k! = n! : ((n-k)! \cdot k!),$$

woraus sich die für kontext-beliebige k, n die Gleichung

$$\#_{1.1}(k,n) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = (n \cdot (-1+n) \cdot \ldots (1-k+n)) : k!,$$

ergibt.

Modell 1.1a

Frage 1.1a Wieviele k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge? ($1 \leq k, n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 1.1a Frage 1.1a ist offenbar äquivalent zu Frage 1.1. Also gibt es

$$\#_{1.1a}(k,n) = \#_{1.1}(k,n) = \binom{n}{k},$$

k-elementige Teilmengen der n-elementigen Menge.

Niveau 2

Modell 2.1

Frage 2.1 Gegeben seien l voneinander unterscheidbare Merkmale und zu jedem dieser l Merkmale mögen k_l voneinander ununterscheidbare Objekte vorhanden sein. Insgesamt liegen also $n = k_1 + \ldots + k_l$ Objekte vor. Aus diesen n Objekten sollen geordnete n-Tupel gebildet werden, so dass jedes der n Objekte genau einmal vorkommt. Wieviele derartige geordnete n-Tupel sind möglich? $(1 \leq l, k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}.)$

Antwort 2.1 Es wird $T_0 = \{1, \ldots, n\}$ gesetzt. Im ersten Schritt wird eine k_1-elementige Teilmenge T_1 von T_0 ausgewählt. Dies ist auf $\#_{1.1a}(k_1, n)$ Arten möglich. Dann werden die Positionen im n-Tupel mit den Indices, die durch T_1 gegeben sind, mit den Objekten mit Merkmal 1 besetzt. Es verbleiben $n - k_1$ unbesetzte Positionen des n-Tupels. Im zweiten Schritt wird eine k_2-elementige Teilmenge T_2 der $n - k_1$ elementigen Menge $T_0 \setminus T_1$ ausgewählt. Dies ist auf $\#_{1.1a}(k_2, n - k_1)$ Arten möglich. Dann werden die Positionen im n-Tupel mit den Indices, die durch T_2 gegeben sind, mit den Objekten mit Mermal 2 besetzt. Es verbleiben $n - (k_1 + k_2)$ unbesetzte Positionen des n-Tupels. …Im $(-1 + l)$ten Schritt wird eine k_{-1+l}-elementige Teilmenge T_{-1+l} der $n - (k_1 + \ldots + k_{-2+l})$ elementigen Menge $T_{-3+l} \setminus T_{-2+l}$ ausgewählt. Dies ist auf $\#_{1.1a}(k_{-1+l}, n - (k_1 + \ldots + k_{-2+l}))$ Arten möglich. Dann werden die Positionen im n-Tupel mit den Indices, die durch T_{-1+l} gegeben sind, mit den Objekten mit Mermal $-1 + l$ besetzt. Es verbleiben $n - (k_1 + \ldots + k_{-1+l}) = k_l$ unbesetzte Positionen des n-Tupels. Diese werden mit den Objekten mit Merkmal l besetzt. Es folgt unter Einbeziehung von $\#_{1.1a}(k_l, n - (k_1 + \ldots + k_{-1+l})) = \#_{1.1a}(k_l, k_l) = 1$,

$$
\begin{aligned}
&\#_{2.1}(k, n) \\
&\quad = \#_{1.1a}(k, n_1) \cdot \#_{1.1a}(k_2, n - k_1) \cdot \ldots \cdot \#_{1.1a}(k_{-1+l}, n - (k_1 + \ldots + k_{-2+l})) \\
&\qquad\qquad \cdot \#_{1.1a}(k_l, n - (k_1 + \ldots + k_{-1+l})) \\
&\quad = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n - k_1}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n - (k_1 + \ldots + k_{-2+l})}{k_{-1+l}} \\
&\qquad\qquad \cdot \binom{n - (k_1 + \ldots + k_{-1+l})}{k_l},
\end{aligned}
$$

woraus sich ohne allzu viel Mühe nach Teleskop-artigem Kürzen die Gleichung

$$\#_{2.1}(k, n) = n! : (k_1! \cdot \ldots \cdot k_l!),$$

ergibt.

Modell 2.2

Frage 2.2 Wieviele Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit k Elementen und Maximum l gibt es? $(1 \leq k, n, l \in \mathbb{N}.)$

Antwort 2.2 Ist T eine Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ mit k Elementen, so ist das Maximum dieser Menge$\geq k$ und $\leq n$. Also gilt

$$\#_{2.2}(k, n, l) = 0, \quad (l < k) \vee (n < l).$$

Auch gibt es keine Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die mehr als n Elemente haben. Also

$$\#_{2.2}(k, n.l) = 0, \quad n < k.$$

In den verbleibenden Fällen gilt $1 \leq k \leq l \leq n$. Hier ist das Maximum einer Teilmenge T von $\{1, \ldots, n\}$ genau dann$= l$, wenn $l \in T$ und wenn $T \setminus \{l\}$ eine Teilmenge von $\{1, \ldots, -1+l\}$ ist. Also ist $T \setminus \{l\}$ eine $-1+k$-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, -1+l\}$ und die Anzahl derartiger Teilmengen ist gemäss Modell 1.1a gleich $\#_{1.1a}(-1+k, -1+l)$. Es folgt

$$\#_{2.2}(k, n, l) = \begin{pmatrix} -1+l \\ -1+k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq l \leq n,$$

und diese Formel ist offenbar auch für $l < k$ gültig, so dass

$$\#_{2.2}(k, n, l) = \begin{pmatrix} -1+l \\ -1+k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k, l \leq n,$$

folgt.

Modell 2.3

Frage 2.3 Wieviele streng wachsende Funktionen $f : \{1, \ldots, k\} \to \{0, \ldots, -1+n\}$ gibt es? $(1 \leq k, n \in \mathbb{N}.)$

Antwort 2.3 Eine streng wachsende Funktion f mit $\mathsf{dom}\, f = \{1, \ldots, k\}$ ist injektiv, also hat $\mathsf{ran}\, f$ genau k Elemente. Wegen $\mathsf{ran}\, f \subseteq \{0, \ldots, -1+n\}$ ist demnach $\mathsf{ran}\, f$ eine k-elementige Teilmenge von $\{0, \ldots, -1+n\}$. Umgekehrt gibt es zu jeder k-elementigen Teilmenge T von $\{0, \ldots, -1+n\}$ *genau eine* streng wachsende Funktion $f : \{1, \ldots, k\} \to \{0, \ldots, -1+n\}$. Also gibt es genau so viele streng wachsenden Funktionen von $\{1, \ldots, k\}$ in $\{0, \ldots, -1+n\}$ wie es k-elementige Teilmengen von $\{0, \ldots, -1+n\}$ gibt. Mit Hilfe von Modell 1.1a ergibt sich hieraus die bemerkenswerter Weise auch im Fall $n < k$ richtige Formel

$$\#_{2.3}(k, n) = \#_{1.1a}(k, n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Niveau 3

Formel 3.1

Arbeitsauftrag 3.1 Eine “kombinatorische Begründung” der Formel

$$\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} = \binom{1+n}{1+k}, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

zu finden.

Bearbeitung 3.1 Im Fall $n < k$ steht links die leere Summe= 0 und rechts steht ebenfalls 0. Es bleibt der Fall $k \leq n$ zu untersuchen. Hier werden alls $(1 + k)$-elementigen Teilmengen von der Menge $\{1, \ldots, 1+n\}$ betrachtet. Deren Anzahl x ist entsprechend Modell 1.1a gleich $\binom{1+n}{1+k}$. Für $l \in \mathbb{N}$ sei x_l die Anzahl aller $(1 + k)$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 1 + n\}$ mit Maximum= l. Gemäß Modell 2.2 gilt für $1+k \leq l \leq 1+n$ die Gleichung $x_l = \binom{-1+l}{k}$ und überdies gilt offenbar

$$x = x_{1+k} + \ldots + x_{1+n},$$

so dass

$$\binom{1+n}{1+k} = x = \binom{k}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k}.$$

Modell 3.2

Frage 3.2 Wieviele streng wachsende Funktionen $f : D \to B$ mit $D, B \subseteq \mathbb{R}$ und k=Anzahl Elemente von D und n=Anzahl Elemente von B gibt es? ($k, n \in \mathbb{N}$.)

Antowort 3.2 Im Fall $n = 0$ und $1 \leq k \in \mathbb{N}$ gilt $\#_{3.2}(k, n) = \#_{3.2}(k, 0) = 0$ und im Fall $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und $k = 0$ gilt $\#_{3.2}(k, n) = \#_{3.2}(0, n) = 0$. Die Funktion 0 kommt bei der Betrachtung von $n = k = 0$ zum Einsatz und führt zu $\#_{3.2}(0, 0) = 1$. Im Fall $1 \leq k, n \in \mathbb{N}$ ergibt sich unter Einbeziehung von Modell 2.3,

$$\#_{3.2}(k, n) = \binom{n}{k}, \quad 1 \leq k, n \in \mathbb{N}.$$

Niveau 4

Formel 4.1

Arbeitsauftrag 4.1 Den Nachweis zu führen, dass für alle k, n mit $k, n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n+k}{1+k} = \sum_{l=1}^{n} \binom{-1+l+k}{k},$$

gilt.

Bearbeitung 4.1

$$\sum_{l=1}^{n} \binom{-1+l+k}{k} \overset{\nu=-1+\mathrm{l}+\mathrm{k}}{=} \sum_{\nu=k}^{-1+k+n} \binom{\nu}{k} \overset{\mathbf{3.1}}{=} \binom{1+(-1+k+n)}{1+k}$$

$$= \binom{n+k}{1+k}.$$

$\boxed{\textbf{Satz 4.2}}$

Arbeitsauftrag 4.2 Einen Beweis nachfolgender Aussagen zu finden:

Sei $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(k,n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k, n \in \mathbb{N},$$

genau dann, wenn

$$f(1+k,n) = \sum_{l=k}^{-1+n} f(k,l), \quad 1 \leq k, n \in \mathbb{N},$$

und

$$f(1,n) = n, \quad 1 \leq n \in \mathbb{N}.$$

Bearbeitung 4.2 $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ Sei $f(k,n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$f(1+k,n) = \begin{pmatrix} n \\ 1+k \end{pmatrix} \overset{\mathbf{3.1}}{=} \sum_{l=k}^{-1+n} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} f(k,l), \quad 1 \leq k, n \in \mathbb{N},$$

und

$$f(1,n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ Es gelte $f(1+k,n) = \sum_{l=k}^{-1+n} f(k,l)$, $1 \leq k, n \in \mathbb{N}$, und $f(1,n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Vollständige Induktion bezüglich k in $\mathbb{N}^*$. Für $k = 1$ gilt

$$f(k,n) = f(1,n) = n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq n \in \mathbb{N}.$$

Für $1+k$, $k \in \mathbb{N}^*$, gilt

$$f(1+k,n) = \sum_{l=k}^{-1+n} f(k,l) = \sum_{l=k}^{-1+n} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \overset{\mathbf{3.1}}{=} \begin{pmatrix} n \\ 1+k \end{pmatrix}.$$

Niveau 5

Satz 5.1

Arbeitsauftrag 5.1 Einen Beweis nachfolgender Aussagen zu finden:

Sei $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(k,n) = \binom{-1+n+k}{k}, \quad 1 \le k, n \in \mathbb{N},$$

genau dann, wenn

$$f(1+k,n) = \sum_{l=1}^{n} f(k,l), \quad 1 \le k, n \in \mathbb{N},$$

und

$$f(1,n) = n, \quad 1 \le n \in \mathbb{N}.$$

Bearbeitung 5.1 $\boxed{\Rightarrow}$ Sei $f(k,n) = \binom{-1+n+k}{k}$. Dann gilt

$$f(1+k,n) = \binom{-1+n+(1+k)}{1+k} = \binom{n+k}{1+k} \overset{\mathbf{4.1}}{=} \sum_{l=1}^{n} \binom{-1+l+k}{k}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} f(k,l), \quad 1 \le k, n \in \mathbb{N},$$

und

$$f(1,n) = \binom{-1+n+1}{1} = \binom{n}{1} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Es gelte $f(1+k,n) = \sum_{l=1}^{n} f(k,l)$, $1 \le k, n \in \mathbb{N}$, und $f(1,n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Vollständige Induktion bezüglich k in $\mathbb{N}^*$. Für $k = 1$ gilt

$$f(1,n) = n = \binom{n}{1} = \binom{-1+n+1}{1} = \binom{-1+n+k}{k}, \quad 1 \le n \in \mathbb{N}.$$

Für $1+k$, $k \in \mathbb{N}^*$, gilt

$$f(1+k,n) = \sum_{l=1}^{n} f(k,l) = \sum_{l=1}^{n} \binom{-1+l+k}{k} \overset{\mathbf{4.1}}{=} \binom{n+k}{1+k}$$

$$= \binom{-1+n+(1+k)}{1+k}.$$

Niveau 6

Modell 6.1

Frage 6.1 Wieviele wachsende Funktionen $f : \{1, \ldots, k\} \to \{0, \ldots, -1+n\}$ gibt es? ($1 \leq k, n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 6.1 Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\Phi_{m,n}$ gleich der Menge aller wachsenden Funktionen von $\{1, \ldots, m\}$ in $\{0, \ldots, -1+n\}$ und $\#_{6.1}(m, n)$ sei gleich der Anzahl der Elemente von $\Phi_{m,n}$. Offenbar gilt $\Phi_{0,n} = 1$ und $\#_{6.1}(1, n) = n$. Für $l = 0, \ldots, -1+n$ sei $\phi_{m,n,l}$ gleich der Menge aller wachsenden Funktionen f von $\{1, \ldots, m\}$ in $\{0, \ldots, -1+n\}$ mit $f(0) = l$. Offenbar sind die Mengen $\phi_{m,n,0}, \ldots, \phi_{m,n,-1+n}$ paarweise disjunkt und wenn $x(m, n, l)$ gleich der Anzahl der Elemente von $\phi_{m,n,l}$ ist, so gilt

$$\#_{6.1}(m, n) = x(m, n, 0) + \ldots + x(m, n, -1+n).$$

Für $l = 0, \ldots, -1+n$ und $f \in \phi_{m,n,l}$ wird

$$\Psi_{m,n,l}(f) = \{(-1+\lambda, f(\lambda) - l) : 2 \leq \lambda \leq m\},$$

betrachtet. Offenbar ist $\Psi_{m,n,l}(f)$ eine wachsende Funktion mit

$$\mathsf{dom}\,(\Psi_{m,n,l}(f)) = \{1, \ldots, -1+m\}, \quad \mathsf{ran}\,(\Psi_{m,n,l}(f)) \subseteq \{0, \ldots, (-1+n) - l)\}.$$

Also gilt für $l = 0, \ldots, -1+n$ wegen $(-1+n) - l = -1 + (n-l)$,

$$\Psi_{m,n,l} : \phi_{m,n,l} \to \Phi_{-1+m,n-l}.$$

Klarer Weise ist $\Psi_{m,n,l}$ bijektiv und somit folgt

$$x(m, n, l) = \#_{6.1}(-1+m, n-l), \quad 0 \leq l \leq -1+n,$$

und demnach mit $1+k$ an Stelle von m,

$$\#_{6.1}(1+k, n) = \sum_{l=0}^{-1+n} x(1+k, n, l) = \sum_{l=0}^{-1+n} \#_{6.1}(k, n-l) = \sum_{l=1}^{n} \#_{6.1}(k, l).$$

Hieraus und mit $\#_{6.1}(1, n) = n$ folgt mit Satz 5.1,

$$\#_{6.1}(k, n) = \binom{-1+n+k}{k}, \quad 1 \leq k, n.$$

Niveau 7

Modell 7.1

Frage 7.1 Gegeben seien n unterscheidbare Merkmale und Objekte, die jeweils genau eines dieser n Merkmale aufweisen und die nur durch diese n Merkmale voneinander unterschieden werden sollen. Ohne Beachtung der Reihenfolge sollen k dieser Objekte gewählt werden, wobei jedes Merkmal mehrfach vorkommen kann. Wieviele derartige Auswahlen sind möglich? ($1 \leq k, n \in \mathbb{N}$.)

Antwort 7.1 Die Merkmale werden mit den Zahlen $0, \ldots, -1+n$ durchnummeriert. Einer Auswahl *mit Beachtung* der Reihenfolge entspricht in bijektiver Weise eine Abbildung $f : \{1, \ldots, k\} \to \{0, \ldots, -1+n\}$. Ohne Beachtung der Reihenfolge genügt es, von diesen Funktionen nur die wachsenden zu betrachten, die in offenbar bijektiver Weise den kontext-bezogenen Auswahlen entsprechen. Mit dieser Überlegung ist die Anzahl der im Kontext möglichen Auswahlen gleich der Anzahl der wachsenden Funktionen von $\{1, \ldots, k\}$ in $\{0, \ldots, -1+n\}$. Mit Modell 6.1 ergibt sich

$$\#_{7.1}(k, n) = \binom{-1+n+k}{k}, \quad 1 \leq k, n \in \mathbb{N}.$$

Literatur.

C.Bandelow, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie,
B.I. Mannheim/Wien/Zürhich, 1981.

H.B.Mann & D.R.Whitney, On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other, *Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947)*

Mengenlehre: $\mathcal{U}_{-1} = 0$. Einiges über $x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ersterstellung: 06/06/14 **Letzte Änderung: 10/06/14**

296-1. Die Klasse $\mathsf{296.0}(x)$ besteht aus all jenen Klassen ω, für die es ein $\Omega \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\omega = x + \Omega$ gilt.

296-1(Definition)

$$\mathsf{296.0}(x) = \{x + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = x + \Omega))\}.$$

296-2. Aus $p \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$ folgt x Zahl und es gibt $\Omega \in \mathbb{N}$ mit $p = x + \Omega$. Aus x Zahl und $n \in \mathbb{N}$ folgt $x + n \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

296-2(Satz)

a) *Aus* "$p \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$" *folgt* "$x$ *Zahl*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p = x + \Omega)$".

b) *Aus* "x *Zahl*" *und* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x + n \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$".

c) *Aus* "x *Zahl*" *folgt* "$x \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$".

d) "x *Zahl*" *genau dann, wenn* "$0 \neq \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$".

e) "$x \notin \mathbb{A}$" *genau dann, wenn* "$0 = \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$".

$\{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$ **296-1(Def)**

Beweis **296-2** a) VS gleich $p \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$"
folgt via **296-1(Def)**: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p = x + \Omega)}$

2: Aus 1.1 und
aus 1.2"$\ldots p = x + \Omega$"
folgt: $x + \Omega$ Menge.

3: Aus 2"$x + \Omega$ Menge"
folgt via **96-13**: $\boxed{x \text{ Zahl}}$

<u>Beweis **296-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = n$"
folgt: $x + \Omega = x + n$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$" und
aus `1.2`"n Zahl"
folgt via **96-13**: $x + n$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $x + n = x + \Omega$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in \mathbb{N}$",
aus `3`"$x + n = x + \Omega$" und
aus `2.3`"$x + n$ Menge"
folgt via **296-1(Def)**: $x + n \in \{x + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

`c)` `VS` gleich x Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **FSA0**: $x + 0 = x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Zahl" und
aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x + 0 \in \{x + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $x \in \{x + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

Beweis **296-2** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $0 \neq \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

`2:` Aus `1`"$\Omega \in \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x Zahl.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (0 \neq \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\})$.

`2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (0 \neq \{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\{x+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\} = 0)$.

□

296-3. Falls $l \in \mathbb{Z}$, so ist $\{l, \ldots\} = \mathsf{296.0}(l)$. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ gilt dies auch für alle $l \in \mathbb{N}$.

296-3(Satz)

a) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\{l, \ldots\} = \{l + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\{n, \ldots\} = \{n + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$".

$\{x + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$ **296-1(Def)**

Beweis **296-3** a) VS gleich $l \in \mathbb{Z}$.

Thema1.1 $\alpha \in \{l, \ldots\}$.

2.1: Aus VS gleich "$l \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-5**: l Zahl.

2.2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \{l, \ldots\}$" folgt via **169-2**: $l \leq \alpha \in \mathbb{Z}$.

3: Aus VS gleich "$l \in \mathbb{Z}$", aus 2.2 "$\ldots \alpha \in \mathbb{Z}$" und aus 2 "$l \leq \alpha \ldots$" folgt via **166-4**:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = \alpha).$$

4: Aus 2.1 "l Zahl" und aus 3 "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" folgt via **296-2**: $l + \Omega \in \{l + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

5: Aus 3 "$\ldots l + \Omega = \alpha$" und aus 4 folgt: $\alpha \in \{l + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{l, \ldots\}) \Rightarrow (\alpha \in \{l + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 "$\{l, \ldots\} \subseteq \{l + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$"

...

Beweis **296-3** `a)` `VS` gleich $l \in \mathbb{Z}$.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.
`2.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.
`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$" folgt via **296-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha = l+\Omega)$.
`3.1:` Aus 2"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" folgt via **164-6**: $\Omega \in \mathbb{Z}$.
`3.2:` Aus `2.1`"$l \in \mathbb{S}$" und aus `2.2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" folgt via **166-2**: $l \le l+\Omega$.
`4:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und aus `3.1`"$\Omega \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-9**: $l+\Omega \in \mathbb{Z}$.
`5:` Aus `3.2`"$l \le l+\Omega$" und aus `4`"$l+\Omega \in \mathbb{Z}$" folgt via **169-2**: $l+\Omega \in \{l,\ldots\}$.
`6:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = l+\Omega$" und aus `5` folgt: $\alpha \in \{l,\ldots\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow (\alpha \in \{l,\ldots\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\} \subseteq \{l,\ldots\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{l,\ldots\} \subseteq \{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$" und
aus `A2` gleich "$\{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\} \subseteq \{l,\ldots\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{l,\ldots\} = \{l+\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

<u>Beweis</u> **296-3** `b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1`"$n \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\{n, \ldots\} = \{n + \lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

296-4. Dass hier die Terme “$\mathcal{U}_x$” und “$\mathcal{U}_{x+\omega}$” auftreten und diese Terme nur für $x, x+\omega \in \mathbb{N}$ definiert sind ist für mich nach wie vor gewöhnungsbedürftig. Kontext-bezogen sind im Folgenden $x = n$ und $n + \omega$ natürliche Zahlen. Ohne Kontext ist etwa “$\mathcal{U}_{1:2}$” gar nicht definiert.

296-4(Definition)

$$\mathsf{296.1}(x) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}.$$

296-5. Offenbar kann in der Mathematik auch über Terme gesprochen werden, die gar nicht definiert sind.

296-5(Satz)

"$p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}$"
genau dann, wenn "$p \in \mathbb{N}$" *und* "$\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+p}$".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}$ **296-4(Def)**

Beweis **296-5** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}$.
Aus `VS` gleich "$p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}$"
folgt: $(p \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+p})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+p})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2`: Aus `VS` gleich "$(p \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+p})$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}$.

□

296-6. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{\omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} = \mathbb{N}$. Konsequenter Weise gilt $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. Im Fall $n < m$ gilt sogar $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$.

296-6(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$"
folgt "$1 + m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} = \mathbb{N}$".

d) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq m$" *folgt* "$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_m$".

e) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_{x+\omega})\}$ **296-4(Def)**

Beweis **296-6** a) VS gleich $n \in \mathbb{N}$.

1: Aus VS gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

2: Aus 1"n Zahl"
folgt via **FSA0**: $n + 0 = n$.

3: Via **0-6** gilt: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_n$.

4: Aus 3 und
aus 2
folgt: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+0}$.

5: Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus 4"$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+0}$"
folgt via **296-5**: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.

<u>Beweis **296-6**</u> `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$"
folgt: $(m \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+m})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus `1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-14**: $n + m \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + m \in \mathbb{N}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$n + m \in \mathbb{N}$"
folgt via **240-7**: $\mathcal{U}_{n+m} \subseteq \mathcal{U}_{1+(n+m)}$.

`3.2:` $n + (1 + m) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (n + 1) + m \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (1 + n) + m \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} 1 + (n + m)$.

`4:` Aus `2.1`"$\ldots \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+m}$" und
aus `3.1`"$\mathcal{U}_{n+m} \subseteq \mathcal{U}_{1+(n+m)}$"
folgt via **0-6**: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+(n+m)}$.

`5:` Aus `3.2`"$n + (1 + m) = \ldots = 1 + (n + m)$" und
aus `4`
folgt: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

`6:` Aus `2.2`"$1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus `5`"$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+(1+m)}$"
folgt via **296-5**: $1 + m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.

Beweis **296-6** `c)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.
Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.
Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\})$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\})$"

`1.3`: Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.

`2`: Aus `1.3` "$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$",
aus `A1` gleich "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\})$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\})$"
folgt via **236-5**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} = \mathbb{N}$.

Beweis **296-6** `d)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} = \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $n, m \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \leq m$" und
aus `1.2`"$n, m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1.1`"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\} = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\omega})\}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+\Omega}$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`"$\ldots m = n + \Omega$"
folgt: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_m$.

`e)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + n \leq m$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **240-17**: $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{1+n}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2.2`"$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1`"$1 + n \leq m$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathcal{U}_{1+n} \subseteq \mathcal{U}_m$.

`4:` Aus `2.1`"$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{1+n}$" und
aus `3`"$\mathcal{U}_{1+n} \subseteq \mathcal{U}_m$"
folgt via **57-15**: $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$.

□

296-7. Auf dem Weg zum Zählmaß begegnet uns nun $\mathsf{296.2}(x,y)$.

296-7(Definition)

$$\mathsf{296.2}(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}.$$

296-8. Ungeachtet ob $\mathcal{U}_{y+n}$ nun definiert ist oder nicht gilt Vorliegendes.

<u>296-8(Satz)</u>

a) *Aus* “$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}$” *und* “$p \in \mathcal{U}_n$”
folgt “$x \cup p \in \mathcal{U}_{y+n}$”.

b) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_n) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+n})$”
folgt “$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}$”.

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}$ **296-7(Def)**

<u>Beweis **296-8**</u> `a)` `VS` gleich

$$(n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}) \wedge (p \in \mathcal{U}_n).$$

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}$”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_n) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+n})$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \in \mathcal{U}_n$” und
aus `1`
folgt: $x \cup p \in \mathcal{U}_{y+n}$.

`b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{U}_n) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+n}))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$(n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_n) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+n}))$” und
aus `1` “n Menge”
folgt: $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{y+\omega}))\}$.

□

296-9. Falls $x \in \mathcal{U}_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\} = \mathbb{N}$. Aus $x \in \mathcal{U}_n$ und $y \in \mathcal{U}_m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ folgt $x \cup y \in \mathcal{U}_{n+m}$.

296-9(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathcal{U}_n$"
folgt "$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathcal{U}_n$"
und "$m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$"
folgt "$1 + m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathcal{U}_n$"
folgt "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\} = \mathbb{N}$".

d) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathcal{U}_n$" *und* "$y \in \mathcal{U}_m$" *folgt* "$x \cup y \in \mathcal{U}_{n+m}$".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$ **296-7(Def)**

<u>Beweis **296-9**</u> `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}_0$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{U}_0$" und
aus **240-2(RekParDef)**"$\mathcal{U}_0 = \{0\}$"
folgt: $\alpha \in \{0\}$.

`3.1:` Aus `2.1`"n Zahl"
folgt via **FSA0**: $n + 0 = n$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\alpha \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $\alpha = 0$.

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $\mathcal{U}_{n+0} = \mathcal{U}_n$.

`4.2:` Via **2-17** gilt: $x \cup 0 = x$.

`5:` Aus `4.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathcal{U}_n$"
folgt: $x \cup 0 \in \mathcal{U}_n$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.1`
folgt: $x \cup 0 \in \mathcal{U}_{n+0}$.

`7:` Aus `6` und
aus `3.2`
folgt: $x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+0}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_0) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+0})$"

`1.2:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_0) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+0})$"
folgt via **296-8**: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$.

Beweis **296-9** `b)` `VS` gleich
$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n) \wedge (m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$"
folgt: $(m \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_m) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+m}))$.

`2:` Aus `1.1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + m \in \mathbb{N}$.

`Thema3.1` $\beta \in \mathcal{U}_{1+m}$.

`4:` Es gilt: $(\beta = 0) \vee (0 \neq \beta)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\beta = 0$.

`5.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`5.2:` $x \cup \beta \overset{\texttt{4.1.Fall}}{=} x \cup 0 \overset{\textbf{2-17}}{=} x$.

`5.3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2`"$1 + m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-14**: $n + (1 + m) \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5.1`"$n \in \mathbb{Z}$" und
aus `2`"$1 + m \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-2**: $n \leq n + (1 + m)$.

`7:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `5.3`"$n + (1 + m) \in \mathbb{N}$" und
aus `6`"$n \leq n + (1 + m)$"
folgt via **296-6**: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

`8:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathcal{U}_n \ldots$" und
aus `7`"$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+(1+m)}$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

`9:` Aus `5.2`"$x \cup \beta = \ldots = x$" und
aus `8`
folgt: $x \cup \beta \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

...

...

<u>Beweis **296-9**</u> `b)` `VS` gleich

$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n) \wedge (m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\})$.

...

`Thema3.1` $\beta \in \mathcal{U}_{1+m}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $0 \neq \beta$.

`5:` Aus `4.2.Fall`"$0 \neq \beta$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \beta$.

`6:` Aus `1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `Thema3.1`"$\beta \in \mathcal{U}_{1+m}$" und
aus `5`"$\ldots \Omega \in \beta$"
folgt via **240-14**: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_m$.

`7:` Aus `1`"$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_m) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+m})$" und
aus `6`
folgt: $x \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{U}_{n+m}$.

`8:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-14**: $n + m \in \mathbb{N}$.

`9:` Aus `8`"$n + m \in \mathbb{N}$" und
aus `7`"$x \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{U}_{n+m}$"
folgt via **240-12**: $\{\Omega\} \cup (x \cup (\beta \setminus \{\Omega\})) \in \mathcal{U}_{1+(n+m)}$.

`10.1:` $1 + (n + m) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (1 + n) + m \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (n + 1) + m \stackrel{\textbf{FSA}}{=} n + (1 + m)$.

`10.2:` Aus `5`"$\ldots \Omega \in \beta$"
folgt via **5-19**: $\beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})$.

`11:` $\{\Omega\} \cup (x \cup (\beta \setminus \{\Omega\})) \stackrel{\textbf{KG}\cup}{=} \{\Omega\} \cup ((\beta \setminus \{\Omega\}) \cup x) \stackrel{\textbf{AG}\cup}{=} (\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \cup x \stackrel{10.2}{=} \beta \cup x \stackrel{\textbf{KG}\cup}{=} x \cup \beta$.

`12:` Aus `11`"$\{\Omega\} \cup (x \cup (\beta \setminus \{\Omega\})) = \ldots = x \cup \beta$" und
aus `9`
folgt: $x \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+(n+m)}$.

`13:` Aus `10.1`"$1 + (n + m) = \ldots = n + (1 + m)$" und
aus `12`
folgt: $x \cup \beta \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cup \beta \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

...

Beweis **296-9** `b)` `VS` gleich
$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n) \wedge (m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\})$.

...

Ergo `Thema3.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \beta : (\beta \in \mathcal{U}_{1+m}) \Rightarrow (x \cup \beta \in \mathcal{U}_{n+(1+m)})\text{”}}$

`3.2:` Aus 2“$1 + m \in \mathbb{N}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \mathcal{U}_{1+m}) \Rightarrow (x \cup \beta \in \mathcal{U}_{n+(1+m)})$”
folgt via **296-8**:
$$1 + m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}.$$

`c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n)$.

`Thema1.1` $\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$.

Aus `Thema1.1`“$\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$”
folgt: $\beta \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}) \Rightarrow (\beta \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:
$\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\} \subseteq \mathbb{N}\text{”}}$

`Thema1.2` $\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$.

Aus `VS` gleich “$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n)$” und
aus `Thema1.2`“$\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}.$$

Ergo `Thema1.2`:
$$\boxed{\begin{array}{l|l}\texttt{A2} & \text{“}\forall \beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}) \\ & \quad \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\})\text{”}\end{array}}$$

...

Beweis **296-9** `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n)$.

...

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}.$$

`2:` Aus `1.3`"$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$",
aus `A1` gleich "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\})$"
folgt via **236-5**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\} = \mathbb{N}$.

`d)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n) \wedge (y \in \mathcal{U}_m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathcal{U}_n \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\} = \mathbb{N}.$$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1`
folgt: $m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$.

`3:` Aus `2`"$m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_\omega) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+\omega}))\}$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_m) \Rightarrow (x \cup \alpha \in \mathcal{U}_{n+m})$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathcal{U}_m$" und
aus `3`
folgt: $x \cup y \in \mathcal{U}_{n+m}$.

□

296-10. Gelegentlich ist es von Vorteil, von der Konvention "$\mathcal{U}_{-1} = 0$" Gebrauch zu machen.

296-10(Definition)

$$\mathcal{U}_{-1} = 0.$$

296-11. Via **238-3** gilt $(\{p\}\cup x)\setminus\{p\}=x\setminus\{p\}$. Via **5-17** gilt $x\setminus\{p\}=x$ genau dann, wenn $p\notin x$.

296-11(Satz)

a) *"$(\{p\}\cup x)\setminus\{p\}=x$" genau dann, wenn "$p\notin x$".*

b) $x\cap(y\setminus z)=(x\cap y)\setminus z$.

c) *Aus "$x\cap z=0$" folgt "$(x\cup y)\setminus z=x\cup(y\setminus z)$".*

d) *Aus "$y\cap z=0$" folgt "$(x\cup y)\setminus z=(x\setminus z)\cup y$".*

e) *Aus "$p\notin x$" folgt "$(x\cup y)\setminus\{p\}=x\cup(y\setminus\{p\})$".*

f) *Aus "$p\notin y$" folgt "$(x\cup y)\setminus\{p\}=(x\setminus\{p\})\cup y$".*

Beweis **296-11** a)

1.1: Via **238-3** gilt: $(\{p\}\cup x)\setminus\{p\}=x\setminus\{p\}$.

1.2: Via **5-17** gilt: $(x\setminus\{p\}=x)\Leftrightarrow(p\notin x)$.

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt: $((\{p\}\cup x)\setminus\{p\}=x)\Leftrightarrow(p\notin x)$.

b)

1: $$x\cap(y\setminus z)\overset{\mathbf{5-10}}{=}x\cap(y\cap z^C)\overset{\mathbf{AG}\cap}{=}(x\cap y)\cap z^C\overset{\mathbf{5-10}}{=}(x\cap y)\setminus z.$$

2: Aus 1 folgt: $x\cap(y\setminus z)=(x\cap y)\setminus z$.

c) VS gleich $x\cap z=0$.

1: Aus VS gleich "$x\cap z=0$" folgt via **213-14**: $x\setminus z=x$.

2: $$(x\cup y)\setminus z\overset{\mathbf{238-3}}{=}(x\setminus z)\cup(y\setminus z)\overset{\mathbf{1}}{=}x\cup(y\setminus z).$$

3: Aus 2 folgt: $(x\cup y)\setminus z=x\cup(y\setminus z)$.

<u>Beweis **296-11**</u> `d)` `VS` gleich $y \cap z = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$y \cap z = 0$"
folgt via **213-14**: $y \setminus z = y.$

`2:` $(x \cup y) \setminus z \stackrel{\mathbf{238-3}}{=} (x \setminus z) \cup (y \setminus z) \stackrel{\mathbf{1}}{=} (x \setminus z) \cup y.$

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \cup y) \setminus z = (x \setminus z) \cup y.$

`e)` `VS` gleich $p \notin x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin x$"
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap x = 0.$

`2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap \{p\} = \{p\} \cap x.$

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $x \cap \{p\} = 0.$

`4:` Aus `3`"$x \cap \{p\} = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(x \cup y) \setminus \{p\} = x \cup (y \setminus \{p\}).$

`f)` `VS` gleich $p \notin y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin y$"
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap y = 0.$

`2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap \{p\} = \{p\} \cap y.$

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $y \cap \{p\} = 0.$

`4:` Aus `3`"$y \cap \{p\} = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(x \cup y) \setminus \{p\} = (x \setminus \{p\}) \cup y.$

□

296-12. Wegen $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$, $n \in \mathbb{N}$, sind die Klassen $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_{1+n}$ nicht disjunkt. Die Elemente, die zu $\mathcal{U}_n$ hinzugegeben werden um $\mathcal{U}_{1+n}$ zu erhalten konstituieren die Klasse $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

296-12(Satz)

a) $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$" *folgt* "$0 \neq x$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "p *Menge*" *und* "$p \notin x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$" *folgt* "$\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{2+n} \setminus \mathcal{U}_{1+n}$".

d) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$p \in x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$" *folgt* "$x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$".

Beweis **296-12** a)

1: Via **27-7** gilt: $0 \notin \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

2: Aus 1"$0 \notin \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$"
folgt via **296-11**: $(\{0\} \cup \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}) \setminus \{0\} = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

3: $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 \stackrel{\mathbf{240-3}}{=} (\{0\} \cup \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}) \setminus \mathcal{U}_0 \stackrel{\mathbf{240-2(RekParDef)}}{=} (\{0\} \cup \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}) \setminus \{0\} \stackrel{2}{=} \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

4: Aus 3
folgt: $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

b) VS gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$"
folgt via **5-3**: $x \notin \mathcal{U}_n$.

2: Aus VS gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **240-5**: $0 \in \mathcal{U}_n$.

3: Aus 2"$0 \in \mathcal{U}_n$" und
aus 1"$x \notin \mathcal{U}_n$"
folgt via **0-1**: $0 \neq x$.

<u>Beweis **296-12**</u> `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \text{ Menge})(p \notin x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$”
folgt via **5-3**: $(x \in \mathcal{U}_{1+n}) \wedge (x \notin \mathcal{U}_n)$.

`1.3:` $1 + (1 + n) \overset{\textbf{FSA}}{=} (1 + 1) + n \overset{+\textbf{schola}}{=} 2 + n$.

`2:` Aus `1.1`“$1 + n \in \mathbb{N}$” und
aus `1.2`“$x \in \mathcal{U}_{1+n} \ldots$”
folgt via **240-12**: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+(1+n)}$.

`3.1:` Es gilt: $(\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n}) \vee (\{p\} \cup x \notin \mathcal{U}_{1+n})$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n}$.

`4:` Aus `VS` gleich “$\ldots p$ Menge$\ldots$”
folgt via **2-28**: $p \in \{p\} \cup x$.

`5:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”,
aus `4`“$p \in \{p\} \cup x$” und
aus `3.1.1.Fall`“$\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n}$”
folgt via **240-14**: $(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n$.

`6:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \notin x \ldots$”
folgt via **296-11**: $(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} = x$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $x \in \mathcal{U}_n$.

`8:` Es gilt `7`“$x \in \mathcal{U}_n$”.
Es gilt `1.2`“$\ldots x \notin \mathcal{U}_n$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\{p\} \cup x \notin \mathcal{U}_{1+n}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$\{p\} \cup x \notin \mathcal{U}_{1+n}$”

`3.2:` Aus `2` und
aus `1.3`“$1 + (1 + n) = \ldots = 2 + n$”
folgt: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{2+n}$.

`4:` Aus `3.2`“$\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{2+n}$” und
aus `A1` gleich “$\{p\} \cup x \notin \mathcal{U}_{1+n}$”
folgt via **5-3**: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{2+n} \setminus \mathcal{U}_{1+n}$.

<u>Beweis **296-12**</u> `d)` `VS` gleich $(n\in\mathbb{N})\wedge(p\in x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n$"
folgt via **5-3**: $(x\in\mathcal{U}_{1+n})\wedge(x\notin\mathcal{U}_n)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n\in\mathbb{N}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p\in x\ldots$" und
aus `1`"$x\in\mathcal{U}_{1+n}\ldots$"
folgt via **240-14**: $x\setminus\{p\}\in\mathcal{U}_n$.

`3.1:` Es gilt: $(x\setminus\{p\}\in\mathcal{U}_{-1+n})\vee(x\setminus\{p\}\notin\mathcal{U}_{-1+n})$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x\setminus\{p\}\in\mathcal{U}_{-1+n}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$n\in\mathbb{N}\ldots$"
folgt via **162-2**: $(n=0)\vee(-1+n\in\mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $n=0$.

`5:` $-1+n\stackrel{\texttt{4.1.Fall}}{=}-1+0\stackrel{\textbf{+schola}}{=}-1$.

`6:` Aus `3.1.1.Fall`"$x\setminus\{p\}\in\mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `5`"$-1+n=\ldots=-1$"
folgt: $x\setminus\{p\}\in\mathcal{U}_{-1}$.

`7:` Via **296-10(Def)** gilt: $\mathcal{U}_{-1}=0$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $x\setminus\{p\}\in 0$.

`9:` Es gilt `8`"$x\setminus\{p\}\in 0$".
Via **0-19** gilt "$x\setminus\{p\}\notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $x\setminus\{p\}\notin\mathcal{U}_{-1+n}$.

...

...

Beweis **296-12** `d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \in x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

...

`wfFallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_{-1+n}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $-1+n \in \mathbb{N}$.

`5.1:` Aus `4.2.Fall` "$-1+n \in \mathbb{N}$" und
aus `3.1.1.Fall` "$x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **240-12**: $\{p\} \cup (x \setminus \{p\}) \in \mathcal{U}_{1+(-1+n)}$.

`5.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`5.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x \ldots$"
folgt via **5-19**: $\{p\} \cup (x \setminus \{p\}) = x$.

`6.1:` Aus `5.2` "n Zahl"
folgt via **FSA0**: $0+n=n$.

`6.2:` Aus `5.1` und
aus `5.3`
folgt: $x \in \mathcal{U}_{1+(-1+n)}$.

`7:` $1+(-1+n) \stackrel{\mathbf{160-7}}{=} (1-1)+n \stackrel{\mathbf{-schola}}{=} 0+n \stackrel{\mathbf{6.1}}{=} n$.

`8:` Aus `6.2` und
aus `7` "$1+(-1+n) = \ldots = n$"
folgt: $x \in \mathcal{U}_n$.

`9:` Es gilt `8` "$x \in \mathcal{U}_n$".
Es gilt `1` "$\ldots x \notin \mathcal{U}_n$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \setminus \{p\} \notin \mathcal{U}_{-1+n}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \setminus \{p\} \notin \mathcal{U}_{-1+n}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \setminus \{p\} \notin \mathcal{U}_{-1+n}$"

`3.2:` Aus `2` "$x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n$" und
aus `A1` gleich "$x \setminus \{p\} \notin \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **5-3**: $x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

□

296-13. Eine noch längere Liste definierender Eigenschaften findet man im vorliegenden LW bislang vergebens.

296-13(Definition)

$$\begin{aligned}\mathsf{296.3}(x,y) &= \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_{\omega}) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \\ &\qquad \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(y+\omega)}))\}.\end{aligned}$$

296-14. Mit Hilfe von $\mathtt{296.3}(x,y)$ wird nun die im Folgenden wichtige Erkenntnis, wonach aus $x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n$ und $y\in\mathcal{U}_{1+m}\setminus\mathcal{U}_m$ mit $n,m\in\mathbb{N}$ die Aussage $x\cup y\in\mathcal{U}_{2+(n+m)}\setminus\mathcal{U}_{1+(n+m)}$ folgt, bewiesen.

<u>296-14(Satz)</u>

a) *Aus* "$m\in\mathbb{N}$" *und* "$\forall\beta:((\beta\in\mathcal{U}_{1+m}\setminus\mathcal{U}_m)\wedge(x\cap\beta)=0)$
$\Rightarrow(x\cup\beta\notin\mathcal{U}_{1+(y+m))}$"
folgt "$m\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(y+\omega)})))\}$".

b) *Aus* "$n\in\mathbb{N}$" *und* "$x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n$"
folgt "$0\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)})))\}$.

c) *Aus* "$n\in\mathbb{N}$" *und* "$x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n$"
und "$m\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)})))\}$
folgt "$1+m\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)})))\}$.

d) *Aus* "$n\in\mathbb{N}$" *und* "$x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n$"
folgt $\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)})))\}=\mathbb{N}$.

e) *Aus* "$n,m\in\mathbb{N}$" *und* "$x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n$" *und* "$y\in\mathcal{U}_{1+m}\setminus\mathcal{U}_m$"
und "$x\cap y=0$"
folgt "$x\cup y\in\mathcal{U}_{2+(n+m)}\setminus\mathcal{U}_{1+(n+m)}$".

$\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(y+\omega)})))\}$ **296-13(Def)**

<u>Beweis **296-14**</u> a) VS gleich $(m\in\mathbb{N})\wedge(\forall\beta:((\beta\in\mathcal{U}_{1+m}\setminus\mathcal{U}_m)\wedge(x\cap\beta=0))$
$\Rightarrow(x\cup\beta\notin\mathcal{U}_{1+(y+m)}))$.

1: Aus VS gleich "$m\in\mathbb{N}\dots$"
folgt via **ElementAxiom**: m Menge.

2: Aus VS gleich "$m\in\mathbb{N}\dots$",
aus VS gleich "$\dots\forall\beta:((\beta\in\mathcal{U}_{1+m}\setminus\mathcal{U}_m)\wedge(x\cap\beta=0))$
$\Rightarrow(x\cup\beta\notin\mathcal{U}_{1+(y+m)})$" und
aus 1 "m Menge"
folgt: $1+m\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))$
$\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(y+\omega)})))\}$.

<u>Beweis **296-14**</u> `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

`1.1:` Via $\in$**schola** gilt: $0 \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in \mathcal{U}_{1+0} \setminus \mathcal{U}_0) \wedge (x \cap \beta = 0)$.

`2.1:` Via $+$**schola**
gilt: $1 + 0 = 1$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \dots$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `Thema1.2`"$\beta \in \mathcal{U}_{1+0} \setminus \mathcal{U}_0 \dots$"
folgt: $\beta \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$.

`3.2:` Aus `2.2`"n Zahl"
folgt via **FSA0**: $n + 0 = n$.

`4:` Aus `3.1`"$\beta \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$" und
aus **296-12**"$\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt: $\beta \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`5:` Aus `4`"$\beta \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\beta = \{\Omega\})$.

`6:` Aus `Thema1.2`"$\dots x \cap \beta = 0$" und
aus `5`"$\dots \beta = \{\Omega\}$"
folgt: $x \cap \{\Omega\} = 0$.

`7:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\{\Omega\} \cap x = x \cap \{\Omega\}$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $\{\Omega\} \cap x = 0$.

`9:` Aus `8`"$\{\Omega\} \cap x = 0$"
folgt via **2-30**: $\Omega \notin x$.

`10:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \dots$",
aus `5`"$\dots \Omega$ Menge$\dots$",
aus `9`"$\Omega \notin x$" und
aus `VS` gleich "$\dots x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$"
folgt via **296-12**: $\{\Omega\} \cup x \in \mathcal{U}_{2+n} \setminus \mathcal{U}_{1+n}$.

`11:` Aus `10` und
aus `5`"$\dots \beta = \{\Omega\}$"
folgt: $\beta \cup x \in \mathcal{U}_{2+n} \setminus \mathcal{U}_{1+n}$.

$\dots$

$\dots$

<u>Beweis **296-14**</u> `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

...

`Thema1.2` $(\beta \in \mathcal{U}_{1+0} \setminus \mathcal{U}_0) \wedge (x \cap \beta = 0)$.

...

`12:` Aus `11` "$\beta \cup x \in \mathcal{U}_{2+n} \setminus \mathcal{U}_{1+n}$"
folgt via **5-3**: $\beta \cup x \notin \mathcal{U}_{1+n}$.

`13:` Aus `12` und
aus `3.2`
folgt: $\beta \cup x \notin \mathcal{U}_{1+(n+0)}$.

`14:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup \beta = \beta \cup x$.

`15:` Aus `14` und
aus `13`
folgt: $x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+0)}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathcal{U}_{1+0} \setminus \mathcal{U}_0) \wedge (x \cap \beta = 0)) \Rightarrow (x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+0)})$"

`2:` Aus `1.1` "$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathcal{U}_{1+0} \setminus \mathcal{U}_0) \wedge (x \cap \beta = 0)) \Rightarrow (x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+0)})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}.$$

<u>Beweis **296-14**</u> `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$
$\wedge (m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$"
folgt:
$(m \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)})))$.

`2.1:` Aus `1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + m \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via $\in$**schola**: m Zahl.

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $(\beta \in (\mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m})) \wedge (x \cap \beta = 0)$.

`4.1:` Aus `2.1`"$1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus `Thema3.1`"$\beta \in \mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m}$"
folgt via **296-12**: $0 \neq \beta$.

`4.2:` Aus `2.2`"m Zahl"
folgt via **FSA0**: $0 + m = m$.

`4.3:` Aus `VS`
folgt: $x \cap \beta = 0$.

`5:` Aus `4.1`"$0 \neq \beta$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \beta$.

`6.1:` Aus `2`"$1 + m \in \mathbb{N}$",
aus `Thema3.1`"$\beta \in \mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m}$" und
aus `5`"$\ldots \Omega \in \beta$"
folgt via **296-12**: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+m)}$.

`6.2:` $x \cap (\beta \setminus \{\Omega\}) \stackrel{\mathbf{296-11}}{=} (x \cap \beta) \setminus \{\Omega\} \stackrel{\mathbf{4.3}}{=} 0 \setminus \{\Omega\} \stackrel{\mathbf{5-11}}{=} 0$.

`7:` $-1 + (1 + m) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-1 + 1) + m \stackrel{\mathbf{+schola}}{=} 0 + m \stackrel{\mathbf{4.2}}{=} m$.

`8:` Aus `7`"$-1 + (1 + m) = \ldots = m$" und
aus `6.1`
folgt: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m$.

...

...

Beweis **296-14** `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$
$\wedge(m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})$.

...

`Thema3.1` $(\beta \in (\mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m})) \wedge (x \cap \beta = 0)$.

...

`9:` Aus `8`“$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m$”,
aus `6.2`“$x \cap (\beta \setminus \{\Omega\}) = \ldots = 0$” und
aus `1`“$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) \wedge (x \cap \alpha = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)})$”
folgt: $x \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)}$.

`10:` Es gilt: $(x \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))}) \vee (x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))})$.
`wfFallunterscheidung`

`10.1.Fall` $x \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))}$.

`11.1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `2.1`“$1 + m \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-14**: $n + (1 + m) \in \mathbb{N}$.

`11.2:` Aus `5`“$\ldots \Omega \in \beta$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cup \beta$.

`12:` Aus `11.1`“$n + (1 + m) \in \mathbb{N}$”,
aus `10.1.Fall`“$x \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))}$” und
aus `11.2`“$\Omega \in x \cup \beta$”
folgt via **296-12**:
$(x \cup \beta) \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{n+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{-1+(n+(1+m))}$.

`13.1:` Aus `12`“$(x \cup \beta) \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{n+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{-1+(n+(1+m))}$”
folgt via **5-3**: $(x \cup \beta) \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

`13.2:` $n + (1 + m) \overset{\mathbf{FSA}}{=} (n + 1) + m \overset{\mathbf{FSA}}{=} (1 + n) + m$
$\overset{\mathbf{FSA}}{=} 1 + (n + m)$.

`13.3:` Aus `5`“$\ldots \Omega \in \beta$” und
aus `Thema3.1`“$\ldots x \cap \beta = 0$”
folgt via **161-1**: $\Omega \notin x$.

...

...

...

Beweis **296-14** `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$
$\wedge(m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})$.

...

`Thema3.1` $(\beta \in (\mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m})) \wedge (x \cap \beta = 0)$.

...

`wfFallunterscheidung`

`10.1.Fall` $x \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))}$.

...

`14.1:` Aus `13.2`"$n + (1 + m) = \ldots = 1 + (n + m)$" und
aus `13.1`
folgt: $(x \cup \beta) \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{1+(n+m)}$.

`14.2:` Aus `13.3`"$\Omega \notin x$"
folgt via **296-11**: $(x \cup \beta) \setminus \{\Omega\} = x \cup (\beta \setminus \{\Omega\})$.

`15:` Aus `14.2` und
aus `14.1`
folgt: $x \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$.

`16:` Es gilt `15`"$x \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{U}_{n+(1+m)}$".
Es gilt `9`"$x \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)}$".
Es falso quodlibet folgt: $x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))}$.

Ergo `Thema3.1`:

`A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m}) \wedge (x \cap \beta = 0)) \Rightarrow (x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))})$"

`3.2:` Aus `2.1`"$1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathcal{U}_{1+(1+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+m}) \wedge (x \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \beta \notin \mathcal{U}_{1+(n+(1+m))})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$1 + m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0))$
$\Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$.

<u>Beweis</u> **<u>296-14</u>** `d)` `VS` gleich $(n\in\mathbb{N})\wedge(x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$

Aus `Thema1.1` "$\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$"
folgt: $\beta\in\mathbb{N}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\beta:(\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})\Rightarrow(\beta\in\mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` "$\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}\subseteq\mathbb{N})$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$.

Aus `VS` gleich "$(n\in\mathbb{N})\wedge(x\in\mathcal{U}_{1+n}\setminus\mathcal{U}_n)$" und
aus `Thema1.2` "$\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$1+\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}.$$

Ergo `Thema1.2`:

`A2` "$\forall\beta:(\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})\Rightarrow(1+\beta\in\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(\forall\alpha:((\alpha\in\mathcal{U}_{1+\omega}\setminus\mathcal{U}_\omega)\wedge(x\cap\alpha=0))\Rightarrow(x\cup\alpha\notin\mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})$"

...

<u>Beweis **296-14**</u> `d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`
folgt: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$.

`2:` Aus `1.3`“$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}$”,
aus `A1` gleich “$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\} \subseteq \mathbb{N}$”, und
aus `A2` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\})$”
folgt via **236-5**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\} = \mathbb{N}$.

`e)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \wedge (y \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) \wedge (x \cap y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\} = \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + m \in \mathbb{N}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n \ldots$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathcal{U}_{1+n}$.

`1.5:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m \ldots$”
folgt via **5-3**: $y \in \mathcal{U}_{1+m}$.

…

<u>Beweis **296-14**</u> `e)`

`VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \wedge (y \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) \wedge (x \cap y = 0)$.

...

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1.1`
folgt: $$m \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega} \setminus \mathcal{U}_\omega) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+\omega)}))\}.$$

`2.2:` Aus `1.2`"$1+n \in \mathbb{N}$",
aus `1.3`"$1+m \in \mathbb{N}$",
aus `1.4`"$x \in \mathcal{U}_{1+n}$" und
aus `1.5`"$y \in \mathcal{U}_{1+m}$"
folgt via **296-9**: $$x \cup y \in \mathcal{U}_{(1+n)+(1+m)}.$$

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) \wedge (x \cap \alpha = 0)) \Rightarrow (x \cup \alpha \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)}).$$

`3.2:` $$(1+n)+(1+m) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} 1+(n+(1+m)) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} 1+((n+1)+m) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} 1+((1+n)+m) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (1+(1+n))+m \stackrel{\textbf{FSA}}{=} ((1+1)+n)+m \stackrel{+\textbf{schola}}{=} (2+n)+m \stackrel{\textbf{FSA}}{=} 2+(n+m).$$

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (y \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) \wedge (x \cap y = 0)$" und
aus `3.1`
folgt: $$x \cup y \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)}.$$

`4.2:` Aus `3.2`"$(1+n)+(1+m) = \ldots = 2+(n+m)$" und
aus `2.2`
folgt: $$x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(n+m)}.$$

`5:` Aus `4.2`"$x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(n+m)}$" und
aus `4.1`"$x \cup y \notin \mathcal{U}_{1+(n+m)}$"
folgt via **5-3**: $$x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(n+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+(n+m)}.$$

$\square$

Mengenlehre: Das Zählmaß #.

Ersterstellung: 11/06/14 **Letzte Änderung: 16/06/14**

297-1. Eine Klasse x kann, muss aber nicht zu einer der Klassen $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gehören.

297-1(Definition)

$$\mathsf{297.0}(x) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

297-2. Unter anderem ist eine Klasse x genau dann endlich, wenn $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ nicht leer ist.

297-2(Satz)

a) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.

b) "$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$" *genau dann, wenn* "$x$ *endlich*".

c) "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0$" *genau dann, wenn* "$x$ *unendlich*".

d) *Aus* "x *Unmenge*" *folgt* "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0$".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

Beweis **297-2** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.

b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich "$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$"

1: Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

2: Aus 1 "$\ldots \Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$.

3: Aus 2 "$(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$"
folgt via **240-19**: x endlich.

<u>Beweis **297-2**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich "x endlich"

`1:` Aus `VS` gleich "x endlich"
folgt via **240-21**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3:` Aus `1`"$\ldots (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$" und
aus `2`"Ω Menge"
folgt: $\Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`4:` Aus `3`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$(0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Leftrightarrow (x \text{ endlich})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0) \Leftrightarrow (\neg(x \text{ endlich}))$.

`3:` Aus `2`
folgt via **29-1(Def)**: $(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0) \Leftrightarrow (x \text{ unendlich})$.

`d)` `VS` gleich x Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "x Unmenge"
folgt via **29-2**: x unendlich.

`2:` Aus `1`"x unendlich"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0$.

□

297-3. Der Umgang mit unteren und oberen Schranken wird bereichert.

297-3(Satz)

a) *Aus "M antiSymmetrisch"*
und "u untere M_Schranke von E"
und "$p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}u$"
folgt "$p \notin E$".

b) *Aus "M antiSymmetrisch"*
und "o obere M_Schranke von E"
und "$o_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}p$"
folgt "$p \notin E$".

<u>Beweis</u> **297-3** `a)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } E) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_u)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" und
aus `VS` gleich "…$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_u$"
folgt via **46-1**: $\neg(u\_M\_p)$.

`2:` Es gilt: $(p \in E) \vee (p \notin E)$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $p \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "…u untere M_Schranke von E…" und
aus `2.1.Fall` "$p \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_p.

`4:` Es gilt `3` "u_M_p".
Es gilt `1` "$\neg(u\_M\_p)$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin E$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin E$.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } E) \wedge (o\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" und
aus `VS` gleich "…$o\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$"
folgt via **46-1**: $\neg(p\_M\_o)$.

`2:` Es gilt: $(p \in E) \vee (p \notin E)$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $p \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "…o obere M_Schranke von E…" und
aus `2.1.Fall` "$p \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: p_M_o.

`4:` Es gilt `3` "p_M_o".
Es gilt `1` "$\neg(p\_M\_o)$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin E$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin E$.

□

297-4. Aus $p < u$ und u untere $\leq$ _Schranke von E folgt $p \notin E$. Ähnliches gilt für obere $\leq$ _Schranken.

<u>**297-4(Satz)**</u>

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n = 0$" *oder* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$-1 + (1 + n) = n$".

c) $-1 + (2 + x) = 1 + x$.

d) *Aus* "$x \leq n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x \neq +\infty$" *und* "$x \neq \mathcal{U}$".

e) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq x$"
folgt "$0 \leq x$" *und* "$x \neq -\infty$" *und* "$x \neq \mathcal{U}$".

f) *Aus* "$p < u$" *und* "u *untere* $\leq$ _*Schranke von* E" *folgt* "$p \notin E$".

g) *Aus* "$o < p$" *und* "o *obere* $\leq$ _*Schranke von* E" *folgt* "$p \notin E$".

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

Beweis **297-4** `a)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (-1 + n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`1.2.Fall` $-1 + n \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$-1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = -1 + n$.

`3.1:` Aus `2.1` "n Zahl"
folgt via **FSA0**: $0 + n = n$.

`3.2:` Aus `2.2` "$\ldots \Omega = -1 + n$" und
aus `1.2.Fall`
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`3.3:` Aus `2.2`
folgt: $\Omega = -1 + n$.

`4:` $n \stackrel{3.1}{=} 0 + n \stackrel{+\textbf{schola}}{=} (1 - 1) + n \stackrel{\textbf{160-7}}{=} 1 + (-1 + n) \stackrel{3.3}{=} 1 + \Omega$.

`5:` Aus `4`
folgt: $n = 1 + \Omega$.

`6:` Aus `2.2` "$\exists \Omega \ldots$"
aus `3.2` "$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `5` "$n = 1 + \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(n = 0) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in n) \wedge (n = 1 + \Omega))$.

`b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`2:` Aus `1` "n Zahl"
folgt via **FSA0**: $0 + n = n$.

`3:` $-1 + (1 + n) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1 + 1) + n \stackrel{+\textbf{schola}}{=} 0 + n \stackrel{2}{=} n$.

`4:` Aus `3`
folgt: $-1 + (1 + n) = n$.

<u>Beweis **297-4**</u> `c)`

`1:` $$-1+(2+x) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+2)+x \stackrel{\textbf{+schola}}{=} 1+x.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-1+(2+x) = 1+x.$$

`d)` `VS` gleich $$x \leq n \in \mathbb{N}.$$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq n \ldots$"
folgt via **30-2**: $$x \text{ Menge}.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $$n < +\infty.$$

`2.1:` Aus `1.1`"x Menge"
folgt via **0-17**: $$\boxed{x \neq \mathcal{U}}$$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \leq n \ldots$" und
aus `1.2`"$n < +\infty$"
folgt via **107-8**: $$x < +\infty.$$

`3:` Aus `2.2`"$x < +\infty$"
folgt via **41-3**: $$\boxed{x \neq +\infty}$$

Beweis **297-4** `e)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \leq x$"
folgt via **30-2**: x Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$0 \leq n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \leq x$"
folgt via **107-8**: $\boxed{0 \leq x}$

`2.2:` Aus `1.2`"x Menge"
folgt via **0-17**: $\boxed{x \neq \mathcal{U}}$

`3:` Via **107-6** gilt: $-\infty < 0$.

`4:` Aus `3`"$-\infty < 0$" und
aus `2.1`"$0 \leq x$"
folgt via **107-8**: $-\infty < x$.

`5:` Aus `4`"$-\infty < x$"
folgt via **41-3**: $x \neq -\infty$.

`f)` `VS` gleich $(p < u) \wedge (u$ untere $\leq$ _Schranke von $E)$.

`1:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`3:` Aus `2`"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus `VS` gleich "$\ldots u$ untere $\leq$ _Schranke von E" und
aus `VS` gleich "$p < u \ldots$"
folgt via **297-3**: $p \notin E$.

<u>Beweis</u> **297-4** `g)` `VS` gleich $(o < p) \wedge (o$ obere $\leq$ _Schranke von $E)$.

`1:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`3:` Aus `2`"$\leq$ antiSymmetrisch",
aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus `VS` gleich "$o < p \ldots$"
folgt via **297-3**: $p \notin E$.

$\square$

297-5. Die $\leq$ _Infima von TeilMengen von $\mathbb{N}$ sind entweder in $\mathbb{N}$ oder gleich $+\infty$. Für $\leq$ _Suprema ist mehr möglich. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - e) - d) - c)`:

297-5(Satz)

a) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E" und "$E \subseteq \mathbb{N}$" folgt "$inf \in \mathbb{N}$" oder "$inf = +\infty$".*

b) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E" und "$0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$" folgt "$inf \in \mathbb{N}$".*

c) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E" und "$E \subseteq \mathbb{N}$" folgt "$sup \in \mathbb{N}$" oder "$sup = -\infty$" oder "$sup = +\infty$".*

d) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E" und "$0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$" folgt "$sup \in \mathbb{N}$" oder "$sup = +\infty$".*

e) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E"*
und "$0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$"
und "o obere $\leq$ _Schranke von E"
und "$o \neq +\infty$"
folgt "$sup \in \mathbb{N}$".

Beweis **297-5** `b)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq \text{\_Minimum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Minimum von $E \ldots$"
folgt via **38-3**: Ω ist $\leq$ _Infimum von E.

`3:` Aus `2`"Ω ist $\leq$ _Infimum von E" und
aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$"
folgt via **171-1**: $\Omega = inf$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt: $inf \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **297-5**</u> `a)` `VS` gleich $(inf \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } E) \wedge (E \subseteq \mathbb{N})$.

`1:` Es gilt: $(E = 0) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`2:` Via **157-5** gilt: $+\infty \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } 0$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $+\infty \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } E$.

`4:` Aus `VS` gleich "$inf \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } E \ldots$" und
aus `3`"$+\infty \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } E$"
folgt via **171-1**: $inf = +\infty$.

`1.2.Fall` $0 \neq E$.

Aus `VS` gleich "$inf \text{ ist } \le \text{\_Infimum von } E \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$0 \neq E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $inf \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(inf \in \mathbb{N}) \vee (inf = +\infty)$.

`e)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \le \text{\_Supremum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathbb{N})$
$\wedge (o \text{ obere } \le \text{\_Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (0 \neq E \subseteq \mathbb{N})$
$\wedge (o \text{ obere } \le \text{\_Schranke von } E) \wedge (o \neq +\infty)$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \le \text{\_Maximum von } E) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \text{ ist } \le \text{\_Maximum von } E \ldots$"
folgt via **38-4**: $\Omega \text{ ist } \le \text{\_Supremum von } E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$sup \text{ ist } \le \text{\_Supremum von } E \ldots$" und
aus `2`"$\Omega \text{ ist } \le \text{\_Supremum von } E$"
folgt via **171-1**: $sup = \Omega$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt: $sup \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **297-5**</u> `d)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathbb{N})$.

`1:` Es gilt: $(\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \neq +\infty))$
$\vee (\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = +\infty))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \neq +\infty)$.

Aus `VS` gleich " sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$ ",
aus `VS` gleich " $\ldots 0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$ " und
aus `1.1.Fall` " $\ldots (\Omega \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (\Omega \neq +\infty)$ "
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $sup \in \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$.

`2:` Aus `VS` gleich " sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$ "
folgt via **36-1(Def)**: sup obere $\leq$ _Schranke von E.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $sup = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(sup \in \mathbb{N}) \vee (sup = +\infty)$.

<u>Beweis **297-5**</u> `c)` `VS` gleich $(sup \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (E \subseteq \mathbb{N})$.

`1:` Es gilt: $(E = 0) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`2:` Via **157-5** gilt: $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } 0$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E$.

`4:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und
aus `3`"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **171-1**: $sup = -\infty$.

`1.2.Fall` $0 \neq E$.

Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$0 \neq E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(sup \in \mathbb{N}) \vee (sup = +\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(sup \in \mathbb{N}) \vee (sup = -\infty) \vee (sup = +\infty)$.

□

297-6. Ist x eine Menge, so kann **158-2** verschärft werden. Ist x oder y unendlich, so ist $x \cup y$ unendlich.

297-6(Satz)

a) *Aus "$y \notin \mathcal{P}(x)$" und "x Menge" folgt "$y \not\subseteq x$".*

b) *Aus "x unendlich" und "$x \subseteq y$" folgt "y unendlich".*

c) *Aus "x unendlich" folgt "$x \cup y, y \cup x$ unendlich".*

Beweis **297-6** a) VS gleich $(y \notin \mathcal{P}(x)) \wedge (x \text{ Menge})$.

1: Es gilt: $(y \subseteq x) \vee (y \not\subseteq x)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $y \subseteq x$.

2: Aus 1.1.Fall "$y \subseteq x$" und aus VS gleich "$\ldots x$ Menge" folgt via **0-26**: $y \in \mathcal{P}(x)$.

3: Es gilt 2"$y \in \mathcal{P}(x)$". Es gilt VS gleich "$y \notin \mathcal{P}(x) \ldots$". Ex falso quodlibet folgt: $y \not\subseteq x$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $y \not\subseteq x$.

<u>Beweis **297-6**</u> `b)` `VS` gleich $(x \text{ unendlich}) \wedge (x \subseteq y)$.

`1:` Es gilt: $(y \text{ endlich}) \vee (y \text{ unendlich})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` y endlich.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \subseteq y$” und
aus `1.1.Fall`“y endlich”
folgt via **213-5**: x endlich.

`3:` Es gilt `2`“x endlich”.
Es gilt `VS` gleich “x unendlich…”.
Ex falso quodlibet folgt: y unendlich.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: y unendlich.

`c)` `VS` gleich x unendlich.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq y \cup x$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “x unendlich” und
aus `1.1`“$x \subseteq x \cup y$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{x \cup y \text{ unendlich}}$

`2.2:` Aus `VS` gleich “x unendlich” und
aus `1.2`“$x \subseteq y \cup x$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{y \cup x \text{ unendlich}}$

□

297-7. Auch die Aussage "$x \neq \{p\}$" ist nicht nur an sich interessant.

297-7(Satz)

a) *Aus* "$x \neq \{p\}$" *folgt* "$x = 0$" *oder* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p)$".

b) *Aus* "$p \neq q \in x$" *folgt* "$x \neq \{p\}$".

c) $(x \cap y) \cap (x \setminus y) = 0$.

d) *Aus* "$p \in y$" *und* "$x \subseteq y$" *folgt* "$\{p\} \cup x \subseteq y$".

Beweis **297-7** a) VS gleich $x \neq \{p\}$.

1: Aus VS gleich "$x \neq \{p\}$"
folgt via **174-2**: $((x = 0) \wedge (p \text{ Menge})) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p))$.

2: Aus 1
folgt: $(x = 0) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \neq p))$.

b) VS gleich $p \neq q \in x$.

1: Es gilt: $(x = \{p\}) \vee (x \neq \{p\})$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $x = \{p\}$.

2: Aus VS gleich "$\ldots q \in x$" und
aus 1.1.Fall
folgt: $q \in \{p\}$.

3: Aus 2"$q \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $q = p$.

4: Es gilt 3"$q = p$".
Es gilt VS gleich "$p \neq q \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq \{p\}$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \neq \{p\}$.

c)

1: $(x \cap y) \cap (x \setminus y) \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} x \cap (y \cap (x \setminus y)) \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} x \cap 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

2: Aus 1
folgt: $(x \cap y) \cap (x \setminus y) = 0$.

Beweis **297-7** `d)` `VS` gleich $(p \in y) \wedge (x \subseteq y)$.

`Thema1` $\alpha \in \{p\} \cup x$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{p\} \cup x$"
folgt via **94-8**: $(\alpha = p) \vee (\alpha \in x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha = p$.
Aus `2.1.Fall` "$\alpha = p$" und
aus `VS` gleich "$p \in y \ldots$"
folgt: $\alpha \in y$.

`2.2.Fall` $\alpha \in x$.
Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\} \cup x) \Rightarrow (\alpha \in y)$.
Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{p\} \cup x \subseteq y$.
□

297-8. Es wird der Umgang mit $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}, \overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ vertieft.

297-8(Satz)

a) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}$*" oder "*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$*".*

b) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}$*" oder "*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$*".*

c) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}$*" genau dann, wenn "*$E \not\subseteq \mathbb{S}$*".*

d) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}$*" genau dann, wenn "*$E \not\subseteq \mathbb{S}$*".*

e) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$*" genau dann, wenn "*$E \subseteq \mathbb{S}$*".*

f) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$*" genau dann, wenn "*$E \subseteq \mathbb{S}$*".*

g) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty$*" genau dann, wenn "*$(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$*".*

h) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = +\infty$*" genau dann, wenn*
"$(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha$ *obere* $\leq$ *-Schranke von* $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty))$*".*

i) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty$*" genau dann, wenn*
"$(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha$ *untere* $\leq$ *-Schranke von* $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty))$*".*

j) *"*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = -\infty$*" genau dann, wenn "*$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$*".*

k) *Aus "*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{R}$*"*
folgt "$0 \neq E$*" und "*$\{-\infty\} \neq E \neq \{+\infty\}$*" und "*$E \subseteq \mathbb{S}$*".*

l) *Aus "*u *untere* $\leq$ *-Schranke von* E*"*
und "$u \in \mathbb{R}$*"*
und "$0 \neq E \neq \{+\infty\}$*" folgt "*$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{R}$*".*

m) *Aus "*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{R}$*"*
folgt "$0 \neq E$*" und "*$\{-\infty\} \neq E \neq \{+\infty\}$*" und "*$E \subseteq \mathbb{S}$*".*

n) *Aus "*o *obere* $\leq$ *-Schranke von* E*"*
und "$o \in \mathbb{R}$*"*
und "$0 \neq E \neq \{-\infty\}$*" folgt "*$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{R}$*".*

<u>Beweis **297-8**</u>

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

---

a)

1: Es gilt: $(E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})) \vee (E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$.

2: Aus `1.1.Fall` und aus **190-1**"$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$" folgt: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

3: Aus 2"$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und aus **190-1**"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$" folgt via **21-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$.

`1.2.Fall` $E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$.

Aus `1.2.Fall`"$E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$" folgt via **17-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}).$$

<u>Beweis **297-8**</u> `b)`

`1:` Es gilt: $(E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})) \vee (E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$.

`2:` Aus `1.1.Fall` und
aus **190-1**“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt: $E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`3:` Aus 2“$E \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus **190-1**“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$”
folgt via **21-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$.

`1.2.Fall` $E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$.

Aus `1.2.Fall`“$E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$”
folgt via **17-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S})$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}$”
folgt via **17-4**: $E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$.

`2:` Aus `1` und
aus **190-1**“$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$”
folgt: $E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`3:` Aus 2“$E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$” und
aus **95-9**“$\mathbb{S}$ Menge”
folgt via **297-6**: $E \not\subseteq \mathbb{S}$.

<u>Beweis</u> **297-8** c) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $E \not\subseteq \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich "$E \not\subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-30**: $E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

2: Aus 1 "$E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus **190-1** "$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt: $E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$.

3: Aus 2 "$E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})$"
folgt via **17-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}$.

d) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}$"
folgt via **17-4**: $E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$.

2: Aus 1 und
aus **190-1** "$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt: $E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

3: Aus 2 "$E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus **95-9** "$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **297-6**: $E \not\subseteq \mathbb{S}$.

d) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $E \not\subseteq \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich "$E \not\subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-30**: $E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

2: Aus 1 "$E \notin \mathcal{P}(\mathbb{S})$" und
aus **190-1** "$\mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}) = \mathcal{P}(\mathbb{S})$"
folgt: $E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$.

3: Aus 2 "$E \notin \mathsf{dom}\,(\overset{\leq}{\mathsf{sup}})$"
folgt via **17-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **297-8**</u> `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$”
folgt via **94-1**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\neg(E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq \mathcal{U}$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = \mathcal{U}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S})$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$.

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$”
folgt via **94-1**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\neg(E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $E \subseteq \mathbb{S}$.

Beweis **297-8** `f)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \neq \mathcal{U}$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = \mathcal{U}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S})$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$.

`g)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty$" und
aus **95-11** "$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2` "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ -Infimum von E.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ -Infimum von E.

`5:` Aus `4` "$+\infty$ ist $\leq$ -Infimum von E"
folgt via **157-9**: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

<u>Beweis **297-8**</u> `g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E=0)\vee(E=\{+\infty\})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(E=0)\vee(E=\{+\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E=0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` und
aus **157-5**“$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von 0”
folgt: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

`3:` Aus 2“$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E”
folgt via **190-2**: $\overset{\le}{\mathsf{inf}}\, E=+\infty$.

`1.2.Fall` $E=\{+\infty\}$.

`2:` Aus **95-11**“$+\infty\in\mathbb{S}$”
folgt via **157-6**: $+\infty$ ist $\le$ _Minimum von $\{+\infty\}$.

`3:` Aus 2“$+\infty$ ist $\le$ _Minimum von $\{+\infty\}$”
folgt via **38-3**: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{+\infty\}$.

`4:` Aus 3 und
aus `1.2.Fall`“$E=\{+\infty\}$”
folgt: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

`5:` Aus 4“$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E”
folgt via **190-2**: $\overset{\le}{\mathsf{inf}}\, E=+\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\overset{\le}{\mathsf{inf}}\, E=+\infty$.

<u>Beweis **297-8**</u> `h)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = +\infty$.

`1:` Aus `VS` und
aus **95-11**“$+\infty \in \mathbb{S}$”
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\boxed{E \subseteq \mathbb{S}}$

`3:` Aus `2`“$E \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ -Supremum von E.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ -Supremum von E.

`5:` Aus `4`“$+\infty$ ist $\leq$ -Supremum von E”
folgt via **157-9**: $\boxed{\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } \leq \text{-Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)}$

`h)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$
`VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \text{ obere } \leq \text{-Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = +\infty))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ -Supremum von E.

`2:` Aus `1`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ -Supremum von E”
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E$ obere $\leq$ -Schranke von E.

`3:` Aus `2` und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \text{ obere } \leq \text{-Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$”
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = +\infty$.

<u>Beweis **297-8**</u> `i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty.$

`1:` Aus `VS` und
aus **95-11**“$-\infty \in \mathbb{S}$”
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1`“$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\boxed{E \subseteq \mathbb{S}}$

`3:` Aus `2`“$E \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`5:` Aus `4`“$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E”
folgt via **157-9**: $\boxed{\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)}$

`i)` $\boxed{\Leftarrow}$
`VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)).$

`1:` Aus `VS` gleich “$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`2:` Aus `1`“$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E”
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ untere $\leq$ _Schranke von E.

`3:` Aus `2` und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$”
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty.$

<u>Beweis **297-8**</u> `j)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E = -\infty.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E = -\infty$" und
aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1` "$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $E \subseteq \mathbb{S}.$

`3:` Aus `2` "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`5:` Aus `4` "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **157-9**: $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\}).$

Beweis **297-8** `j)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` und
aus **157-5** "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`3:` Aus 2 "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **190-2**: $\overset{\leq}{\sup} E = -\infty$.

`1.2.Fall` $E = \{-\infty\}$.

`2:` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{-\infty\}$.

`3:` Aus 2 "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{-\infty\}$"
folgt via **38-4**: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{-\infty\}$.

`4:` Aus 3 und
aus `1.2.Fall` "$E = \{-\infty\}$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`5:` Aus 4 "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **190-2**: $\overset{\leq}{\sup} E = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\overset{\leq}{\sup} E = -\infty$.

Beweis **297-8** `k)` `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{R}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge.

`2:` Aus `1` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`3:` Aus `2` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E" und
aus `VS` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{R}$"
folgt via **175-2**: $\boxed{(0 \neq E \neq \{+\infty\}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})}$

`4:` Es gilt: $(E = \{-\infty\}) \vee (E \neq \{-\infty\})$.
`wfFallunterscheidung`

`4.1.Fall` $E = \{-\infty\}$.

`5:` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\{-\infty\}$.

`6:` Aus `5` "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\{-\infty\}$"
folgt via **38-3**: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\{-\infty\}$.

`7:` Aus `6` und
aus `4.1.Fall`
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`8:` Aus `6` "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **190-2**: $-\infty = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$.

`9:` Aus `8` und
aus `VS`
folgt: $-\infty \in \mathbb{R}$.

`10:` Es gilt `9` "$-\infty \in \mathbb{R}$".
Via **AAI** gilt "$-\infty \notin \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \neq \{-\infty\}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{E \neq \{-\infty\}}$

<u>Beweis **297-8**</u> `1)`
`VS` gleich $(u \text{ untere } \leq \text{\_Schranke von } E) \wedge (u \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq E \neq \{+\infty\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "u untere $\leq$ _Schranke von $E\ldots$"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < u$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \neq \{+\infty\}$"
folgt via **174-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \neq +\infty)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`2.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E" und
aus `VS` gleich "u untere $\leq$ _Schranke von $E\ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: $u \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$.

`3.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega \neq +\infty$" und
aus `2.2`"$\Omega \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-11**: $\Omega < +\infty$.

`3.3:` Aus `2.1`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ _Infimum von E" und
aus `1.3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **36-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \leq \Omega$.

`4.1:` Aus `1.2`"$-\infty < u$" und
aus `3.1`"$u \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$.

`4.2:` Aus `3.3`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \leq \Omega$" und
aus `3.2`"$\Omega < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E < +\infty$.

`5:` Aus `4.1`"$-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$" und
aus `4.2`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E < +\infty$"
folgt via **107-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **297-8**</u> `m)` `VS` gleich $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{R}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge.

`2:` Aus `1`“$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E$ Menge”
folgt via **190-3**: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`3:` Aus `2`“$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\leq$ _Supremum von E” und
aus `VS` gleich “$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{R}$”
folgt via **175-3**: $\boxed{(0 \neq E \neq \{-\infty\}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})}$

`4:` Es gilt: $(E = \{+\infty\}) \vee (E \neq \{+\infty\})$.

`wfFallunterscheidung`

`4.1.Fall` $E = \{+\infty\}$.

`5:` Aus **95-11**“$+\infty \in \mathbb{S}$”
folgt via **157-6**: $+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{+\infty\}$.

`6:` Aus `5`“$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{+\infty\}$”
folgt via **38-4**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\{+\infty\}$.

`7:` Aus `6` und
aus `4.1.Fall`
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`8:` Aus `6`“$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E”
folgt via **190-2**: $+\infty = \overset{<}{\mathsf{sup}}\, E$.

`9:` Aus `8` und
aus `VS`
folgt: $+\infty \in \mathbb{R}$.

`10:` Es gilt `9`“$+\infty \in \mathbb{R}$”.
Via **AAI** gilt “$+\infty \notin \mathbb{R}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $E \neq \{+\infty\}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{E \neq \{+\infty\}}$

<u>Beweis **297-8** `n)`</u>
`VS` gleich $(o \text{ obere } \le \text{-Schranke von } E) \wedge (o \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq E \neq \{-\infty\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "o obere $\le$ -Schranke von $E \ldots$"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots o \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVII**: $o < +\infty$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \neq \{-\infty\}$"
folgt via **174-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \neq -\infty)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\le$ -Supremum von E.

`2.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\le$ -Supremum von E" und
aus `VS` gleich "o obere $\le$ -Schranke von $E \ldots$"
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E \le o$.

`3.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega \neq -\infty$" und
aus `2.2`"$\Omega \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-10**: $-\infty < \Omega$.

`3.3:` Aus `2.1`"$\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $\le$ -Supremum von E" und
aus `1.3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **36-4**: $\Omega \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E \le o$" und
aus `1.2`"$o < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E < +\infty$.

`4.2:` Aus `3.2`"$-\infty < \Omega$" und
aus `3.3`"$\Omega \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$.

`5:` Aus `4.2`"$-\infty < \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E$" und
aus `4.1`"$\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E < +\infty$"
folgt via **107-4**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, E \in \mathbb{R}$.

$\square$

297-9. Es gilt unter anderem $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,0 = +\infty$ und $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,0 = -\infty$.

<u>297-9(Satz)</u>

a) $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,0 = +\infty$.

b) $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,0 = -\infty$.

c) $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{+\infty\}) = +\infty$.

d) $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,(\{+\infty\}) = +\infty$.

e) $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{-\infty\}) = -\infty$.

f) $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\,(\{-\infty\}) = -\infty$.

<u>Beweis **297-9**</u> `a)`
Aus “$0 = 0$”
folgt via **297-8**: $\overset{\le}{\mathsf{inf}}\, 0 = +\infty$.

`b)`
Aus “$0 = 0$”
folgt via **297-8**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, 0 = -\infty$.

`c)`
Aus “$\{+\infty\} = \{+\infty\}$”
folgt via **297-8**: $\overset{\le}{\mathsf{inf}}\, (\{+\infty\}) = +\infty$.

`d)`

`1:` Aus **95-11** “$+\infty \in \mathbb{S}$”
folgt via **157-6**: $+\infty$ ist $\le$ _Maximum von $\{+\infty\}$.

`2:` Aus `1` “$+\infty$ ist $\le$ _Maximum von $\{+\infty\}$”
folgt via **38-4**: $+\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{+\infty\}$.

`3:` Aus `2` “$+\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{+\infty\}$”
folgt via **190-2**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, (\{+\infty\}) = +\infty$.

`e)`

`1:` Aus **95-11** “$-\infty \in \mathbb{S}$”
folgt via **157-6**: $-\infty$ ist $\le$ _Minimum von $\{-\infty\}$.

`2:` Aus `1` “$-\infty$ ist $\le$ _Minimum von $\{-\infty\}$”
folgt via **38-3**: $-\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{-\infty\}$.

`3:` Aus `2` “$-\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{-\infty\}$”
folgt via **190-2**: $\overset{\le}{\mathsf{inf}}\, (\{-\infty\}) = -\infty$.

`f)`
Aus “$\{-\infty\} = \{-\infty\}$”
folgt via **297-8**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\, (\{-\infty\}) = -\infty$.

$\square$

297-10. Für Teilmengen von $\mathbb{N}$ gestalten sich einige Resultate von **297-8** freundlicher.

297-10(Satz)

a) *Aus* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty$" *und* "$E \subseteq \mathbb{N}$" *folgt* "$E = 0$".

b) *Aus* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty$" *folgt* "$E \not\subseteq \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, E = -\infty$" *und* "$E \subseteq \mathbb{N}$" *folgt* "$E = 0$".

Beweis **297-10** a) `VS` gleich $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty) \wedge (E \subseteq \mathbb{N})$.

1: Aus `VS` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty \ldots$"
folgt via **297-8**: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`1.2.Fall` $E = \{+\infty\}$.

2: Aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt via **1-3**: $+\infty \in \{+\infty\}$.

3: Aus 2 und
aus `1.2.Fall`
folgt: $+\infty \in E$.

4: Aus 3 "$+\infty \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{N}$.

5: Es gilt 4 "$+\infty \in \mathbb{N}$".
Via **166-1** gilt "$+\infty \notin \mathbb{N}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E = 0$.

Beweis **297-10** `b)` `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty$.

`1:` Es gilt: $(E \subseteq \mathbb{N}) \vee (E \not\subseteq \mathbb{N})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty$" und
aus **95-3**"$-\infty$ Menge"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge.

`3:` Aus 2"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ Menge"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ -Infimum von E.

`4:` Aus 3"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $\leq$ -Infimum von E" und
aus `1.1.Fall`"$E \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **297-5**: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{N}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = +\infty)$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E = -\infty$" und
aus **107-6**"$-\infty \neq +\infty$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \neq +\infty$.

`6:` Aus 4 und
aus 5
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, E \in \mathbb{N}$.

`7:` Aus `VS` und
aus 6
folgt: $-\infty \in \mathbb{N}$.

`8:` Es gilt 7"$-\infty \in \mathbb{N}$".
Via **166-1** gilt "$-\infty \notin \mathbb{N}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \not\subseteq \mathbb{N}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E \not\subseteq \mathbb{N}$.

<u>Beweis **297-10**</u> `c)` `VS` gleich $(\overset{<}{\mathsf{sup}}\,E=-\infty)\wedge(E\subseteq\mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\overset{<}{\mathsf{sup}}\,E=-\infty\ldots$"
folgt via **297-8**: $(E=0)\vee(E=\{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E=0$.

`1.2.Fall` $E=\{-\infty\}$.

`2:` Aus **95-3**"$-\infty$ Menge"
folgt via **1-3**: $-\infty\in\{-\infty\}$.

`3:` Aus 2 und
aus `1.2.Fall`
folgt: $-\infty\in E$.

`4:` Aus 3"$-\infty\in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E\subseteq\mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $-\infty\in\mathbb{N}$.

`5:` Es gilt 4"$-\infty\in\mathbb{N}$".
Via **166-1** gilt "$-\infty\notin\mathbb{N}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E=0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E=0$.

□

297-11. Ob eine Klasse x endlich oder unendlich ist kann mit dem $\leq$ _Infimums von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ bestimmt werden.

297-11(Satz)

a) *"x endlich"*

genau dann, wenn "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$".

b) *"x unendlich"*

genau dann, wenn "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$".

c) *Aus "x Unmenge" folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

Beweis **297-11** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich x endlich.

1: Aus VS gleich "x endlich"
folgt via **297-2**: $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

2: Via **297-2** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.

3: Via **159-10** gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$.

4: Aus 2"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus 3"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{S}$.

5: Aus 4"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\})$
ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

6: Aus 5"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\})$
ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$",
aus 1"$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$" und
aus 2"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **297-5**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$.

Beweis **297-11** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$.

1: Aus VS gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{R}$"
folgt via **297-8**: $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

3: Aus 2"$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **297-2**: x endlich.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich x unendlich.

1: Aus VS gleich "x unendlich"
folgt via **297-2**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0$.

2: Via **297-9** gilt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,0 = +\infty$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$.

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$.

1: Via **297-2** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.

2: Aus VS gleich "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$" und
aus 1"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **297-10**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0$.

3: Aus 2"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\} = 0$"
folgt via **297-2**: x unendlich.

c) VS gleich x Unmenge.

1: Aus VS gleich "x Unmenge"
folgt via **29-2**: x unendlich.

2: Aus 2"x unendlich"
folgt via des bereits bewiesenen b):
$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$.

□

297-12. Nun wird # in die Essays eingeführt.

297-12(Definition)

1) $\# = 297.1() = \{(\lambda, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\ (\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\lambda \in \mathcal{U}_\omega)\})) : \lambda \in \mathcal{U}\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\ (\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\})) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Zählmaß**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = \#.$$

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

297-13. # ist das Zählmaß.

297-13(Satz)

a) *# Zählmaß.*

b) *Aus "$\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ Zählmaß" folgt "$\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$".*

Beweis **297-13** a)
Aus "$\# = \#$"
folgt via **297-12(Def)**: # Zählmaß.

b) VS gleich $\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ Zählmaß.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}\ldots$ Zählmaß"
folgt via **297-12(Def)**: $\mathfrak{C} = \#$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ Zählmaß"
folgt via **297-12(Def)**: $\mathfrak{D} = \#$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

297-14. Bemerkenswerter Weise gilt unter anderem $(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})) \in \#$ für jede Menge p.

<u>**297-14(Satz)**</u>

a) *Aus* "$(p,q) \in \#$" *folgt* "$q = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$".

b) *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})) \in \#$".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

<u>Beweis **297-14**</u> a) VS gleich $(p,q) \in \#$.

1.1: Aus VS gleich "$(p,q) \in \#$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

1.2: Aus VS gleich "$(p,q) \in \#$"
folgt via **297-12(Def)**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\})) \wedge ((p,q) = (\Omega, \Phi)).$$

2: Aus 1.2"$\ldots (p,q) = (\Omega,\Phi)$" und
aus 1.1"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Phi)$.

3: Aus 2"$\ldots q = \Phi$" und
aus 1.2"$\ldots \Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\}) \ldots$"
folgt: $q = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$.

4: Aus 3 und
aus 2"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $q = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$.

b) VS gleich p Menge.

1.1: Aus VS gleich "p Menge"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

1.2: Aus VS gleich "p Menge"
folgt: $\exists \Phi : \Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$.

1.3: Via **297-2** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.

...

<u>Beweis **297-14**</u> `b)` `VS` gleich p Menge.

...

`2.1:` Aus `1.1` "$\ldots \Omega = p$" und
aus `1.2` "$\ldots \Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$"
folgt: $\Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$.

`2.2:` Aus `1.1` "$\ldots \Omega = p$" und
aus `1.2` "$\ldots \Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}))$.

`2.3:` Aus `1.3` "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.2`
folgt: $(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})) = (\Omega, \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.3` "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**:
$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$
ist $\leq$-Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`4:` Aus `3.2` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$
ist $\leq$-Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **36-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$ Menge.

`5:` Aus `VS` gleich "p Menge" und
aus `4` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}))$ Menge.

`6:` Aus `1.1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2` "$\exists \Phi \ldots$",
aus `2.1` "$\Phi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$",
aus `3.1` "$(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `5` "$(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}))$ Menge"
folgt via **297-12(Def)**: $(p, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})) \in \#$.

$\square$

297-15. Unter anderem gilt $\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$.

297-15(Satz)

a) *$\#$ Relation.*

b) *$\#$ Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,\# = \mathcal{U}$.

d) $\mathsf{ran}\,\# \subseteq \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$.

e) $\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$.

f) *$\#$ Unmenge.*

g) *Aus "p Menge" folgt "$\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$".*

h) *"$\#(p)$ Menge" genau dann, wenn "p Menge".*

i) *"p Menge" genau dann, wenn "$\#(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$".*

j) *"p Menge" genau dann, wenn "$(\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$".*

k) *"p endlich" genau dann, wenn "$\#(p) \in \mathbb{N}$".*

l) *"$(p$ Menge$) \wedge (p$ unendlich$)$" genau dann, wenn "$\#(p) = +\infty$".*

m) *"p Unmenge" genau dann, wenn "$\#(p) = \mathcal{U}$".*

n) *"$\#(p) = \mathcal{U}$" oder "$\#(p) = +\infty$" oder "$\#(p) \in \mathbb{N}$".*

o) *"$\#(p) = \mathcal{U}$" oder "$\#(p)$ Zahl".*

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

<u>Beweis **297-15**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \#.$
Aus `Thema1`“$\alpha \in \#$” folgt via **297-12(Def)**:	$\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \#) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\#$ Relation.

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$		$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \#.$
`2.1:`	Aus `Thema1.1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \#$” folgt via **297-14**:	$\beta = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_\omega)\}.$
`2.2:`	Aus `Thema1.1`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \#$” folgt via **297-14**:	$\gamma = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_\omega)\}.$
`3:`	Aus `2.1` und aus `2.2` folgt:	$\beta = \gamma.$

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \#) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\#$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$\#$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \#) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\#$ Funktion.

<u>Beweis **297-15**</u> `c)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2` "α Menge"
folgt via **297-14**: $(\alpha, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_\omega)\})) \in \#$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, \overset{\leq}{\mathsf{inf}}(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_\omega)\})) \in \#$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\#$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,\#)$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\,\# = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **297-15**</u> `d)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,\#.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\alpha \in \mathsf{ran}\,\#$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \#.$

`3:` Aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in \#$"
folgt via **297-14**: $\alpha = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\}).$

`4:` Es gilt: $(\Omega \text{ endlich}) \vee (\Omega \text{ unendlich}).$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` Ω endlich.

`5:` Aus `4.1.Fall`"Ω endlich"
folgt via **297-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}.$

`6:` Aus `3` und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \mathbb{N}.$

`7:` Aus `6`
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{+\infty\} \cup \mathbb{N}.$

`4.2.Fall` Ω unendlich.

`5:` Aus `4.2.Fall`"Ω unendlich"
folgt via **297-11**:
$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty.$

`6:` Aus `3` und
aus `5`
folgt: $\alpha = +\infty.$

`7:` Aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
folgt via **2-28**: $+\infty \in \{+\infty\} \cup \mathbb{N}.$

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $\alpha \in \{+\infty\} \cup \mathbb{N}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{+\infty\} \cup \mathbb{N}.$

...

Beweis **297-15** `d)` ...

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{ran}\,\#)\Rightarrow(\alpha\in\{+\infty\}\cup\mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,\#\subseteq\{+\infty\}\cup\mathbb{N}$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\#$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\#=\mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,\#\subseteq\{+\infty\}\cup\mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1`"$\#$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,\#=\mathcal{U}$" und
aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,\#\subseteq\{+\infty\}\cup\mathbb{N}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\#:\mathcal{U}\to\{+\infty\}\cup\mathbb{N}$.

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\#=\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,\#=\mathcal{U}$"
folgt via **7-9**: $\#$ Unmenge.

`g)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **297-14**: $(p,\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(p\in\mathcal{U}_\omega)\}))\in\#$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\#$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\#$ Funktion" und
aus `1`"$(p,\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(p\in\mathcal{U}_\omega)\}))\in\#$"
folgt via **18-20**: $\#(p)=\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega:(\omega\in\mathbb{N})\wedge(p\in\mathcal{U}_\omega)\})$.

<u>Beweis **297-15**</u> `h)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\#(p)$ Menge.

Aus `VS` gleich "$\#(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`h)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\# = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $p \in \mathsf{dom}\,\#$.

`4:` Aus `3`"$p \in \mathsf{dom}\,\#$"
folgt via **17-5**: $\#(p)$ Menge.

`i)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:

$$\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\#(p)$ Menge.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$ Menge"
folgt via **190-3**:
$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$
ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`4:` Aus `1.1` und
aus `3`
folgt: $\#(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

<u>Beweis **297-15**</u> `i)` $\boxed{\Leftarrow}$

`VS` gleich $\#(p)$ ist $\leq$ _Infium von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **36-3**: $\#(p)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\#(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`j)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$.

`3:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U}$" und
aus `2`"$\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **21-4**: $\#(p) \in \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`"$\#(p) \in \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **94-8**: $(\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`j)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\#(p) = +\infty$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\#(p) = +\infty$" und
aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
folgt: $\#(p)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\#(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`1.2.Fall` $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$\#(p) \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\#(p)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\#(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p Menge.

Beweis **297-15** `k)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich p endlich.

`1:` Aus `VS` gleich "p endlich"
folgt via **28-6**: p Menge.

`2:` Aus `1` "p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$$\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

`3:` Aus `VS` gleich "p endlich"
folgt via **297-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`k)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(p) \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\#(p)$ Menge.

`2:` Aus `1` "$\#(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: p Menge.

`3:` Aus `2` "p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$$\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-11**: p endlich.

<u>Beweis **297-15**</u> `l)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ unendlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$$\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

`2:` Aus `VS` gleich "…p unendlich"
folgt via **297-11**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\#(p) = +\infty$.

`l)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\#(p) = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(p) = +\infty$" und
aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
folgt: $\#(p)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\#(p)$ Menge"
folgt via **17-3**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`3:` Aus `2`"p Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$$\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$.

`5:` Aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}) = +\infty$"
folgt via **297-11**: $\boxed{p \text{ unendlich}}$

`m)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich p Unmenge.
Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **17-3**: $\#(p) = \mathcal{U}$.

Beweis **297-15** `m)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\#(p) = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(p) = \mathcal{U}$"
folgt via **17-4**: $p \notin \mathsf{dom}\,\#$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\# = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $p \notin \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$p \notin \mathcal{U}$"
folgt via **0-23**: p Unmenge.

`n)`

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Es gilt: $(p \text{ endlich}) \vee (p \text{ unendlich})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` p endlich.

Aus `2.1.Fall`"p endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`2.2.Fall` p unendlich.

Aus `1.1.Fall`"p Menge" und
aus `2.2.Fall`"p unendlich"
folgt via des bereits bewiesenen `l)`: $\#(p) = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

Aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `m)`: $\#(p) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\#(p) = \mathcal{U}) \vee (\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

Beweis **297-15** `o)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `n)` gilt:
$$(\#(p)=\mathcal{U}) \vee (\#(p)=+\infty) \vee (\#(p)\in\mathbb{N}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\#(p)=\mathcal{U}.$

`1.2.Fall` $\#(p)=+\infty.$

Aus `1.2.Fall` "$\#(p)=+\infty$" und
aus **95-5** "$+\infty$ Zahl"
folgt: $\#(p)$ Zahl.

`1.3.Fall` $\#(p)\in\mathbb{N}.$

Aus `1.3.Fall` "$\#(p)\in\mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $\#(p)$ Zahl.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$(\#(p)=\mathcal{U}) \vee (\#(p) \text{ Zahl}).$$

□

297-16. Der Fall $\#(p) \in \mathbb{N}$ zeichnet sich durch interessante, korresponiderende Eigenschaften aus.

297-16(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`ii)` $\#(p)$ *ist* $\leq$ *_Minimum von* $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`iii)` $\#(p) \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`iv)` "$\#(p) \in \mathbb{N}$" *und* "$p \in \mathcal{U}_{\#(p)}$".

`v)` p *endlich.*

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

<u>Beweis **297-16**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\#(p) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-15**: p endlich.

`1.2:` Via **297-2** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1.1`"p endlich"
folgt via **28-6**: p Menge.

`2.2:` Aus `1.1`"p endlich"
folgt via **297-2**: $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`3.1:` Aus `2.1`"p Menge"
folgt via **297-15**: $\#(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$.

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$" und
aus `1.2`"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ -Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`4:` Aus `3.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **38-6**: Ω ist $\leq$ -Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`5:` Aus `4`"Ω ist $\leq$ -Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **190-3**: $\Omega = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.1`
folgt: $\Omega = \#(p)$.

`7:` Aus `6` und
aus `3.2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt: $\#(p)$ ist $\leq$ -Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\#(p)$ ist $\leq$ -Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.
Aus `VS` gleich "$\#(p)$ ist $\leq$ -Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **38-1(Def)**: $\#(p) \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\#(p) \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.
Aus `VS` gleich "$\#(p) \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt: $(\#(p) \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_{\#(p)})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(\#(p) \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_{\#(p)})$.
Aus `VS` gleich "$\#(p) \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-15**: p endlich.

Beweis **297-16** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p endlich.

Aus `VS` gleich "p endlich"

folgt via **297-15**: $\#(p) \in \mathbb{N}$.

$\square$

297-17. Für endliches p kann Einiges über jene $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ausgesagt werden, in denen p (nicht) enthalten ist.

297-17(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n < \#(p)$" *folgt* "$p \notin \mathcal{U}_n$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "p *Menge*" *und* "$p \notin \mathcal{U}_n$" *folgt* "$n < \#(p)$".

c) *Aus* "$\#(p) \leq n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$p \in \mathcal{U}_n$".

d) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$p \in \mathcal{U}_n$" *folgt* "$\#(p) \leq n$" *und* "$\#(p) \in \mathbb{N}$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **297-17**

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **297-1(Def)**

...

Beweis **297-17** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n < \#(p))$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathcal{U}_n) \vee (p \notin \mathcal{U}_n)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathcal{U}_n$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$p \in \mathcal{U}_n$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

`2.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots n < \#(p)$”
folgt via **107-13**: $\neg(\#(p) \leq n)$.

`3.1:` Aus `2.1`“p Menge”
folgt via **297-15**: $\#(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”,
aus `1.1.Fall`“$p \in \mathcal{U}_n$” und
aus `2.2`“n Menge”
folgt: $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`4:` Aus `3.1`“$\#(p)$ ist $\leq$ _Infimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\})$” und
aus `3.2`“$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$”
folgt via **36-3**: $\#(p) \leq n$.

`5:` Es gilt `4`“$\#(p) \leq n$”.
Es gilt `2.3`“$\neg(\#(p) \leq n)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin \mathcal{U}_n$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin \mathcal{U}_n$.

`b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathcal{U}_n)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots p$ Menge$\ldots$”
folgt via **297-15**: $(\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\#(p) = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-11**: $n < +\infty$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $n < \#(p)$.

...

Beweis **297-17** `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (p \notin \mathcal{U}_n)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`$\#(p) \in \mathbb{N}$
folgt via **159-11**: $\#(p) \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1`"$n \in \mathbb{S}$" und
aus `2.2`"$\#(p) \in \mathbb{S}$"
folgt via **122-2**: $(n < \#(p))\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ (\#(p) \le n)$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\#(p) \le n$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$\#(p) \le n$" und
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $(\#(p) \neq +\infty) \wedge (\#(p) \neq \mathcal{U})$.

`5:` Via **297-15** gilt:
$(\#(p) = \mathcal{U}) \vee (\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`7.1:` Aus `6`"$\#(p) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-16**: $p \in \mathcal{U}_{\#(p)}$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `6`"$\#(p) \in \mathbb{N}$" und
aus `3.1.Fall`"$\#(p) \le n$"
folgt via **296-6**: $\mathcal{U}_{\#(p)} \subseteq \mathcal{U}_n$.

`8:` Aus `7.1`"$p \in \mathcal{U}_{\#(p)}$" und
aus `7.2`"$\mathcal{U}_{\#(p)} \subseteq \mathcal{U}_n$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathcal{U}_n$.

`9:` Es gilt `8`"$p \in \mathcal{U}_n$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathcal{U}_n$".
Ex falso quodlibet folgt: $n < \#(p)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n < \#(p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n < \#(p)$.

<u>Beweis **297-17**</u> `c)` `VS` gleich $\#(p) \leq n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(p) \leq n \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-4**: $(\#(p) \neq +\infty) \wedge (\#(p) \neq \mathcal{U})$.

`2:` Via **297-15** gilt: $(\#(p) = \mathcal{U}) \vee (\#(p) = +\infty) \vee (\#(p) \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\#(p) \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `3`"$\#(p) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-16**: $p \in \mathcal{U}_{\#(p)}$.

`4.2:` Aus `3`"$\#(p) \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\#(p) \leq n \ldots$"
folgt via **296-6**: $\mathcal{U}_{\#(p)} \subseteq \mathcal{U}_n$.

`5:` Aus `4.1`"$p \in \mathcal{U}_{\#(p)}$" und
aus `4.2`"$\mathcal{U}_{\#(p)} \subseteq \mathcal{U}_n$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathcal{U}_n$.

<u>Beweis **297-17**</u> `d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_n)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_n)$" und
aus `1`"n Menge"
folgt: $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`3:` Aus `2`"$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **297-2**: p endlich.

`5.1:` Aus `4`"p endlich"
folgt via **297-16**: $\boxed{\#(p) \in \mathbb{N}}$

`5.2:` Aus `4`"p endlich"
folgt via **297-16**: $\#(p)$ ist $\le$ _Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$.

`6:` Aus `5.2`"$\#(p)$ ist $\le$ _Minimum von $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$" und
aus `2`"$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathcal{U}_\omega)\}$"
folgt via **38-3**: $\boxed{\#(p) \le n}$

□

297-18. Es gilt unter anderem $\#(0) = 0$ und für jede Menge p ist $\#(\{p\}) = 1$.

297-18(Satz)

a) $\#(0) = 0$.

b) "$\#(x) = 0$" *genau dann, wenn* "$x = 0$".

c) *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$\#(\{p\}) = 1$".

d) "$\#(x) = 1$" *genau dann, wenn* "$x \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$".

e) *Aus* "$\#(x) = 1$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (x = \{\Omega\})$".

Beweis **297-18**

≤-Notation.

---

a)

1.1: Aus **EndlichkeitsAxiom** "0 endlich"
folgt via **297-16**: $\#(0) \in \mathbb{N}$.

1.2: Aus **1-5** "$0 \in \{0\}$" und
aus **240-2(RekParDef)** "$\mathcal{U}_0 = \{0\}$"
folgt: $0 \in \mathcal{U}_0$.

2.1: Aus 1.1 "$\#(0) \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $0 \leq \#(p)$.

2.2: Aus **∈schola** "$0 \in \mathbb{N}$" und
aus 1.2 "$0 \in \mathcal{U}_0$"
folgt via **297-17**: $\#(0) \leq 0$.

3: Aus 2.2 "$\#(0) \leq 0$" und
aus 2.1 "$0 \leq \#(p)$"
folgt via **107-13**: $\#(0) = 0$.

<u>Beweis</u> **297-18** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\#(x)=0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(x)=0$" und
aus $\in$**schola**"$0\in\mathbb{N}$"
folgt: $\#(x)\in\mathbb{N}.$

`2:` Aus `1`"$\#(x)\in\mathbb{N}$"
folgt ia **297-16**: $x\in\mathcal{U}_{\#(x)}.$

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $x\in\mathcal{U}_0.$

`4:` Aus `3`"$x\in\mathcal{U}_0$" und
aus **240-2(RekParDef)**"$\mathcal{U}_0=\{0\}$"
folgt: $x\in\{0\}.$

`5:` Aus `4`"$x\in\{0\}$"
folgt via **1-6**: $x=0.$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x=0.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\#(0)=0.$

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\#(x)=0.$

<u>Beweis **297-18**</u> `c)` `VS` gleich p Menge.

`1.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **27-6**: $\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1.2`"$\{p\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$" und
aus **296-12**"$\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt: $\{p\} \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$.

`3:` Aus `2`"$\{p\} \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$"
folgt via **5-3**: $(\{p\} \in \mathcal{U}_1) \wedge (\{p\} \notin \mathcal{U}_0)$.

`4.1:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$" und
aus `3`"$\{p\} \in \mathcal{U}_1 \ldots$"
folgt via **297-17**: $(\#(\{p\}) \leq 1) \wedge (\#(\{p\}) \in \mathbb{N})$.

`4.2:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$",
aus `1.1`"$\{p\}$ Menge" und
aus `3`"$\ldots \{p\} \notin \mathcal{U}_0$"
folgt via **297-17**: $0 < \#(\{p\})$.

`5:` Aus `4.2`"$0 < \#(\{p\})$",
aus $\#$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `4.1`"$\ldots \#(\{p\}) \in \mathbb{N}$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + 0 \leq \#(\{p\})$.

`6:` Aus `5`"$1 + 0 \leq \#(\{p\})$" und
aus $+$**schola**"$1 + 0 = 1$"
folgt: $1 \leq \#(\{p\})$.

`7:` Aus `4.1`"$\#(\{p\}) \leq 1$" und
aus `6`"$1 \leq \#(\{p\})$"
folgt via **107-13**: $\#(\{p\}) = 1$.

Beweis **297-18** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\#(x) = 1.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\#(x) = 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt: $\#(x) \in \mathbb{N}.$

`1.2:` Aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus `VS` gleich "$\#(x) = 1$"
folgt: $0 < \#(x).$

`2.1:` Aus `1.1`"$\#(x) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-16**: $x \in \mathcal{U}_{\#(x)}.$

`2.2:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$0 < \#(x)$"
folgt via **297-17**: $x \notin \mathcal{U}_0.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `VS`
folgt: $x \in \mathcal{U}_1.$

`4:` Aus `3`"$x \in \mathcal{U}_1$" und
aus `2.2`"$x \notin \mathcal{U}_0$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0.$

`5:` Aus `4`"$x \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$" und
aus **296-12**"$\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt: $x \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (x = \{\Omega\}).$

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\#(\{\Omega\}) = 1.$

`3:` Aus `2` und
aus `1`"$\ldots x = \{\Omega\}$"
folgt: $\#(x) = 1.$

`e)` `VS` gleich $\#(x) = 1.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\#(x) = 1$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$

`2:` Aus `1`"$x \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (x = \{\Omega\}).$

$\square$

297-19. Interessanter Weise korreliert die Aussage $\#(p) = n \in \mathbb{N}$ mit $p \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

297-19(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$n \in \mathbb{N}$" und "$x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$".*

`ii)` $\#(x) = n \in \mathbb{N}$.

Beweis **297-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathcal{U}_n) \wedge (x \notin \mathcal{U}_{-1+n})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1.2`"$x \in \mathcal{U}_n \ldots$"
folgt via **297-17**: $(\#(x) \le n) \wedge (\#(x) \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (-1 + n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $n = 0$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$n = 0$" und
aus `1.2`"$x \in \mathcal{U}_n \ldots$"
folgt: $x \in \mathcal{U}_0$.

`5:` Aus `4`"$x \in \mathcal{U}_0$" und
aus **240-2(RekParDef)**"$\mathcal{U}_0 = \{0\}$"
folgt: $x \in \{0\}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $x = 0$.

`7:` Aus `6`"$x = 0$"
folgt via **297-18**: $\#(x) = 0$.

`8:` Aus `7` und
aus `3.1.Fall`"$n = 0$"
folgt: $\#(x) = n$.

...

<u>Beweis **297-19**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $-1+n \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `1.2`"$x \in \mathcal{U}_n \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$-1+n \in \mathbb{N}$",
aus `4`"x Menge" und
aus `1.2`"$\ldots x \notin \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **297-17**: $-1+n < \#(x)$.

`6:` Aus `5`"$-1+n < \#(x)$",
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \#(x) \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-6**: $n \leq \#(x)$.

`7:` Aus `2`"$\#(x) \leq n \ldots$" und
aus `6`"$n \leq \#(x)$"
folgt via **107-13**: $\#(x) = n$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\#(x) = n}$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\#(x) = n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` folgt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` folgt: $\#(x) \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\#(x) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-16**: $x \in \mathcal{U}_{\#(x)}$.

`2.2:` Aus `1.3`"$n \in \mathbb{S}$"
folgt via **160-12**: $-1+n < n$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (-1+n \in \mathbb{N})$.

...

<u>Beweis **297-19**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\#(x) = n \in \mathbb{N}$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $n = 0$.

`4.1:` Aus `3.1.Fall` und
aus `VS` gleich “$\#(x) = n\ldots$”
folgt: $\#(x) = 0$.

`4.2:` Aus **296-10(Def)**“$\mathcal{U}_{-1} = 0$” und
aus +**schola**“$-1 + 0 = -1$”
folgt: $\mathcal{U}_{-1+0} = 0$.

`5:` Aus `4.1`“$\#(x) = 0$”
folgt via **297-18**: $x = 0$.

`6.1:` Aus `5`“$x = 0$” und
aus **1-5**“$0 \in \{0\}$”
folgt: $x \in \{0\}$.

`6.2:` Via **0-19** gilt: $x \notin 0$.

`7.1:` Aus `6.1`“$x \in \{0\}$” und
aus **240-2(RekParDef)**“$\mathcal{U}_0 = \{0\}$”
folgt: $x \in \mathcal{U}_0$.

`7.2:` Aus `6.2` und
aus `4.2`
folgt: $x \notin \mathcal{U}_{-1+0}$.

`8:` Aus `7.1`“$x \in \mathcal{U}_0$” und
aus `7.2`“$x \notin \mathcal{U}_{-1+0}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

`9:` Aus `8` und
aus `3.1.Fall`
folgt: $x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

...

Beweis **297-19** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\#(x) = n \in \mathbb{N}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $-1 + n \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `2.2`"$-1 + n < n$" und
aus `VS` gleich "$\#(x) = n \ldots$"
folgt: $-1 + n < \#(x)$.

`5:` Aus `3.2.Fall`"$-1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `4`"$-1 + n < \#(x)$"
folgt via **297-17**: $x \notin \mathcal{U}_{-1+n}$.

`6:` Aus `2.1`"$x \in \mathcal{U}_{\#(x)}$" und
aus `5`"$x \notin \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`7:` Aus `6` und
aus `VS` gleich "$\#(x) = n \ldots$"
folgt: $x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}}$

□

297-20. Falls x oder y unendlich ist gilt $\#(x)+\#(y)=\#(x\cup y)$.

297-20(Satz)

a) $\#(x)+0=0+\#(x)=\#(x)$.

b) $\#(x)+\#(0)=\#(0)+\#(x)=\#(x)$.

c) *Aus* "$y=0$" *folgt* "$\#(x)+\#(y)=\#(y)+\#(x)=\#(x)$".

d) *Aus* "x *unendlich*" *folgt* "$\#(x)+\#(y)=\#(x\cup y)$".

e) *Aus* "y *unendlich*" *folgt* "$\#(x)+\#(y)=\#(x\cup y)$".

f) *Aus* "x,y *endlich*" *und* "$x\cap y=0$" *folgt* "$\#(x)+\#(y)=\#(x\cup y)$".

Beweis **297-27** ab)

1: Via **297-15** gilt: $(\#(x)=\mathcal{U})\vee(\#(x)\ \text{Zahl})$.

2.a): Aus 1 "$(\#(x)=\mathcal{U})\vee(\#(x)\ \text{Zahl})$"
folgt via **FSA0**: $\#(x)+0=0+\#(x)=\#(x)$.

3: Via **297-18** gilt: $\#(0)=0$.

4.b): Aus 2.a) und
aus 3
folgt: $\#(x)+\#(0)=\#(0)+\#(x)=\#(x)$.

c) VS gleich $y=0$.

1: Aus VS gleich "$y=0$"
folgt via **297-18**: $\#(y)=0$.

2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\#(x)+0=0+\#(x)=\#(x)$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\#(x)+\#(y)=\#(y)+\#(x)=\#(x)$.

<u>Beweis **297-20**</u> `d)` `VS` gleich x unendlich.

`1:` Aus `VS` gleich "x unendlich"
folgt via **297-6**: $x \cup y$ unendlich.

`2:` Es gilt: $(x \cup y \text{ Menge}) \vee (x \cup y \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \cup y$ Menge.

`3.1:` Aus `2.1.Fall` "$x \cup y$ Menge" und
aus `1` "$x \cup y$ unendlich"
folgt via **297-15**: $\#(x \cup y) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall` "$x \cup y$ Menge"
folgt via **213-3**: x, y Menge.

`4.1:` Aus `3.2` "$x \ldots$ Menge" und
aus `VS` gleich "x unendlich"
folgt via **297-15**: $\#(x) = +\infty$.

`4.2:` Aus `3.2` "$\ldots y$ Menge"
folgt via **297-15**: $(\#(y) = +\infty) \vee (\#(y) \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`4.2.1.Fall` $\#(y) = +\infty$.

`5:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{4.1}{=} (+\infty) + \#(y)$
$\stackrel{\texttt{4.2.1.Fall}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{3.1}{=} \#(x \cup y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`4.2.2.Fall` $\#(y) \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4.2.2.Fall` "$\#(y) \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $\#(y) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5` "$\#(y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $\#(y) + (+\infty) = +\infty$.

`7:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} \#(y) + \#(x) \stackrel{4.1}{=} \#(y) + (+\infty) \stackrel{6}{=} +\infty$
$\stackrel{3.1}{=} \#(x \cup y)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

...

<u>Beweis **297-20**</u> `d)` `VS` gleich x unendlich.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x \cup y$ Unmenge.

`3.1:` Aus `2.2.Fall` "$x \cup y$ Unmenge"
folgt via **297-15**: $\#(x \cup y) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall` "$x \cup y$ Unmenge"
folgt via **2-8**: $(x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`3.2.1.Fall` x Unmenge.

`4:` Aus `3.2.1.Fall` "x Unmenge"
folgt via **297-15**: $\#(x) = \mathcal{U}$.

`5:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{4}{=} \mathcal{U} + \#(y) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{3.1}{=} \#(x \cup y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`3.2.2.Fall` y Unmenge.

`4:` Aus `3.2.2.Fall` "y Unmenge"
folgt via **297-15**: $\#(y) = \mathcal{U}$.

`5:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{4}{=} \#(x) + \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{3.1}{=} \#(x \cup y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`e)` `VS` gleich y unendlich.

`1:` Aus `VS` gleich "y unendlich"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\#(y) + \#(x) = \#(y \cup x)$.

`2:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \#(y) + \#(x) \stackrel{1}{=} \#(y \cup x) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} \#(x \cup y)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

Beweis **297-20** `f)` `VS` gleich $(x, y \text{ endlich}) \wedge (x \cap y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \ldots$ endlich…”
folgt via **297-16**: $\#(x) \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y$ endlich…”
folgt via **297-16**: $\#(y) \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1.1`“$\#(x) \in \mathbb{N}$”
folgt via **297-4**: $(\#(x) = 0) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\#(x) = 1 + \Omega))$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\#(y) \in \mathbb{N}$”
folgt via **297-4**: $(\#(y) = 0) \vee (\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{N}) \wedge (\#(y) = 1 + \Phi))$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.1`
folgt: $(\#(x) = 0) \vee (\#(y) = 0)$
$\vee (\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{N}) \wedge (\#(x) = 1 + \Omega) \wedge (\#(y) = 1 + \Phi))$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\#(x) = 0$.

`4:` Aus `3.1.Fall`“$\#(x) = 0$”
folgt via **297-18**: $x = 0$.

`5:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{\text{3.1.Fall}}{=} 0 + \#(y) \stackrel{\text{a)}}{=} \#(y) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \#(0 \cup y) \stackrel{4}{=} \#(x \cup y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`3.2.Fall` $\#(y) = 0$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\#(y) = 0$”
folgt via **297-18**: $y = 0$.

`5:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{\text{3.2.Fall}}{=} \#(x) + 0 \stackrel{\text{a)}}{=} \#(x) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \#(x \cup 0) \stackrel{4}{=} \#(x \cup y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

…

<u>Beweis **297-20**</u> `f)` `VS` gleich $(x, y \text{ endlich}) \wedge (x \cap y = 0)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{N}) \wedge (\#(x) = 1 + \Omega) \wedge (\#(y) = 1 + \Phi)$.

`4.1:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots \Omega \ldots \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \Phi \in \mathbb{N}$.

`4.3:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots \Omega \ldots \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + \Omega) = \Omega$.

`4.4:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + \Phi) \in \mathbb{N}$.

`4.5:` Aus `3.3.Fall`
folgt: $\#(x) = 1 + \Omega$.

`4.6:` Aus $\widehat{3.3}$
folgt: $\#(y) = 1 + \Phi$.

`5.1:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots \#(x) = 1 + \Omega \ldots$” und
aus `4.1`“$1 + \Omega \in \mathbb{N}$”
folgt via **297-19**: $x \in \mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Omega)}$.

`5.2:` Aus `3.3.Fall`“$\ldots \#(y) = 1 + \Phi$” und
aus `4.2`“$1 + \Phi \in \mathbb{N}$”
folgt via **297-19**: $y \in \mathcal{U}_{1+\Phi} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Phi)}$.

`6.1:` Aus `5.1` und
aus `4.3`
folgt: $x \in \mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{\Omega}$.

`6.2:` Aus `5.2` und
aus `4.4`
folgt: $y \in \mathcal{U}_{1+\Phi} \setminus \mathcal{U}_{\Phi}$.

`7:` Aus `3.3.Fall`$\ldots \Omega, \Phi \in \mathbb{N} \ldots$,
aus `6.1`“$x \in \mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{\Omega}$”,
aus `6.2`“$y \in \mathcal{U}_{1+\Phi} \setminus \mathcal{U}_{\Phi}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \cap y = 0$”
folgt via **296-14**: $x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(\Omega+\Phi)} \setminus \mathcal{U}_{1+(\Omega+\Phi)}$.

...

...

<u>Beweis **297-20**</u> `f) VS` gleich $(x, y \text{ endlich}) \wedge (x \cap y = 0)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{N}) \wedge (\#(x) = 1 + \Omega) \wedge (\#(y) = 1 + \Phi)$.

...

`8.1:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots \Omega, \Phi \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-14**: $\Omega + \Phi \in \mathbb{N}$.

`8.2:` Via **297-4** gilt: $-1 + (2 + (\Omega + \Phi)) = 1 + (\Omega + \Phi)$.

`9.1:` Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{N}$" und
aus `8.1`"$\Omega + \Phi \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-14**: $2 + (\Omega + \Phi) \in \mathbb{N}$.

`9.2:` Aus `7` und
aus `8.2`
folgt: $x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(\Omega+\Phi)} \setminus \mathcal{U}_{-1+(2+(\Omega+\Phi))}$.

`10:` Aus `9.1`"$2 + (\Omega + \Phi) \in \mathbb{N}$" und
aus `9.2`"$x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(\Omega+\Phi)} \setminus \mathcal{U}_{-1+(2+(\Omega+\Phi))}$"
folgt via **297-19**: $\#(x \cup y) = 2 + (\Omega + \Phi)$.

`11:` $\#(x) + \#(y) \stackrel{4.5}{=} (1 + \Omega) + \#(y) \stackrel{4.6}{=} (1 + \Omega) + (1 + \Phi)$
$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (1 + 1) + (\Omega + \Phi) \stackrel{+\mathbf{schola}}{=} 2 + (\Omega + \Phi) \stackrel{10}{=} \#(x \cup y)$.

`12:` Aus `11`
folgt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

□

297-21. Auf jeden Fall folgt aus $x \cap y$ die Gleichung $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$. In weiterer Folge gilt für alle x, y die bemerkenswerte Identität $\#(x \cup y) + \#(x \cap y) = \#(x) + \#(y)$.

297-21(Satz)

a) *Aus* “$x \cap y = 0$” *folgt* “$\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$”.

b) $\#(x \setminus y) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

c) $\#(x \setminus y) + \#(x \cap y) = \#(x)$.

d) $\#(x \cup y) + \#(x \cap y) = \#(x) + \#(y)$.

Beweis **297-21** a) VS gleich $x \cap y = 0$.

1: Es gilt: $(x \text{ unendlich}) \vee (y \text{ unendlich}) \vee (x, y \text{ endlich})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x unendlich.

Aus 1.1.Fall “x unendlich”

folgt via **297-20**: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

1.2.Fall y unendlich.

Aus 1.2.Fall “y unendlich”

folgt via **297-20**: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

1.3.Fall x, y endlich.

Aus 1.3.Fall “x, y endlich” und

aus VS gleich “$x \cap y = 0$”

folgt via **297-20**: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $\#(x) + \#(y) = \#(x \cup y)$.

<u>Beweis **297-21**</u> `b)`

`1:` Via **5-10** gilt: $y \cap (x \setminus y) = 0.$

`2:` Aus `1` "$y \cap (x \setminus y) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\#(y) + \#(x \setminus y) = \#(y \cup (x \setminus y)).$

`3:` $\#(x \setminus y) + \#(y) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \#(y) + \#(x \setminus y) \stackrel{2}{=} \#(y \cup (x \setminus y)) \stackrel{\mathbf{5-22}}{=} \#(x \cup y).$

`4:` Aus `3`
folgt: $\#(x \setminus y) + \#(y) = \#(x \cup y).$

`c)`

`1:` Via **297-7** gilt: $(x \cap y) \cap (x \setminus y) = 0.$

`2:` Aus `1` "$(x \cap y) \cap (x \setminus y) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\#(x \cap y) + \#(x \setminus y) = \#((x \cap y) \cup (x \setminus y)).$

`3:` $\#(x \setminus y) + \#(x \cap y) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \#(x \cap y) + \#(x \setminus y) \stackrel{2}{=} \#((x \cap y) \cup (x \setminus y)) \stackrel{\mathbf{5-22}}{=} \#(x).$

`4:` Aus `3`
folgt: $\#(x \setminus y) + \#(x \cap y) = \#(x).$

`d)`

`1:` $\#(x \cup y) + \#(x \cap y) \stackrel{\text{b)}}{=} (\#(x \setminus y) + \#(y)) + \#(x \cap y)$
$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (\#(y) + \#(x \setminus y)) + \#(x \cap y) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \#(y) + (\#(x \setminus y) + \#(x \cap y))$
$\stackrel{\text{c)}}{=} \#(y) + \#(x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \#(x) + \#(y).$

`2:` Aus `1`
folgt: $\#(x \cup y) + \#(x \cap y) = \#(x) + \#(y).$

□

297-22. Dass aus $x \subseteq y$ und y Menge die erwartete Ungleichung $\#(x) \leq \#(y)$ folgt ist einerseits eine Folgerung aus **297-21**, andererseits eine Konsequenz aus $\mathsf{ran}\,\# \subseteq [0| + \infty]$.

297-22(Satz)

a) *Aus* "$0 \leq x, y \leq +\infty$" *folgt* "$x, y \leq x + y$".

b) *Aus* "$x, y \in [0| + \infty]$" *folgt* "$x, y \leq x + y$".

c) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$B \subseteq [0| + \infty]$" *und* "$p, q \in D$" *folgt* "$f(p), f(q) \leq f(p) + f(q)$".

d) *Aus* "$f : D \to [0| + \infty]$" *und* "$p, q \in D$" *folgt* "$f(p), f(q) \leq f(p) + f(q)$".

e) "$+\infty \in [0| + \infty]$" *und* "$\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$" *und* "$\{+\infty\} \cup \mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$".

f) $\# : \mathcal{U} \to [0| + \infty]$.

g) *Aus* "x, y *Menge*" *folgt* "$\#(x), \#(y) \leq \#(x) + \#(y)$".

h) *Aus* "$x \subseteq y$ *Menge*" *folgt* "$\#(x) \leq \#(y)$".

i) *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$\#(x \cap y) \leq \#(x)$" *und* "$\#(y \cap x) \leq \#(x)$" *und* "$\#(x \setminus y) \leq \#(x)$".

j) *Aus* "x, y *Menge*" *folgt* "$\#(x), \#(y) \leq \#(x \cup y)$".

$\leq$-Notation.

<u>Beweis **297-22**</u> `a)` `VS` gleich $0 \leq x, y \leq +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **107-17**: $x \neq -\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **107-18**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$0 \leq \ldots y \ldots$"
folgt via **107-17**: $y \neq -\infty$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$0 \leq \ldots y \ldots$"
folgt via **107-18**: $y \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \neq -\infty$",
aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$0 \leq \ldots y \ldots$"
folgt via **165-2**: $\boxed{x \leq x + y}$

`2.2:` Aus `1.3`"$y \neq -\infty$",
aus `1.4`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **165-2**: $y \leq y + x$.

`3:` Via **FSA** gilt: $y + x = x + y$.

`4:` Aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\boxed{y \leq x + y}$

`b)` `VS` gleich $x, y \in [0| + \infty]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in [0| + \infty]$"
folgt via **142-3**: $0 \leq x, y \leq +\infty$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq x, y \leq +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x, y \leq x + y$.

<u>Beweis</u> **297-22** `c)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (B \subseteq [0|+\infty]) \wedge (p, q \in D)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$f : D \to B \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \ldots \in D$”
folgt via **21-4**: $f(p) \in B$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$f : D \to B \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots q \in D$”
folgt via **21-4**: $f(q) \in B$.

`2.1:` Aus `1.1`“$f(p) \in B$” und
aus `VS` gleich “$\ldots B \subseteq [0, +\infty] \ldots$”
folgt via **0-4**: $f(p) \in [0, +\infty]$.

`2.2:` Aus `1.2`“$f(q) \in B$” und
aus `VS` gleich “$\ldots B \subseteq [0, +\infty] \ldots$”
folgt via **0-4**: $f(q) \in [0, +\infty]$.

`3:` Aus `2.1`“$f(p) \in [0, +\infty]$” und
aus `2.2`“$f(q) \in [0, +\infty]$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f(p), f(q) \leq f(p) + f(q)$.

`d)` `VS` gleich $(f : D \to [0|+\infty]) \wedge (p, q \in D)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $[0|+\infty] \subseteq [0|+\infty]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$f : D \to [0|+\infty] \ldots$”,
aus `1`“$[0|+\infty] \subseteq [0|+\infty]$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p, q \in D$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $f(p), f(q) \leq f(p) + f(q)$.

<u>Beweis **297-22**</u> `e)`

`1.1:` Via **165-3** gilt: $0 \le +\infty$.

`1.2:` Via **107-6** gilt: $+\infty \le +\infty$.

`1.3:` Via **159-5** gilt: $[0| + \infty]$ induktiv.

`2.1:` Aus `1.1` "$0 \le +\infty$" und
aus `1.2` "$+\infty \le +\infty$"

folgt via **142-3**: $\boxed{+\infty \in [0| + \infty]}$

`2.2:` Aus `1.3` "$[0| + \infty]$ induktiv"

folgt via **159-10**: $\boxed{\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]}$

`3:` Aus `2.1` "$+\infty \in [0| + \infty]$" und
aus `2.2` "$\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$"

folgt via **297-7**: $\boxed{\{+\infty\} \cup \mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]}$

`f)`

`1:` Via **297-15** gilt: $\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\{+\infty\} \cup \mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$.

`3:` Aus `1` "$\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N}$" und
aus `2` "$\{+\infty\} \cup \mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$"
folgt via **21-5**: $\# : \mathcal{U} \to [0| + \infty]$.

`g)` `VS` gleich x, y Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "x, y Menge"
folgt via **0-22**: $x, y \in \mathcal{U}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\# : \mathcal{U} \to [0| + \infty]$.

`3:` Aus `2` "$\# : \mathcal{U} \to [0| + \infty]$" und
aus `1` "$x, y \in \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\#(x), \#(y) \le \#(x) + \#(y)$.

<u>Beweis **297-22**</u> `h)` `VS` gleich $x \subseteq y$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt via **94-6**: $y \setminus x$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt via **2-24**: $y \cap x$ Menge.

`1.3:` Via **297-21** gilt: $\#(y \setminus x) + \#(y \cap x) = \#(y)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$y \setminus x$ Menge" und
aus `1.2`"$y \cap x$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\#(y \cap x) \leq \#(y \setminus x) + \#(y \cap x)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-10**: $y \cap x = x$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `1.3`
folgt: $\#(y \cap x) \leq \#(y)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`
folgt: $\#(x) \leq \#(y)$.

<u>Beweis **297-22**</u> `i)` `VS` gleich x Menge.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $y \cap x \subseteq x$.

`1.3:` Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq x$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x \cap y \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “x Menge”

folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\boxed{\#(x \cap y) \leq \#(x)}$

`2.2:` Aus `1.2`“$y \cap x \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “x Menge”

folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\boxed{\#(y \cap x) \leq \#(x)}$

`2.3:` Aus `1.3`“$x \setminus y \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “x Menge”

folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\boxed{\#(x \setminus y) \leq \#(x)}$

`j)` `VS` gleich x, y Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich “x, y Menge”
folgt via $\cup$**Axiom**: $x \cup y$ Menge.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x, y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.2`“$x \ldots \subseteq x \cup y$” und
aus `1.1`“$x \cup y$ Menge”

folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\boxed{\#(x) \leq \#(x \cup y)}$

`2.2:` Aus `1.2`“$\ldots y \subseteq x \cup y$” und
aus `1.1`“$x \cup y$ Menge”

folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\boxed{\#(y) \leq \#(x \cup y)}$

□

Algebra: $\mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{stm}, \mathsf{Dlt}$.

Ersterstellung: 19/06/14 **Letzte Änderung: 20/06/14**

298-1. Basierend auf $\cup, \cap, \setminus, \Delta$ werden korrespondierende Algebren in die Essays eingebracht.

298-1(Definition)

1) $\mathsf{cup} = 298.0() = \{((\lambda, \mu), \lambda \cup \mu) : \lambda, \mu \in \mathcal{U}\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\omega = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)))\}$.

2) $\mathsf{cap} = 298.1() = \{((\lambda, \mu), \lambda \cap \mu) : \lambda, \mu \in \mathcal{U}\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\omega = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)))\}$.

3) $\mathsf{stm} = 298.2() = \{((\lambda, \mu), \lambda \setminus \mu) : \lambda, \mu \in \mathcal{U}\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\omega = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)))\}$.

4) $\mathsf{Dlt} = 298.3() = \{((\lambda, \mu), \lambda \Delta \mu) : \lambda, \mu \in \mathcal{U}\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\omega = ((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi)))\}$.

298-2. Wie in **6-8** gesagt gilt $(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ genau dann, wenn p,q Mengen sind. Der Einsatz dieses Kriterium setzt mitunter holprige Vorarbeiten voraus, die sich in der vorliegenden Formulierung umgehen lassen.

298-2(Satz)

"$(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$(p,q)$ Menge".

Beweis **298-2** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich (p,q) Menge.

`1`: Aus `VS` gleich "(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: p,q Menge.

`2`: Aus `1` "p,q Menge"
folgt via **6-8**: $(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

□

298-3. Sind p, q Mengen, so ist $((p, q), p \cup q) \in \mathsf{cup}$.

<u>**298-3(Satz)**</u>

a) *Aus* "$p \in \mathsf{cup}$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi))$".

b) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{cup}$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega \cup \Phi)$".

c) *Aus* "$((p, q), r) \in \mathsf{cup}$" *folgt* "$p, q, r$ *Menge*" *und* "$r = p \cup q$".

d) *Aus* "p, q *Menge*" *folgt* "$((p, q), p \cup q) \in \mathsf{cup}$".

<u>Beweis **298-3**</u> a) VS gleich $p \in \mathsf{cup}$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{cup}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{cup}$"
folgt via **298-1(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$.

2: Aus 1.2"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$" und
aus 1.1
folgt: $((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$ Menge.

3: Aus 2"$((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

4: Aus 3"(Ω, Φ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω, Φ Menge.

5: Aus 1.2"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 4"Ω, Φ Menge" und
aus 1.2"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$"
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)).$$

<u>Beweis **298-3**</u> `b)` `VS` gleich $(p,q)\in\mathsf{cup}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\mathsf{cup}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\mathsf{cup}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists\Omega,\Phi:(\Omega,\Phi\text{ Menge})\wedge((p,q)=((\Omega,\Phi),\Omega\cup\Phi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots(p,q)=((\Omega,\Phi),\Omega\cup\Phi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p=(\Omega,\Phi))\wedge(q=\Omega\cup\Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists\Omega,\Phi:\Omega,\Phi$ Menge$\ldots$" und
aus `2`"$(p=(\Omega,\Phi))\wedge(q=\Omega\cup\Phi)$"
folgt:
$$\exists\Omega,\Phi:(\Omega,\Phi\text{ Menge})\wedge(p=(\Omega,\Phi))\wedge(q=\Omega\cup\Phi).$$

<u>Beweis **298-3**</u> `c)` `VS` gleich $((p,q),r) \in \mathsf{cup}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((p,q),r) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **ElementAxiom**: $((p,q),r)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((p,q),r) \in \mathsf{cup}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists \Omega, \Phi : ((p,q) = (\Omega, \Phi)) \wedge (r = \Omega \cup \Phi).$$

`2:` Aus `1.1`"$((p,q),r)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,q), r$ Menge.

`3.1:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \Phi) \ldots$" und
aus `2`"$(p,q) \ldots$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Phi)$.

`3.2:` Aus `2`"$(p,q) \ldots$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{p, q \text{ Menge}}$

`3.3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{r \text{ Menge}}$

`4:` Aus `3.1`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $p \cup q = \Omega \cup q$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`"$\ldots q = \Phi$"
folgt: $p \cup q = \Omega \cup \Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.2`"$\ldots r = \Omega \cup \Phi$"
folgt: $p \cup q = r$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\boxed{r = p \cup q}$

<u>Beweis</u> **298-3** `d) VS` gleich p, q Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $p \cup q$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

`2.1:` Aus `1.1`"(p, q) Menge" und
aus `1.2`"$p \cup q$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, q), p \cup q)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega = p \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots \Phi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega = p \ldots$"
folgt: $\Omega \cup \Phi = p \cup \Phi$.

`3:` Aus `2.3`"$\Omega \cup \Phi = p \cup \Phi$" und
aus `1.3`"$\ldots \Phi = q$"
folgt: $\Omega \cup \Phi = p \cup q$.

`4:` Aus `2.2`"$(\Omega, \Phi) = (p, q)$" und
aus `3`"$\Omega \cup \Phi = p \cup q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi) = ((p, q), p \cup q)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $((p, q), p \cup q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$.

`6:` Aus `1.3`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
Aus `5`"$((p, q), p \cup q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$" und
aus `2.1`"$((p, q), p \cup q)$ Menge"
folgt via **298-1(Def)**: $((p, q), p \cup q) \in \mathsf{cup}$.

$\square$

298-4. cup ist eine Algebra in $\mathcal{U}$.

<u>**298-4(Satz)**</u>

a) cup *Relation.*

b) cup *Funktion.*

c) $\mathsf{dom\,cup} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

d) $\mathsf{ran\,cup} = \mathcal{U}$.

e) $\mathsf{cup} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

f) cup *Algebra in* $\mathcal{U}$.

<u>Beweis **298-4**</u> `a)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{cup}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{cup}$"
folgt via **298-3**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi).$$

`3.1:` Aus 2 "$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

`3.2:` Aus 2 "$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via $\cup$**Axiom**: $\Omega \cup \Phi$ Menge.

`4:` Aus `3.1` "(Ω, Φ) Menge" und
aus `3.2` "$\Omega \cup \Phi$ Menge"
folgt via **6-8**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus 2 "$\ldots \alpha = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$" und
aus 4
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cup}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{cup} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: cup Relation.

Beweis **298-4** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cup}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{cup}$”
folgt via **298-3**:
$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)) \wedge (\beta = \Omega \cup \Phi)$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cup}$”
folgt via **298-3**:
$\exists \Psi, \Upsilon : (\Phi, \Upsilon \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Psi, \Upsilon)) \wedge (\gamma = \Psi \cup \Upsilon)$.

`3:` Aus `2.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$” und
aus `2.2`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Upsilon) \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Upsilon)$.

`4:` Aus `3`“$(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Upsilon)$” und
aus `2.1`“$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$”
folgt via **IGP**: $(\Omega = \Psi) \wedge (\Phi = \Upsilon)$.

`5:` Aus `4`“$\Omega = \Psi \ldots$”
folgt: $\Omega \cup \Phi = \Psi \cup \Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`“$\ldots \Phi = \Upsilon$”
folgt: $\Omega \cup \Phi = \Psi \cup \Upsilon$.

`7:` Aus `2.1`“$\ldots \beta = \Omega \cup \Phi$” und
aus `6`
folgt: $\beta = \Psi \cup \Upsilon$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.2`“$\ldots \gamma = \Psi \cup \Upsilon$”
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cup}) \Rightarrow (\beta = \gamma)}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: cup Relation.

`2:` Aus `1.2`“cup Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cup}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: cup Funktion.

<u>Beweis **298-4**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom\,cup}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom\,cup}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom\,cup}$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{cup}$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{cup}$”
folgt via **298-3**:
$\exists \Phi, \Psi : (\Phi, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Psi))$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Phi, \Psi$ Menge$\ldots$”
folgt via **6-8**: $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi)$” und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom\,cup}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \;\big|\; \text{“}\mathsf{dom\,cup} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}\text{”}}$

...

Beweis **298-4** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2.2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega \cup \Phi) = ((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2` "$\ldots \Omega, \Phi$ Menge..."
folgt via **298-3**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi) \in \mathsf{cup}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(\alpha, \Omega \cup \Phi) \in \mathsf{cup}$.

`5:` Aus `4` "$(\alpha, \Omega \cup \Phi) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cup}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cup})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{"}\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,\mathsf{cup}\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,\mathsf{cup} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,\mathsf{cup}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,\mathsf{cup} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **298-4** `d)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2:` Aus `1.1`“α Menge” und
aus `1.2`“0 Menge”
folgt via **298-3**: $((\alpha, 0), \alpha \cup 0) \in \mathsf{cup}$.

`3.1:` Aus `2`“$((\alpha, 0), \alpha \cup 0) \in \mathsf{cup}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \cup 0 \in \mathsf{ran}\,\mathsf{cup}$.

`3.2:` Via **2-17** gilt: $\alpha \cup 0 = \alpha$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{cup}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{cup})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,\mathsf{cup} = \mathcal{U}$.

`ef)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: cup Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\mathsf{cup} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,\mathsf{cup} = \mathcal{U}$.

`2.e):` Aus `1.1`“cup Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,\mathsf{cup} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,\mathsf{cup} = \mathcal{U}$”
folgt via **21-2**: $\mathsf{cup} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

`3.f):` Aus `2.e)`“$\mathsf{cup} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$”
folgt via **93-5(Def)**: cup Algebra in $\mathcal{U}$.

□

298-5. Sind p, q Mengen so gilt $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$. Diese Gleichung ist auch für p, q mit $p \cup q = \mathcal{U}$ richtig.

298-5(Satz)

a) *Aus "p, q Menge" folgt "$p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$".*

b) *Aus "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$" folgt "$p\_\mathsf{cup}\_q = \mathcal{U}$".*

c) *"$p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$" genau dann, wenn "$(p, q$ Menge$) \vee (p \cup q = \mathcal{U})$".*

ALG-**Notation**.

Beweis **298-5** a) VS gleich p, q Menge.

1: Aus VS gleich "p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus **298-4**"$\mathsf{dom\,cup} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{dom\,cup}$.

3: Aus **298-4**"cup Funktion" und
aus 2"$(p, q) \in \mathsf{dom\,cup}$"
folgt via **18-22**: $((p, q), p\_\mathsf{cup}\_q) \in \mathsf{cup}$.

4: Aus 3"$((p, q), p\_\mathsf{cup}\_q) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **298-3**: $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$.

b) VS gleich $(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$.

1: Aus VS gleich "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$"
folgt via **0-19**: $(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$.

2: Aus **298-3**"cup Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus 1"$(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$"
folgt via **93-13**: $p\_\mathsf{cup}\_q = \mathcal{U}$.

Beweis **298-5** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$.

`1:` Es gilt: $(p \cup q = \mathcal{U}) \vee (p \cup q \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \cup q = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $p \cup q \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS`
folgt: $p\_\mathsf{cup}\_q \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus **298-4** "`cup` Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus 2 "$p\_\mathsf{cup}\_q \neq \mathcal{U}$"
folgt via **93-12**: $p, q \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus 3 "$p, q \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: p, q Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(p, q \text{ Menge}) \vee (p \cup q = \mathcal{U})$.

Beweis **298-5** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee (p \cup q = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee (p \cup q = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p, q Menge.

Aus `1.1.Fall` "p, q Menge"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$.

`1.2.Fall` $p \cup q = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$p \cup q = \mathcal{U}$" und aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "$\mathcal{U}$ Unmenge" folgt: $p \cup q$ Unmenge.

`3:` Aus 2 "$p \cup q$ Unmenge" folgt via **2-8**: $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`4:` Aus 3 "$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p\_\mathsf{cup}\_q = \mathcal{U}$.

`5:` Aus 4 und aus `1.2.Fall` folgt: $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$.

$\square$

298-6. Sind p, q Mengen, so ist $((p,q), p \cap q) \in \mathsf{cap}$.

298-6(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{cap}$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi))$".

b) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{cap}$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega \cap \Phi)$".

c) *Aus* "$((p,q), r) \in \mathsf{cap}$" *folgt* "$p, q, r$ *Menge*" *und* "$r = p \cap q$".

d) *Aus* "p, q *Menge*" *folgt* "$((p,q), p \cap q) \in \mathsf{cap}$".

Beweis **298-6** `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{cap}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{cap}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{cap}$"
folgt via **298-1(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$" und
aus `1.1`
folgt: $((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Φ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω, Φ Menge.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `4`"Ω, Φ Menge" und
aus `1.2`"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)).$$

<u>Beweis</u> **298-6** `b)` `VS` gleich $(p,q)\in \mathsf{cap}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in \mathsf{cap}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in \mathsf{cap}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists\Omega,\Phi : (\Omega,\Phi \text{ Menge}) \wedge ((p,q) = ((\Omega,\Phi),\Omega\cap\Phi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = ((\Omega,\Phi),\Omega\cap\Phi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = (\Omega,\Phi)) \wedge (q = \Omega\cap\Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists\Omega,\Phi : \Omega,\Phi$ Menge$\ldots$" und
aus `2`"$(p = (\Omega,\Phi)) \wedge (q = \Omega\cap\Phi)$"
folgt:
$$\exists\Omega,\Phi : (\Omega,\Phi \text{ Menge}) \wedge (p = (\Omega,\Phi)) \wedge (q = \Omega\cap\Phi).$$

<u>Beweis **298-6**</u> `c)` `VS` gleich $((p, q), r) \in \mathsf{cap}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$((p, q), r) \in \mathsf{cap}$”
folgt via **ElementAxiom**: $((p, q), r)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$((p, q), r) \in \mathsf{cap}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists \Omega, \Phi : ((p, q) = (\Omega, \Phi)) \wedge (r = \Omega \cap \Phi).$$

`2:` Aus `1.1`“$((p, q), r)$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, q), r$ Menge.

`3.1:` Aus `1.2`“$\ldots (p, q) = (\Omega, \Phi) \ldots$” und
aus `2`“$(p, q) \ldots$ Menge”
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Phi)$.

`3.2:` Aus `2`“$(p, q) \ldots$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{p, q \text{ Menge}}$

`3.3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{r \text{ Menge}}$

`4:` Aus `3.1`“$p = \Omega \ldots$”
folgt: $p \cap q = \Omega \cap q$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`“$\ldots q = \Phi$”
folgt: $p \cap q = \Omega \cap \Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.2`“$\ldots r = \Omega \cap \Phi$”
folgt: $p \cap q = r$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\boxed{r = p \cap q}$

<u>Beweis</u> **298-6** `d)` `VS` gleich p, q Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \ldots$ Menge"
folgt via **2-24**: $p \cap q$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

`2.1:` Aus `1.1`"(p, q) Menge" und
aus `1.2`"$p \cap q$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, q), p \cap q)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega = p \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots \Phi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega = p \ldots$"
folgt: $\Omega \cap \Phi = p \cap \Phi$.

`3:` Aus `2.3`"$\Omega \cap \Phi = p \cap \Phi$" und
aus `1.3`"$\ldots \Phi = q$"
folgt: $\Omega \cap \Phi = p \cap q$.

`4:` Aus `2.2`"$(\Omega, \Phi) = (p, q)$" und
aus `3`"$\Omega \cap \Phi = p \cap q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi) = ((p, q), p \cap q)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $((p, q), p \cap q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$.

`6:` Aus `1.3`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
Aus `5`"$((p, q), p \cap q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$" und
aus `2.1`"$((p, q), p \cap q)$ Menge"
folgt via **298-1(Def)**: $((p, q), p \cap q) \in \mathsf{cap}$.

$\square$

298-7. cap ist eine Algebra in $\mathcal{U}$.

298-7(Satz)

a) cap *Relation.*

b) cap *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

d) $\mathsf{ran}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U}$.

e) $\mathsf{cap} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

f) cap *Algebra in* $\mathcal{U}$.

Beweis **298-7** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{cap}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{cap}$"
folgt via **298-6**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi).$$

3.1: Aus 2 "$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

3.2: Aus 2 "$\ldots \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **2-24**: $\Omega \cap \Phi$ Menge.

4: Aus 3.1 "(Ω, Φ) Menge" und
aus 3.2 "$\Omega \cap \Phi$ Menge"
folgt via **6-8**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

5: Aus 2 "$\ldots \alpha = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$" und
aus 4
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cap}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{cap} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: cap Relation.

<u>Beweis **298-7**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cap}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{cap}$”
folgt via **298-6**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)) \wedge (\beta = \Omega \cap \Phi).$$

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cap}$”
folgt via **298-6**:
$$\exists \Psi, \Upsilon : (\Phi, \Upsilon \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Psi, \Upsilon)) \wedge (\gamma = \Psi \cap \Upsilon).$$

`3:` Aus `2.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$” und
aus `2.2`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Upsilon) \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Upsilon)$.

`4:` Aus `3`“$(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Upsilon)$” und
aus `2.1`“$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$”
folgt via **IGP**: $(\Omega = \Psi) \wedge (\Phi = \Upsilon)$.

`5:` Aus `4`“$\Omega = \Psi \ldots$”
folgt: $\Omega \cap \Phi = \Psi \cap \Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`“$\ldots \Phi = \Upsilon$”
folgt: $\Omega \cap \Phi = \Psi \cap \Upsilon$.

`7:` Aus `2.1`“$\ldots \beta = \Omega \cap \Phi$” und
aus `6`
folgt: $\beta = \Psi \cap \Upsilon$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.2`“$\ldots \gamma = \Psi \cap \Upsilon$”
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cap}) \Rightarrow (\beta = \gamma)}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: cap Relation.

`2:` Aus `1.2`“cap Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{cap}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: cap Funktion.

<u>Beweis **298-7**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{cap}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{cap}$"
folgt via **298-6**:
$$\exists \Phi, \Psi : (\Phi, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Psi)).$$

`4:` Aus `3` "$\ldots \Phi, \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt via **6-8**: $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3` "$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi)$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} \mathsf{dom}\,\mathsf{cap} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U} \text{”}}$

...

Beweis **298-7** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2.2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega \cap \Phi) = ((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega, \Phi$ Menge...”
folgt via **298-6**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cap \Phi) \in \mathsf{cap}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(\alpha, \Omega \cap \Phi) \in \mathsf{cap}$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \Omega \cap \Phi) \in \mathsf{cap}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom\,cap}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom\,cap})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom\,cap}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom\,cap} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `A2` gleich “$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom\,cap}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom\,cap} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **298-7** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathcal{U}$.
`1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2:` Aus `1`“α Menge” und aus `1`“α Menge” folgt via **298-6**:	$((\alpha, \alpha), \alpha \cap \alpha) \in \mathsf{cap}$.
`3.1:` Aus `2`“$((\alpha, \alpha), \alpha \cap \alpha) \in \mathsf{cap}$” folgt via **7-5**:	$\alpha \cap \alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{cap}$.
`3.2:` Via **2-14** gilt:	$\alpha \cap \alpha = \alpha$.
`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{cap}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{cap})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U}$.

`ef)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: cap Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U}$.

`2.e):` Aus `1.1`“cap Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U}$”
folgt via **21-2**: $\mathsf{cap} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

`3.f):` Aus `2.e)`“$\mathsf{cap} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$”
folgt via **93-5(Def)**: cap Algebra in $\mathcal{U}$.

□

298-8. Sind p, q Mengen so gilt $p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$. Diese Gleichung ist auch für $p = q = \mathcal{U}$ richtig.

298-8(Satz)

a) *Aus "p, q Menge" folgt "$p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$".*

b) *Aus "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$" folgt "$p\_\mathsf{cap}\_q = \mathcal{U}$".*

c) *"$p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$" genau dann, wenn "$(p, q$ Menge$) \vee (p = q = \mathcal{U})$".*

ALG-**Notation**.

Beweis **298-8** a) VS gleich p, q Menge.

1: Aus VS gleich "p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1 "$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus **298-7** "$\mathsf{dom}\,\mathsf{cap} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$.

3: Aus **298-7** "cap Funktion" und
aus 2 "$(p, q) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$"
folgt via **18-22**: $((p, q), p\_\mathsf{cap}\_q) \in \mathsf{cap}$.

4: Aus 3 "$((p, q), p\_\mathsf{cap}\_q) \in \mathsf{cap}$"
folgt via **298-6**: $p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$.

b) VS gleich $(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$.

1: Aus VS gleich "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$"
folgt via **0-19**: $(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$.

2: Aus **298-6** "cap Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus 1 "$(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$"
folgt via **93-13**: $p\_\mathsf{cap}\_q = \mathcal{U}$.

Beweis **298-8** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$.

`1:` Es gilt: $(p \cap q = \mathcal{U}) \vee (p \cap q \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \cap q = \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "$p \cap q = \mathcal{U}$" folgt via **2-18**: $p = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall` "$p \cap q = \mathcal{U}$" folgt via **2-18**: $q = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt: $p = q = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $p \cap q \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und aus `VS` folgt: $p\_\mathsf{cap}\_q \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus **298-7** "`cap` Algebra in $\mathcal{U}$" und aus `2` "$p\_\mathsf{cap}\_q \neq \mathcal{U}$" folgt via **93-12**: $p, q \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "$p, q \in \mathcal{U}$" folgt via **ElementAxiom**: p, q Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee (p = q = \mathcal{U})$.

Beweis **298-8** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee (p = q = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee (p = q = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p, q Menge.

Aus `1.1.Fall` "p, q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$.

`1.2.Fall` $p = q = \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$p = \ldots = \mathcal{U}$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: p Unmenge.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$p = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $p \cap q = \mathcal{U} \cap q$.

`3.1:` Aus `2.1` "p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p\_\mathsf{cap}\_q = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2` "$p \cap q = \mathcal{U} \cap q$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots q = \mathcal{U}$" folgt: $p \cap q = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}$.

`4:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3.2` und
aus `4`
folgt: $p \cap q = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `3.1` und
aus `5`
folgt: $p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p\_\mathsf{cap}\_q = p \cap q$.

$\square$

298-9. Sind p, q Mengen, so ist $((p,q), p \setminus q) \in \mathsf{stm}$.

298-9(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{stm}$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi))$".

b) *Aus* "$(p,q) \in \mathsf{stm}$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega \setminus \Phi)$".

c) *Aus* "$((p,q), r) \in \mathsf{stm}$" *folgt* "$p, q, r$ *Menge*" *und* "$r = p \setminus q$".

d) *Aus* "p, q *Menge*" *folgt* "$((p,q), p \setminus q) \in \mathsf{stm}$".

Beweis **298-9** a) VS gleich $p \in \mathsf{stm}$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{stm}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-1(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : p = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$.

2: Aus 1.2"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$" und
aus 1.1
folgt: $((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$ Menge.

3: Aus 2"$((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

4: Aus 3"(Ω, Φ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω, Φ Menge.

5: Aus 1.2"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 4"Ω, Φ Menge" und
aus 1.2"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)).$$

<u>Beweis **298-9**</u> `b)` `VS` gleich $(p,q) \in \mathsf{stm}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in \mathsf{stm}$”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in \mathsf{stm}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge ((p,q) = ((\Omega,\Phi), \Omega \setminus \Phi)).$$

`2:` Aus `1.2`“$\ldots (p,q) = ((\Omega,\Phi), \Omega \setminus \Phi)$” und
aus `1.1`“(p,q) Menge”
folgt via **IGP**: $(p = (\Omega,\Phi)) \wedge (q = \Omega \setminus \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`“$\exists \Omega, \Phi : \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$” und
aus `2`“$(p = (\Omega,\Phi)) \wedge (q = \Omega \setminus \Phi)$”
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (p = (\Omega,\Phi)) \wedge (q = \Omega \setminus \Phi).$$

<u>Beweis **298-9**</u> `c)` `VS` gleich $((p,q),r)\in\mathsf{stm}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((p,q),r)\in\mathsf{stm}$"
folgt via **ElementAxiom**: $((p,q),r)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((p,q),r)\in\mathsf{stm}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists\Omega,\Phi:((p,q)=(\Omega,\Phi))\wedge(r=\Omega\setminus\Phi).$$

`2:` Aus `1.1`"$((p,q),r)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,q),r$ Menge.

`3.1:` Aus `1.2`"$\ldots(p,q)=(\Omega,\Phi)\ldots$" und
aus `2`"$(p,q)\ldots$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p=\Omega)\wedge(q=\Phi)$.

`3.2:` Aus `2`"$(p,q)\ldots$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{p,q\text{ Menge}}$

`3.3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{r\text{ Menge}}$

`4:` Aus `3.1`"$p=\Omega\ldots$"
folgt: $p\setminus q=\Omega\setminus q$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`"$\ldots q=\Phi$"
folgt: $p\setminus q=\Omega\setminus\Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.2`"$\ldots r=\Omega\setminus\Phi$"
folgt: $p\setminus q=r$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\boxed{r=p\setminus q}$

<u>Beweis **298-9**</u> `d)` `VS` gleich p, q Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich “p, q Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p \ldots$ Menge”
folgt via **94-6**: $p \setminus q$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich “p, q Menge”
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

`2.1:` Aus `1.1`“(p, q) Menge” und
aus `1.2`“$p \setminus q$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, q), p \setminus q)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3`“$\ldots \Omega = p \ldots$” und
aus `1.3`“$\ldots \Phi = q$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`2.3:` Aus `1.3`“$\ldots \Omega = p \ldots$”
folgt: $\Omega \setminus \Phi = p \setminus \Phi$.

`3:` Aus `2.3`“$\Omega \setminus \Phi = p \setminus \Phi$” und
aus `1.3`“$\ldots \Phi = q$”
folgt: $\Omega \setminus \Phi = p \setminus q$.

`4:` Aus `2.2`“$(\Omega, \Phi) = (p, q)$” und
aus `3`“$\Omega \setminus \Phi = p \setminus q$”
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi) = ((p, q), p \setminus q)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $((p, q), p \setminus q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$.

`6:` Aus `1.3`“$\exists \Omega, \Phi \ldots$”,
Aus `5`“$((p, q), p \setminus q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$” und
aus `2.1`“$((p, q), p \setminus q)$ Menge”
folgt via **298-1(Def)**: $((p, q), p \setminus q) \in \mathsf{stm}$.

$\square$

298-10. stm ist eine Algebra in $\mathcal{U}$.

298-10(Satz)

a) stm *Relation.*

b) stm *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

d) $\mathsf{ran}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U}$.

e) $\mathsf{stm} : \mathcal{U}\times\mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

f) stm *Algebra in* $\mathcal{U}$.

Beweis **298-10** a)

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{stm}$.

2: Aus `Thema1` “$\alpha \in \mathsf{stm}$”
folgt via **298-9**:
$$\exists\Omega,\Phi : (\Omega,\Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = ((\Omega,\Phi),\Omega\setminus\Phi).$$

3.1: Aus 2 “$\dots\Omega,\Phi$ Menge…”
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω,Φ) Menge.

3.2: Aus 2 “$\dots\Omega\dots$ Menge…”
folgt via **94-6**: $\Omega\setminus\Phi$ Menge.

4: Aus 3.1 “(Ω,Φ) Menge” und
aus 3.2 “$\Omega\setminus\Phi$ Menge”
folgt via **6-8**: $((\Omega,\Phi),\Omega\setminus\Phi) \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

5: Aus 2 “$\dots\alpha = ((\Omega,\Phi),\Omega\setminus\Phi)$” und
aus 4
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{stm}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}\times\mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{stm} \subseteq \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: stm Relation.

Beweis **298-10** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{stm}.$

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{stm}$”
folgt via **298-9**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)) \wedge (\beta = \Omega \setminus \Phi).$$

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{stm}$”
folgt via **298-9**:
$$\exists \Psi, \Upsilon : (\Phi, \Upsilon \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Psi, \Upsilon)) \wedge (\gamma = \Psi \setminus \Upsilon).$$

`3:` Aus `2.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$” und
aus `2.2`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Upsilon) \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Upsilon).$

`4:` Aus `3`“$(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Upsilon)$” und
aus `2.1`“$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$”
folgt via **IGP**: $(\Omega = \Psi) \wedge (\Phi = \Upsilon).$

`5:` Aus `4`“$\Omega = \Psi \ldots$”
folgt: $\Omega \setminus \Phi = \Psi \setminus \Phi.$

`6:` Aus `5` und
aus `4`“$\ldots \Phi = \Upsilon$”
folgt: $\Omega \setminus \Phi = \Psi \setminus \Upsilon.$

`7:` Aus `2.1`“$\ldots \beta = \Omega \setminus \Phi$” und
aus `6`
folgt: $\beta = \Psi \setminus \Upsilon.$

`8:` Aus `7` und
aus `2.2`“$\ldots \gamma = \Psi \setminus \Upsilon$”
folgt: $\beta = \gamma.$

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{stm}) \Rightarrow (\beta = \gamma)}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: stm Relation.

`2:` Aus `1.2`“stm Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{stm}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: stm Funktion.

Beweis **298-10** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{stm}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-9**:
$$\exists \Phi, \Psi : (\Phi, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Psi)).$$

`4:` Aus `3` "$\ldots \Phi, \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt via **6-8**: $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3` "$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi)$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}\text{”}}$

...

Beweis **298-10** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2.2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega \setminus \Phi) = ((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega, \Phi$ Menge... ”
folgt via **298-9**: $((\Omega, \Phi), \Omega \setminus \Phi) \in \mathsf{stm}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(\alpha, \Omega \setminus \Phi) \in \mathsf{stm}$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \Omega \setminus \Phi) \in \mathsf{stm}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `A2` gleich “$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **298-10** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`1.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2:` Aus `1.1` "α Menge" und aus `1.2` "0 Menge" folgt via **298-9**: $((\alpha, 0), \alpha \setminus 0) \in \mathsf{stm}$.

`3.1:` Aus `2` "$((\alpha, 0), \alpha \setminus 0) \in \mathsf{stm}$" folgt via **7-5**: $\alpha \setminus 0 \in \mathsf{ran}\,\mathsf{stm}$.

`3.2:` Via **5-11** gilt: $\alpha \setminus 0 = \alpha$.

`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{stm}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{stm})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U}$.

`ef)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: stm Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U}$.

`2.e):` Aus `1.1` "stm Funktion", aus `1.2` "$\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und aus `1.3` "$\mathsf{ran}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U}$" folgt via **21-2**: $\mathsf{stm} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

`3.f):` Aus `2.e)` "$\mathsf{stm} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$" folgt via **93-5(Def)**: stm Algebra in $\mathcal{U}$.

$\square$

298-11. Sind p, q Mengen so gilt $p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$. Diese Gleichung ist auch für $p = \mathcal{U}$ und $q = 0$ richtig. Die Gleichung $p \setminus q = \mathcal{U}$ ist genau dann richtig, wenn $p = \mathcal{U}$ und $q = 0$.

298-11(Satz)

a) *Aus "p, q Menge" folgt "$p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$".*

b) *Aus "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$" folgt "$p\_\mathsf{stm}\_q = \mathcal{U}$".*

c) *"$x^C = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$x = 0$".*

d) *"$x^C = 0$" genau dann, wenn "$x = \mathcal{U}$".*

e) *"$p \setminus q = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$(p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0)$".*

f) *"$p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$"
genau dann, wenn "$(p, q$ Menge$) \vee ((p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0))$".*

`ALG`-**Notation**.

Beweis **298-11** a) `VS` gleich p, q Menge.

1: Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus **298-10**"$\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$.

3: Aus **298-10**"stm Funktion" und
aus 2"$(p, q) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$"
folgt via **18-22**: $((p, q), p\_\mathsf{stm}\_q) \in \mathsf{stm}$.

4: Aus 3"$((p, q), p\_\mathsf{stm}\_q) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-9**: $p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$.

b) `VS` gleich $(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$.

1: Aus `VS` gleich "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$"
folgt via **0-19**: $(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$.

2: Aus **298-9**"stm Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus 1"$(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$"
folgt via **93-13**: $p\_\mathsf{stm}\_q = \mathcal{U}$.

Beweis **298-11** c)

1: Via **3-10** gilt: $(x^C \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (x \neq 0)$.

2: Aus 1
folgt: $(x^C = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

d)

1: Via **3-11** gilt: $(0 \neq x^C) \Leftrightarrow (x \neq \mathcal{U})$.

2: Aus 1
folgt: $(x^C = 0) \Leftrightarrow (x = \mathcal{U})$.

e) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \setminus q = \mathcal{U}$.

1: Via **5-10** gilt: $p \setminus q = p \cap q^C$.

2: Aus 1 und
aus VS folgt: $p \cap q^C = \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$p \cap q^C = \mathcal{U}$"
folgt via **2-18**: $p, q^C = \mathcal{U}$.

4.1: Aus 3
folgt: $\boxed{p = \mathcal{U}}$

4.2: Aus 3"$\ldots q^C = \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\boxed{q = 0}$

e) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q = 0$"
folgt: $p \setminus q = p \setminus 0$.

2: Via **5-11** gilt: $p \setminus 0 = p$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $p \setminus q = p$.

4: Aus 3 und
aus VS gleich "$p = \mathcal{U} \ldots$"
folgt: $p \setminus q = \mathcal{U}$.

Beweis **298-11** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$.

`1:` Es gilt: $(p \setminus q = \mathcal{U}) \vee (p \setminus q \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \setminus q = \mathcal{U}$.

Aus `1.1.Fall` "$p \setminus q = \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0)$.

`1.2.Fall` $p \setminus q \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS`
folgt: $p\_\mathsf{stm}\_q \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus **298-10** "stm Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus `2` "$p\_\mathsf{stm}\_q \neq \mathcal{U}$"
folgt via **93-12**: $p, q \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "$p, q \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: p, q Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(p, q \text{ Menge}) \vee ((p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0))$.

<u>Beweis **298-11**</u> `f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee ((p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee ((p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p, q Menge.

Aus `1.1.Fall` "p, q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$.

`1.2.Fall` $(p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$p = \mathcal{U} \ldots$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: p Unmenge.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$(p = \mathcal{U}) \wedge (q = 0)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \setminus q = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` "p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p\_\mathsf{stm}\_q = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`
folgt: $p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p\_\mathsf{stm}\_q = p \setminus q$.

□

298-12. Sind p, q Mengen, so ist $((p,q), p\Delta q) \in \mathsf{Dlt}$.

298-12(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{Dlt}$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi))$".

b) *Aus* "$(p,q) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi$ *Menge*$) \wedge (p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega\Delta\Phi)$".

c) *Aus* "$((p,q), r) \in \mathsf{Dlt}$" *folgt* "$p, q, r$ *Menge*" *und* "$r = p\Delta q$".

d) *Aus* "p, q *Menge*" *folgt* "$((p,q), p\Delta q) \in \mathsf{Dlt}$".

Beweis **298-12** a) VS gleich $p \in \mathsf{Dlt}$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-1(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : p = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$.

2: Aus 1.2"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$" und
aus 1.1
folgt: $((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$ Menge.

3: Aus 2"$((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

4: Aus 3"(Ω, Φ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω, Φ Menge.

5: Aus 1.2"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 4"Ω, Φ Menge" und
aus 1.2"$\ldots p = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (p = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)).$$

<u>Beweis **298-12**</u> `b)` `VS` gleich $(p, q) \in \mathsf{Dlt}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p, q) \in \mathsf{Dlt}$”
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p, q) \in \mathsf{Dlt}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge ((p, q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi)).$$

`2:` Aus `1.2`“$\ldots (p, q) = ((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi)$” und
aus `1.1`“(p, q) Menge”
folgt via **IGP**: $(p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega \Delta \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`“$\exists \Omega, \Phi : \Omega, \Phi$ Menge...” und
aus `2`“$(p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega \Delta \Phi)$”
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (p = (\Omega, \Phi)) \wedge (q = \Omega \Delta \Phi).$$

<u>Beweis **298-12**</u> `c)` `VS` gleich $((p,q),r) \in \mathsf{Dlt}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((p,q),r) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **ElementAxiom**: $((p,q),r)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((p,q),r) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists \Omega, \Phi : ((p,q) = (\Omega, \Phi)) \wedge (r = \Omega \Delta \Phi).$$

`2:` Aus `1.1`"$((p,q),r)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,q), r$ Menge.

`3.1:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \Phi) \ldots$" und
aus `2`"$(p,q) \ldots$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Phi)$.

`3.2:` Aus `2`"$(p,q) \ldots$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{p, q \text{ Menge}}$

`3.3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{r \text{ Menge}}$

`4:` Aus `3.1`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $p \Delta q = \Omega \Delta q$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`"$\ldots q = \Phi$"
folgt: $p \Delta q = \Omega \Delta \Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.2`"$\ldots r = \Omega \Delta \Phi$"
folgt: $p \Delta q = r$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\boxed{r = p \Delta q}$

<u>Beweis **298-12**</u> `d)` `VS` gleich p, q Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **213-10**: $p\Delta q$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt: $\exists\Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

`2.1:` Aus `1.1`"(p, q) Menge" und
aus `1.2`"$p\Delta q$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, q), p\Delta q)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega = p \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots \Phi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \Omega = p \ldots$"
folgt: $\Omega\Delta\Phi = p\Delta\Phi$.

`3:` Aus `2.3`"$\Omega\Delta\Phi = p\Delta\Phi$" und
aus `1.3`"$\ldots \Phi = q$"
folgt: $\Omega\Delta\Phi = p\Delta q$.

`4:` Aus `2.2`"$(\Omega, \Phi) = (p, q)$" und
aus `3`"$\Omega\Delta\Phi = p\Delta q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi) = ((p, q), p\Delta q)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $((p, q), p\Delta q) = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$.

`6:` Aus `1.3`"$\exists\Omega, \Phi \ldots$",
Aus `5`"$((p, q), p\Delta q) = ((\Omega, \Phi), \Omega\Delta\Phi)$" und
aus `2.1`"$((p, q), p\Delta q)$ Menge"
folgt via **298-1(Def)**: $((p, q), p\Delta q) \in \mathsf{Dlt}$.

$\square$

298-13. Dlt ist eine Algebra in $\mathcal{U}$.

<u>298-13(Satz)</u>

a) Dlt *Relation.*

b) Dlt *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

d) $\mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U}$.

e) $\mathsf{Dlt} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

f) Dlt *Algebra in* $\mathcal{U}$.

<u>Beweis **298-13**</u> a)

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{Dlt}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-12**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = ((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi).$$

3.1: Aus 2 "$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Φ) Menge.

3.2: Aus 2 "$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **213-10**: $\Omega \Delta \Phi$ Menge.

4: Aus 3.1 "(Ω, Φ) Menge" und
aus 3.2 "$\Omega \Delta \Phi$ Menge"
folgt via **6-8**: $((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

5: Aus 2 "$\ldots \alpha = ((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi)$" und
aus 4
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{Dlt}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{Dlt} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: Dlt Relation.

<u>Beweis **298-13**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{Dlt}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha,\beta)\ldots\in\mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-12**:
$$\exists\Omega,\Phi:(\Omega,\Phi\text{ Menge})\wedge(\alpha=(\Omega,\Phi))\wedge(\beta=\Omega\Delta\Phi).$$

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots(\alpha,\gamma)\in\mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-12**:
$$\exists\Psi,\Upsilon:(\Phi,\Upsilon\text{ Menge})\wedge(\alpha=(\Psi,\Upsilon))\wedge(\gamma=\Psi\Delta\Upsilon).$$

`3:` Aus `2.1`"$\ldots\alpha=(\Omega,\Phi)\ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots\alpha=(\Psi,\Upsilon)\ldots$"
folgt: $(\Omega,\Phi)=(\Psi,\Upsilon)$.

`4:` Aus `3`"$(\Omega,\Phi)=(\Psi,\Upsilon)$" und
aus `2.1`"$\ldots\Omega,\Phi$ Menge…"
folgt via **IGP**: $(\Omega=\Psi)\wedge(\Phi=\Upsilon)$.

`5:` Aus `4`"$\Omega=\Psi\ldots$"
folgt: $\Omega\Delta\Phi=\Psi\Delta\Phi$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`"$\ldots\Phi=\Upsilon$"
folgt: $\Omega\Delta\Phi=\Psi\Delta\Upsilon$.

`7:` Aus `2.1`"$\ldots\beta=\Omega\Delta\Phi$" und
aus `6`
folgt: $\beta=\Psi\Delta\Upsilon$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.2`"$\ldots\gamma=\Psi\Delta\Upsilon$"
folgt: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{Dlt})\Rightarrow(\beta=\gamma)}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: Dlt Relation.

`2:` Aus `1.2`"Dlt Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{Dlt})\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: Dlt Funktion.

Beweis **298-13** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom\,Dlt}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom\,Dlt}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom\,Dlt}$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{Dlt}$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-12**:
$$\exists \Phi, \Psi : (\Phi, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Psi)).$$

`4:` Aus `3` "$\ldots \Phi, \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt via **6-8**: $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3` "$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi)$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom\,Dlt}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom\,Dlt} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"

...

Beweis **298-13** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega \Delta \Phi) = ((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega, \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **298-12**: $((\Omega, \Phi), \Omega \Delta \Phi) \in \mathsf{Dlt}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(\alpha, \Omega \Delta \Phi) \in \mathsf{Dlt}$.

`5:` Aus `4`"$(\alpha, \Omega \Delta \Phi) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

<u>Beweis **298-13**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathcal{U}$.
`1.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`1.2:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt:	0 Menge.
`2:` Aus `1.2`“0 Menge” und aus `1.1`“α Menge” folgt via **298-12**:	$((0, \alpha), 0\Delta\alpha) \in \mathsf{Dlt}$.
`3.1:` Aus `2`“$((0, \alpha), 0\Delta\alpha) \in \mathsf{Dlt}$” folgt via **7-5**:	$0\Delta\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt}$.
`3.2:` Via **5-35** gilt:	$0\Delta\alpha = \alpha$.
`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U}$.

`ef)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: Dlt Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U}$.

`2.e):` Aus `1.1`“Dlt Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,\mathsf{Dlt} = \mathcal{U}$”
folgt via **21-2**: $\mathsf{Dlt} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

`3.f):` Aus `2.e)`“$\mathsf{Dlt} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$”
folgt via **93-5(Def)**: Dlt Algebra in $\mathcal{U}$.

□

298-14. Sind p, q Mengen so gilt $p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$. Diese Gleichung ist auch für $p = q^C$ richtig.

298-14(Satz)

a) *Aus "p, q Menge" folgt "$p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$".*

b) *Aus "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$" folgt "$p\_\mathsf{Dlt}\_q = \mathcal{U}$".*

c) *"$x\Delta y = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$((x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (x \cap y = 0))$".*

d) *"$((x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (x \cap y = 0))$"*
genau dann, wenn "$x^C = y$" genau dann, wenn "$y^C = x$".

e) $x\Delta x^C = \mathcal{U}$.

f) $x^C \Delta x = \mathcal{U}$.

g) *"$x\Delta y = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$x^C = y$".*

h) *"$x\Delta y = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$y^C = x$".*

i) *"$p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$"*
genau dann, wenn "$(p, q$ Menge$) \vee ((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0))$".

j) *"$p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$" genau dann, wenn "$(p, q$ Menge$) \vee (p^C = q)$".*

k) *"$p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$" genau dann, wenn "$(p, q$ Menge$) \vee (q^C = p)$".*

l) *"$p\_\mathsf{Dlt}\_p^C = p\Delta p^C = \mathcal{U}$".*

m) *"$p^C\_\mathsf{Dlt}\_p = p^C\Delta p = \mathcal{U}$".*

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **298-14**</u> `a)` `VS` gleich p, q Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus **298-13**"$\mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt}$.

`3:` Aus **298-13**"Dlt Funktion" und
aus `2`"$(p, q) \in \mathsf{dom}\, \mathsf{Dlt}$"
folgt via **18-22**: $((p, q), p\_\mathsf{Dlt}\_q) \in \mathsf{Dlt}$.

`4:` Aus `3`"$((p, q), p\_\mathsf{Dlt}\_q) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-12**: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$.

`b)` `VS` gleich $(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$"
folgt via **0-19**: $(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$.

`2:` Aus **298-12**"Dlt Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus `1`"$(p \notin \mathcal{U}) \vee (q \notin \mathcal{U})$"
folgt via **93-13**: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = \mathcal{U}$.

`c)`

`1:` Via **5-27** gilt: $x\Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x\Delta y = \mathcal{U}) \Leftrightarrow ((x \cup y) \setminus (x \cap y) = \mathcal{U})$.

`3:` Via **298-11** gilt: $((x \cup y) \setminus (x \cap y) = \mathcal{U}) \Leftrightarrow ((x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (x \cap y = 0))$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(x\Delta y = \mathcal{U}) \Leftrightarrow ((x \cup y = 0) \wedge (x \cap y = 0))$.

Beweis **298-14** `d)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (x \cap y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` folgt: $x \cup y = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cap y = 0$"
folgt via **213-14**: $x^C \cap y = y$.

`2:` $x^C \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x^C \cap \mathcal{U} \stackrel{1.1}{=} x^C \cap (x \cup y) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x^C \cap x) \cup (x^C \cap y) \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} 0 \cup (x^C \cap y)$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x^C \cap y \stackrel{1.2}{=} y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x^C = y$.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x^C = y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x^C = y$"
folgt: $(x^C)^C = y^C$.

`2:` Via **3-4** gilt: $(x^C)^C = x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x = y^C$.

`4:` Aus `3`
folgt: $y^C = x$.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $y^C = x$.

`1.1:` $x \cup y \stackrel{\texttt{VS}}{=} y^C \cup y \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} y \cup y^C \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} \mathcal{U}$.

`1.2:` $x \cap y \stackrel{\texttt{VS}}{=} y^C \cap y \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} y \cap y^C \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} 0$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (x \cap y = 0)$.

`ef)`

`1:` $x \Delta x^C \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (x \cup x^C) \setminus (x \cap x^C) \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} \mathcal{U} \setminus (x \cap x^C) \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} \mathcal{U} \setminus 0 \stackrel{\mathbf{5-11}}{=} \mathcal{U}$.

`2.e):` Aus `1`
folgt: $x \Delta x^C = \mathcal{U}$.

`3:` Via **FS**Δ gilt: $x^C \Delta x = x \Delta x^C$.

`4.f):` Aus `3` und
aus `2.e)`
folgt: $x^C \Delta x = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **298-14**</u> `g)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$(x\Delta y=\mathcal{U})\Leftrightarrow((x\cup y=\mathcal{U})\wedge(x\cap y=0)).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$((x\cup y=\mathcal{U})\wedge(x\cap y=0))\Leftrightarrow(x^C=y).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(x\Delta y=\mathcal{U})\Leftrightarrow(x^C=y).$$

`h)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$(x\Delta y=\mathcal{U})\Leftrightarrow((x\cup y=\mathcal{U})\wedge(x\cap y=0)).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$((x\cup y=\mathcal{U})\wedge(x\cap y=0))\Leftrightarrow(y^C=x).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(x\Delta y=\mathcal{U})\Leftrightarrow(y^C=x).$$

`i)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $p\_\mathsf{Dlt}\_q=p\Delta q.$

`1:` Es gilt: $(p\Delta q=\mathcal{U})\vee(p\Delta q\neq\mathcal{U}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p\Delta q=\mathcal{U}.$

Aus `1.1.Fall` "$p\Delta q=\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $((p\cup q=\mathcal{U})\wedge(p\cap q=0)).$

`1.2.Fall` $p\Delta q\neq\mathcal{U}.$

`2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS`
folgt: $p\_\mathsf{Dlt}\_q\neq\mathcal{U}.$

`3:` Aus **298-13** "Dlt Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus 2 "$p\_\mathsf{Dlt}\_q\neq\mathcal{U}$"
folgt via **93-12**: $p,q\in\mathcal{U}.$

`4:` Aus 3 "$p,q\in\mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: p,q Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(p,q\text{ Menge})\vee((p\cup q=\mathcal{U})\wedge(p\cap q=0)).$$

Beweis **298-14** `i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee ((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee ((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p, q Menge.

Aus `1.1.Fall` "p, q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$.

`1.2.Fall` $(p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$p \cup q = \mathcal{U} \ldots$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: $p \cup q$ Unmenge.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$(p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $p\Delta q = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` "$p \cup q$ Unmenge"
folgt via **2-8**: $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`4:` Aus `3` "$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` und
aus `2.2`
folgt: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q$.

`j)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt:
$$(p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee ((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0))).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0)) \Leftrightarrow (p^C = q).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee (p^C = q))$.

<u>Beweis **298-14**</u> `k)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt:
$$(p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee ((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0))).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$((p \cup q = \mathcal{U}) \wedge (p \cap q = 0)) \Leftrightarrow (q^C = p).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $$(p\_\mathsf{Dlt}\_q = p\Delta q) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee (q^C = p)).$$

`l)`

`1:` Aus "$p^C = p^C$"

folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\boxed{p\_\mathsf{Dlt}\_p^C = p\Delta p^C}$

`2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\boxed{p\Delta p^C = \mathcal{U}}$

`m)`

`1:` Aus "$p^C = p^C$"

folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\boxed{p^C\_\mathsf{Dlt}\_p = p^C\Delta p}$

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\boxed{p^C\Delta p = \mathcal{U}}$

□

Mengenlehre: x injektiv auf E.

Ersterstellung: 23/06/14 **Letzte Änderung: 23/06/14**

299-1. Klassen können, müssen aber nicht injektiv sein. Es kommt vor, dass Klassen nur "lokal injektiv" sind. Präziser gesagt kann es vorkommen, dass eine Klasse injektiv "auf E" ist.

299-1(Definition)

"x **injektiv auf** E" genau dann, wenn

$$\text{“}\forall\alpha,\beta,\gamma : (((\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in x)\wedge(\alpha,\gamma\in E))\Rightarrow(\alpha=\gamma)\text{”}.$$

299-2. Ist x injektiv auf E und gilt $e \subseteq E$, so ist x inektiv auf e. Ist x injektiv, so ist x injektiv auf E. $\mathsf{dom}\, x$ kommt bei der Untersuchung der Injektivität besondere Bedeutung zu.

299-2(Satz)

a) *Aus "x injektiv auf E" und "$e \subseteq E$" folgt "x injektiv auf e".*

b) *Aus "x injektiv" folgt "x injektiv auf E".*

c) *Aus "x injektiv auf E" und "$\mathsf{dom}\, x \subseteq E$" folgt "$x$ injektiv".*

d) *"x injektiv" genau dann, wenn "x injektiv auf $\mathsf{dom}\, x$".*

Beweis **299-2** a) VS gleich $(x \text{ injektiv auf } E) \wedge (e \subseteq E)$.

Thema1 $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in e)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots \alpha, \gamma \in e$" und
aus VS gleich "$\ldots e \subseteq E$"
folgt via **0-4**: $\alpha, \gamma \in E$.

3: Aus Thema1"$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x \ldots$",
aus 2"$\alpha, \gamma \in E$" und
aus VS gleich "x injektiv auf $E \ldots$"
folgt via **299-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in e) \wedge (\alpha, \gamma \in e)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: x injektiv auf e.

b) VS gleich x injektiv.

Thema1 $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)$.
Aus Thema1"$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x \ldots$" und
aus VS gleich "x injektiv"
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: x injektiv auf E.

<u>Beweis **299-2**</u> `c)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv auf } E) \wedge (\mathsf{dom}\, x \subseteq E)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x$.
`2.1:` Aus `VS` gleich "$(\alpha, \beta) \ldots \in x \ldots$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.
`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (\gamma, \beta) \in x \ldots$" folgt via **7-5**:	$\gamma \in \mathsf{dom}\, x$.
`3.1:` Aus `2.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$" und aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, x \subseteq E$" folgt via **0-4**:	$\alpha \in E$.
`3.2:` Aus `2.2`"$\gamma \in \mathsf{dom}\, x$" und aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, x \subseteq E$" folgt via **0-4**:	$\gamma \in E$.
`4:` Aus `Thema1`"$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x$", aus `3.1`"$\alpha \in E$", aus `3.2`"$\gamma \in E$" und aus `VS` gleich "$x$ injektiv auf $E \ldots$" folgt via **299-1(Def)**:	$\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: x injektiv.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich x injektiv.

Aus `VS` gleich "x injektiv"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: x injektiv auf $\mathsf{dom}\, x$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x injektiv auf $\mathsf{dom}\, x$.

`1:` Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv auf $\mathsf{dom}\, x$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: x injektiv.

□

299-3. Ist x auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$ injektiv, so ist x auf E injektiv.

299-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *x injektiv auf E.*

`ii)` *x injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$.*

<u>Beweis **299-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x injektiv auf E.

`1:` Via **2-7** gilt: $E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq E$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv auf E" und
aus `1` "$E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq E$"
folgt via **299-2**: x injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$(\alpha, \beta) \ldots \in x \ldots$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (\gamma, \beta) \in x \ldots$"
folgt via **7-5**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, x$.

`3.1:` Aus `Thema1` "$\ldots \alpha \ldots \in E$" und
aus `2.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`3.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \gamma \in E$" und
aus `2.2` "$\gamma \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\gamma \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `VS` gleich "$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x \ldots$",
aus `3.1` "$\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x$",
aus `3.2` "$\gamma \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "x injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **299-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: x injektiv auf E.

□

299-4. Ist x injektiv auf E, so ist auch jede TeilKlasse von x injektiv auf E.

299-4(Satz)

a) *Aus "x injektiv auf E" und "$y \subseteq x$" folgt "y injektiv auf E".*

b) *Aus "x injektiv auf E" und "$y \subseteq x$" und "$e \subseteq E$" folgt "y injektiv auf e".*

Beweis **299-4** `a)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv auf } E) \wedge (y \subseteq x)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in y) \wedge (\alpha, \gamma \in E)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \ldots \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x$.

`3:` Aus 2"$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x$",
aus `VS` gleich "$\ldots \alpha, \gamma \in E$" und
aus `VS` gleich "x injektiv auf $E \ldots$"
folgt via **299-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in y) \wedge (\alpha, \gamma \in E)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: y injektiv auf E.

`b)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv auf } E) \wedge (y \subseteq x) \wedge (e \subseteq E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \text{ injektiv auf } E) \wedge (y \subseteq x) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: y injektiv auf E.

`2:` Aus `1`"y injektiv auf E" und
aus `VS` gleich "$\ldots e \subseteq E$"
folgt via **299-2**: y injektiv auf e.

$\square$

299-5. Als Intermezzo wird "$(p, q) \in (x \downharpoonleft E)$" debattiert.

299-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p, q) \in (x \downharpoonleft E)$.

`iii)` *"$(p, q) \in x$" und "$p \in E$".*

Beweis **299-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p, q) \in (x \downharpoonleft E)$.

`1:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in (x \downharpoonleft E)$" und
aus `1` "$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E"
folgt via **15-5**: $((p, q) \in x) \wedge (p \in E)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $((p, q) \in x) \wedge (p \in E)$.

`1:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1` "$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E" und
aus `VS` gleich "$((p, q) \in x) \wedge (p \in E)$"
folgt via **15-5**: $(p, q) \in (x \downharpoonleft E)$.

□

299-6. x ist genau dann injektiv auf E, wenn $(x \downharpoonleft E)$ injektiv ist.

<u>299-6(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *x injektiv auf E.*

`ii)` *$(x \downharpoonleft E)$ injektiv.*

<u>Beweis **299-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x injektiv auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x injektiv auf E"
folgt via **299-3**: x injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`1.2:` Via **261-1** gilt: $(x \downharpoonleft E) \subseteq x$.

`2.1:` Aus `1.1`"x injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `1.2`"$(x \downharpoonleft E) \subseteq x$"
folgt via **299-4**: $(x \downharpoonleft E)$ injektiv auf $E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`2.2:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \downharpoonleft E)$ injektiv auf $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E)$.

`4:` Aus `3`"$(x \downharpoonleft E)$ injektiv auf $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E)$"
folgt via **299-2**: $(x \downharpoonleft E)$ injektiv.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \downharpoonleft E)$ injektiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)$.

`2:` Aus `Thema1`"$((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)$"
folgt via **299-5**: $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in (x \downharpoonleft E)$.

`3:` Aus `2`"$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in (x \downharpoonleft E)$" und
aus `VS` gleich "$(x \downharpoonleft E)$ injektiv"
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x) \wedge (\alpha, \gamma \in E)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: x injektiv auf E.

□

299-7. In einem Zwischenspiel wird über $(f \downharpoonleft E)$ für Funktionen f nachgedacht.

299-7(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$(f \downharpoonleft E) : E \cap \mathsf{dom}\, f \to f[E]$" und "$(f \downharpoonleft E) : E \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$".

Beweis **299-7** `VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion" folgt via **258-11**: $(f \downharpoonleft E)$ Funktion.

`1.2:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(f \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\, f$.

`1.3:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(f \downharpoonleft E) = f[E]$.

`2:` Aus `1.1`"$(f \downharpoonleft E)$ Funktion", aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(f \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\, f$" und aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(f \downharpoonleft E) = f[E]$" folgt via **21-2**: $\boxed{(f \downharpoonleft E) : E \cap \mathsf{dom}\, f \to f[E]}$

`3:` Via **8-10** gilt: $f[E] \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `2`"$(f \downharpoonleft E) : E \cap \mathsf{dom}\, f \to f[E]$" und aus `3`"$f[E] \subseteq \mathsf{ran}\, f$" folgt via **21-5**: $\boxed{(f \downharpoonleft E) : E \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f}$

□

299-8. Mit Hilfe von Funktionen, die auf E injektiv sind, lassen sich unter Umständen Klassen als Unmengen erkennen.

299-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *injektiv auf* E.

$\rightarrow$) $x \subseteq E \cap \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) x *Unmenge.*

Dann folgt "$f[x]$ *Unmenge*".

<u>Beweis **299-8**</u>

`1.1:` Aus →) “f Funktion”
folgt via **299-7**: $(f \restriction x) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to f[x]$.

`1.2:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{ran}\ (f \restriction x) = f[x]$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $E \cap \mathsf{dom}\, f \subseteq E, \mathsf{dom}\, f$.

`2.1:` Aus →) “$x \subseteq E \cap \mathsf{dom}\, f$” und
aus `1.3` “$E \cap \mathsf{dom}\, f \subseteq E \ldots$”
folgt via **0-6**: $x \subseteq E$.

`2.2:` Aus →) “$x \subseteq E \cap \mathsf{dom}\, f$” und
aus `1.3` “$E \cap \mathsf{dom}\, f \subseteq \ldots \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3.1:` Aus →) “f injektiv auf E” und
aus `2.1` “$x \subseteq E$”
folgt via **299-2**: f injektiv auf x.

`3.2:` Aus `2.2` “$x \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **2-10**: $x \cap \mathsf{dom}\, f = x$.

`4.1:` Aus `3.1` “f injektiv auf x”
folgt via **299-6**: $(f \restriction x)$ injektiv.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus →) “x Unmenge”
folgt: $x \cap \mathsf{dom}\, f$ Unmenge.

`5:` Aus `1.1` “$(f \restriction x) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to f[x]$”,
aus `1.2` “$\mathsf{ran}\ (f \restriction x) = f[x]$” und
aus `4` “$(f \restriction x)$ injektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $(f \restriction x) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to f[x]$ bijektiv.

`6:` Aus `5` “$(f \restriction x) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to f[x]$ bijektiv” und
aus `4.2` “$x \cap \mathsf{dom}\, f$ Unmenge”
folgt via **26-8**: $f[x]$ Unmenge.

□

299-9. Ist die Funktion f auf $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$ injektiv und ist E eine Unmenge, so ist auch $f[E]$ eine Unmenge.

299-9(Satz)

Es gelte:

→) *f Funktion.*

→) *f injektiv auf E.*

→) $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

→) *E Unmenge.*

Dann folgt "$f[E]$ Unmenge".

Beweis **299-9**

1: Aus →) "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{dom}\, f = E$.

2: Aus 1 "$E \cap \mathsf{dom}\, f = E$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq E \cap \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus →) "f Funktion",
aus →) "f injektiv auf E",
aus 2 "$E \subseteq E \cap \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "E Unmenge"
folgt via **299-8**: $f[E]$ Unmenge.

□

- **C. Bandelow**, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **H.B. Mann & D.R. Whitney**, *On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947).
- **R. Mlitz**, *Analysis 1.2.3*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt*. Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.